

EXERCICE 1 (4 points)

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20.$$

1. a) Écrire sous forme algébrique $(1 - i)^2$ puis en déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2i$.
 b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$.
 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i, z_B = -1 + i, z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 3 + i$.
 a) Faire une figure.
 b) On pose : $Z = \frac{z_{\overline{BA}}}{z_{\overline{BC}}}$. Écrire Z sous la forme algébrique.
 c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z .
 d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 2 (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1 ; 1 ; -3) ; B(-2 ; 3 ; -3) ; C(-2 ; 1 ; 0)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Soit I le point de coordonnées $(-1 ; 3 ; 0)$.
 Calculer la distance de I au plan (ABC) .
 Les points A, B, C , et I sont-ils coplanaires ?
3. a) Calculer l'aire \mathcal{A} du triangle ABC en unité d'aire.
 b) Déterminer le volume \mathcal{V} , en unité de volume, de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC .

PROBLÈME (12 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

Partie A (3,25 points)

Soit g la fonction définie sur $I = [1 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de I .
2. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I .
Vérifier que : $\alpha \in]3,5 ; 4[$.
- Déduire de ce qui précède le signe de g sur I .

Partie B (5,75 points)

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et vérifier que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.
- En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.
- Construire (C) , ses tangentes et ses asymptotes.

Partie C (3 points)

On pose : $J_n = \int_1^2 x^2 (\ln x)^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer J_0 .
- Montrer que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que (J_n) est décroissante.
- Montrer que (J_n) est convergente.
- En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
$$3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3.$$
- Déduire les valeurs exactes de J_1 et J_2 .

Données : $\ln(3,5) \approx 1,25$; $\ln 2 \approx 0,7$; $e^{-1} \approx 0,37$.