EXERCICE 1

1. Déterminer les entiers n qui divise $n+12$.
2. Déterminer tous les entiers n tels que $3n+4$ divise $n+6$.

EXERCICE 2

Soit x et y deux entiers naturels tel que $x > y$.

1. Montrer que si $x^2 - y^2 = 15$ alors $x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = 15$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel .

1. Montrer que $7^{2n} + 3$ est divisible par 4.
2. Montrer que $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
3. $3^{2n+1} + 2 \equiv 0 \pmod 7$

EXERCICE 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de la division euclidienne de 2^n par 9.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

   Quelle semble être la période de la suite (r_n)

   (b) En déduire (r_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 65^n par 9 suivant les valeurs de n.
3. Quel est le reste dans la division euclidienne de 65^{2018} par 9

EXERCICE 5

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1. Si $n \equiv 9 \pmod 1)7$ alors $(9n+4) \wedge (2n-1) = 17$.
2. Pour tout entier naturel non nul n , $2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod 6$.
3. Un entier congru à **7 modulo 8** peut être égal à **la somme de trois carrés**.

4 $555^{2017} + 2016^{2016} \equiv 1 \pmod{37}$.

Exercice 6

1 Écrire suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

2 En déduire le reste de la division de $(2917)^{541}$ par 5.

Exercice 7

1 Prouver les équivalences suivantes:

(a) $3x \equiv 8 \ (\text{mod } 1)0 \Leftrightarrow x \equiv 6 \ (\text{mod } 1)0$

(b) $x^2 \equiv 6(10) \Leftrightarrow x \equiv 4 \ (\text{mod } 1)0$ ou $x \equiv 6 \ (\text{mod } 1)0$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 6 \ (\text{mod } 1)0 \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \ (\text{mod } 1)0$

3 Déterminer tous les multiples naturels de 10 inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

Exercice 8

1 (a) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n.

(b) En déduire le reste de la division de 2018^{128} par 7 $(n \in \mathbb{N})$

2 (a) Déterminer les restes de la division par 4 de 3^n $(n \in \mathbb{N})$.

(b) En déduire que $3^{1998} - 1$ est divisible par 28.

Exercice 9

1 Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 2^n par 10.

2 Déterminer selon les valeurs de n , le chiffre des unités de l'écriture décimale de $2n$.

3 Déterminer le chiffre des unités de $(3548)^9 \times (2534)^{31}$.

Exercice 10

1 (a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 5.

(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $3x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$.

Exercice 11

1 Trouver le reste de la division euclidienne de 8^{2017} par 5.

2 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $10^n \equiv 4 \pmod{12}$

b Trouver le reste de la division euclidienne par 12 de l'entier $x = 123^{4567} + 89^{1011}$.

3 **a** Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier 1976^{57}.

b Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que 1976^n soit congru à 4.

Exercice 12

1 Démontrer que , pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1 \pmod 3$

2 Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29 .

3 Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17.
En déduire que , pour tout entier naturel k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4 Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5 En déduire quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Exercice 13

On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 6$

1 **a** Montrer que $(2, -2)$ est une solution de (E)

b Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E)

2 Soit (x, y) une solution de (E) et $d = x \wedge y$

a Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b Déterminer les couples (x, y) solutions de (E) pour lesquels $d = 3$

3 On considère le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 2 (\text{mod} 5) \\ n \equiv -2 (\text{mod} 8) \end{cases}$ où n est un entier

a Montrer que n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 22 (\text{mod} 40)$

b Étudier suivant les valeurs de l'entier naturel n $(n \geq 3)$, le reste modulo 40 de 22^n

c Déterminer le reste modulo 5 de 2022 et le reste modulo 8 de 2022

d En déduire que l'entier $((2022)^{2017} - 32)$ est divisible par 40

Exercice 14

Soit a un entier naturel non nul tel que : $a \wedge 10 = 1$

1 **a** Montrer que a est impair .En déduire que $a^8 \equiv 1 \pmod 2$

b Montrer que a est non divisible par 5 et que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

c En déduire que $a^8 \equiv 1 \pmod{10}$.

2 **a** Montrer que pour tout entier naturel k , $a^{8.10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$.
En déduire que $a^{800000001} \equiv a \pmod{10^9}$.

(b) En déduire qu'il existe un entier naturel x tel que l'écriture décimal de x^3 se termine par le nombre **23456789**.

3 Soit $N = 2017^{801} + 2017^{8000}$. Déterminer les trois derniers chiffres de N.

EXERCICE 15

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

1 Soit n un entier naturel , discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo **100**.

2 En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3 (a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{1002}$.

(b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

EXERCICE 16

(A) Soit q un entier naturel.

1 Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2 Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 8$.

(B) On se propose de déterminer **l'ensemble** A **des triplets d'entiers naturels non nuls** $(m\ ,\ n\ ,\ q)$ **tels que** $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$

1 Vérifier que $(2\ ,\ 1\ ,\ 5)$ est un élément de A.
Dans la suite de l'exercice on suppose que $(m\ ,\ n\ ,\ q)$ **un élément de** A.

2 (a) Montrer que q est impair.

(b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 8$

(c) Montrer alors que m est différent de 1.

3 On suppose que $m \geq 2$.

(a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ sont pairs.

(b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$.
Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d = 2$.

(c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$.
En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$

4 Déterminer n et q lorsque $m = 2$.

5 On suppose que $m \geq 3$.

(a) Montrer que : $3^n \equiv -1 \pmod{16}$

(b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

(c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets $(m\ ,\ n\ ,\ q)$ éléments de l'ensemble A tel que $m \geq 3$.

6 Déterminer l'ensemble A.

Exercice 17

1 Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.

(a) Montrer que $a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv 0 \pmod{100}$.

(b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.
(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$.

2 Soit b un entier.

(a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

(b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.

3 Soit b un entier premier avec 10.

(a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

(b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

Exercice 18

1 Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 (mod 10^4)$.

2 Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3 Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = b^{5^n} - 1$

4 (a) Montrer que pour tout entier naturel n,$b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$

5 (a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5 .

(b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

6 (a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

(b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

(c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 (mod 10000).

Exercice 19

1 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $7^{4n} - 1$ est divisible par 5.

(b) Déterminer, pour tout entier $n \in \{0,1,2,3,4\}$, le reste modulo 5 de 7^n .

(c) En déduire que l'entier $2 \times 7^{2017} + 49^{2016}$ est divisible par 5.

2 (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier q, on a :
$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} 7^k$, Montrer que S_n divise $7^{n+1} - 1$.

3

ⓐ Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de 7^{4n+1} .

ⓑ Soit x un entier, montrer l'équivalence : $6x \equiv 0 \pmod{10}$ si et seulement si $x \equiv 0 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10}$

ⓒ Montrer que S_{100} est un entier impair.

ⓓ En déduire le chiffre des unités de S_{100} .

Exercice 20

Pour tout entier naturel , on prend $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

1

ⓐ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2$

ⓑ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_n \equiv 7 \pmod{10}$

2

ⓐ Vérifier que $36^6 \equiv 36 \pmod{100}$.

ⓑ En déduire que $36^{16} \equiv 36 \pmod{100}$.

3

ⓐ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_{n+4} = 1 + (a_n - 1)^{16}$

ⓑ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $a_{4n+2} \equiv 37 \pmod{100}$.

ⓒ Déterminer les deux derniers chiffres du nombre $N = 2^{2^8} + 2^{2^9}$.

Exercice 21

On pose $A = 7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}$

1

ⓐ Montrer que pour tout entier n,$7^{2n+1} - 3$ est divisible par 4.

ⓑ Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de 7^n modulo 10.

ⓒ En déduire le chiffre des unités de A.

2

ⓐ Recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de x modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de $x^2 modulo 10$										

ⓑ L'entier $A - 1$ est-il un carré parfait ? justifier votre réponse.

Exercice 22

1 Soit n un entier naturel

ⓐ Déterminer les restes possibles de 5^n modulo 11

ⓑ Déterminer le reste modulo 11 de 2018^{17}

2 Pour tout entier n ,on pose $a = 2n + 5$ et $b = n - 3$

ⓐ Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 11

ⓑ En déduire , suivant n,la valeur de $a \wedge b$

c) Déterminer alors $(2(2018^{17}+5)) \wedge (2018^{17}-3)$.

3) Soit un entier $n \geq 4$, on considère l'équation $(E) : x^2+9=2^n$ On suppose que (E) admet une solution entière notée a.

a) Montrer que $a \equiv 1 \pmod 2$.

b) En déduire que $a^2+9 \equiv 2 \pmod 4$.

c) Montrer que (E) n'admet pas de solution entières.

EXERCICE 23

1) On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs .

a) Vérifier que $(141;68)$ est une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$ (On précisera les valeurs des entiers d et e)

2) Démontrer que 227 est un nombre premier

3) On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
- à tout entier a de A , $f(a) \equiv a^{109}(mod 227)$
- à tout entier a de A , $g(a) \equiv a^{141}(mod 227)$.

a) Vérifier que $g[f(0)] \equiv 0(mod 227)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul a de A , $a^{226} \equiv 1(mod 227)$.

c) En utilisant 1.c) , en déduire que pour tout entier non nul a de A , $g[(f(a)] \equiv a(mod 227)$

EXERCICE 24

Partie A: On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 5x - 26y = 2$

1) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $x \wedge y = 1$ ou $x \wedge y = 2$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) En déduire les solutions de l'équation (E) tel que $x \wedge y = 1$

Partie B: Pour coder un message, on procède de la manière suivante: à chacune des 26 lettres, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0;1;;24;25\}$ selon le tableau suivant:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division

euclidienne de $(a \times n + b)$ par 26; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple: pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante:

- étape 1: on lui associe l'entier $n = 15$
- étape 2: le reste de la division euclidienne de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.
- étape 3: on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque on prend $a = 0$.

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on prend $a = 13$.

3. Dans la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

   a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p.
   Montrer que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26, alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

   b. Coder le mot BAC

4. On se propose de décoder la lettre E.

   a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que:
   $5n - 26y = 2$ où y est un entier.

   b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
   Donner une solution particulière de l'équation: $5x - 26y = 2$
   Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$
   En déduire qu'il existe un unique couple $(x;y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$

   c. Décoder alors la lettre E.

Exercice 25

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1,46]$.

1. On considère l'équation $(E) : 23x + 47y = 1$, $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.

   a. Donner une équation particulière $(x_0;y_0)$ de (E).

   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

   c. En déduire qu'il existe un unique entier $x \in A$ tel que $23x \equiv 1\,[47]$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

   a. Montrer que si $ab \equiv 0\,[47]$ alors $a \equiv 0\,[47]$ ou $b \equiv 0\,[47]$.

   b. En déduire que si $a^2 \equiv 1\,[47]$ alors $a \equiv 1\,[47]$ ou $a \equiv -1\,[47]$.

3. a. Montrer que pour tout $p \in A$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $pq \equiv 1\,[47]$.
   Pour la suite , on admet que pour tout $p \in A$,il existe un unique entier , noté $inv(p)$ appartenant à A tel que : $p \times inv(p) \equiv 1\,[47]$.

   b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c) Montrer que $46! \equiv -1\,[47]$.

EXERCICE 26

Soit l'équation $(E): x^2(x^2+7) = y(2x+y)$; $(x;y) \in \mathbb{N}^{*2}$. Soit $\delta = x \wedge y$ et on pose $x = \delta a$; $y = \delta b$.

1. On suppose que $(x;y)$ est une solution de (E).

   a) Vérifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$.

   b) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} \delta^2 a^2 + 7 = kb \\ 2a + b = ka^2 \end{cases}$

   c) Montrer que $a = 1$.

   d) En déduire que $(1+b)^2 = 8 + \delta^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E).

EXERCICE 27

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3x - 2y = 1$.

2. Soit n un entier naturel.

   a) Montrer que $(14n+3; 21n+4)$ est une solution de (E).

   b) En déduire que $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$.

3. Soit $d = (2n+1) \wedge (21n+4)$.

   a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

   b) Montrer que $n \equiv 6\,[13] \Leftrightarrow d = 13$.

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On pose $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

   a) Montrer que $(n-1)/A$ et $(n-1)/B$.

   b) En déduire suivant n $A \wedge B$.

EXERCICE 28

Partie A : Soit p un entier premier supérieur ou égal 5.

1. Montrer que: $p^2 \equiv 1\,[3]$.

2. a) Montrer qu'il existe un entier naturel q tel que : $p^2 - 1 = 4q(q+1)$.

   b) En déduire que: $p^2 \equiv 1\,[8]$.

   c) Montrer que : $p^2 \equiv 1\,[24]$.

Partie B : Soit a un entier naturel tel que: $a \wedge 24 = 1$

1 Montrer que : $a^2 \equiv 1\,[24]$.

2 Existe -t-il des entiers naturels $a_1, a_2, \cdots, a_{23}$ tel que :

$$\forall k \in \{1;2;3;\cdots;23\}\ ,\ a_k \wedge 24 = 1 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{23} a_k^2 = 23997$$

Exercice 29

Soit $(E): 3x - 21y = 78$.

1 Montrer que (E) admet des solutions.

2 Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $x \equiv 5\,[7]$.

3 (a) Déterminer suivant n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

(b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ qui sont solutions de (E) et vérifient :

$$5^x + 5^y \equiv 3\,[7]$$

Exercice 30

Soit $(S): \begin{cases} n \equiv 13\,[19] \\ n \equiv 6\,[12] \end{cases}$

1 (a) Montrer qu'il existe un couple (u,v) d'entier relatifs qui vérifie : $19u + 12v = 1$.

(b) Montrer que $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2 (a) Soit n_0 une solution de (S).

Montrer que $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,[19] \\ n \equiv n_0\,[12] \end{cases}$

(b) Montrer que $\begin{cases} n \equiv n_0\,[19] \\ n \equiv n_0\,[12] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv n_0\,[12 \times 19]$.

3 (a) Trouver une solution de $19u + 12v = 1$ puis calculer N.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (S) (utiliser 2.b).

Exercice 31

Soit $(S): \begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ tel que $\begin{cases} (a;b;p;q) \in \mathbb{Z}^4 \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

1 (a) Montrer qu'il existe $(u_0;v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $pu_0 + qv_0 = 1$.

(b) Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution de (S).

2 Soit x une solution de (S). Montrer que $pq/(x - x_0)$.

3 Soit x un entier relatif tel que $pq/(x - x_0)$. Montrer que x est une solution de (S).

4 En déduire l'ensemble des solutions de (S).

5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S') : \begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$.

Exercice 32

Soit x un entier relatif tel que $10^x \equiv 2\,[19]$.

1
- **a** Montrer que $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$.
- **b** Montrer que $10^{18} \equiv 1\,[19]$.

2 Soit $d = 18 \wedge (x+1)$.
- **a** Montrer que $10^d \equiv 1\,[19]$.
- **b** Montrer que $d = 18$.
- **c** En déduire que $x \equiv 17\,[19]$.

Exercice 33

Soit $(E) : 143x - 195y = 52$; $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1
- **a** Montrer que (E) admet des solutions.
- **b** Sachant que $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E) , déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2 Soit n un entier naturel non nul tel que $n \wedge 5 = 1$. Montrer que $n^{4k} \equiv 1\,[5]$,$\forall k \in \mathbb{N}$.

3 Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y\,[4]$
- **a** Montrer que $n^x \equiv n^y\,[5]$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- **b** En déduire que $n^x \equiv n^y\,[10]$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4 Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $(x;y)$ est une solution de (E).
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers n^x et n^y ont le même chiffre d'unité dans la base 10 .

Exercice 34

1 Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) :\ 1436x - 2015y = 1$.
- **a** Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sont les couples

$$(2015k - 964, 1436k - 687), k \in \mathbb{Z}$$

- **b** Déterminer l'ensemble des inverses de **1436** modulo **2015**.
- **c** Déterminer le plus petit inverse positif u de **1436** modulo **2015**.

2 Soit n un entier naturel tel que : $n^{1439} \equiv 1436(mod 2015)$.
- **a** Soit d un diviseur commun de n et **2015** . Montrer que d divise **1436**.
- **b** En déduire que n et **2015** sont premiers entre eux.

3 a) En utilisant le théorème de Fermat , prouver que $n^{1440}-1$ est divisible par chacun des nombres **5** , **13** et **31**.

b) En déduire que $n^{1440} \equiv 1(mod 2015)$.

c) Montrer , alors que **1051** est le reste de la division euclidienne de n par **2015**.

EXERCICE 35

Répondre par **Vrai** ou **Faux**, en justifiant la réponse.

1. Le quotient de -2012 par -11 est égal à 182
2. $3^{2010}+3^{2011}+3^{2012} \equiv 2[10]$
3. Pour tout entier x: $x(2x+1) \equiv 3[5] \Leftrightarrow x \equiv 1[5]$
4. Pour tout entier naturel n; on a: $\frac{1}{3}(5 \times 4^n - 2)$ est un entier
5. Pour tout entier naturel n; on a: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est multiple de 17.
6. $2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} \equiv 0[5]$
7. Pour tout entier x; on a: $x^2 - 2x + 1 \equiv 9[10] \Leftrightarrow x \equiv 4[10]$

EXERCICE 36

1. soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer en fonction de n le reste modulo 7 de 2^n et 3^n.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 3^n$ est divisible par 7.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de $A = 30^{2007} + 353^{2007} + 225^{2007}$

EXERCICE 37

1 a) Déterminer suivant l'entier naturel n les restes possibles de 5^n modulo 6.

b) En déduire le reste modulo 6 de l'entier 2009^{2008}

2 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $5^n \equiv 2^n + 3^n[6]$

b) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a: $B = 2005^p + 2006^{2009} + 2007^{2009}$ est divisible par 6

3 Résoudre dan $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x + 4 \equiv 0[6]$

EXERCICE 38

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = n.7^n + (n+1).7^{n+1} + (n+2).7^{n+2}$

1. Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de 7^n
2. En déduire, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de a_n

3 a) Soit p un entier naturel tel que : $p \equiv 0[3]$. Montrer que: $a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$ est divisible par 19.

b En déduire le reste modulo 19 de $\sum_{i=0}^{100} a_i$

Exercice 39

Soit m et n deux entiers naturels non nuls qui vérifient la relation $(F): 7^n - 3\times 2^m = 1$

1 On suppose que $m \leq 4$. Déterminer tous les couples $(m;n)$ qui vérifient (F)

2 On suppose que $m \geq 5$

a Montrer que si $(m;n)$ vérifie (F) alors $7^n \equiv 1[32]$

b Montrer que si $(m;n)$ vérifie (F) alors n est un multiple de 4.

c En déduire que si $(m;n)$ vérifie (F) alors $7^n \equiv 1[5]$

d En déduire qu'il n'existe aucun couple $(m;n)$ qui vérifie (F).

Exercice 40

1 **a** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p, on a: $2^{3p}-1$ est un multiple de 7.

b En déduire que $2^{3p+1}-2$ est divisible par 7 et que $2^{3p+2}-4$ est un multiple de 7.

2 Soit n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de l'entier: $2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ par 7 dans les deux cas suivants:

a n est un multiple de 3.

b n n'est pas un multiple de 3.

3 Le nombre $2^{2019}+4^{2019}+8^{2019}$ est-il divisible par 7 ?

Exercice 41

Soit dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $(E): 31x-27y=5$.

1 **a** Montrer que le couple $(7,8)$ est une solution particulière de $31x-27y=1$.

b En déduire une solution particulière de (E).

c Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E).

2 Soit n,x et y trois entiers tels que : $\begin{cases} n = 31x+2 \\ n = 27y+7 \end{cases}$ .Montrer que (x,y) est une solution de (E).

3 Soit (x,y) une solution de (E), on pose $d = x\wedge y$

a Montrer que $d=1$ ou $d=5$

b On suppose que $d=5$, quel est le reste de la division euclidienne de x par 135.

Exercice 42

1 (a) Déterminer le reste modulo 37 de 1000

(b) En déduire que pour tout entier naturel n; $10^{3n} \equiv 1[37]$

(c) En déduire que $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 0[37]$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \equiv 36[37]$ alors $\sum_{k=0}^{n} 10^{3k} \equiv 0[37]$

Exercice 43

1 (a) Déterminer, pour tout entier $n \in \{0;1;2;3;4\}$, le reste modulo 13 de 5^n

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 96^{4n+2} \equiv 11[13]$

2 (a) Vérifier que pour tout entier x, on a: $x + x^2 + x^3 + x^4 = x.(x+1)(x^2+1)$

(b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient: $5^n + 5^{2n} + 5^{3n} + 5^{4n} \equiv 0[13]$

Exercice 44

Soit a et b deux entiers.

1 Montrer que: $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7[7]$. (on pourra utiliser que pour tout $k \in \{1;2;...;6\}$, 7 divise C_7^k)

2 En déduire que $(a+b) \equiv 0[7] \Leftrightarrow a^7 + b^7 \equiv 0[7]$

3 Déterminer le reste modulo 7 de $444444^7 + 333333^7$

4 Déterminer tous les entiers naturels n tels que: $n^7 + 128 \equiv 0[7]$

Exercice 45

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

(a) $x^2 \equiv 1[5]$

(b) $x^2 \equiv 4[5]$

2 Déterminer tous les couples d'entiers $(x;y)$ tels que: $x^2y \equiv 1[5]$

Exercice 46

Soit a un entier.

1 (a) Montrer que: $a(a^2-1) \equiv 0[6]$

(b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $a(a^{2n}-1) \equiv 0[6]$

2 Montrer que $1001^{1001} + 1003^{1003} + 1005^{1005} \equiv 3[6]$

Exercice 47

1 Déterminer tous les entiers a tels que: $a + a^2 + a^3 \equiv 1[7]$

2. Déterminer tous les entiers a tels que: $a^6 \equiv 1[7]$

3. Déterminer le reste modulo 7 de $7005^6 - [7005 + 7005^2 + 7005^3]$

EXERCICE 48

1.
   a. Montrer que pour tous entiers naturels k et r; on a: $5^{4k+r} \equiv 5^r[13]$
   b. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de 5^n par 13 avec $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. on pose $a_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$
   a. Déterminer le reste modulo 13 de a_{2000} et a_{2001}
   b. Montrer que: $a_n \equiv 0[13] \Leftrightarrow n$ n'est pas un multiple de 4.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \equiv 4[13]$

EXERCICE 49

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes:

1. $2x \equiv 6[10]$
2. $2x \equiv 3[5]$
3. $x^2 \equiv 0[3]$
4. $x^2 \equiv 1[3]$
5. $x^2 - 5x + 4 \equiv 0[5]$
6. $x^2 + 2x + 4 \equiv 0[3]$

EXERCICE 50

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le chiffre des unités des nombres 2^n et 7^n

2. Trouver alors le chiffre des unités du nombre $A = 2548^9 \times 2537^{31}$

EXERCICE 51

1. Justifier que le nombre 1979 est premier

2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$,l'équation: $2x \equiv 1[1979]$

3. On considère l'équation $(E) : x^2 - x + 494 \equiv 0[1979]$
   a. Soit x une solution de (E) dans $\mathbb{Z}$, déterminer le reste de $(x - 990)^2$ par 1979.
   b. En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 52

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Z}$, on a:
   a. $x^3 \equiv 0[9] \Leftrightarrow x \equiv 0[3]$
   b. $x^3 \equiv 1[9] \Leftrightarrow x \equiv 1[3]$
   c. $x^3 \equiv 8[9] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$

3. Soient $x;y$ et z trois entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Montrer que

l'un des nombres $x;y$ ou z est divisible par 3.

Exercice 53

Soit le nombre $A = 10^{9n} + 2\times 10^{6n} + 2\times 10^{3n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

1. Vérifier que: $10^3 \equiv 1[11]$ et $10^3 \equiv -1[7]$
2. Quel est le reste de la division euclidienne de A par 111 ?
3. On suppose que n est impair. Montrer que A est divisible par 7; par 11 et par 13
4. On suppose que n est pair:
   - a) Montrer que $A - 6$ est divisible par 7; par 11 et par 13.
   - b) Quel est le reste de la division euclidienne de A par : 111×1001 ?

Exercice 54

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n; les restes modulo 9 de 2^n.
2. En déduire les valeurs de n tels que: $2^n - 1 \equiv 0[9]$
3. Montrer que: $2^x.11^y \equiv 1[9] \Leftrightarrow x + y \equiv 0[6]$
4. En déduire le reste de la division euclidienne de $2009^{2008}.20^{992}$ par 9.
5. Soit $N = a.11^2 + b.11 + c$ où $a;b$ et c sont des éléments de l'ensemble $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Montrer que: Si $N \equiv 0[9]$ alors $(4a+c)^3 - b^3 \equiv 0[9]$

Exercice 55

1.
   - a) Justifier que 2017 est un nombre premier
   - b) Décomposer en produit des facteurs premier le nombre 2016

   Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.
2. Soit le couple $(x;y)$ dans $\mathbb{N}^{*2}$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$
   - a) Vérifier que :$p < 2017$
   - b) Montrer que p ne divise pas y.
   - c) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$, puis déduire que p divise 2016.
   - d) Montrer alors que $p = 7$.
3. Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ dans $\mathbb{N}^{*2}$ qui vérifient :

$$px + y^{p-1} = 2017$$

Exercice 56

Soit un entier naturel $n > 1$ on pose $A_n = (n!)^2 + 1$

1. Montrer que $A_n \equiv 1[2]$
2. Montrer que A_n admet un diviseur premier $p_n > n$
3. On suppose que $p_n \equiv 3[4]$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $p_n = 4k+3$
   - a) Montrer que A_n divise $1 + (n!)^{2k+1}$ et p_n divise $n! + (n!)^{p_n}$
   - b) Conclure que $p_n \equiv 1[4]$
4. Montrer l'existence d'infinité des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 57

1. Soit p un nombre premier impair.
   - a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1[p]$
   - b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1[p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que si k divise n, alors $2^n \equiv 1[p]$
   - c) Soit b tel que $2^b \equiv 1[p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1[p]$, alors b divise n.
2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.
   - a) Justifier que: $2^q \equiv 1[p]$
   - b) Montrer que p est impair.
   - c) Soit b tel que $2^b \equiv 1[p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1) que b divise q. En déduire que $b = q$.
   - d) Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1[q]$
3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul: 103; 137; 239; 307. En déduire que A_1 est premier.

Exercice 58

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n+2} + 3^n \equiv 0(mod 5)$
2. - a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de 7^n modulo 10
   - b) En déduire le chiffre des unités du nombre $7^{48} + 7^{50} + 7^{51}$
3. - a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $4x \equiv 0(mod 6)$
   - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^3 \equiv n(mod 6)$.
   - c) Déterminer alors les entiers n tels que $38n^3 + 2n \equiv 0(mod 6)$

Exercice 59

Partie A : On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7;-3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u;v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$

Partie B : On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On code tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante:

- On calcule $11x + 8$
- On calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y. x est alors codé par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11, $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25(mod 26)$
La lettre L est donc codée par la lettre Z

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a. Montrer que pour tout nombres entiers relatifs x et j, on a: $11x \equiv j[26] \Leftrightarrow x \equiv 19j[26]$
   b. En déduire un procédé de décodage.
   c. Décoder la lettre W.

Exercice 60

Pour coder un message, on procède de la manière suivante: à chacune des 26 lettres, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0;1;;24;25\}$ selon le tableau suivant:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(a \times n + b)$ par 26; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple: pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante:

- étape 1: on lui associe l'entier $n = 15$
- étape 2: le reste de la division euclidienne de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.
- étape 3: on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque on prend $a = 0$.

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on prend $a = 13$.

3. Dans la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

   a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26, alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

   b. Coder le mot AMI

4. On se propose de décoder la lettre E.

   a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que: $5n - 26y = 2$ où y est un entier.

   b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
   Donner une solution particulière de l'équation: $5x - 26y = 2$
   Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$
   En déduire qu'il existe un unique couple $(x; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$

   c. Décoder alors la lettre E.