

LYCEE MUNICIPAL PORT-BOUET	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES N°2 TRIMESTRE 1	Année Scolaire : 2023-2024
M. ACKA	Tle C	Durée : 1 h

*Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées*

EXERCICE 1 (3 pts)

Pour chacune des affirmations, écris le numéro de la ligne puis écris vrai si l'affirmation est vraie ou faux si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ admet une limite finie en $+\infty$
2	60 a plus de diviseurs positifs que 100.
3	f étant une fonction bijective définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^7$, la bijection réciproque de f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^7}$.
4	L'écriture en base 2 de $2^9 + 2^8 + 2^5 + 1$ est $\overline{1100100011}^2$

EXERCICE 2 (3 points)

Pour chacun des énoncés suivants, une seule réponse proposée est exacte. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne correspondant à l'affirmation vraie. **Exemple : 5-A**

N°	Affirmations	Réponses	
1	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ est égale à ...	a	$+\infty$
		b	n'existe pas
		c	$-\infty$
2	Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2; 5]$ telle que $f([2; 5]) = [1; 3]$, alors...	a	$f(2) = 3$ et $f(5) = 1$
		b	$f(2) = 1$ et $f(5) = 3$
		c	$1 < f(2) < 3$
3	Si un entier est congru à 5 modulo 6 alors toutes ses puissances paires sont :	a	congrues à 2 modulo 6.
		b	congrues à 5 modulo 6.
		c	congrues à 1 modulo 6.
4	Si le premier janvier 2022 était un samedi, alors le 23 mars 2023 serait ...	a	Mercredi
		b	Jeudi
		c	vendredi

EXERCICE 3 (8 points)

Partie A

g est une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$

1. Calcule la limite de g en $+\infty$.
2. On admet que g est dérivable sur $]1; +\infty[$
 - a. Justifie que $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) = \frac{-3x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
 - b. Déduis-en les variations de g puis dresse son tableau de variation

3. .

- Démontre que l'équation $\forall x \in]1; +\infty[\quad g(x)=0$ admet une unique solution α .
- Justifie que $1 < \alpha < 2$
- Justifie que
$$\begin{cases} \forall x \in [1; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

Soit f une fonction définie $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1. .

- Calcule la limite de f en $+\infty$
 - Démontre que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$
 - Etudie la position de (C) par rapport à (D)
2. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat obtenu
3. .
- Démontre que $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
 - Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation
4. Démontre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$

EXERCICE 4 (6 points)

1-a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

b) En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

c) Détermine le reste de la division euclidienne de 2^n par 7.

2- Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7.

b) Démontre que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

c) Etudie le cas où $p = 3n + 2$.

3- On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire de la manière suivante : $a = \overline{1001001000}^2$ et $b = \overline{1000100010000}^2$.

a) Vérifie que a et b sont des nombres de la forme A_p .

b) a et b sont-ils divisibles par 7 ?