BAC BLANC RÉGIONAL **COEFFICIENT : 5**
SESSION 2025 **DURÉE : 4 H**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées : 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Si f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 4, alors $f o f$ est une similitude directe d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport 8.
2	Toute suite bornée est convergente.
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0.$
4	Soit (D) une droite et K un point n'appartenant pas à (D). La composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la rotation de centre K et d'angle non nul est une symétrie glissée.

EXERCICE 2 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir l'affirmation correcte.

N°	Énoncés	Réponses	
1	Le reste de la division euclidienne de 5^{58} par 13 est :	**A**	1
		B	5
		C	8
		D	12
2	(D) et (L) sont deux droites de l'espace de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + k, \\ z = 2 - k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$. Les droites (D) et (L) sont …	**A**	parallèles
		B	sécantes
		C	non coplanaires
		D	orthogonales
3	On donne les points $A(2; 1; -3)$, $B(-1; 1; 5)$ et le plan (π) d'équation cartésienne : $3x - y + 4z - 16 = 0$. La droite (AB) est …	**A**	incluse dans le plan (π)
		B	parallèle au plan (π)
		C	sécante au plan (π)
		D	orthogonale au plan (π)
4	Soit g une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$. Si $\forall x \in [0; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors : $|g(3) - g(1)| \leq \cdots$	**A**	-2
		B	-1
		C	0
		D	1

EXERCICE 3 **(2,75 points)**

Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :
$\gamma = n^3 - n^2 - 12n$ et $\theta = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Démontre que γ et θ sont des nombres entiers naturels divisibles par $n-4$.
2. On pose : $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.
   a) Établis une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontre que d est un diviseur de 5.
   c) Démontre que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3. Justifie que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4. a) Détermine, en fonction de n, le PGCD de γ et θ, suivant les valeurs de n.
   b) Vérifie les résultats obtenus dans les cas particuliers suivants : $n = 21$ et $n = 22$.

EXERCICE 4 **(2,75 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, iz^2 + e^{2i\theta}z + i(1 + e^{2i\theta}) = 0$ $\left(où\ \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.
   a) Justifie que : $\left(e^{2i\theta} + 2\right)^2 = e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 4$.
   b) Résous l'équation (E).
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_D = i(1 + e^{2i\theta})$.
   a) Place le point A, puis construis les points B et C dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Écris z_D sous forme trigonométrique.
3. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, -1), (B, 2)$ et $(C, 2)$.
   a) Calcule l'affixe du point G.
   b) Calcule GA^2, GB^2 et GC^2.
   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan vérifiant :
   $-MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = 3$.

EXERCICE 5 **(5,5 points)**

Partie A

On considère les fonctions g et f dérivables sur $]0\,;\ +\infty[$ et définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}, si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}), si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé(O, I, J). (*Unité graphique* : 4 *cm*).

1. a) Démontre que g est continue en 0.
   b) Démontre que g est dérivable en 0 et que :$g'(0) = -\frac{1}{2}$.
   (On admettra que: pour $x > 0$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} \leq \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$)
2. a) Étudie la continuité de f en 0.

b) Calcule la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

3. a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x+1-(x+1)e^x)$.

   b) Sachant que pour $x > 0,\ x+1 < e^x$, justifie que : pour $x > 0, f'(x) < 0$.

   c) Démontre que : pour $x \geq 0, f(x) = 2g(2x) - g(x)$.

   d) Déduis des questions 3.c) et 1.b) que la fonction f est dérivable en 0 et calcule $f'(0)$.

4. a) Dresse le tableau de variation de f.

   b) Déduis-en que : $\forall x \in [0;+\infty[, f(x) > 0$.

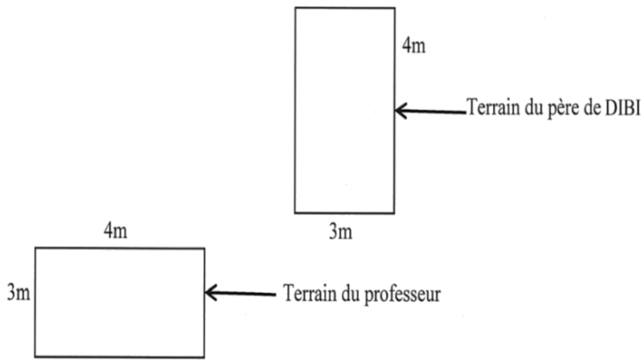
Partie B

Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et (C') sa courbe représentative dans le repère (O,I,J) . (Tu ne chercheras pas à calculer cette intégrale).

1. Étudie le sens de variation de F.
2. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.
   a) Déduis de la question 3.c) de la partie A que : $\forall x \in [0;+\infty[, F(x) = G(2x) - G(x)$.
   b) Démontre que : $\forall x \in [0;+\infty[, F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt$.
   c) Justifie que : $\forall t \in [1;+\infty[, 0 \leq \frac{1}{t} - g(t) \leq e^{-t}$.
   d) Déduis-en que : $\forall x \in [1;+\infty[, 0 \leq ln2 - F(x) \leq e^{-x}$.
   e) Détermine la limite de F en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.
3. Dresse le tableau de variation de F.
4. Donne l'allure générale de la courbe représentative (C') de F.

EXERCICE 6 (5 points)

Un élève d'une classe de terminale C se rend chez son professeur de Mathématiques.
Il remarque que la piscine de ce dernier a une forme géométrique particulière et est construite sur un terrain rectangulaire de 4 m sur 3 m. Cet élève veut savoir si son père peut construire la même piscine sur un terrain rectangulaire de mêmes dimensions mais dont le plan est perpendiculaire au plan de la piscine du professeur comme l'indique le schéma ci-contre.



Le professeur lui dit que :

- la piscine est construite dans le plan du sol muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ et que le bord de la piscine peut être modélisé par l'ensemble (F) des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation : $x^2 + 2y^2 + 2x - 3 = 0$;
- son père pourra construire la même piscine sur son terrain si le bord de la piscine est l'image de (F) par l'isométrie R d'écriture complexe : $z' = -iz + 2i$.

Le professeur de mathématiques demande à l'élève de déterminer l'ensemble (F) et de vérifier si la piscine de son père peut se réaliser sur l'espace réservé.
Ne sachant pas comment s'y prendre, il te soumet le projet et te demande de l'aider afin de rassurer son père que la piscine peut se construire sur l'espace réservé.
À l'aide d'une production argumentée, rédige la réponse que tu donneras à cet élève.