Exercice 1 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.on prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3-8=0$
2. On désigne par $A, B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $a, b\ et\ c$ définies par $a=2,\ b=-1+i\sqrt{3}\ \ et\ \ c=-1-i\sqrt{3}$

   On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $B'=r'(B)\ et\ C'=r(C)$ et on note $b'\ et\ c'$ les affixes respectives de $B'\ et\ C'$.

   a. Placer les points $A, B\ et\ C$ dans le repère $(o;\vec{u};\vec{v})$.on complètera la figure au fur et à mesure.

   b. Montrer que $b'=2+\sqrt{3}+3i$.

   c. Montrer que $b'\ et\ c'$ sont des nombres conjugués.
3. On appelle $M, N, P, et\ Q$ les milieux respectifs des segments $[CB], [BB'], [B'C']$ et $[C'C]$. On note $m, n, p\ et\ q$ leurs affixes.

   a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ puis en déduire que les points $O, N\ et\ C$ sont alignés.

   b. Montrer que $n+1=i(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

   c. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(o;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 1cm) on considère les points $M\ et\ M'$ d'affixes respectives $z\ et\ z'$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}'$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\Re e\left(z'\bar{z}\right)=0$.

2. Montrer que les points $O, M\ et\ M'$ sont alignés si, et seulement si, $\operatorname{Im}\left(z'\bar{z}\right)=0$

3. Soient $N, P, A, B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $z^2-1;\ \frac{1}{z^2}-1;\ 4+i;\ 4-i\ \ et\ -i$ .On appelle $\vec{k}$ le vecteur d'affixe $-3+3i$ et S l'image de B par la translation du vecteur $\vec{k}$.

   a. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

   b. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

c. En déduire l'ensemble des points M d'affixes z tels que les points O, N *et* P soient alignés.

d. Calculer l'affixe du point S.

e. Démontrer que les points B, A, S *et* C appartiennent à un même cercle $(\wp)$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer $(\wp)$

Exercice 3 (7 points)

I. Soit la fonction f *définie de* $IR \to IR$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer deux nombres réels a *et* b tels que pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur $]1\,;+\infty[$ prenant la valeur 8 en 3

II. On considère la fonction f *de* $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \to IR$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout élément x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.
2. Déterminer la primitive $G(x)$ de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ qui s'annule en 0.
3. En déduire la primitive $H(x)$ de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$
4. Trouver indépendamment des questions précédentes une primitive $K(x)$ de la fonction $k(x) = \sin^5 x$ et $T(x)$ de la fonction $t(x) = \sin x \times \cos 2x$

Bonne inspiration !