SERIE : LIMITES-CONTINUITE-DERIVATION-PRIMITIVES-ETUDE DE FONCTIONS

Exercice :1

1-Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$; $b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} cos(\frac{2\pi x-1}{3x-2})$; $c)$ $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}$

2-Utiliser les théorèmes de comparaison pour calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0} xsin(\frac{1}{x})$; $b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+sinx}{3+cosx}$; $c)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+cosx}{2+sinx}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+sinx}{x-1}$

Exercice2: La fonction f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

1-Donner en utilisant le tableau les limites suivantes

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-1+\frac{1}{x})$; $c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{f(x)+3}$

2-Déterminer le nombre de solutions dans D_f de l'équation $f(x)=5$.

3-Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha>0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4-Dans cette question, on suppose que f est dérivable en tout point de D_f.

a) Préciser le nombre dérivé de f en -1 en le justifiant clairement.

b) Dresser le tableau de signe de f'dérivé de f.

5-On suppose maintenant que le point d'abscisse -1 est un point anguleux de la courbe représentative de f a deux demi-tangentes non verticales et non horizontales.

a) Préciser le signe des nombres dérivés de f à gauche et à droite en -1.

b) Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

6) Soit g une fonction dérivable surD_f telle que $g'(x)=\frac{(x+2)f(x)}{x^3}$ .Etudier le signe de $g'(x)$.

Exercice 3

$f(x) = x^3 - 3x + 8$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. Déterminer les images par f des intervalles $[-3\,;-2]$;$]-1;0]$ et $[1;+\infty[$

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans$]-\infty\,;-1[$ puis justifier queα est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

4. Vérifier que $-3<\alpha<-2$ puis donner un encadrement de α à $10-1$ près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

6.Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^3-8x+25}{x}$; montrer que $g(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha}$.

Exercice :4 on donne $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{|x^2-4|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1.Ecrire f(x) sans les symboles de la valeur absolue.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \,\epsilon \left[1;\frac{3}{2}\right]$

3.Montrer que si $x \,\epsilon \left[1\,;\frac{3}{2}\right]$ alors $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$. En déduire que si $x \,\epsilon \left[1\,;\frac{3}{2}\right]$

a**.** Préciser le signe des nombres dérivés de f à gauche et à droite en -1.

b**.** Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique.

Exercice : 5

I-Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$

1-Montrer que f admet une primitive de F sur $\mathbb{R}$ de la forme $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$ ou a et b sont des réels à déterminer.

2-En déduire la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

3-Trouver tous les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

II-Dans chacun des cas suivants , déterminer les primitives sur l'intervalle I de la fonction f.

1) $f(x) = sinxcos^3x \quad I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \frac{sinx}{\sqrt{1+cos^3x}} \quad I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$;

3) $f(x) = sin^3x \times cos^2x \quad I = \mathbb{R}$; 4) $f(x) = \tan x + tan^3x \quad I = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

5) $f(x) = \frac{x^2+x^2+2x+1}{x^3(x+1)^2} \quad I = [0\,;+\infty[$ (Indication décompose $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$)

III- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^7}$

1) Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = xcosx$ et $g(x) = xsinx$

Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

IV-Soit $f(x) = cos^4x$

Démontrer que $f(x) = \frac{cos4x}{8} + \frac{cos2x}{2} + \frac{3}{8}$. En déduire la primitive F de f telle que F($\frac{\pi}{2}$) = 0

<u>Problème </u>1 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)\begin{cases} \frac{x^2-x}{x-2} & si\ x < 0 \\ x\sqrt{|x-3|} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1-Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2-Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 3. Interpréter les résultats.

4-a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.

b) Calculer $f'(x)$ dans chaque intervalle et en déduire les variations de f.

5) Soit g la restriction de f sur $]-\infty\ ; 0[$ .Montrer que g est une bijection de $]-\infty\ ; 0[$ sur un intervalle J à préciser.

<u>Problème </u>2 Soit f la fonction dont la courbe (Cf) est donnée (voir figure)

<u>Partie A</u>

1.a.Donner le domaine de définition Df de f puis les limites aux bornes de Df.

b. Donner les équations des asymptotes de (Cf).

c. Donner le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de f.

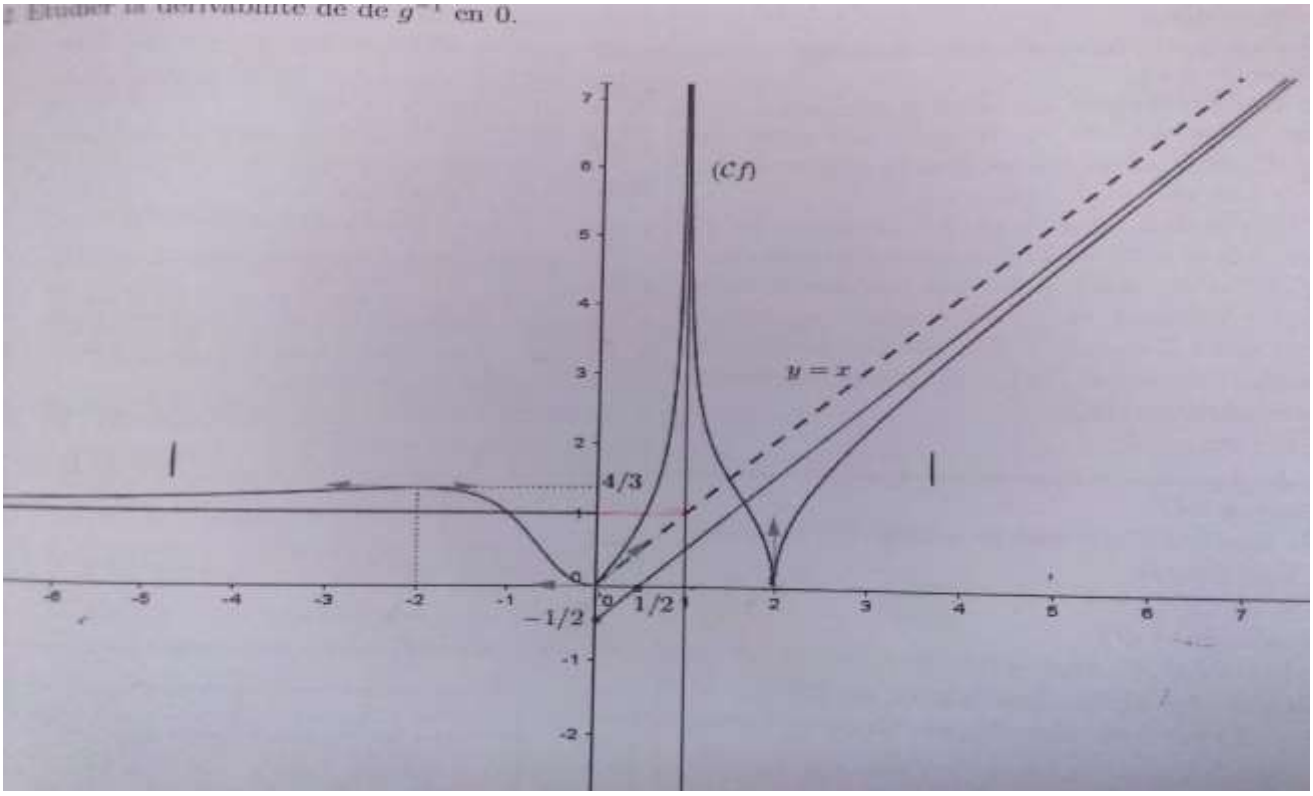
2.Donner $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$

4.Donner les équations des demies-tangentes puis dresser le tableau de variations de f.

<u>Partie B</u> Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $[2; +\infty[$

1.Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

2. Etudier la dérivabilité de g^{-1} en 0.



Problème 3

Partie A : Soit la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1} \; si \; x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1-Déterminer l'ensemble Df de f.

2- Déterminer les limites aux bornes de Df.

3-Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.Interpréter les résultats.

4-a-Montrer que (Cf) admet en $-\infty$ une asymptote oblique la droite (Δ) dont on déterminera son équation.

b-Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (Δ) sur $]-\infty\,,\; 0\,[$.

5-Etudier la nature de la branche infinie en $+\infty$.

6-Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f(x)'$ sur chaque intervalle ou f est dérivable.

7-Dresser le tableau de variation de f.

8-Construire (Cf)

Partie B : Soit h la restriction de f à I $= [0\ \ ,\ +\infty\ [$ et (Ch^{-1}) sa courbe représentative.

1-Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

2-Calculer $h\left(\frac{4}{5}\right)$. h^{-1} est –elle dérivable en 2 ?Si oui ,calculer $(h^{-1})\,'(2)$.

3-Construire (Ch^{-1}) dans le même repère puis expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Problème 4

Partie A : On considère la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]2\,;3[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Préciser le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+3}{-1+x^2} & si\ x \geq 0 \\ -x - 3 - \sqrt{x^2 - 2x} & si\ x < 0 \end{cases}$ On désigne par(C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_f\ de\ f$ puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter t les résultats.

3. Etudier les branches infinies de C_f.

4. **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0\ et\ x\ \neq 1\,, f'(x) = \frac{2x\, g(x)}{(x^2-1)^2}$

b. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; 0[$.

c. Préciser les variations de f.

d. Dresser le tableau de variations de f.

5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$.

6- Construire (C_f) dans un repère $(O, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$. (unité 1cm).

Partie C : Soit h la restriction de f à I $=]-\infty; 0[$.

1-Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

2-Préciser le sens de variation de h^{-1}sa bijection réciproque

3- Résoudre dans ℝ, l'équation $h(x) = -1 - 2\sqrt{2}$ puis calculer $(h^{-1})\,'(-1 - 2\sqrt{2})$.

<u>Problème:</u> 5

<u>Partie A</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+x^3}{1+x} \ si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2+8} - x - 2 \ \ si\ x \geq 1 \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1. **a**. Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

   b. Etudier les branches infinies de (C).
2. Etudier la continuité puis la dérivabilité de f en 1.Interpréter les résultats
3. **a**. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.

   b. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x - \sqrt{x^2+8} < 0$

   c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

   d. Construire (C_f).

<u>Partie</u> B Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$

4. **a**. Montrer que la restriction g de f à $[1; +\infty[$ admet une réciproque g^{-1}.

   b. Résoudre dans $[1; +\infty[$, l'équation $g(x) = -1$.

5. **a**. Justifier que g^{-1} est dérivable en -1 puis calculer $(g^{-1})'(1)$.

   b. Construire (Cg^{-1}) et g^{-1}.

<u>Problème 6</u>

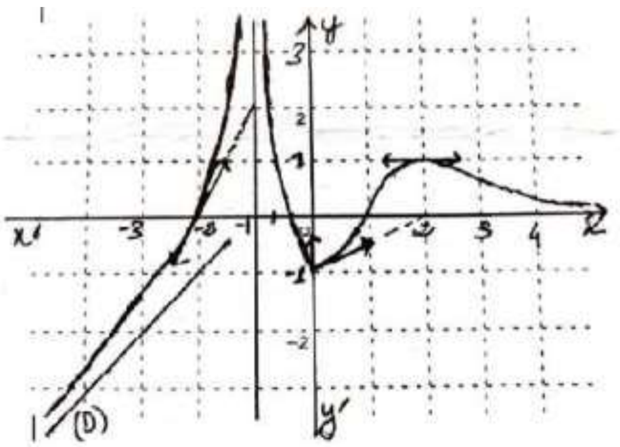
La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f dans un repère orthonormal.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{f(x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{3}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)+1}{x}$.

3) Préciser la nature des branches infinies de (C) au voisinage de +∞ et au voisinage de -∞.
4) Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x) \geq 0$
5) Déterminer $f'(-2)$; $f'(2)$; $f'_d(0)$.
6) Dresser le tableau de variation de f.



« Chers élèves ce n'est pas le chemin qui est difficile, c'est le difficile qui est le chemin »