COLLEGE SAINTE FOI	DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES	ANNEE : 2020 - 2021
CLASSES : TB		DUREE : 2H30

EXERCICE 1

Une mini-entreprise *Junior Achievement* a mis au point un nouveau produit ''Gadget'' et cherche à en fixer le prix de vente. Pour cela, une enquête est réalisée auprès des clients potentiels. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100
y_i	420	360	300	240	180	120	60	3

Où y_i désigne le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs est x_i.

1- Représenter le nuage de points correspondant à cette série statistique.

Echelle : En abscisses 1 cm pour 10 000F
En ordonnées 1 cm pour 30 exemplaires de produit

On prendra comme coordonnées de l'origine du repère (10 000,3)

2- Faire le tableau de calcul

Dans la suite de l'exercice les résultats des calculs seront donnés à 10^{-3} près

3- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points puis le placer dans le repère.
4- a) Calculer la variance de x et la covariance de y
b) Calculer la covariance entre x et y.
5- Déduire le coefficient de corrélation linéaire r. La valeur obtenue justifie – t – elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
6- Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
7- Les frais de conception du produit se sont élevés à 50 000 F. Le prix de fabrication de chaque exemplaire est de 225 F. Démontrer que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité : $z = -5{,}975x^2 + 600{,}094x - 184{,}719$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.
8- Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser le bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$\boldsymbol{g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x}$.

1- a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_g .
b) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
c) Dresser son tableau de variation.
2- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.
b) Justifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.
3- Justifier que : $\forall\, x \in]0;\alpha[,\ g(x) < 0$
$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1- a) Calculer la limite de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.
b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2- a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

3- On admet que f est dérivable sur]0 ;+ ∞[.

a) Démontrer que $\forall\ x\ \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

c) En utilisant la question 2-a) de la partie A, démontrer que $f(\alpha) = \frac{6\alpha^3-1}{2\alpha^2}$ puis donner l'arrondi d'ordre 1 de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha = 0,86$.

4- Soit h la restriction de f à l'intervalle [1 ; + ∞[.

a) Démontrer que h est une bijection de [1 ; + ∞[dans un intervalle K à déterminer.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.
Donner le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.

5- Tracer la droite (Δ), la courbe (C) de f puis la courbe ($C_{h^{-1}}$) de h^{-1}.