

SERIE D'EXERCICES N°7

Courbes paramétrées

Classe: Terminale S1

Exercice 0

Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation est:

t	-2	-1	0	1	2							
$x'(t)$	-4	-	-2	-	0	+	2	+	4			
$x(t)$	4		\	1	\		0	/	1	/	4	
$y(t)$				2		\	0	\		-2	/	2
$y'(t)$	-2	/			\	0	-	-3	-	0	+	9
	9	+	0	-	-3	-	0	+	9			

Exercice 1



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points $M(t)$

dont les coordonnées sont définies par:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t-1} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de cette courbe paramétrée.
2. Déterminer les asymptotes à (\mathcal{C})
3. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variations conjointes.
4. Déterminer les tangente (\mathcal{C}) aux points particuliers.
5. Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}) et les axes de coordonnées.
6. Chercher les coordonnées des points multiples de (\mathcal{C}) .
7. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

Exercice 2



Dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé, on considère la **courbe de Lissajous** (\mathcal{L}) dont

une représentation paramétrique est:
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (\mathcal{L}) .
 - (a) Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.
 - (b) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 - (c) Par quelle isométrie le point $M(\pi - t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 - (d) Préciser le domaine d'étude de F .
2. Étudier les variations de de F puis dresser son tableau de variation .
3. Construire la courbe (\mathcal{L}) .

Exercice 3



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la **Cycloïde** (Γ) définie par:

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier la périodicité de la fonction vectorielle F associée.
2. Examiner les symétries usuelles de (Γ) puis réduire le domaine d'étude final de F .
3. Calculer les fonctions dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation de F .
4. Tracer l'allure de (Γ) .

Exercice 4



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère l'**astroïde** (\mathcal{A}) définie par:

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

1. (a) Calculer les coordonnées de $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$, $M(\pi - T)$, $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
 (b) En déduire que le domaine d'étude est $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
2. Dresser le tableau de variation de (\mathcal{A}) .
3. Tracer l'allure de (\mathcal{A}) .

Exercice 5



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points $M(t)$

dont les coordonnées sont définies par:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \ln |t| \\ y(t) = t \ln |t| \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^* .$$

1. (a) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 (b) Par quelle isométrie le point $M\left(\frac{1}{t}\right)$ se déduit-il de $M(t)$?
 (c) En déduire que le domaine de définition \mathbb{R}^* de \mathcal{C} peut être réduit à $]0; 1]$.
2. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

Exercice 6



Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique $4cm$. On considère l'application F de \mathcal{P} dans lui même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \sin t \end{cases},$$
 avec $t \in [-\pi; \pi]$. Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ) .
2. Comparer $x(t)$ et $x(-t)$ d'une part et $y(t)$ et $y(-t)$ d'autre part. En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie dont on précisera.
3. Etudier les variations de x et y sur $[0; \pi]$.
4. Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0; \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.