



Année scolaire 2024- 2025	Série d'exercices <u>ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</u>	Niveau :TS1
		Cellule Mixte de Maths

EXERCICE 1

Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

- 1) Prouver que cette équation admet pour intégrale particulière une fonction polynôme de degré 2
- 2) En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.
- 3) Déterminer, s'il en existe une intégrale particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = x^2 e^x$

- 1) Prouver que cette équation admet pour intégrale particulière une fonction φ définie par $\varphi(x) = P(x)e^x$ où P est un polynôme de degré 3.
- 2) En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 8\sin x$

- 1) m étant un réel, on pose : $y = z + m\sin x$
 - a) Sachant y vérifie (E), former l'équation à laquelle satisfait z
 - b) Déterminer m pour que cette équation soit réduite à (E') : $z'' + 9z = 0$
- 2) Résoudre (E'). En déduire la solution générale de (E)
- 3) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f'(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) = 0$

EXERCICE 4

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (1)
2. Etant donnée une fonction numérique de variable réelle, g , deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = xg(\frac{1}{x})$
Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''(\frac{1}{x})$ et de x .
3. On considère l'équation différentielle : $y''' = -\frac{1}{x^4} y$ (2)
Démontrer que la fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = xg(\frac{1}{x})$ est solution de (1).

4. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $] -\infty ; 0[$ et $]0, +\infty[$.
5. Soit g une solution de (2) définie sur $]0, +\infty[$.

Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x)$

Calculer l'intégrale $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$

EXERCICE 5

Le but de l'exercice est l'étude de l'intensité i dans un courant comprenant en série un générateur de force électromotrice E (en volt) et une bobine de résistance R (en ohm) et d'inductance L (en Henrys). A l'instant t (en seconde), l'intensité i (en ampère) est solution de l'équation (1) : est $Li'(t) + Ri(t) = E$

On donne $E = 10V$, $R=100V$, $L=0,2H$

1. Vérifier l'équation (1) s'écrit : $i'(t) + 500i(t) = 50$.
2. a. on pose, pour tout t : $i(t) = I(t) + 0,1$
 Démontrer que la fonction I est solution de l'équation différentielle
 (2) : $i'(t) + 500i(t) = 0$
 b. Résoudre l'équation différentielle (2).
 c. Déterminer alors la solution i de (1) telle que $i(0) = 0$.
3. Déterminer, par le calcul, à 1 milliseconde près par excès, l'instant t_0 à partir duquel $i(t_0)$ est supérieure à 95 mA.

EXERCICE 6

M. Ngom professeur d'histo-géo et ses élèves de terminale S2 ont lu le texte suivant dans leur manuel : « Une étude sur les rendements de cultures pluviales de riz au Sénégal révèle que le taux de diminution de la production est proportionnel à la production en chaque année. Initialement la production est de 500 000 tonnes et elle diminue de 400 000 tonnes en cinq ans. Selon la conclusion de cette étude ; d'ici à plus de dix ans, 50% de la production initiale diminuerait si les conditions climatiques restent inchangées. » M. Ngom n'étant pas mathématicien, demande à ses élèves de vérifier la véracité de cette déclaration.

Donne ton avis sur cette conclusion de cette étude.

PROBLEME 2

PARTIE A

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n): y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur \mathbb{R} , vérifient, pour tout x réel : $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a-) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel : $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$

b-) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$

Quelle est alors la fonction g ?

2) Soit ϕ une fonction dérivable sur \mathbb{R}

a-) Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation

$$(F) : y' + y = 0.$$

b-) Résoudre (F).

c-) Déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n) .

d-) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

PROBLEME 3

En vue de réaliser un parc d'attraction. Le conseil départemental de Rufisque a initié un concours circonscrit aux élèves de l'école d'enseignement professionnel du département et visant à recueillir leurs projets d'architecture du parc. Papa Sylla un élève en classe de TS1 d'un lycée de l'I.A de Rufisque décide d'y participer. IL imagine un parc circulaire, traversé par une grande voie rectiligne, deux lampadaires géants, plusieurs voies secondaires ainsi qu'une rubrique « embellissement » ou il suggérerait de planter une fleur dont il a lu l'extraordinaire qualité d'expansion dans une revue spécialisée.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , le pourtour (C) du domaine circulaire, la voie rectiligne et les deux lampadaires sont définis de la façon suivante.

Etant donné un nombre complexe z différent de $(-2 - 3i)$, et en notant z' image z le nombre complexe tel que : $z'z + (2 + 3i)z' = z - 4 - 3i$.

(C) est l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que z' soit un nombre imaginaire.

(D) est l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que z' soit un nombre réel.

Les deux lampadaires sont représentés par les points A et B d'affixes z_A image de $(-2 - i)$ et z_B antécédent de $(-i)$.

Papa Sylla veut formaliser son projet et y mettre un dessin de tout ce qu'il a conçu ainsi que les résultats de l'étude et de l'évolution de la fleur à planter.

Vous aviez fait les mêmes cours que Papa Sylla tu es invité à répondre les parties A, B et C.

PARTIE A

Construire les ensembles (C) et (D) et les points A et B dans le même repère.

PARTIE B

Les voies secondaires ont l'allure de la courbe (C_{f_a}) de la fonction f_a définie ainsi :

Pour a est un réel strictement positif, f_a est une fonction dérivable et strictement positive sur \mathbb{R} de fonction dérivée f'_a . Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes.

$$(P_1) \text{ Pour tout nombre réel } x, (f'_a(x))^2 - a^2(f_a(x))^2 = -1.$$

$$(P_2) f'_a(0) = 0.$$

$$(P_3) f'_a \text{ est dérivable et strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

1. a) Calculer $f_a(0)$.
- b) Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul, $f'_a(x) \neq 0$.
- c) En utilisant la propriété **(P1)** montrer que pour tout réel x non nul :

$$f''_a(x) = f_a^2(x).$$

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' = a^2y$.
3. En déduire que pour tout réel x , $f_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$.
4. Etudier puis tracer la courbe (C_{f_2}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
5. Les fleurs sont initialement plantées sur le domaine délimité par la courbe (C_{f_2}) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -e$ et $x = e$.

Calcul l'aire du domaine initial sur lequel les fleurs seront plantées.

PARTIE C

Selon les informations lues par Papa Sylla, la surface occupée par la fleur évolue en fonction du temps.

En désignant par U_n la surface occupée par la fleur après n années, $n \geq 1$. La suite (U_n) est telle que $U_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ en unité d'aire et $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n U_k$ l'aire limite du domaine occupé par la fleur au cours de son expansion

. On définit la fonction φ dérivable sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et dont la dérivée est continue sur

$$\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ par : } \begin{cases} \varphi(x) = \frac{\frac{x^2}{\pi} - x}{\sin x}, \text{ si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[. \\ \varphi(0) = -1 \end{cases}$$

On admet l'existence d'un réel M tel que $|\varphi'(x)| \leq M$ pour tout t de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt$.

a) En utilisant une intégration par partie montrer que

$$I_n = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

b) Montrer alors que $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1} (1 + \frac{\pi}{2} M)$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Soit x un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et n un entier naturel.

a) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^n e^{i(2kx)}$, en fonction de x et n avec $i^2 = -1$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} - \frac{1}{2}$.

3. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{\pi} - t\right) \cos(2kt) dt = \frac{1}{4k^2}.$$

a) En déduire que $S_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$.

b) Démontrer que l'aire du domaine occupé par la fleur au cours de son expansion a une limite que tu préciseras.