



TD N°3 : DIVISIBILITE DANS \mathbb{Z} (T^{LE}C)

2024 – 2025

EXERCICE 1

On considère un nombre entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est \overline{abc} .

1. Ecris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.
2. On suppose que : $m \equiv 0 [27]$.
 - a. Démontre que : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0 [27]$.
 - b. Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0 [27]$.
3. Justifie que l'entier \overline{bca} est divisible par 27.
4. On suppose que : $a > c$. On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.
 - a. Justifie que : $d = 99u$.
 - b. Déduis-en que l'entier naturel d ne peut pas être le carré d'un entier naturel.

EXERCICE 2

On considère la fraction $q_n = \frac{n+19}{n-7}$; n étant un entier naturel strictement supérieur à 7.

1. Détermine n pour que q_n soit simplifiable.
2. Détermine n pour que $q_n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3

Démontre par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, 29 divise $2^{5n+1} + 3^{n+1}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$.

EXERCICE 4

1. Résous dans \mathbb{Z} :
 - a. l'équation $x^2 \equiv -1[5]$
 - b. l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$.
2. Démontre que la somme des cubes de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 9.