Équations différentielles

Exercice 1 :

Donner une équation différentielle ayant pour solution la fonction $\cos(x)e^{x^2}$.

Exercice 2 :

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + e^{-2x}$ est solution de $y' + 2y = x^2$?
Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Résoudre :

a. $y' + \cos(x)y = 0$.
b. $xy' - 7y = 0$, lorsque $x > 0$.
c. $y' - 3x^2y = 0$.

Exercice 4 :

Résoudre :

a. $y'' - 3y' + 2y = 0$
b. $y'' - 2y' + y = 0$
c. $y'' + y = 0$
d. $y'' - 4y' + 13y = 0$

Exercice 5 : Épreuve du 14 juin 2022)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

5) $y'(x) + 4y(x) = 8x, y(0) = \frac{3}{2}$.
6) $y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

Exercice 6 :

1. Soient les équations différentielles $(E_0): y' + y = 0$; $(E): y' + y = e^{-x}\cos x$ et la fonction h définie par $h(x) = (\mathrm{a}\cos x + b\sin x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$.

a. Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E).

b. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f-h est solution de (E_0).

c. Résoudre (E_0).

d. Déduire des questions précédentes les solutions de (E).

e. Déterminer la solution g de (E) telle que $\mathrm{g}(0) = 0$.

2. Soit L la fonction définie par $\mathrm{L(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\sin\mathrm{x}$

a. Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction decos x et $\sin\mathrm{x}$.

b. Étudier les variations de L sur $[0; 2\pi]$.

c. Calculer $\int_0^{2\pi} \mathrm{L(x)dx}$.

Exercice 7 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$ 。
2. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe passe par le point $\mathrm{A}\binom{0}{1}$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$.
3. Déterminer une primitive de g à l'aide de (E).

Exercice 8 :

Le but de cet exercice est de calculer :
$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2. On considère l'équation différentielle
$(E'): y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$.

a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = a\cos(2x) - b\sin(2x)$ soit solution de (E').

b. Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si f-g est solution de (E).

c. En déduire la forme générale des solutions de (E').

d. Vérifier que la solution h de (E') telle que $h(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $h'(0) = 2$ est : $h(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

e. Utiliser (E') pour trouver une primitive H de h puis en déduire la valeur de I.

<u>Exercice 9 :</u> (Extrait du BAC 2023)

Partie A :

On considère l'équation différentielle $(E): \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E'): \frac{1}{2}y' + y = 0$.

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = axe^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E).

3. a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $a = 6$ et $b = 2$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point O.

Partie B :

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x-2)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Étudier les limites aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus.

3. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

4. Etudier la continuité de f en 0.

5. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

6. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

7. Dresser le tableau de variations de f.

8. Montrer sur l'intervalle]1,2[que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

9. Construire (C_f) et ses asymptotes.

10. Calculer en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan compris entre les droites d'équations $x = 2, x = 3$, $y = -1$ et la courbe (C_f) de f.


THIAM SCIENCES
IMPORTANTE ANNOUNCE
Pour vous aider, l'adhésion aux groupes Telegram de préparation au BAC et à la plateforme E-Learning est maintenant à **5.000 FCFA** au lieu de **10.000 FCFA sans frais** mensuels.
Contact: 📲 77-850-82-72
@THIAM SCIENCES