Situations complexes

Corrigé

Vallesse

Situation complexe Maths Tle D 20102021.indd 1 20/10/2021 16:02

I Comment transformer une situation d'évaluation en une situation complexe ?

● Une situation d'évaluation est constituée d'un contexte, d'une (ou des) circonstance(s) et d'une (ou des) consigne(s). On dit qu'une situation d'évaluation a trois constituants.
● Une situation complexe est constituée d'un contexte, d'un (ou des) support (s) ; d'une (ou des) fonction (s), et d'une (ou des) consigne(s) (indépendantes). On dit qu'une situation complexe a quatre constituants.

Situation complexe

Situation d'évaluation	Situation complexe
un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, …) dans lequel on se situe	● Un contexte : il décrit l'environnement (lieu, moment, …) dans lequel on se situe. ● Des supports : c'est l'ensemble des éléments matériels, virtuels ou réels, qui sont présentés à l'apprenant : texte écrit, illustration, photo…, et dont il doit effectuer un traitement pour résoudre la situation.
Des circonstances : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.	Des fonctions : Elles précisent dans quel(s) but(s) la production est réalisée. La plupart du temps, cette fonction est une fonction sociale.
Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation d'évaluation doit comporter une à trois consignes. Les consignes ne sont forcément indépendantes.	Une ou des consigne(s) : Ce sont des instructions de travail qui sont données à l'apprenant de façon explicite. La situation complexe doit comporter **1 à 3 consignes indépendantes.**

Une situation complexe est une situation d'évaluation. Une situation d'évaluation est par nature complexe. La Commission Nationale Pédagogique de Mathématiques de Côte d'Ivoire a décidé en 2020 d'utiliser le terme de situation d'évaluation au premier cycle et celui de situation complexe au second cycle. Pour cette dernière une condition supplémentaire a été ajoutée pour s'aligner aux exigences du BAC UEMOA.

La situation complexe doit comporter **1 à 3 consignes indépendantes.**

Pour passer de la situation d'évaluation à la situation complexe, il suffit de rendre les consignes indépendantes ou de poser une consigne.

Résolution d'une situation complexe

La rédaction d'une situation doit faire apparaitre :
- une introduction
L'élève doit citer l'outil qu'il va utiliser et donner les étapes de sa production
- un développement
L'élève fait montre de ses connaissances mathématiques. Il utilise avec précision les outils mathématiques.
Il doit annoncer chaque étape de son raisonnement pour que le correcteur puisse le suivre.
- une conclusion
C'est le retour au problème pour donner un avis ou répondre à une préoccupation

Nous donnons ici des exemples :

II Exemple de situations complexes

Leçon 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

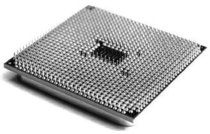
Situation complexe

La maman d'un élève en terminale D au lycée moderne de Bouaflé désire une relance publicitaire auprès de ses meilleurs clients. Elle fait donc imprimer des dépliants qui lui coûtent 4 000 FCFA en frais fixes plus 100 FCFA par dépliant à l'exception de 20 copies qui ne seront pas distribuées. Elle est sure que chaque dépliant sera lu par 20 personnes.
La commerçante voudrait déterminer le coût d'un dépliant par client pour une production de dépliants à long terme.
Détermine ce coût pour la maman.

Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe 1

Dans le cadre de l'introduction des TIC à l'école, un établissement scolaire a organisé une visite d'étude dans une usine de fabrique de microprocesseurs.
Le directeur de la fabrique informe les élèves que 4% de la production journalière est défectueuse.
Le service de contrôle qualité a mis en place un système de vérification



systématique des microprocesseurs.
Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95% des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2% des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.
Étonnés de savoir qu'un appareil de contrôle n'est pas totalement fiable, les élèves veulent évaluer les marges d'erreur de cet appareil.
Détermine la probabilité qu'il y ait erreur lors de son contrôle.

Situation complexe 2

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match de la coupe d'Afrique des Nations. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. L'objet de l'étude est de déterminer l'importance de l'émission d'analyse après le match.
On dispose des informations suivantes :
- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

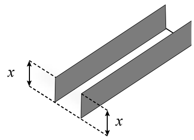
La chaîne veut savoir le pourcentage de téléspectateurs qui n'ont pas regardé l'émission mais qui ont regardé le match.
En utilisant tes connaissances mathématiques au programme détermine la probabilité qu'un téléspectateur qui n'a pas regardé l'émission ait regardé le match.

Situation complexe Maths Tle D 20102021.indd 3 20/10/2021 16:02

Leçon 3 **DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS**

Situation complexe

M. Bolou a acheté une feuille métallique de forme rectangulaire de 12 cm de largeur et 2 m de longueur. Il veut la modeler pour en faire une gouttière en pliant les deux longs côtés pour les relever perpendiculairement à la feuille.
Il a du mal à trouver la hauteur des côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale.
Il te sollicite pour l'aider.
Propose-lui une solution argumentée.



Leçon 4 **PRIMITIVES**

Situation complexe

Un pâtissier commercialise des glaces d'un même type très prisées par les consommateurs. Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale. Cette production est vendue dans sa totalité.
Lorsque x représente le nombre en centaines de glaces produites, on note B(x), le bénéfice réalisé par le pâtissier pour la vente des x centaines de glaces.
D'après les données précédentes, l'artisan sait que :
- pour tout x de l'intervalle [1 ; 3], on a : $B'(x) = -20x + 30$, où B(x) est exprimé en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B.
- Pour une centaine de glaces vendue, son bénéfice est 20 mille francs.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer son bénéfice maximal.
Détermine son bénéfice maximal.

Leçon 5 **FONCTIONS LOGARITHMES**

Situation complexe

Au cours d'une conférence prononcée dans un lycée, le conférencier a donné, entre autres, les informations suivantes :
« Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après la mort de l'organisme, cette quantité diminue. La mesure de la quantité de carbone 14 restant permet de dater les organismes qui contiennent du carbone, à condition qu'ils datent de moins de 50 000 ans.
On note x la fraction de carbone 14 dans un organisme fossilisé.
Une modélisation mathématique permet d'établir : $f(x) = 1 - 8310\ln x$ où $f(x)$ est l'âge en années
d'un fossile. Des archéologues ont découvert récemment deux types de fragments d'os : un des types contient 35% de leur teneur en carbone et l'autre type est vieux de 15 000 ans. »
De retour en classe, le chef de classe d'une des classes de Terminale D affirme que selon lui, d'une part les os contenant 35% de leur teneur en carbone n'ont pas plus de 100 ans et d'autre part, il est impossible de déterminer la teneur en carbone 14 des os vieux de 15 000 ans. Ses amis cherchent à vérifier ces affirmations.

1. Calcule l'âge d'un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14.

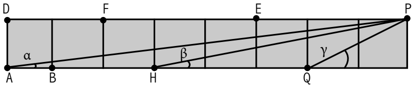
Arrondis à la centaine d'années.
2. Détermine la fraction de carbone 14 restant dans un fossile vieux de 15 000 ans.

Leçon 6 NOMBRES COMPLEXES

Situation complexe

Lors d'une exposition du club « Mathématiques » d'un lycée, des élèves d'une classe de Terminale D ont été très attentifs à l'image ci-dessous.

huit carrés de côtés de mêmes longueurs sont juxtaposés ci-dessous.



$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

L'un d'eux affirme que l'égalité inscrite sur l'image change si la longueur de côté du carré augmente ou diminue. Son voisin prétend que si l'égalité est ainsi mentionnée, c'est qu'elle vraie dans tous les cas.
En utilisant les outils mathématiques au programme, départage les deux élèves.

Leçon 7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Situation complexe 1

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en administration par voie intraveineuse. On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre $(\mu g.L^{-1})$, du médicament, au bout de *t* heures après administration par voie intraveineuse. Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\mu g.L^{-1}$

La demi-vie du médicament (notée $t_{0,5}$) est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu g.L^{-1}$.
1. Détermine la demi-vie.
2. Détermine le temps à partir duquel le médicament est éliminé (Donne le résultat arrondi au dixième.)

Situation complexe 2

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en administration par voie orale.
On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre $(\mu g.L^{-1})$, au bout de *t* heures après ingestion par voie orale.
Les médecins souhaitent déterminer la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.
Détermine la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.
Donne le résultat à la minute près.

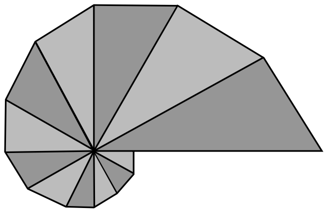
Leçon 8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Situation complexe

(L'unité graphique est le centimètre)
Un mathématicien peintre fait une

exposition vente dans son atelier près d'un un lycée.
En sortie pédagogique dans l'atelier, le tableau ci-dessous attire l'attention des élèves d'une classe de première D.
Le chef de classe demande à l'artiste ce que cela représente. Ce dernier lui répond qu'il s'agit d'une représentation d'un escargot. Il précise les sommets des triangles qui forment la coquille sont des points A_n d'affixe z_n telle que $z_0 = 6$ et pour tout entier naturel n,

$$n\ Z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n$$



Ces élèves cherchent à acquérir le tableau pour le placer au fond de la classe mais ils n'ont pas les moyens financiers convenables. Le peintre leur dit que tout élève de terminale D peut reproduire le dessin.
En utilisant tes connaissances mathématiques, reproduis dessin.

Leçon 9 SUITES NUMÉRIQUES

Situation complexe 1

Lors d'une visite d'étude dans une usine, des élèves en classes de terminale ont constaté la présence de deux bassins d'eau.
Interrogé par des élèves sur l'utilité de ces bassins pour l'entreprise, l'un des responsables leur a donné les informations suivantes.
« Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est reparti entre les deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
Les échanges entre les deux bassins sont modélisés de la façon suivante :
Au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B en contient 1 400 m^3.
- Chaque jour, 10% du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré dans le bassin B ;
- Chaque jour, 15% du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré dans le bassin A. »

Un élève affirme qu'après un certain nombre de jours, le bassin A aura plus d'eau que le bassin B.
Son voisin prétend que le bassin B contiendra toujours plus d'eau que le bassin A.
En utilisant tes connaissance mathématiques au programme, départage les deux élèves.

Leçon 10 CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe 1

Lors d'une conférence prononcée dans un lycée par un médecin, des élèves de Terminale D ont noté les informations suivantes.
« La capacité pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire.
Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs facteurs dont l'âge.
On peut la modéliser par la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$
où x désigne l'âge et $x \in [10 ; 90]$.

- La capacité pulmonaire reste supérieure à 4,5 L dans une certaine tranche d'âge.

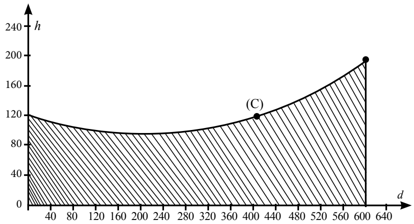
• La capacité pulmonaire moyenne entre 20 et 70 ans n'atteint pas 5 L. »

Impressionés, ces élèves cherchent à vérifier les deux dernières affirmations du médecin.

En utilisant tes connaissances mathématiques sur les intégrales, justifie les deux dernières affirmations du médecin.

Situation complexe 2

La coopérative d'un lycée a reçu le terrain représenté ci-dessous par la zone hachurée pour cultiverde la tomate.
Le géomètre qui a travaillé sur le lot du lycée affirme que la courbe (C) représentée ci-dessous est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124$; x est exprimé en mètres. Les élèves de la promotion terminale souhaitent connaître l'aire de leur terrain pour acheter les grains de tomate. Il te sollicite pour cela.



En utilisant tes connaissances sur le calcul intégral, détermine l'aire du terrain.

Leçon 11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Situation complexe

Des élèves en classe de Terminale dans un lycée, après leur formation sur l'entrepreneuriat, ont reçu un financement d'une ONG pour mener des activités dont le bénéfice servira à réhabiliter leur école. Pour cela, ils ont mis en place une petite entreprise de distribution de cahiers dans la région. Après quelques années d'activités, ils cherchent à déterminer lequel des facteurs N (nombre de points de vente à installer) ou X (frais de la promotion) a influencé le plus leur chiffre d'affaires Y. Pour cela, ils ont fait le relevé statistique des cinq dernières années qui est consigné dans le tableau suivant :

Années	2013	2014	2015	2016	2017
Nombre de point de vente n_i	10	20	40	70	100
Frais de publicité en millions x_i	1	1,7	1,9	2	2,5
Chiffres d'affaires en millions y_i	37,5	61,5	97,5	180	270,4

Détermine la variable qui influence le chiffre d'affaires.

Leçon 12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Situation complexe 1

Au cours d'une conférence prononcée dans un lycée, la conférencière a donné, entre autres, les informations suivantes :
« L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé, en carbone 14, radioactif, noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. À leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste.
On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.
Il a été démontré le nombre N(t) d'atomes ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique vérifie la relation :
$N'(t) = -\,0{,}0001238N(t)$.
Des archéologues ont découvert récemment des fragments d'os ayant perdu 30% de leur teneur en carbone. »
De retour en classe, un élève de Terminale confie à ses amis que selon lui, il est impossible de déterminer la période du carbone ^{14}C et que les os découverts par les archéologues n'ont pas plus de 100 ans. Ses amis cherchent à vérifier ces affirmations.
Détermine l'âge des os découverts par les archéologues.

Situation complexe 2

En regardant un documentaire à la télévision, un élève en classe de Terminale D a appris que : « Dans une forêt africaine, la population de singes était de 512 en l'an 2000 et de 256 en 2016. La vitesse de diminution de cette population est, à chaque instant, proportionnelle à cette population. »
Cet élève rapporte cette information à ses amis de classe et le chef de classe affirme qu'il ne devrait plus avoir de singes dans cette forêt après l'an 2030.
N'étant pas convaincu par cette affirmation, certains élèves de la classe cherchent à la vérifier.
En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, confirme ou infirme l'affirmation du chef de classe.

III Corrigés et barème critérié

Leçon 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Pour répondre au problème qui est posé, je vais utiliser les limites et la continuité
Je vais d'abord déterminer le coût de production C(x) pour x clients puis calculer la limite de C(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Notons x le nombre de dépliants à produire, où $x > 20$ et C(x) le coût de production, par client, en FCFA.
Il faut déterminer le coût C(x) et puis calculer $\lim\limits_{x\to\infty} C(x)$.
Le cout de revient de x dépliants est $4000 + 100(x - 20)$
Le nombre de clients susceptibles de lire les dépliants est $20(x - 20)$.

$$C(x) = \frac{4000 + 100(x-20)}{20(x-20)} = 5 + \frac{200}{x-20}$$

$$\lim_{x\to\infty} C(x) = 5$$

En définitive, le coût de production par client à long terme est 5 FCFA.

• **Barème**

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : **Pertinence**	• Pour répondre au problème qui est posé, je vais utiliser les limites et la continuité. • Je vais d'abord déterminer C(x). • Puis calculer la limite de C(x) lorsque x tend vers $+\infty$.	**0,75 points** 1 ind sur 3 → 0,5 2 ind sur 3 → 0,75
CM2 : **Utilisation correcte des outils mathématiques en situation**	**Déterminons le cout de production des dépliants par clients** • Le cout de revient de x dépliants est : 4000 + 100($x-20$) **Déterminons le nombre de clients potentiels** • Le nombre de client susceptibles de lire le dépliant est 20($x-20$). **Déterminons le coût de production par client** • Le coût par client est : $C(x)=\dfrac{4000+1000(x-20)}{20(x-20)}$ $C(x)=5+\dfrac{200}{x-20}$ [$ou\ C(x)=\dfrac{100x+3800}{20x-400}$ **Déterminons le coût de production par client à long terme.** • $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{200}{x-20}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}C(x)=5$ • En définitive, le coût de production par client à long terme est 5 FCFA.	**2,5 points** 1 ind sur 4 → 1 2 ind sur 4 → 1,5 3 ind sur 4 → 2,5 **Règle des 2/3** (2/3) × 4 = 3
CM3 : **Cohérence de la réponse**	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu (on trouve un nombre entier naturel supérieur à 20) - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche (formules sont juste même si le modèle est faux) - La qualité des enchainements de la démarche	**1,25 points** 1 ind sur 3 → 0,75 2 ind sur 3 → 1,25
CP : **Critère de perfectionnement** (Concision; Originalité, Bonne presentation	• Concision $C(x)=\dfrac{4000+100(x-20)}{20(x-20)}$ (non concis) $C(x)=5+\dfrac{200}{x-20}$ (concis) $C(x)=\dfrac{100x+3800}{20x-400}$ (concis) • Originalité : $C(x)=5+\dfrac{200}{x-20}$ • Présentation : Propreté de la production (Présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge)	**0,5 points** 1 ind sur 3 → 0,25 2 ind sur 3 → 0,5 **Règle des 2/3**

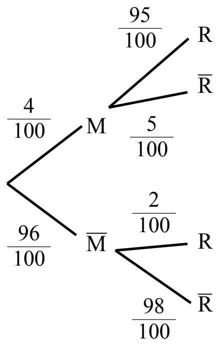
Leçon 2 PROBABILITÉ

Situation complexe 1

Pour résoudre le problème, je vais utiliser les probabilités. Considérons les évènements :

M : « Le microprocesseur est défectueux »

R : « Le microprocesseur est accepté »



Il y a erreur si le microprocesseur est défectueux et accepté ou en bon état et rejeté.

Donc la probabilité qu'il y ait une erreur est :

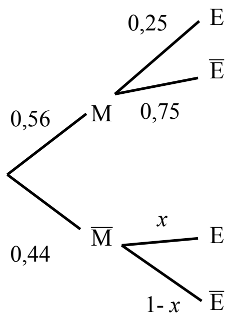
$$P(M\cap\overline{R})+P(\overline{M}\cap R)=\frac{4}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{96}{100}\times\frac{2}{100}$$
$$=0{,}0212$$

Situation complexe 2

Pour résoudre le problème, je vais utiliser les probabilités. Considérons les évènements :

M : « Le téléspectateur a regardé le match »

E : « Le téléspectateur a regardé l'émission »



2. $P(M\cap E)=0{,}56\times0{,}25$
$=0{,}14$

3. a) $P(E)=P(M\cap E)+P(\overline{M}\cap E)$
$=0{,}44x+0{,}14$

b) $P(E)=0{,}162 \Leftrightarrow 0{,}44x+0{,}14=0{,}162$
$\Leftrightarrow 0{,}44x=0{,}022$
$\Leftrightarrow x=0{,}05$

4. $P_{\overline{E}}(M)=\dfrac{P(\overline{E}\cap M)}{P(\overline{E})}$
$=\dfrac{0{,}44\times0{,}05}{1-0{,}162}$
$=0{,}02$
$=2\%$

Leçon 3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

a. Notons x la hauteur des bords relevés.

La gouttière obtenue a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont :

h = 200 cm ; L = 12 – 2x cm ; l = x cm.

Donc le volume V(x) est :

V(x) = l × L × h

V(x) = x(12 – 2x) × 200.

Soit V(x) = 400(6x – x^2)

b. Déterminons le maximum de la fonction V.

D = [0;6]

$\forall x\in D, V'(x)=800(3-x)$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$

V est croissante sur [0;3]

V est décroissante sur [3;6]

Tableau de variation

x	0		3		6
V'(x)		+	0	–	
V(x)	0	↗	3600	↘	0

Le maximum de V est 3600 cm^3 atteint pour $x = 3$ cm.

Conclusion :

La hauteur des bords relevés pour obtenir un volume maximal est donc de 3 cm.

Leçon 4 PRIMITIVES

a. Pour tout x élément de]1;3[

$B'(x) = –20(x – 1,5)$

$B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$; $B'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1,5$ et $B'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\forall x \in]1;1,5[$, $B'(x) > 0$ et $\forall x \in]1,5;3[$,

$B'(x) < 0$

D'où, B atteint son maximum en 1,5.

Donc, il devra fabriquer 1500 glaces par jour pour que le bénéfice soit maximal.

b. Pour tout x élément de]1;3[

$B(x) = –10x^2 + 30x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) et $B(1) = 20$

$B(1) = 20 \Leftrightarrow 20 + c = 20$

$\Leftrightarrow c = 0$

Doù, $\forall x \in [1 ; 3]$, $B(x) = –10x^2 + 30x$

$B(1,5) = 22,5$

Donc le bénéfice maximal est 22 500 F.

x	1		1,5		3
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$	20	$\nearrow$	22,5	$\searrow$	0

$B(1,5) = 22,5$

Donc le bénéfice maximal est 22 500 F.

Leçon 5 FONCTIONS LOGARITHMES

1. Son âge est $f(0,35)$

On a :

$f(0,35) = 1 – 8310 \ln(0,35) = 8725,0218$

Un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14 a environs 8725 ans.

2. Il s'agit de trouver x tel que :

$f(x) = 15000$

$f(x) = 15000 \Leftrightarrow 1 – 8310 \ln x = 15000$

$\Rightarrow \ln x = \frac{1-15000}{8310}$

$\Rightarrow \ln x = \frac{-14999}{8310}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{14999}{8310}}$

$\Rightarrow x = 0,1645$ (par excès à 10^{-4} près)

Soit environ 16,45 %

Leçon 6 NOMBRES COMPLEXES

On se place dans le repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

On considère les points E et F sur [DP] tels que β et γ soient des mesures respectives de $\left(\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AE})}\right)$ et $\left(\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AF})}\right)$

On note z_P , z_E et z_F les affixes respectives des points P, E et F.

On a $z_P = 8 + i$, $z_E = 5 + i$ et $z_F = 2 + i$

Donc $z_P \times z_E \times z_F = (8+i)(5+i)(2+i) = (39+13i)(2+i) = 13(1+i)(2+i) = 13(5+5i)$

$z_P \times z_E \times z_F = 65(1+i)$

On a $z_P \times z_E \times z_F = 65(1+i)$

Donc $\arg(z_P \times z_E \times z_F) = \arg(65(1+6i)) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Arg}(z_P) + \arg(z_E) + \arg(z_F) = \arg(1+i) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AP}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AE})}\right) + \text{mes}\left(\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AF})}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\alpha + \beta + \Upsilon = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

En conclusion, c'est le voisin ayant affirmé que l'égalité est vraie dans tous les cas qui a raison car quelle que soit la longueur du côté du carré, le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ conduit toujours au résultat ci-dessous.

Leçon 7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Situation complexe 1

1. $f(t) = \frac{1}{2}f(0)$

$$20e^{-0,1t} = 10$$
$$e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$$
$$-0,1t = -\ln 2$$
$$t = \frac{\ln 2}{0,1}$$
$$t = 6,93\,(\textit{par défaut à } 10^{-2} \textit{près})$$

La demi-vie est environ 7h

2. $f(t) < 0,2$

$$20e^{-0,1t} < 0,2$$
$$e^{-0,1t} < 0,01$$
$$-0,1t < \ln(0,01)$$
$$t > -\frac{\ln(0,01)}{0,1}$$
$$t > 46,1$$

Le médicament est éliminé après 46,1h

$$\forall t \in [0, +\infty[\,;$$
$$g'(t) = 20\left((-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t}\right),$$
$$g'(t) \text{ a le même signe que } \left((-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t}\right),$$
$$(-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t} > 0 \Leftrightarrow (-0,1)e^{-0,1t} + e^{-t} > 0$$
$$\Leftrightarrow (-0,1)e^{-0,1t} > -e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow (0,1)e^{-0,1t} < e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow \ln(0,1) - 0,1t < -t$$
$$\Leftrightarrow 0,9t < -\ln(0,1)$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{\ln(10)}{0,9}$$
$$\left[\frac{\ln(10)}{0,9} = 2,56\,(\textit{par excès à } 10^{-2} \textit{près})\right]$$
$$\forall t \in \left]0, \frac{\ln(10)}{0,9}\right[, g'(t) > 0 \text{ et}$$
$$\forall t \in \left]\frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty\right[, g'(t) < 0$$

D'où, g atteint son maximum en $\frac{\ln(10)}{0,9}$

$\frac{\ln(10)}{0,9} = 2,56$ (arrondi d'ordre 2)

La concentration plasmique du médicament est maximal après 2,56 h

Leçon 8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Pour reproduire, je vais utiliser nombres complexes et géométrie du plan.

Je vais munir le plan complexe d'un repère orthonormé direct d'origine O. Puis justifier que le point A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

J'en déduis que triangle OA_nA_{n+1} est un demi triangle équilatéral, rectangle en A_n.

Le symétrique B_n du point A_n par rapport au point A_{n+1} est tel que le triangle OA_nB_n est équilatéral direct.

De ce fait, le point A_{n+1} est le milieu du côté $[A_nB_n]$.

- Justifions que pour tout entier naturel n, A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

z_{n+1} est de la forme az_n où a est un nombre complexe non nul.

$$a = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \text{ où } \theta = Arg(a)$$
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

D'où, A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

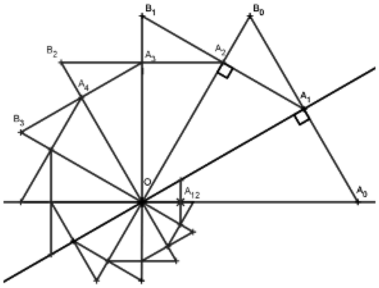
D'où, le triangle OA_nA_{n+1} est un demi triangle équilatéral, rectangle en A_{n+1}.

- Notons B_n le symétrique de de A_n par rapport à A_{n+1}.

Le triangle OA_nB_n est un triangle équilatéral.

Le point A_{n+1} est le pied de la médiatrice du triangle OA_nB_n issue du point O.

Je place les points O et A_0 puis je construis successivement les points A_n ($n \geq 1$) à l'aide de la médiatrice de $[A_nB_n]$.



Leçon 9 SUITES NUMÉRIQUES

Pour les départager, je vais utiliser les suites numériques.

Pour tout entier naturel n, notons :

a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;

b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

Ainsi $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$

1. Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n.

Tous les jours

- 15% de l'eau du bassin B est transféré au bassin A soit $0{,}15b_n$;
- 10% de l'eau du bassin A est transféré au bassin B, il reste donc dans le bassin A : $0{,}9a_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0{,}15(2200 - a_n) + 0{,}9b_n$$

$Or, a_n + b_n = 2200,$ donc

$$a_{n+1} = 0{,}15(2200 - a_n) + 0{,}9a_n$$
$$= 330 + 0{,}75a_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$

2. Posons $u_n = a_n - 1320$, pour tout entier naturel n

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 1320 = \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320$$
$$= \frac{3}{4}a_n - 990$$
$$= \frac{3}{4}(a_n - 1320)$$
$$= \frac{3}{4}u_n$$

Donc, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$

On en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = -520\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Comme $u_n = a_n - 1320$ on $a_n = u_n + 1320$

Donc $a_n = 1320 + 520\left(\frac{3}{4}\right)^n$

3. On cherche n tel que $a_n > b_n$

$a_n > 2200 - a_n$

$a_n > 1100$

$1320 - 520\left(\frac{3}{4}\right)^n > 1100$

$-520\left(\frac{3}{4}\right)^n > -220$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{11}{6}$

$n\ln\frac{3}{4} < \left(\frac{11}{6}\right)$

$n > \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

Et, $\frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 2{,}990$ (arrondi d'ordre 3)

$n > 2{,}9901$

À partir du 3ème jours, le basin A a plus d'eau que le bassin B.

C'est l'élève qui a fait la 1ère affirmation qui a raison.

Situation complexe Maths Tle D 20102021.indd 13 20/10/2021 16:02

Leçon 10 CALCUL INTÉGRAL

Situation complexe 1

Pour justifier les deux affirmations, je vais utiliser les calcul intégral.

1. Affirmation 1

Étudions la fonction *f* afin de la comparer à 4,5

$\forall\ x \in [10;90], f'(x) = 110\ \dfrac{3-\ln x}{x^3}$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [10\ ;\ e^3]$ donc *f* est croissante sur $[10\ ;\ e^3]$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [e^3\ ;\ 90]$ donc *f* est décroissante sur $[e^3\ ;\ 90]$
- $f'(e^3) = \dfrac{110}{e^3} \approx 5{,}46$
- sur $[10\ ;\ e^3]$, *f* est continue et strictement croissante et $4{,}5 \in f([10\ ;\ e^3]) = [3{,}3;5{,}48]$ donc il existe $\alpha \in [10\ ;\ e^3]$ tel que $f(\alpha) = 4{,}5$

de même il existe un $\beta \in [e^3;90]$ tel que $f(\beta) = 4{,}5$

On déduit que pour tout $x \in [\alpha;\beta]$,

$f(x) \leq 4{,}5$

Conclusion : Dans la tranche d'âge $[\alpha\ ;\ \beta]$, la capacité pulmonaire est supérieur à 4,5 L

2. Affirmation 2

Calculons la valeur moyenne *f*

$$m = \frac{1}{70-20}\int_{20}^{70} \frac{110(\ln x - 2)}{x}dx$$

$$m = \frac{110}{50}\int_{20}^{70} \frac{1}{x}(\ln x - 2)dx$$

$m = \dfrac{11}{5}\left[\dfrac{1}{2}(\ln x - 2)^2\right]$ (à corriger en mettant les bornes)

$$m = \frac{11}{10}\left[\frac{1}{2}(\ln 70 - 2)^2 - (\ln 20 - 2)^2\right]$$

$m \approx 4{,}06$ L ; $4{,}06 < 5$.

Donc la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans est inférieure à 5L.

Situation complexe 2

1. Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0;600].

$$f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124$$

Une primitive F de f définie par:

$$F(x) = \frac{x^3}{3\times 1600} - \frac{x^2}{8} + 124x$$

1. Déterminons l'aire de la partie limitée par la courbe et les droites d'équation

$x = 0$ et $x = 600$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{600} f(x)\,dx\ u.a \\ &= (F(600) - F(0))u.a \\ &= (74400 - 0) \\ &= 74400\ u.a \end{aligned}$$

- L'aire du terrain est 74400×1600 soit $119\ 040\ 00\ m^2$

Leçon 11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Pour repondre au problème posé, je vais utiliser les statistiques à deux variables.

1. Déterminons le coefficient de corrélation *r* entre N et Y :

$$\overline{N} = \frac{10+20+40+70+100}{5} = 48$$

$$\overline{Y} = \frac{37{,}5+61{,}5+97{,}5+180+270{,}4}{5} = 129{,}4$$

$$V(N) = \frac{10^2+20^2+40^2+70^2+100^2}{5} - 48^2 = 1096$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{37{,}5^2+61^2+97{,}5^2+180^2+270{,}4^2}{5} - 129{,}4^2 \\ &= 7302{,}9976 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(N,Y) &= \frac{10\times37{,}5+20\times61{,}5+40\times97{,}5+70\times180+100\times270{,}4}{5} - 48\times129{,}4 \\ &= 2819{,}76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{Cov(N,Y)}{\sqrt{V(N)}\times\sqrt{Y}} \\ &= \frac{2819{,}76}{\sqrt{1096}\times\sqrt{7302{,}9976}} \end{aligned}$$

$r_1 = 0{,}99$ (par défaut à 10^{-2} près)

2. Déterminons le coefficient de corrélation r entre X et Y :

$$\overline{X} = \frac{1+1,7+1,9+2+2,5}{5} = 1,82$$

$$V(X) = \frac{1^2+1,7^2+1,9^2+2^2+2,5^2}{5} - 1,82^2$$
$$= 0,2376$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1\times37,5+1,7\times61,5+1,9\times97,5+2\times180+2,5\times270,4}{5} - 1,82\times129,4$$
$$= 37,1884$$

$$r_2 = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\times\sqrt{Y}} = \frac{2819,76}{\sqrt{1096}\times\sqrt{7302,9976}}$$

$= 0,89$ (par défaut à 10^{-2} près)

3. $0,87 \leq |r_2| < |r_1| < 1$

D'où le nombre de points de vente influence plus que les frais publicitaire en millions de francs CFA.

Leçon 12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Situation complexe 1

1. La fonction $N : t \longmapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle

$f' = 0{,}0001238f$.

Donc, $N(t) = ke^{-0,0001238t}$, $k \in \mathbb{R}$

$N(0) = N_0 \Leftrightarrow ke^0 = N_0 \Leftrightarrow k = N_0$

Donc $N(t) = N_0e^{0,0001238t}$

2. Il faut trouver la valeur pour laquelle :

$N(t) = \frac{1}{2}N_0$

$N(t) = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow N_0e^{0,0001238t} = \frac{1}{2}N_0$

$\Leftrightarrow 0{,}0001238t = \ln(0{,}5)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{0,0001238} \approx 5599$ ans

La période (ou demi vie) du ^{14}C est 5599 ans.

3. Puisque les fragments ont perdu 30% de leur teneur en ^{14}C, il leur en reste 70%. Il faut trouver la valeur de t telle que :

$N(t) = 0{,}7\ N_0$

$N(t) = 0{,}7\ N_0 \Leftrightarrow N_0e^{0,0001238}t = 0{,}7\ N_0$

$\Leftrightarrow 0{,}0001238t = \ln(0{,}7)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,7)}{-0,0001238} \approx 2281$ ans

Les fragments ont donc environ 2281 ans.

Situation complexe 2

1. La vitesse de diminution de la population est $p'(t)$, comme elle est à chaque instant proportionnelle à cette population, on a :

$p'(t) = ap(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$

On a alors $p(t) = ke^{at}$, avec $k \in \mathbb{R}$

Ainsi : $p(0) = 512 \Leftrightarrow k = 512$

Donc $p(t) = 512e^{at}$

On a : $p(16) = 256 \Leftrightarrow 512e^{16a} = 256$

$\Leftrightarrow e^{16a} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow 16a = \ln(0{,}5)$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{16}\ln(\frac{1}{2})$

Donc, $p(t) = 512e^{\frac{1}{16}\ln(\frac{1}{2})}$

2. En l'an 2030, on a : $t = 30$

On a : $p(30) = 512e^{\frac{1}{16}\ln(\frac{1}{2})} \approx 139{,}6$

En l'an 2030 il y aura encore environ 139 singes.

L'affirmation du chef de classe n'est pas juste.

Dans la même collection