

∞ Corrigé du baccalauréat S Liban mai 2012 ∞

**Exercice 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats.**

**Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0, \text{ car somme de nombres positifs sur } ]0; +\infty[$$

La fonction  $g$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Tableau de variations :

$x$	0	$\alpha$			$+\infty$
$g'(x)$			+		
$g(x)$			0	↗	$+\infty$

$-\infty$  ————  $0$  ————  $+\infty$

2. La fonction  $g$  est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $] -\infty; +\infty[$ .

Or  $0 \in ] -\infty; +\infty[$ ,  $0$  possède donc un unique antécédent, que l'on notera  $\alpha$ . Nous avons donc  $g(\alpha) = 0$ .

De plus,

$$\begin{cases} g(0,86) \simeq -0,0295 < 0 \\ g(0,87) \simeq +0,0385 > 0 \end{cases} \implies g(0,86) < g(\alpha) = 0 < g(0,87) \iff \boxed{0,86 < \alpha < 0,87}$$

3. Signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$$\begin{cases} 0 < x < \alpha \implies g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \implies g(x) > g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan, muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. • Limite de la fonction  $f$  en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (puissances comparées)}$$

2. La courbe  $\mathcal{C}$  admet pour asymptote oblique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ .

En effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

- Le signe de  $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$  est celui de  $-\ln x$ , car  $x^2 > 0$  :
- Position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$  :
  - Sur  $]0; 1[$ ,  $-\ln x > 0$ ,  $\mathcal{C}$  est au dessus de  $\Delta$ ,
  - sur  $]1; +\infty[$ ,  $-\ln x < 0$ ,  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $\Delta$ ,
  - $\mathcal{C}$  et  $\Delta$  ont un point commun  $A(1, 2)$ .

3. Dérivée  $f'(x)$  de  $f$  :

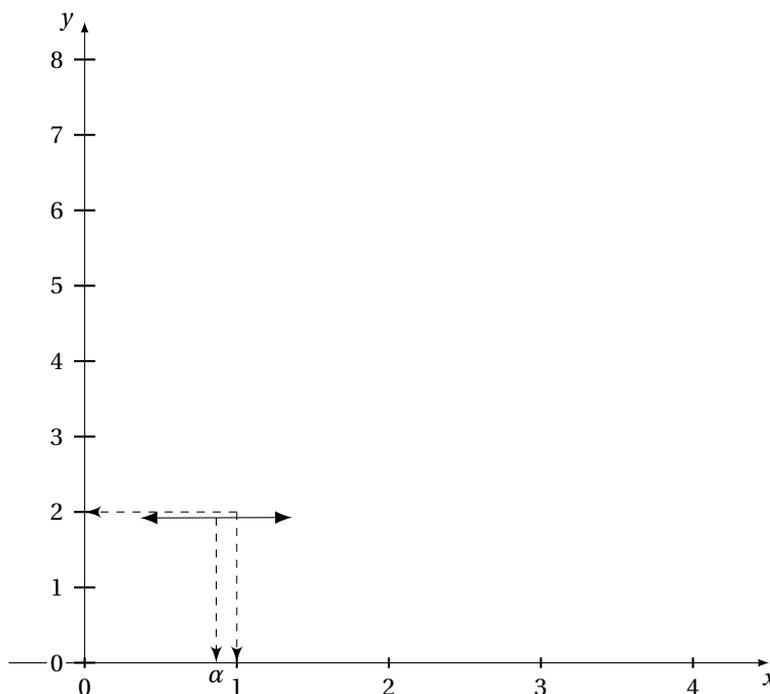
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x^2} - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

$f'(x)$  a même signe que  $g(x)$  car  $x^3$  est strictement positif sur  $]0; +\infty[$ .

4. Tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	0		$\alpha$	1		$+\infty$
$f'(x)$			-	+		
$f(x)$		$+\infty$		$f(\alpha)$	2	$+\infty$

5. Figure :



### Partie C

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  du plan compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$ .

1. Cette aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , est donnée par (u.a; (unité d'aire)= $2\text{cm}^2$ ) :

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

car l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  du plan compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$  est :

$$\int_1^n \left( 2x - \left( 2x - \frac{\ln x}{x^2} \right) \right) dx \times \text{u.a.} = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \times \text{u.a.} = 2 \times \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = I_n$$

- 2(a) Calcul de l'intégrale  $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$  à l'aide d'une intégration par parties :

On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & ; & \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{x^2} & ; & \quad v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^n = \frac{n-1-\ln n}{n}$$

(b) Ainsi :

$$I_n = 2 \frac{n-1-\ln n}{n} = 2 - \frac{2}{n} - \frac{2 \ln n}{n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{n} = 0$$

## Exercice n° 2

4 points

Commun à tous les candidats.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = 6+2t \\ z = 4-t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8+5t' \\ y = 2-2t' \\ z = 6+t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

On cherche le point d'intersection éventuel  $M(x; y; z)$  de ces deux droites :

$$\begin{cases} x = 4+t = 8+5t' \\ y = 6+2t = 2-2t' \\ z = 4-t = 6+t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-5t' = 4 \\ 2t+2t' = -4 \\ -t-t' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-5t' = 4 \\ t+t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t' = -6 \\ t+t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Les deux droites ont donc comme point commun  $M(4-1; 6-2; 4+1) = (3; 4; 5)$ .

**Affirmation : les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont coplanaires.**

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(12; 7; -13)$  et  $B(3; 1; 2)$  ainsi que le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $3x+2y-5z=1$ .

Le point  $B(3; 1; 2)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ , car  $3 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 2 = 1$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$  est colinéaire à un vecteur normal du plan :  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$  :  $\overrightarrow{AB} = -3\vec{n}$ .

**Affirmation : le point  $B$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .**

3. On considère les suites  $u$  et  $v$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} - 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times 1}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} - 2 = -1 \neq 0$$

**Affirmation : ces deux suites ne sont pas adjacentes.**

4. On considère la suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démonstration par récurrence :

- $u_0 = 1 < 3$
- Supposons que pour tout  $n$ , on ait :  $u_n \leq 3$

$$u_n \leq 3 \implies \frac{1}{3}u_n \leq 1 \implies u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \leq 3$$

- Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq 3$

**Affirmation : cette suite est majorée par 3.**

### Exercice n° 3

5 points

Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

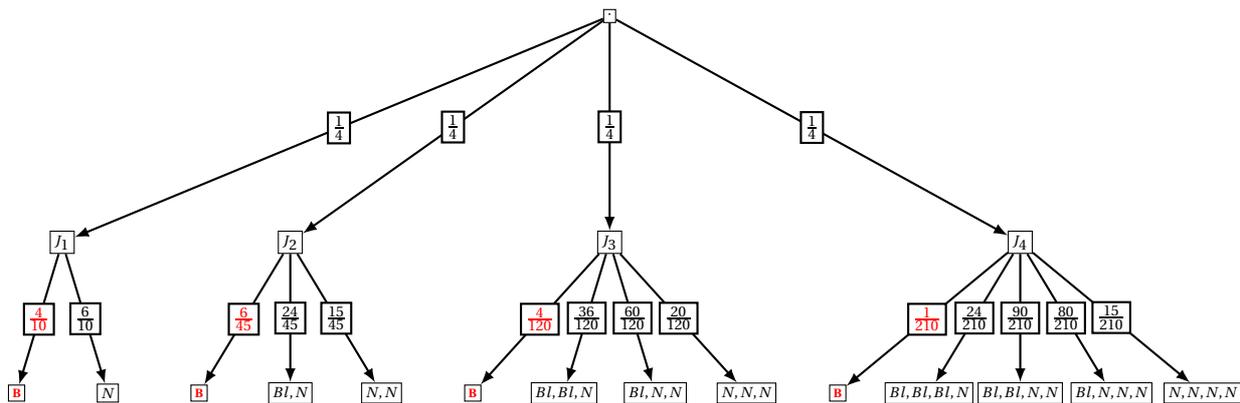
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne  $U_1$ , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne  $U_2$  le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

- $J_1$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 1 »
- $J_2$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 2 »
- $J_3$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 3 »
- $J_4$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 4 »
- $B$  « toutes les boules tirées de l'urne  $U_2$  sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à  $10^{-2}$  suffit.

Arbre complet, mais non demandé.



1. Probabilité de l'évènement  $B$  sachant que l'évènement  $J_1$  est réalisé :

$$P_{J_1}(B) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De même la probabilité  $P_{J_2}(B)$  est :

$$P_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Et :

$$P_{J_3}(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

2. Calcul de  $P(B)$ , probabilité de l'évènement  $B$  :

$$P(B) = P(B \cap J_1) + P(B \cap J_2) + P(B \cap J_3) + P(B \cap J_4) =$$

$$P_{J_1}(B) \times P(J_1) + P_{J_2}(B) \times P(J_2) + P_{J_3}(B) \times P(J_3) + P_{J_4}(B) \times P(J_4) =$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{210} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left( \frac{84+28+7+1}{210} \right) = \frac{1}{7}$$

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. La probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 correspond à  $P_B(J_3)$

$$P_B(J_3) = \frac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \frac{P_{J_3}(B) \times P(J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$$

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note  $N$  la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

- (a) La loi suivie par la variable aléatoire  $N$  est une loi binomiale de paramètre

$$n = 10 \text{ et } p = P(B) = \frac{1}{7}.$$

- (b) Probabilité de l'évènement ( $N = 3$ ) :

$$P(N = 3) = \binom{10}{3} \left( \frac{1}{7} \right)^3 \left( \frac{6}{7} \right)^7 = 120 \times \frac{6^7}{7^{10}} \approx 0,12$$

## Exercice n° 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

### 1. Un triangle

- (a) On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 3 + i\sqrt{3}$  et  $c = 2i\sqrt{3}$ .

Mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$  :

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \text{Arg} \left( \frac{a-b}{c-b} \right) = \text{Arg} \left( \frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} \right) = \text{Arg} \left( \frac{(1+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} \right) = \text{Arg} \frac{\sqrt{3}}{3} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$$

2.  $ABC$  est donc un triangle rectangle en  $B$ . Le centre du cercle circonscrit à ce triangle est donc le milieu  $\Omega$  de l'hypoténuse  $[AC]$ . Ainsi :

$$\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

### Une transformation du plan

On note  $(z_n)$  la suite de nombres complexes, de terme initiale  $z_0 = 0$ , et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Calculs des affixes des points  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2 = a & ; & \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = 3+i\sqrt{3} = b \\ z_3 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = 2+2i\sqrt{3} & ; & \quad z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = 2i\sqrt{3} = c \end{aligned}$$

On remarque que :  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$  et  $A_4 = C$ .

2. Longueurs des segments  $[A_1A_2]$ ,  $[A_2A_3]$  et  $[A_3A_4]$  :

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= |b-a| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 & ; & \quad A_2A_3 = |2+2i\sqrt{3} - (3+i\sqrt{3})| = |-1+i\sqrt{3}| = 2 \\ A_3A_4 &= |2i\sqrt{3} - (2+2i\sqrt{3})| = 2 \end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} z_{n+1} - \omega &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3} \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left( z_n + \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} \right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left( z_n + 2 \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega) \end{aligned}$$

4. Le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  :

$$z_{n+1} - \omega = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z_n - \omega) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_n - \omega)$$

5. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $A_{n+6} = A_n$ . Déterminer l'affixe du point  $A_{2012}$ .

La composée de deux rotations de même centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  et  $\beta$  donne une rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha + \beta$ .

Donc, si l'on compose six fois la même rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  à un point, on obtient la rotation de même centre et d'angle  $6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$ , c'est-à-dire l'identité.

Affixe du point  $A_{2012}$  est  $b = 3 + i\sqrt{3}$  :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & & & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & & & & & \\ 2 & & & & & & \end{array} \iff 2012 = 6 \times 335 + 2 \implies A_{2012} = A_2 = B$$

Le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est un triangle équilatéral (isocèle de sommet  $\Omega$  et d'angle au sommet  $\frac{\pi}{3}$ ). Ainsi la longueur du segment  $[A_n A_{n+1}]$  est la même que celle du segment  $[\Omega A_n]$ .

Comme  $A_n$  est l'image de  $A_0$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $n \times \frac{\pi}{3}$ , on a

$$\Omega A_n = \Omega A_0 = |0 - 1 - i\sqrt{3}| = 2$$

**Exercice n° 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  
On note  $z_n$  la suite de nombres complexes, de terme initiale  $z_0 = 0$ , et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Calculs des affixes des points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .

$$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 + 1 = 1; \quad z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 + 1 = \frac{3+i}{2}; \quad z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 + 1 = \frac{3+2i}{2}$$

1. Le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une similitude directe  $s$  :  
 $z_{n+1}$  est de la forme  $az_n + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes ( $a \neq 0$ ). Donc,  $A_{n+1}$  est l'image de  $A_n$  par une similitude directe  $s$ .

- Son rapport est :  $k = |a| = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- son angle est  $\theta = \text{Arg} \left( \frac{1+i}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ; (parties réelle et imaginaire égales)
- son centre est le point fixe de la transformation ( $s(\omega) = \omega$ ) :

$$\omega = \frac{1+i}{2} \omega + 1 \iff \omega \left( 1 - \frac{1+i}{2} \right) = 1 \iff \omega \left( \frac{1-i}{2} \right) = 1 \iff \omega = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

2. Le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est isocèle rectangle :

Une similitude directe conserve les angles orientés,  $\Omega$  est invariant, donc :

$$\left( \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}} \right) = \left( \overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_{n-1} A_n} \right) = \dots = \left( \overrightarrow{\Omega A_1}; \overrightarrow{A_0 A_1} \right)$$

Or

$$\left( \overrightarrow{\Omega A_1}; \overrightarrow{A_0 A_1} \right) = \text{Arg} \left( \frac{z_1 - z_0}{z_1 - \omega} \right) = \text{Arg} \left( \frac{1}{-i} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est donc rectangle. De plus

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est donc rectangle isocèle.

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$  :

Le rapport de  $s$  est  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ce qui signifie que  $\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega A_n$ .

La suite de terme général  $\Omega A_n$  est une suite géométrique

- de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- et de premier terme  $\Omega A_0 = |\omega| = |1 + i| = \sqrt{2}$ .

Ainsi :

$$\Omega A_n = \Omega A_0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

2. À partir de  $n = 21$  les points  $A_n$  sont situés à l'intérieur du disque de centre  $\Omega$  et de rayon 0,001 :

$$\Omega A_n \leq 0,001 \iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \leq 0,001 \iff (n-1) \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \ln(0,001) \iff n \geq 1 + \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \simeq 20,9$$

Il y a changement de sens de l'inégalité car on divise de chaque côté par  $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  qui est négatif.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la longueur  $A_n A_{n+1}$  et  $L_n$  la somme  $\sum_{k=0}^n a_k$ .

$L_n$  est ainsi la longueur de la ligne polygonale  $A_0 A_1 \cdots A_n A_{n+1}$ .

- Calcul de  $L_n$  :  
Comme le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est rectangle isocèle en  $A_{n+1}$ , on a

$$a_n = A_n A_{n+1} = \Omega A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Ainsi :

$$L_n = \sum_{i=0}^n a_i = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

- Limite de  $L_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :

Nous avons  $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ .

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , les points  $A_n$ ,  $\Omega$  et  $A_{n+4}$  sont alignés :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+4}}) &= (\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) + (\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+2}}) + (\overrightarrow{\Omega A_{n+2}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+3}}) + (\overrightarrow{\Omega A_{n+3}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+4}}) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$