**ANNEE SCOLAIRE :** ........................................................................................................

**ETABLISSEMENT :** ........................................................................................................

**CLASSE :** ........................................................................................................

## ELEVE

NOM : ........................................................................................................

PRENOMS : ........................................................................................................

N° MATRICULE : ........................................................................................................

TELEPHONE : ........................................................................................................

GROUPE SANGUIN : ........................................................................................................

## PROFESSEUR

NOM : ........................................................................................................

TELEPHONE : ........................................................................................................

## PERSONNE A CONTACTER EN CAS D'URGENCE

NOM : ........................................................................................................

TELEPHONE : ........................................................................................................

*« il est dur d'échouer ;mais il est pire de n'avoir jamais tenté de réussir. »*

**FRANKLIN DELANO ROOSEVELT**

# SOMMAIRE

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main


# 1. DENOMBREMENT

## Partie 1 : RAPPELS DE DENOMBREMENT

### 1) Ensembles finis

**Définition**

A est un ensemble fini. Le nombre d'éléments que contient A est appelé cardinal de A. On le note card (A).

**Propriété :** soit A un ensemble fini, E et F deux sous ensembles de A. On a :

- $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$.
- Si $E \cap F = \emptyset$ alors $card(E \cup F) = card(E) + card(F)$.
- $\overline{E}$ désignant le complémentaire de E dans A, $card(\overline{E}) = card(A) - card(E)$.

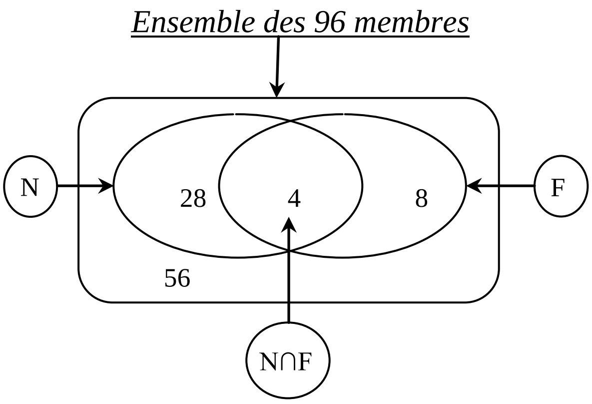
**Exercice 1.1 résolu**

Une association de 96 membres propose différentes activités sportives à ses membres dont la natation et le football. 12 membres s'inscrivent pour la natation et 32 pour le football dont 4 pour les deux.
On note N l'ensemble des membres inscrits pour la natation et F ceux inscrits pour le football.

1. Déterminer le nombre des adhérents inscrits pour la natation ou le football.
2. Déterminer le nombre des adhérents inscrits uniquement pour le football.
3. Déterminer le nombre des adhérents qui ne sont inscrits ni au football ni à la natation.

***Résolution***

*Diagramme*




*1. L'ensemble des adhérents inscrits au football ou à la natation est $F \cup N$, et on a*

$card(F \cup N) = card(F) + card(N) - card(F \cap N)$.
$= 32 + 12 - 4$
$= 30$.

*2. L'ensemble des adhérents inscrits uniquement au football est $F \setminus F \cap N$, et on a :*

$card(F \setminus F \cap N) = card(F) - card(F \cap N)$.
$= 32 - 4$
$= 28$.

*3. Le nombre des adhérents qui ne sont inscrits au football ni en natation est :*

$96 - card(F \cup N) = 96 - 30$
$= 66$

**Exercice 1.2**

une station radio émet la même publicité à 15 heures et 16 heures. A 15 heures, elle est écoutée par 10325 auditeurs et à 16 heures par 18633 auditeurs. Combien de personnes ont écouté cette publicité si :

a) ceux qui l'ont écouté à 15 heures ne l'ont plus écouté à 16 heures ?
b) 8479 personnes l'ont écouté à 15 heures puis à 16 heures ?

### 2) Produits cartésiens

**Propriété :** soit E et F deux ensembles finis. On a :

- $Card (E \times F) = Card (E) \times Card (F)$.
- $Card (E^n) = [Card (E)]^n$.

**Exercice 1.3**

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à code.
1. Le code est composé de cinq chiffres.
 a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 b) Combien de codes commencent par le chiffre 0 ?
 c) Combien de codes sont multiples de le chiffre 5 ?
 d) Combien de codes contiennent exactement de deux fois le chiffre 4 ?
2. Le code est composé de trois chiffres suivis de deux lettres de l'alphabet français.
 a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 b) Combien de codes contiennent des lettres identiques ?
 c) Combien de codes se terminent par AB ?
 d) Combien y a-t-il de codes dont les lettres sont des voyelles ?

***Indication***

*Notons quelques exemples de codes : 02235 ; 25648 ; 33377.*
*1.a) Le nombre de codes possibles est 100.000*

*1.b) Exemples de codes commençant par 0 : 02235 ; 00110 ; 09840.*
*Le nombre est 10.000.*

*1.c) Un code multiple de 5 se termine par 0 ou par 5. Exemple : 02250 ; 54515.*
*Le nombre est 20.000.*

*1.d ) Le nombre de code est 729×10 = 7.290*

*2. Notons quelques exemples de codes : 154LD ; 223AA ; 999BA ; 067UY.*
*2.a) Le nombre de codes possibles est 676.000*

*2.b) Remarquons qu'ici, il ya 26 couples constitués de lettres identiques : AA ; BB ; CC ; … ; ZZ.*
*Le nombre de codes est* $10^3 \times 26 = 26.000$

*2.c) Le nombre de codes est* $10^3 \times 1 = 1.000$

*2.d) Le nombre de codes est* $10^3 \times 6^2 = 36.000$

**3) Arrangements – Permutations**
**Propriété**
E est un ensemble contenant n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E choisis parmi n est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{p facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Le nombre de permutations des n éléments de E est n ! = n×(n -1)× … ×3×2×1.

On a : 0 ! = 1 et $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ avec $0 \le p \le n$.

**Exercice 1.4**

1. Chacune des huit lettres du prénom CAROLINE est inscrite sur un carton qui est placé dans une urne. On tire successivement et sans remise cinq cartons de l'urne pour former dans l'ordre du tirage un mot de cinq lettres ayant un sens ou non.
 a) Combien y a-t-il de mots possibles ?
 b) Combien de mots commencent par la lettre C ?
 c) Combien de mots commencent par la lettre C ou par la lettre L ?
 d) Combien de mots se terminent par une voyelle ?
 e) Combien y a-t-il de mots où les lettres C et E sont voisines dans cet ordre ?

f) Combien y a-t-il de mots où les lettres C et E sont simplement voisines ?

2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CAROLINE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CLEMENTS ?

***Indication***

*1.a) Le nombre de tirages est :* $A_8^5 = 8\times7\times6\times5\times4 = 6.720$

*1.b) Le nombre de mots possible est :* $A_1^1 \times A_7^4 = 1\times840 = 840$.

*1.c) D'après 1.b), il y a 840×2 = 1680 mots commençant par la lettre C ou la lettre L.*

*1.d) Le nombre de mots possible est :* $A_4^1 \times A_7^4 = 4\times840 = 3.360$

*1.e) Le nombre total de mots où les lettres C et E sont voisines dans cet ordre est : 4×120 = 480.*

*1.f) il y a 960 mots possibles si les lettres C et E sont simplement voisines.*

*2. Le nombre de permutations est :* $8\,! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40.320$

*3.Le nombre de permutations distinctes est :* $\frac{8\,!}{2\,!} = 20.160$

**4) Combinaisons**

**Propriété** :

E est un ensemble contenant n éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E choisis parmi n est : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $0 \le p \le n$.

**Exercice 1.5**

Le personnel d'une entreprise est composé de 12 hommes et 8 femmes. On désire former un comité de cinq personnes choisis parmi les membres de ce personnel.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Parmi ces comités, combien comprennent :
   a) Exactement trois hommes ?
   b) Aucun homme ?
   c) Au moins un homme ?
   d) Plus d'hommes que de femmes ?

***Résolution***

1. *Le nombre de comités est :* $C_{20}^5 = 15.504$

*2.a) Le nombre de comités est alors :*

$C_{12}^3 \times C_8^2 = 220\times28 = 6.160$

*2.b) Le nombre de comités est alors :* $C_8^5 = 56$.

*2.c) Le nombre de comités contenant au moins un homme est : 15.448*

*2.d) Avoir plus d'hommes que de femmes, constitue l'un des cas suivants :*

*- 3 hommes et 2 femmes : nombre de cas =* $C_{12}^3 \times C_8^2 = 220\times28 = 6.160$

*- 4 hommes et 1 femme : nombre de cas =* $C_{12}^{4} \times C_{8}^{1}$ *= 495×8 = 3.960*

*- 5 hommes : nombre de cas =* $C_{12}^{5}$ *= 792*

*Soit au total : 6.160 + 3.960 + 792 = 10.912*

**EXERCICE 1.6**

Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher, dont trois sont rouges, deux sont vertes et quatre sont blanches.

I/ On tire successivement avec remise 3 boules de cette urne.
Calculer :
Le nombre de tirages possibles
Le nombre de tirages dont la première boule tirée est blanche
Le nombre de tirages contenant exactement une boule blanche
Le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges
Le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur
Le nombre de tirage contenant trois boules de couleurs deux à deux différentes

II/ On tire successivement sans remise 3 boules de cette urne.
Calculer :
Le nombre de tirages possibles
Le nombre de tirages dont la première boule tirée est blanche
Le nombre de tirages contenant exactement une boule blanche
Le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges
Le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur
Le nombre de tirage contenant trois boules de couleurs deux à deux différentes

III/ On tire simultanement trois boules de cette urne
Calculer :
Le nombre de tirages possibles
Le nombre de tirages contenant exactement une boule blanche
Le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges
Le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur
Le nombre de tirage contenant trois boules de couleurs deux à deux différentes

# 2. PROBABILITES

**1. Probabilité d'un évènement**

**a) définition**

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire donneé.

$\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω.

On appelle probabilité sur Ω, toute application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans [0 ; 1] vérifiant :

- $p(\emptyset) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$.
- Pour tout évènement $A = \{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n\}$ de Ω, on a $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n)$. On dit que la probabilité de A est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent A.

**b) Propriétés**

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω, On a :

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$.
- Si $A\cap B = \emptyset$ alors $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

**Exercice 2.1**

Un dé dont les faces sont numéroteés de 1 à 6 est truqué de telle maniére que l' apparition du numéro 5 est deux fois « plus probable » que l'apparition des autres numéros.

a) Calculer la probabilité de l' apparition de chaque numéro.
b) Calculer les probabilités des évènements suivants :
- obtenir un nombre pair
-obtenir un nombre impaire

**Indication :**

a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(6) = \frac{1}{7}$ et $P(5) = \frac{2}{7}$

**c) Equiprobabilité**

Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisé.

Si A est un évènement de Ω, alors, en cas d'équiprobabilité on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On dit aussi $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombres de cas possibles}}$

**Exercice 2.2**

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 4 rouges, 2 bleues et 3 vertes. Une expérience aléatoire consiste à tirer deux boules de l'urne.

1. Les boules sont tirées simultanément. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) R : « les deux boules tirées sont rouges ».
   b) C : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».
2. Reprendre les mêmes questions les boules sont tirées successivement avec remise.

***Indication***

*1. Ω étant l'univers de cette expérience aléatoire. On a card(Ω) =* $C_9^2$ *= 36.*

*a)* $P(R) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

*b)* $P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

*2. Ω' étant l'univers de cette expérience aléatoire. On a card(Ω') =* $9^2$ *= 81.*

*a)* $P(R) = \frac{16}{81}$

*b)* $P(C) = \frac{29}{81}$

**Exercice 2.3**

Une boite contient douze gâteaux emballés séparément dans douze paquets identiques. Cinq de ces paquets sont parfumés à la vanille, quatre autres au chocolat et les trois autres à la banane.

1. Un enfant choisit simultanément trois gâteaux.
   a) Combien a-t-il de choix ?
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants
      A : « l'enfant mange un gâteau de chaque sorte »
      B : « l'enfant mange 3 gâteaux identiques »
      C : « l'enfant mange exactement deux variétés de gâteaux ».
2. L'enfant mange un gâteaux le matin, un à midi et un le soir.
   a) Combien a-t-il de choix possibles ?
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      D : « l'enfant mange un gâteau à la vanille le matin, un à la banane le midi et un au chocolat le soir »
      E : « l'enfant mange un gâteau de chaque sorte »
      F : « l'enfant mange deux gâteaux à la banane et un au chocolat »

***Indication***

***1.a) Le nombre de choix possibles***

$C_{12}^3 = 220$.

***b) Probabilité de l'évènement A***

$p(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

***Probabilité de l'évènement B***

$p(B) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

***Probabilité de l'évènement C***

$p(C) = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$

**Exercice 2.4**

Une planche comporte dix trous numérotés de 1 à 10.

Un jeu consiste à placer trois billes dans les trous de cette planche ;chaque trou ne pouvant contenir qu'au plus une bille.

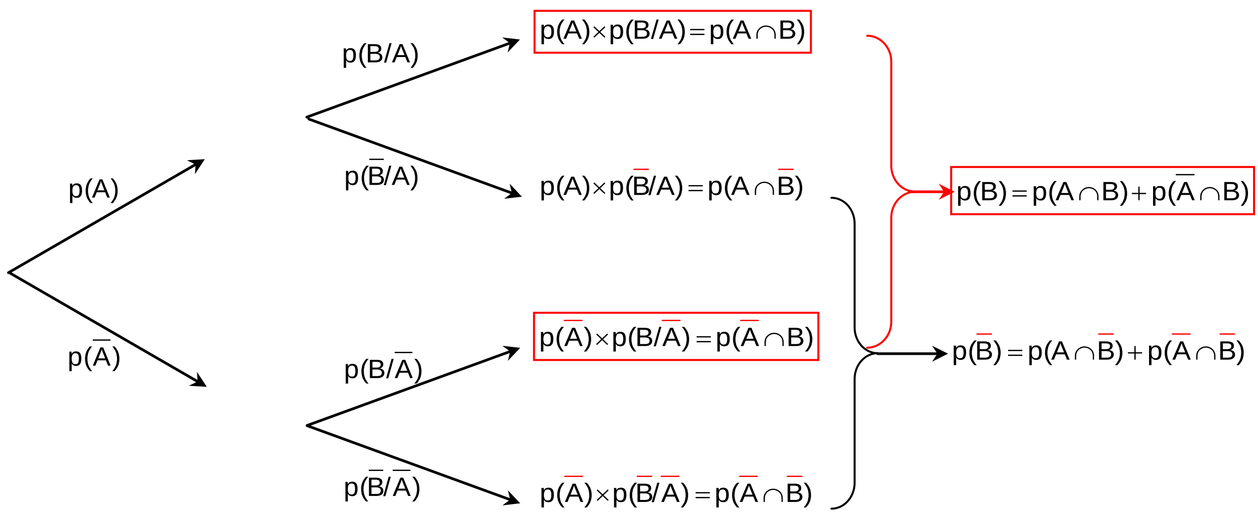
1) On dipose de trois billes identiques et indiscernables au toucher.
   Combien de distribution possibles de ces billes dans les trous peut-on avoir ?
2) On dispose désormais de trois billes numérotés 1 ;2 ;3.
   En admettant que les différentes distributions de ces billes dans les trous sont équitables, calculer la probabilité de chacun des évènement suivants :

A « la bille numéro 1 est placé dans le trou numéro 1 »
B «la bille numéro 3 est placée dans un trou portant un numéro carré parfait »
C « deux billes exactement sont dans les trous portant leurs numéros respectifs »
D « les billes numéro 1 et numéro 2 occupent les trous numéros 1,4 ou 9.
E « D « les billes numéro 1 ou numéro 2 occupent les trous numéros 1,4 ou 9.

**2. Probabilité conditionnelles**
**a) Définition**

Soit A un évènement de l'univers Ω de probabilité non nulle pour tout évènement B de Ω, la probabilité de B sachant A est réalisé (ou simplement probabilité de B sachant A) est le nombre réel positif noté $p_A(B)$ ou $p(A/B)$ et défini par $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

**b) Schématisation d'une probabilité conditionnelle à deux générations à l'aide d'un arbre pondéré :**




**b) Propriété**

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. On a :

$$\begin{aligned} p(A\cap B) &= p(A)\times p(B/A) \\ &= p(B)\times p(A/B). \end{aligned}$$

**NB :** De façon générale, on a : $p(A/B) \neq p(B/A)$.

**c) Evènements indépendants**
**Définition**

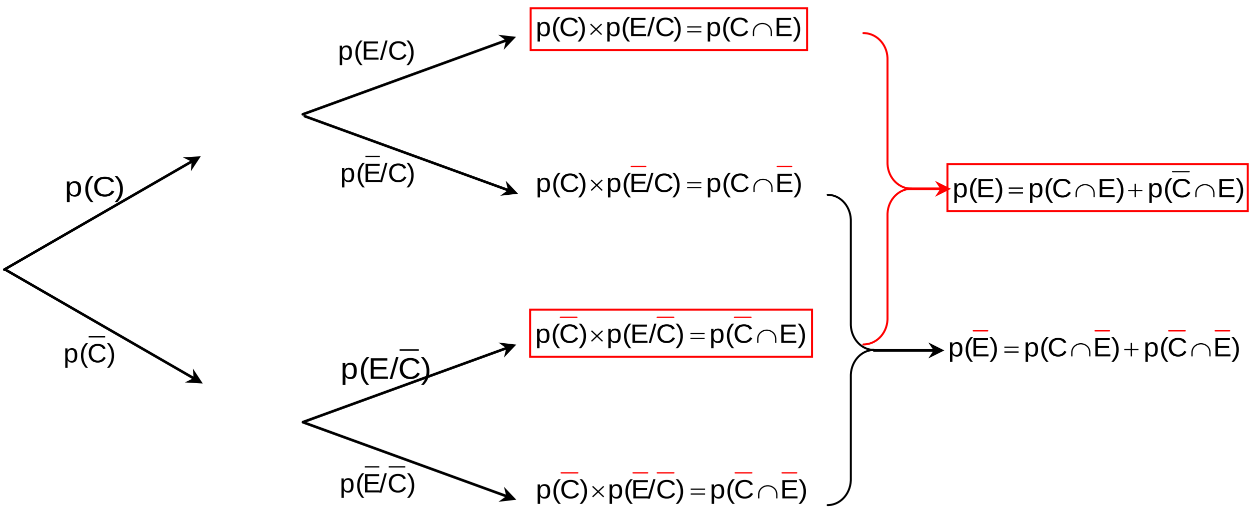
Deux évènements A et B sont indépendants lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre. On a :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$
$\Leftrightarrow p(A/B) = p(A)$
$\Leftrightarrow p(B/A) = p(B)$.

**Exercice 2.5 resolu**

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :
65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes.
Parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.
On interroge une personne au hasard.
1. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3. En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
4. Sachant qu'une personne interrogée n'est pas écologiste, quelle est la probabilité qu'elle soit contre la construction du barrage ?
NB : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements :
C : « La personne interrogée est contre la construction du barrage » et $\overline{C}$ son évènement contraire.
E : « La personne interrogée est écologiste » et $\overline{E}$ son évènement contraire.

***Résolution***




*D'après l'énoncé, on a :*
*$p(C) = 0{,}65 \Rightarrow p(\overline{C}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.*

*$p(E/C) = 0{,}70 \Rightarrow p(\overline{E}/C) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$*
*$p(E/\overline{C}) = 0{,}20 \Rightarrow p(E/\overline{C}) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.*

*1. L'événement « une personne interrogée est opposée à la construction du barrage et est écologiste » est $C\cap E$ . $p(C\cap E) = p(C)\times p(E/C) = 0{,}65\times 0{,}30 = 0{,}195$.*

*2. L'événement « une personne interrogée est pour la construction du barrage et est écologiste » est $\overline{C}\cap E$ . $p(\overline{C}\cap E) = p(\overline{C})\times p(E/\overline{C}) = 0{,}35\times 0{,}20 = 0{,}07$.*

*3. L'évènement « une personne interrogée est écologiste est E. $p(E) = p(C\cap E) + p(\overline{C}\cap E) = 0{,}265$*
*4. Il s'agit de l'évènement « une personne interrogée est contre la construction du barrage sachant qu'elle n'est pas écologiste » noté $C/\overline{E}$ .*

$p(C/\overline{E}) = \dfrac{p(C\cap\overline{E})}{p(\overline{E})}$ avec $p(C\cap\overline{E}) = p(C)\times p(\overline{E}/C) = 0{,}70\times0{,}30 = 0{,}21$

et $p(E) = 1 - p(E) = 1 - 0{,}265 = 0{,}735$.

$p(C/\overline{E}) = \dfrac{0{,}21}{0{,}735} = 0{,}286$.

**Exercice 2.6**

Une maladie atteint 3 % d'une population.
Dans ce qui suit, on appelera « malade » les individus atteint de cette maladie et « bien portant » ceux qui ne le sont pas.
On dispose d'un test pour la détecter.
Ce test donne les résultats suivants :
Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs.
Chez les individus bien portant, 98% des test sont négatifs.
Calculer la probabilité qu'un individu malade ait un test négatif
Calculer la probabilité qu'un individu soit malade et ait un test négatif
Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade*
Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif

**3. variables aléatoires**

**a) définition**

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$. On a : $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$e_i \mapsto x_i$

On note X(Ω) l'ensemble des valeurs que X est susceptible de prendre.
L'évènement « X prend la valeur xi » est noté $(X = x_i)$.

**b) loi de probabilité**

$X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ et p une probabilité définie sur Ω.
Définir la loi de probabilité de X, c'est donner pour chaque valeur $x_i$ prise par X, la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$ notée $p(X = x_i)$.
On vérifie que $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ldots + p(X = x_n) = 1$.

**Exercice 2.7 résolu**

Exercice 5 p 332 livre Ciam

***Résolution***

*1.* $p(A) = \dfrac{9}{500}$

$p(B) = \dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$

*2. La somme total de vente des tickets est : 500×500 = 250.000*
*La somme totale de récompenses est : 62.000 + 9×7.000 + 50×500 = 150.000*
*Le bénéfice réalisé : 250.000 – 150.000 = 100.000*

*3. Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire :*

*a)* $X(\Omega) = \{-500 ; 0 ; 6500 ; 61500\}$.

*b)* $p(-500) = \dfrac{440}{500} = \dfrac{44}{50}$ ; $p(0) = \dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$ ; $p(6500) = \dfrac{9}{500}$ ; $p(61500) = \dfrac{1}{500}$

| *X* | *-500* | *0* | *6500* | *61500* |
|---|---|---|---|---|
| *P(X)* | $\frac{44}{50}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{500}$ | $\frac{1}{500}$ |

*c)* $E(X) = (-500)\times\frac{44}{50} + 0\times\frac{1}{10} + 6500\times\frac{9}{500} + 61500\times\frac{1}{500}$

$= -200.$

**c) Fonction de répartition**

**Définition**

On appelle fonction de répartition de la variable X l'application $F : \mathbb{R} \to [0 ; 1]$ $x \mapsto p(X \leq x)$.

En supposant que $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ et posons $p_i = p(X = x_i)$. Alors :

$x \in ]-\infty ; x_1[$, $F(x) = 0$,

$x \in [x_1 ; x_2[$, $F(x) = p_1$,

$x \in [x_2 ; x_3[$, $F(x) = p_1 + p_2$,

………..

$x \in [x_i ; x_{i+1}[$, $F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$,

$x \in [x_n ; +\infty[$, $F(x) = 1$.

F est une fonction croissante en escalier.

**Exercice 2.8 résolu**

Un dé tétraédrique pipé dont les faces numérotées de 1 à 4 est tel que : p(1) = p(3) = 0,3 et p(2) = p(4) = 0,2. On lance le dé deux fois de suite ; on note à chaque lancer le numéro de la face supérieure. On désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme en bâtons.
2. Déterminer et représenter la fonction de représentation de X.

***Résolution***

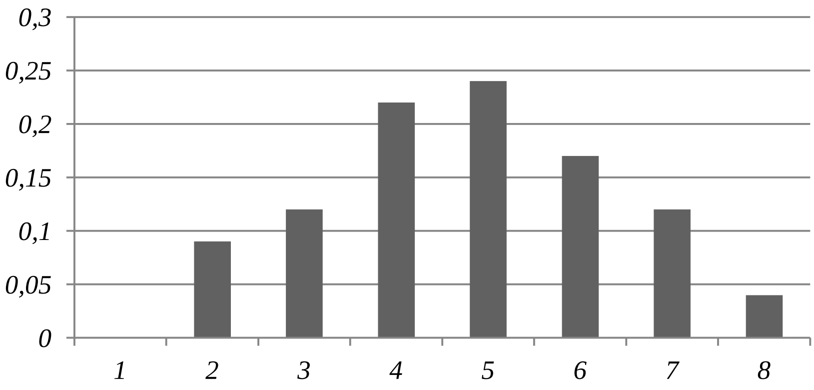
*1. loi de probabilité de X*

*Ω est l'univers de cette expérience aléatoire. A l'aide d'un tableau à double entrée on obtient que*

$X(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

| *X* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P(X)* | *0,09* | *0,12* | *0,22* | *0,24* | *0,17* | *0,12* | *0,04* |

*Diagramme en bâtons de X.*

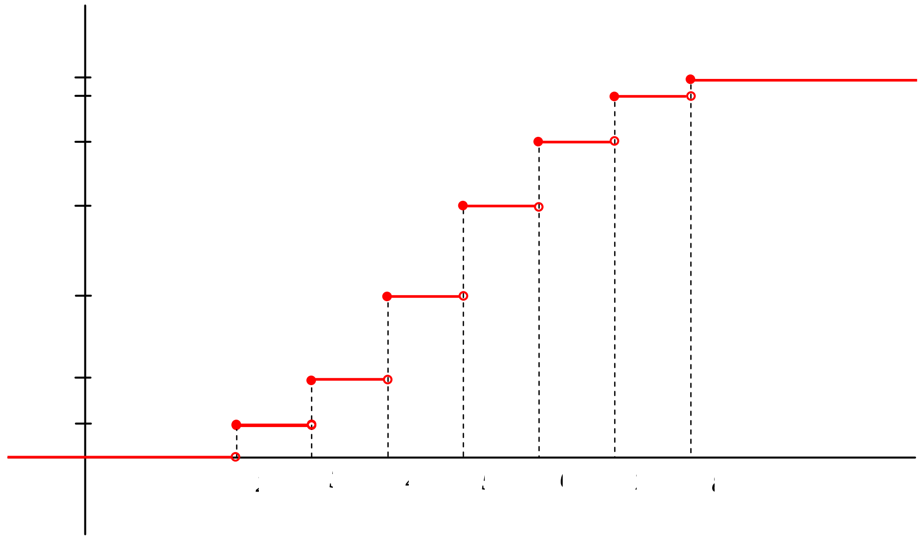


*2. Fonction de répartition F de X*

*Nous allons utiliser un tableau pour déterminer simplement la fonction de répartition :*

| *x* | -∞ | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *F(x)* | | *0* | $\boxed{0{,}09}$ | *0,09* | $\boxed{0{,}21}$ | *0,21* | $\boxed{0{,}43}$ | *0,43* | $\boxed{0{,}67}$ | *0,67* | $\boxed{0{,}84}$ | *0,84* | $\boxed{0{,}96}$ | *0,96* | $\boxed{1}$ | *1* | |

*Représentation graphique de F*



**d) Paramètres d'une variables aléatoires**

**Espérance mathématique**

L'espérance mathématique de X est le nombre réel noté E(x) et défini par :

$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ où $p_i = p(X = x_i)$,

$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ .

**Variance**

La variance de X est le nombre réel positif noté V(X) et défini par :

$V(x) = (x_1 - m)^2p_1 + (x_2 - m)^2p_2 + \ldots + (x_n - m)^2p_n$ où $p_i = p(X = x_i)$ et $m = E(x)$.

$= x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n - (E(X)^2)$.

$= E(X^2) - (E(X)^2)$.

**Ecart-type**

L'écart-type de X est le nombre noté σ(X) égal la racine carrée de la variance :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

**Exercice 2.9 résolu**

A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau ci-dessous :

| X | -5 | -3 | 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(X) | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,15 | 0,1 |

1. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

***Résolution***

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main


*1. Espérance mathématique de X*

$E(X) = (-5)\times0{,}05 + (-3)\times0{,}1 + 2\times0{,}2 + 4\times0{,}4 + 7\times0{,}15 + 8\times0{,}1$
$= 3{,}3$

*2. Variance de X*

$V(X) = (-5)^2\times0{,}05 + (-3)^2\times0{,}1 + 2^2\times0{,}2 + 4^2\times0{,}4 + 7^2\times0{,}15 + 8^2\times0{,}1 - (3{,}3)^2$
$= 12{,}21$

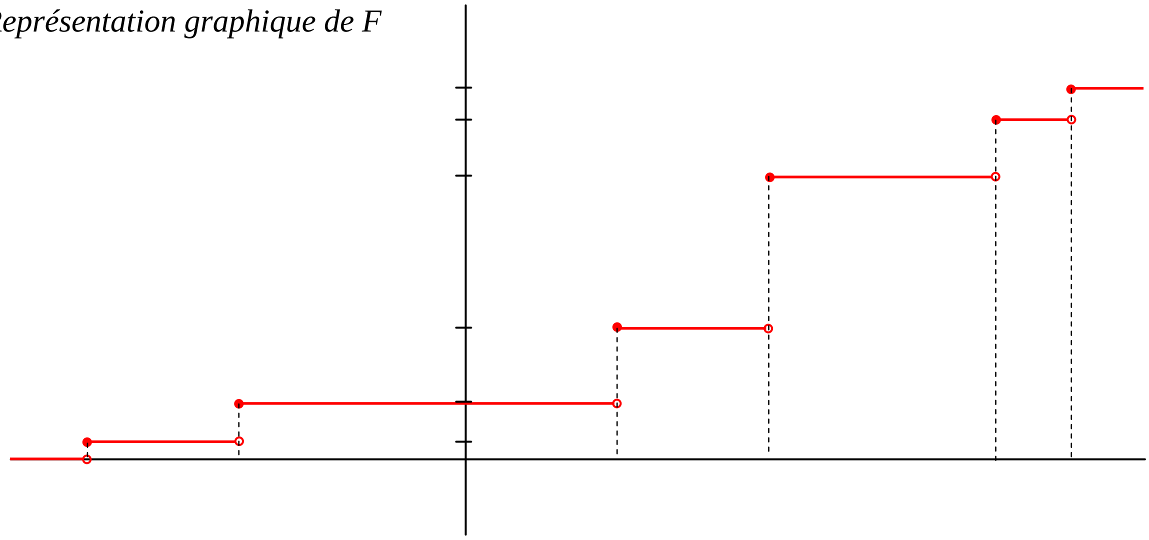
$\sigma(X) = \sqrt{12{,}21}$

*3. Détermination et représentation de la fonction de répartition F*

*Détermination de F (simplement à l'aide d'un tableau)*

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | | $-3$ | | $2$ | | $4$ | | $7$ | | $8$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0 | $\boxed{0{,}05}$ | 0,05 | $\boxed{0{,}15}$ | 0,15 | $\boxed{0{,}35}$ | 0,35 | $\boxed{0{,}75}$ | 0,75 | $\boxed{0{,}90}$ | 0,90 | $\boxed{1}$ | 1 |

*Représentation graphique de F*



**5. Schéma de Bernoulli**

**a) Définitions**

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience conduisant à deux éventualités, l'une appelée succès et notée S, l'autre appelée échec notée $\bar{S}$.
- Un schéma de Bernoulli est une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

**b) Propriété**

- Au cours d'un schéma de Bernoulli de n épreuves la probabilité $p_k$ d'obtenir k succès est égale à $p_k = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$ où p est la probabilité de succès.
- Le nombre n de succès et la probabilité p de succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

**c) Loi binomiale**

**Définition**

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale lorsque X est égale au nombre k de fois que se produit un évènement A dans un schéma de Bernoulli à n épreuves c'est-à-dire :

$$p(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \text{ où } p = p(A) \text{ et } k \in \{0 ; 1 ; \dots ; n\}.$$

**Propriété**

Si X suit la loi binomiale, on a E(X) = n.p et V(X) = n.p.(1 – p).

**Exercice 2.10 résolu**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 oranges, 2 blanches et 3 vertes. Un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Un joueur est gagnant s'il obtient dans son tirage au moins une boule blanche.

1. Un joueur joue une fois. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   E : « le joueur perd».
   F : « le joueur gagne».
2. Le joueur joue trois fois de suite. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de fois que gagne le joueur.
   a) Déterminer X(Ω).
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Déterminer E(X) et V(X).

***Résolution***

*1. Probabilités de E et F*

*Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire*

$card(\Omega) = C_8^2 = 28$ *et* $card(E) = C_6^2 = 15$*. Donc* $p(E) = \frac{15}{28}$.

$p(F) = 1 - p(E) = \frac{13}{28}$.

*2.a) les valeurs prises par X*

$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

*2.b) Loi de probabilité de X*

*Il faut remarquer que X suit une loi binomiale de paramètres* $n = 3$ *et* $p = \frac{13}{28}$.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X)$ | $\frac{3375}{21952}$ | $\frac{8775}{21952}$ | $\frac{7605}{21952}$ | $\frac{2197}{21952}$ |

$$p(0) = C_3^0 \times \left(\frac{13}{28}\right)^0 \times \left(\frac{15}{28}\right)^3 = \frac{3375}{21952}$$

$$p(1) = C_3^1 \times \left(\frac{13}{28}\right)^1 \times \left(\frac{15}{28}\right)^2 = \frac{8775}{21952}$$

$$p(2) = C_3^2 \times \left(\frac{13}{28}\right)^2 \times \left(\frac{15}{28}\right)^1 = \frac{7605}{21952}$$

$$p(3) = C_3^3 \times \left(\frac{13}{28}\right)^3 \times \left(\frac{15}{28}\right)^0 = \frac{2197}{21952}$$

*2.c) Espérance mathématique de X*

$$E(X) = 0\times \frac{3375}{21952} + 1\times \frac{8775}{21952} + 2\times \frac{7605}{21952} + 3\times \frac{2197}{21952}$$

$= \dfrac{30576}{21952}$

$= \dfrac{39\times784}{28\times784}$

$= 3\times\dfrac{13}{28}$ *(n.p)*

$= \dfrac{39}{28}$

*Variance de X*

$$V(X) = 0^2\times\frac{3375}{21952} + 1^2\times\frac{8775}{21952} + 2^2\times\frac{7605}{21952} + 3^2\times\frac{2197}{21952} - \left(\frac{39}{28}\right)^2$$

$= \dfrac{16380}{21952}$

$= \dfrac{3\times13\times15\times28}{28\times28\times28}$

$= 3\times\dfrac{13}{28}\times\dfrac{15}{28}$ *(n.p.(1 - p))*

$= \dfrac{585}{784}$

## EXERCICES

### Exercice 2.11

Une association organise une loterie pour laquelle une participation de m francs est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient deux boules vertes, il doit continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- Sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 1000 f
- Sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 200 f
- Sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes »

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes »

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation m »

1) Calculer les probabilités P(V) et P(J) des évènements V et J.
2) On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes.
   Déterminer $P_V(R)$ et P( R$\cap V$).
3) Démontrer que la probabilité P(R) = $\frac{29}{80}$.
4) On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
   a) Justifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $\{-m, 0, 1000-m, 200-m\}$
   b) Vérifier que P(x = -m) est 0,6 puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Démontrer que l'espérance mathématiques de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{1400-51m}{80}$

5) Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité que sa mise m soit remboursée au moins une fois.

**Exercice 2.12**

Dans un village, 5% des individus souffrent de l'hépatite B.
On choisit un individu au hasard dans la population pour un test de cette maladie :
Etant malade, la probabilité que le test soit positif est 0,98.
N'étant pas malade, la probabilité que le test de l'individu soit négatif est 0,95.
On définit les évènements suivants :
M « l'individu choisit est malade » et T « le test est positif »
calculer la probabilité des évènements suivants :

a) l'individu choisit est malade et le test est positif.
b) l'individu est bien portant et le test est positif.
c) le test de l'individu est positif.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu ne soit pas malade

**Exercice 2.13**

Dans un sac, il ya 3 jetons rouges numérotés de 1 à 3, 4 jetons blancs numérotés de 1 à 4 et 2 jetons jaunes numérotés 1 et 2.

**Partie A**

On tire simultanément 3 jetons du sac.
1) Combien y a t – il de tirages possibles ?
2) Calculer la probabilité des évènements suivants :
A « Tirer trois jetons de même couleur »
B « Tirer trois jetons de couleurs différentes »
C « Tirer trois jetons de numéros impairs »
D « Tirer exactement deux jetons rouges »
E « Tirer au moins un jeton rouge »

**Partie B**

On tire successivement sans remise 3 jetons du sac
1) Combien y a t – il de tirages possibles ?
2) Calculer la probabilité des évènements suivants :
F « Tirer trois jetons de même couleur »
G « Tirer trois jetons de numéros impairs »
H « Tirer exactement deux jetons rouges »
I « Tirer au moins un jeton rouge »

**Exercice 2.14**

5 candidates dont 2 filles participent à un concours de danse.
On les classera tous sans ex aequo. On note X la variable aléatoire désignant le rang de la première des filles.

1) Justifier que les valeurs prise par X sont 1, 2, 3, ou 4.
2) Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilité de X suivant.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | |

On fait reprendre le concours avec les même candidats tous les samedis sur 2 mois (8 samedis au total).
Les concours sont indépendants. On note Y le nombre de fois sur les 8 que la première des filles est classée 2 ième.
Quelles sont les valeurs prises par Y ? Donner son espérance mathématique.
Calculer P ( Y = 3 )
Calculer la probabilité qu'au moins 1 fois sur 8, la première des filles soit classée 2 ième.

**Exercice 2.15**
Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.
***PARTIE A***
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
On note P(n) la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
Démontrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$
Calculer la limite de P(n) lorsque n tend vers $+\infty$.interpréter le résultat.

***PARTIE B***
Pour les questions suivantes on pose n = 4.
1) calculer p(4)
Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.
Il mise au départ la somme de 1000 f.
Pour chaque tirage :
Si les deux boules sont de même couleur, il reçoit 1300 f
Si les deux boules sont de couleurs différentes, il reçoit 200 f
On appelle gain du joueur la différence, à l'issue de deux tirages indépendants, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale *(ce gain peut être négatif).*
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain de joueur.
Quelles sont les valeurs prises par X ?
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

Une urne contient 9 boules : 4 rouges , 2 bleues , 3 vertes.
1. On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
R : « Tirer deux boules rouges ».
C : « Tirer deux boules de la même couleur ».
2. Mêmes questions dans le cas de tirage successif de trois boules avec remise ».
3. On effectue un tirage successif de trois boules sans remise.
On considère l'évènement D : « Obtenir dans l'ordre une boule rouge, une boule rouge et une boule verte ». Calculer p(D).

**Exercice 2.16**
Sur une route, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.
La couleur du feu A est indépendante de celle du feu B.
La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$ et celle du feu B est $\frac{1}{2}$.
La probabilité de la couleur orange est toujours nulle.

Un automobiliste passe aux deux carrefours
Calculer la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.
Calculer la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

On ne s'occupe plus que du feu A.
Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.
X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.
Calculer la variance et l'écart-type de X.

**Exercice 2.17**

Des pièces mécaniques sont fabriqués en grande série sur une chaîne. On estime que 99% des pièces sont bonnes . Sur chaque pièce on effectue un test de qualité. Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec usine probabilité de 0,995 et déclare qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0,005. Lorsque la pièce est mauvaise le test le confirme avec une probabilité de 0,99 et déclare qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,01. on note :

B l'événement « la pièce est bonne ».
$\overline{B}$ l'événement « la pièce est mauvaise ».
T l'événement « le test indique que la pièce est bonne » et $\overline{T}$ l'événement contraire.

1.a) Calculer p( $\overline{B}\cap T$) et p($B\cap T$).
b) En déduire p($\overline{T}$) et p(T).
2. On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce écarté de la vente soit bonne.
3. On tire au hasard et successivement 20 pièces parmi celles écartées de la vente. Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

**Exercice 2.18**

Une boîte contient 6 boules vertes et *n* boules blanches toutes indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte.
Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne 1000 F, si elles sont de couleurs différentes le joueur perd 1000 F. La perte est considérée comme un gain négatif.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) Deux boules de même couleur.
b) Deux boules de couleurs différentes.

2. Dans cette question *n* est quelconque et supérieur ou égal à 2.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique du joueur.
a) Démontrer que la probabilité de l'événement ( X = $-$ 1000 ) est $\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$.
b) Calculer la probabilité de l'événement (X = 1000).
c) Démontrer que l'espérance mathématique de X , notée E ( X ) est égale à $\frac{1000(n^2\quad 13n+30)}{(n+6)(n+5)}$.
Pour quelle valeur de *n* a-t - on E(X) = 0 ?

# 3. NOMBRES COMPLEXES

## PARTIE 1 : GENERALITES

### I/ Ensemble des nombres complexes

**1. Définition**

On admet l'existence d'un nombre imaginaire noté i vérifiant $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme a + ib, où a et b sont des réels.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, et on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ s'effectuent comme dans $\mathbb{R}$.

**2. Forme algébrique d'un nombre complexe :**

**Propriété :**

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme z = a + ib avec a et b sont des réels.
Cette écriture s'appelle forme algébrique de z.

**3. Partie réelle – partie imaginaire**

Dans la forme algébrique de z = a + ib :
a s'appelle partie réelle de z et notée $\mathcal{R}_e(z)$ et b s'appelle partie imaginaire de z et notée $\mathcal{I}_m(z)$.

**4. Egalité de deux nombres complexes**

**Propriété**

z et z' sont deux nombres complexes, on a :

- $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = \mathcal{R}_e(z')$ et $\mathcal{I}_m(z) = \mathcal{I}_m(z')$.
- $z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = 0$ et $\mathcal{I}_m(z) = 0$.

**5. Nombres imaginaires purs**

**Définition**

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexes qui s'écrit sous la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

**Propriété**

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = 0$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}_m(z) = 0$.

### II/ Calcul dans $\mathbb{C}$

**1. Somme et produit**

z = a + ib et z' = a' + ib' deux nombres complexes sous forme algébrique et k un réel, alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $kz = ka + ikb$
- $zz' = (aa' – bb') + i(ab' + ba')$.

**2. Opposé d'un nombre complexe**

Soit z = a + ib un nombre complexe sous forme algébrique.
L'opposé de z est le nombre complexe $-z = -a – ib$.

**3. Inverse d'un nombre complexe non nul**

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique z = a + ib, l'inverse de z est le nombre complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

**4. Nullité d'un produit**

Propriété :

Pour tout nombres complexe z et z', on a zz' = 0 ⇔ z = 0 ou z' = 0.

**5. Puissance entière d'un nombre complexe**

Définition

- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.
- $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :
  - $z^0 = 0$
  - $z^{n+1} = z \times z^n$
  - $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

**Cas particuliers :** Puissances entières de i.

Pour tout entier naturel n, on a : $i^{4n} = 1$ ; $i^{4n+1} = i$ ; $i^{4n+2} = -1$ ; $i^{4n+3} = -i$.

**6. Formule du binôme de newton :**

Pour tous nombre complexe z et z' non nuls, et pour tout entier naturel non nul, on a :

$$(z + z') = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, z^p (z')^{n-p}$$

$$= C_n^0 (z')^{n-p} + C_n^1\, z (z')^{n-1} + C_n^2\, z^2 (z')^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} z^{n-1} z' + C_n^n z^n$$

**NB :** On peut obtenir les coefficients $C_n^p$ à l'aide du triangle de pascal ci-dessous

Le coefficient $C_n^p$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne p.

| n \ P | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | | | | | | |
| **1** | 1 | 1 | | | | | |
| **2** | 1 | 2 | 1 | | | | |
| **3** | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| **4** | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| **5** | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| **…** | | | | | | | |

On a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$. Exemple : $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$

**EXERCICES**

**Exercice 3.1**

Copier puis compléter le tableau suivant :

| Forme algébrique de z | $\mathcal{R}e(z)$ | $\mathcal{I}m(z)$ |
|---|---|---|
| -2 + 3i | | |
| | -3 | -1 |
| 5 | | |
| | 0 | $2\sqrt{3}$ |
| -i | | |
| 0 | | |

**Exercice 3.2**

Donner la forme algébrique de chacun des nombre complexes suivants :

$(2-2\,i)(1+i)$ ; $-i(1+2i)(3+2i) - 3(2 - i\sqrt{2})$ ; $\dfrac{8-6i}{3+4i}$

**Exercice 3.3**

Donner l'opposé et l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$3 + 2i$ ; $(-2 - 2i\sqrt{3})$

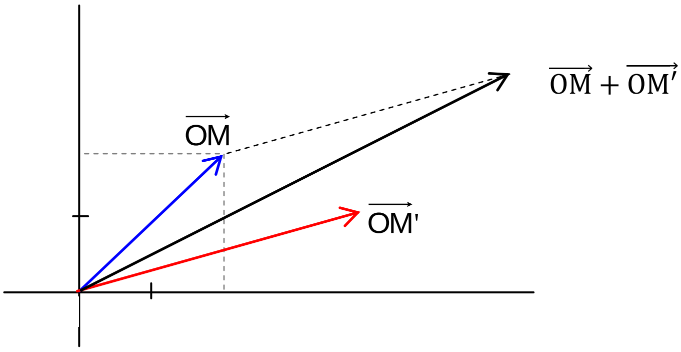
**Exercice 3.4**

Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
$I^8$ ; $i^{2013}$ ; $(5 + i)^3$ ; $(1 - 2i)^5$

Soit les nombres complexes $\alpha = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $\beta = \dfrac{3+i}{5-7i}$.
Sans les calculer sous forme algébrique, montrer que $\alpha + \beta$ est un nombrer réel et $\alpha - \beta$ est un nombre imaginaire pur.

**7- Représentation géométrique d'un nombre complexe**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
A tout nombre complexe z de forme algébrique a + ib, on associe le point M du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b).
M est le **point-image** de z et z **l'affixe** de M.
$\overrightarrow{OM}$est le **vecteur-image** de z et z **l'affixe** de $\overrightarrow{OM}$.
Si M' est le point d'affixe z', alors z' – z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
L'axe (IO) est appelé axe réel et l'axe (OJ) axe imaginaire.

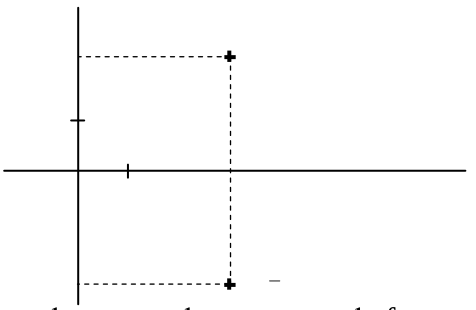



**III/ Conjugué et module d'un nombre complexe**

**1. Conjugué d'un nombre complexe**

**a) Définition**

Soit z un nombre complexe de forme algébrique z = a + ib.
On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.
Interprétation géométrique : les points M(z) et M'($\bar{z}$ ) sont symétriques par à l'axe (IO).



**b) Propriétés**

Soit z et z' deux nombres complexes avec z de forme algébrique z = a + ib. On a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$
- $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = a$ et $\dfrac{z-\overline{z}}{2} = b$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z\,z'} = \overline{z}\,.\,\overline{z'}$
- Si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

**2. Module d'un nombre complexe**

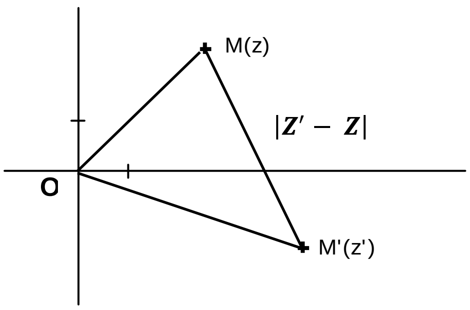
**a) Définition**

Soit z un nombre complexe de forme algébrique z = a + ib et M son point image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

On appelle module de z, le nombre positif noté |z| défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ .

**Interprétation géométrique**

OM = $|Z|$




Si M' est le point d'affixe z', alors MM' = |z' – z|

**b) Propriétés**

Pour tout nombre complexe z et z', on a :

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\text{Re}(z') \leq |z|$ et $\text{Im}(z) \leq |z|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- Si $z \neq 0$ alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
- Si p est un entier, $|z^p| = |z|^p$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

**Exercice 3.5**

Dans chacun des cas suivants, déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant: $|z + 2| = |z - i|$ ; $|iz - 3| = |z - 3 + i|$ ; $|2 + iz| = 3$ ; $|\overline{z} - i| = 2$

## IV- Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

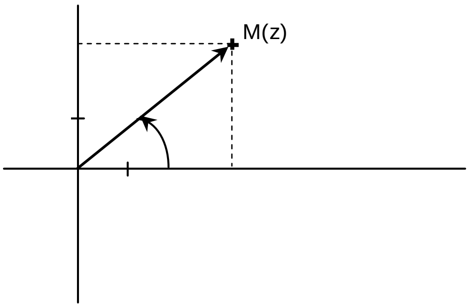
### 1. Arguments d'un nombre complexe non nul

#### a) définitions

Soit z un nombre complexe non nul et M son point image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).
On appelle argument principal de z, le nombre réel noté ARG(z) égal à la mesure principale de

$\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})}$.

Toute autre mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})}$ est appelée simplement argument de z et notée arg(z) et on a :
arg(z) = ARG(z) + 2kπ avec $k\in\mathbb{Z}$.




NB :
Le point image de tout nombre complexe est parfaitement déterminé par la donnée du module et d'un argument de ce nombre.
On n'attribue pas d'argument au nombre complexe 0.

#### b) Propriétés pour tout nombre complexe non nul z, on a :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \text{ARG}(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $\text{ARG}(z) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

### 2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

#### a) Propriété – définition :

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

#### b) Egalité de deux nombres complexes non nuls sous forme trigonométrique

**Propriété :** soit z et z' deux nombres complexes. On a :
$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\text{ARG}(z) = \text{ARG}(z')$
$\Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

**Exercice 3.6**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité le centimètre.
Soit A , B et C les points du plan d'affixes respectives :
$z_A = 2 - 1i$ ; $z_B = -3 - 1i$ ; $z_C = 2 + 4i$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Déterminer l'affixe de D milieu de $[BC]$
3. Démontrer que ABC est rectangle isocèle en A.
4. Déterminer et placer le point K tel que le quadrilatère ABKC soit un parallélogramme.

**c) Passage forme trigonométrique – forme algébrique**

z est un nombre complexe non nul.

Forme algébrique $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Forme trigonométrique

$$z = a + ib \longrightarrow z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

$$z = a + ib \text{ avec } \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \longleftarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

*(Voir table trigonométrique et cercle trigonométrique page 160)*

**3. Calcul avec les formes trigonométriques – opérations sur les arguments**

**a) Propriétés**

Soient z = r(cosθ + isinθ) et z’ = r’(cosθ’ + isinθ’) deux nombres complexes écrits sous forme trigonométriques. On a :

- $z.z' = r.r'\,[\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$
- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)]$
- $z^p = r^p[\cos(p\theta) + i\sin(p\theta)]$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

**b) Propriétés**

Pour tous nombres complexes non nuls z et z’, on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Si $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**EXERCICES**

**Exercice 3.7**

Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$1 - 7i$ ; $-2i(\sqrt{2} - 3i)$ ; $(4 + 3i) + (-5i - 1)$ ; $\dfrac{3-i}{4+i}$

**Exercice 3.8**

Donner le module de chacun des nombres complexes suivants:

$-2 + 6i$ ; $(3 - i)(3i - 2)$ ; $(2+i) + (8 - i)$ ; $\dfrac{3-i}{4-i\sqrt{2}}$

**Exercice 3.9**

1. Sans calcul, en utilisant simplement la définition, donner l'argument principal du nombre complexe proposé :

ARG(1) = ……………….…………….. ; ARG(-1) =……………….………
ARG(i) = ……………….……………… ; ARG(-i) = ……………….………
a < 0, ARG(a) = ……………….……… ; a > 0, ARG(a) =……………….………..
b < 0, ARG(bi) = ……………….…….. ; b > 0, ARG(bi) = ……………….………

2. Déterminer un argument de chacun des nombres réels suivants :

$z_1 = 1 - i$ ; $z_2 = \sqrt{3} - i$ ; $z_3 = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)$ ; $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1-i}$ ; $z_5 = (1 - i)^6$

**Exercice 3.10**

Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -\sqrt{3} + i$ ; $z_2 = 1 - i$ ; $z_3 = (1 - i)(-\sqrt{3} + i)$ ; $z_4 = (1 - i)^3(-\sqrt{3} + i)^2$ ; $z_5 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$.

**Exercice 3.11 résolu**

Soit le nombre complexe $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)$.

1.a) Ecrire sous forme trigonométrique $(1 + i\sqrt{3})$ et $(1 - i)$.
b) En déduire la forme trigonométrique de Z.
2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z.
3. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

***Résolution***

*1. On a :* $(1 + i\sqrt{3}) = 2[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}]$ *et* $(1 - i) = \sqrt{2}\,[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})]$

*Donc* $|Z| = 2\sqrt{2}$ *et* $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{3}+(-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi}{12}$.

*Ainsi* $Z = 2\sqrt{2}\,[\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}]$

*2.* $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$

*3. D'après les questions précédentes, on a :*

$$Z = 2\sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}] = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$$

*Donc :* $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

**4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul :**

**a) Définition**

En posant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, alors tout nombre complexe z de module r et d'argument s'écrit $z = re^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.

**b) Opérations sur les formes exponentielles**
**Propriétés**
Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle, alors :

- $z.z' = r.r'e^{i(\theta + \theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\ e^{i(\theta - \theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $-z = re^{i(\theta + \pi)}$

**c) Formules de Moivre et d'Euler**

Formules de Moivre
Pour tout entier n et pour tout réel θ, on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
Formules d'Euler
Pour tout entier n et pour tout réel θ, on a :

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

**EXERCICES**

**Exercice 3.12**
Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = 2i$ ; $z_3 = -5$ ; $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ; $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ ; $z_5 = (1 + i\sqrt{3})^4$ ; $z_6 = \frac{1+i}{-\sqrt{3}-i}$.

**Exercice 3.13**
x étant un nombre réel, exprimer cos5x et sin5x en fonction de cosx et sinx.

**Exercice 3.14**
x étant un nombre réel, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

**V- Racines n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe**
**1. Racines carrées d'un nombre complexe**
**a) Définition**
Soit Z un nombre complexe. On appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

**b) Propriété**

- 0 est sa propre et unique racine carrée.
- Un nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.
  Si Z = a + ib et z = x + iy avec a, b, x et y réels, on a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

**c) Application : résolution d'équation du second degré dans %**

**Définition**

L'équation (E) : $z \in$ %, $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$, est appelée équation du second degré dans %.

**Résolution**

- On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ et $\delta$ une racine carrée de $\Delta$, alors (E) admet deux solutions : $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

**Exercice 3.15 résolu**

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $40 - 42i$ .
   b) Résoudre dans %, l'équation (E) : $z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i = 0$.
2. Soit le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - z^2 + (-9 + 10i)z - 11 - 10i$.
   a) Calculer $P(-i)$.
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$.
   c) Résoudre dans %, l'équation $P(z) = 0$.

***Résolution***

*1.a) Soit $\delta = x + iy$ (x et y étant des nombres réels) tel que $\delta^2 = 40 - 42i$.*

*On a alors :* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 98 \\ 2y^2 = 18 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 49 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ ou } x = -7 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ xy < 0 \end{cases}$

*D'où $\delta = 7 - 3i$ ou $\delta = -7 + 3i$*

*1.b) Calcul du discriminant*

$\Delta = (1 + i)2 - 4\times (-10 + 11i)$
$= 40 - 42i$

*Les racines de $\Delta$ sont $7 - 3i$ et $-7 + 3i$.*

*Donc les solutions de (E ) sont :*

$z_1 = \dfrac{(1+i)+(7-3i)}{2} = 4 - i$

$z_2 = \dfrac{(1+i)-(7-3i)}{2} = -3 + 2i$

*2.a)* $P(-i) = (-i)^3 - (-i)^2 + (-9 + 10i)(-i) - 11 - 10i$
$= i + 1 + 9i + 10 - 11 - 10i$
$= 0.$

*b)* $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$
$= z^3 + (a + i) z^2 + (b + ia)z + bi$

*Par identification, on a :* $a + i = -1$
$b + ai = -9 + 10i$
$bi = -11 - 10i$

*soit $a = -1 - i$ et $b = -10 + 11i$*

*donc $P(z) = (z + i)[z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i]$*

*2. c)* $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + i)[z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i]$

$\Leftrightarrow (z + i) = 0$ *ou* $z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i = 0$
$\Leftrightarrow (z = -i$ *ou* $z = 4 - i$ *ou* $z = -3 + 2i$.

*D'où* $S_{\mathbb{C}} = \{-i ; 4 - i ; -3 + 2i\}$

**2. Cas général de la racine n^ième^ d'un nombre complexe**

**a) Définition**

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. On appelle racine $n^{ième}$ de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

**b) Propriété**

- 0 est sa propre et unique racine $n^{ième}$.
- Si $n \geq 2$ et que Z s'écrit sous la forme exponentielle $Z = re^{i\theta}$, alors Z admet exactement n racines $n^{ième}$ qui sont les valeurs de $\sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\theta + 2k\pi}{n})}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
- Les racines $n^{ième}$ de l'unité sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

**c) Points images des racines $n^{ième}$**

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

- Si n = 2, les points-images des 2 racines carrées sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}(O ; \sqrt{r})$.
- Si n > 2, les points-images des n racines $n^{ième}$ sont les sommets d'un polynôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle $\mathcal{C}(O ; \sqrt[n]{r})$.

**Exercice 3.16 résolu**

Déterminer les racines cubiques de -8i.

***Résolution***

*On a :* $-8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

*Soit* $z = r\,e^{i\alpha}$ *tel que* $z^3 = -8i$

*Alors* $z^3 = -8i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\alpha} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \text{ est un entier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \text{ est un entier} \end{cases}$$

*On obtient toutes les solutions pour* $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

*Les solutions sont :*

$z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ; $z_1 = 2e^{\pi i}$ ; $z_2 = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

*c'est-à-dire* $z_0 = \sqrt{3} - i$ ; $z_1 = -2$ ; $z_2 = -\sqrt{3} - i$

## EXERCICES

### Exercice 3.17

1. Déterminer sous forme algébrique les solutions dans ℂ de l'équation $z^4 = 1$.

2. En déduire les solutions dans ℂ de l'équation $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.

### Exercice 3.18

Résoudre dans ℂ chacune des équations suivantes :

1. $(1 + i)z = 3 - i$
2. $2z + 1 - i = iz + 2$
3. $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$
4. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5. $2iz + \overline{z} - 3 = 0$ *(On pourra poser $z = x + iy$ où x et y sont des réels).*

### Exercice 3.19

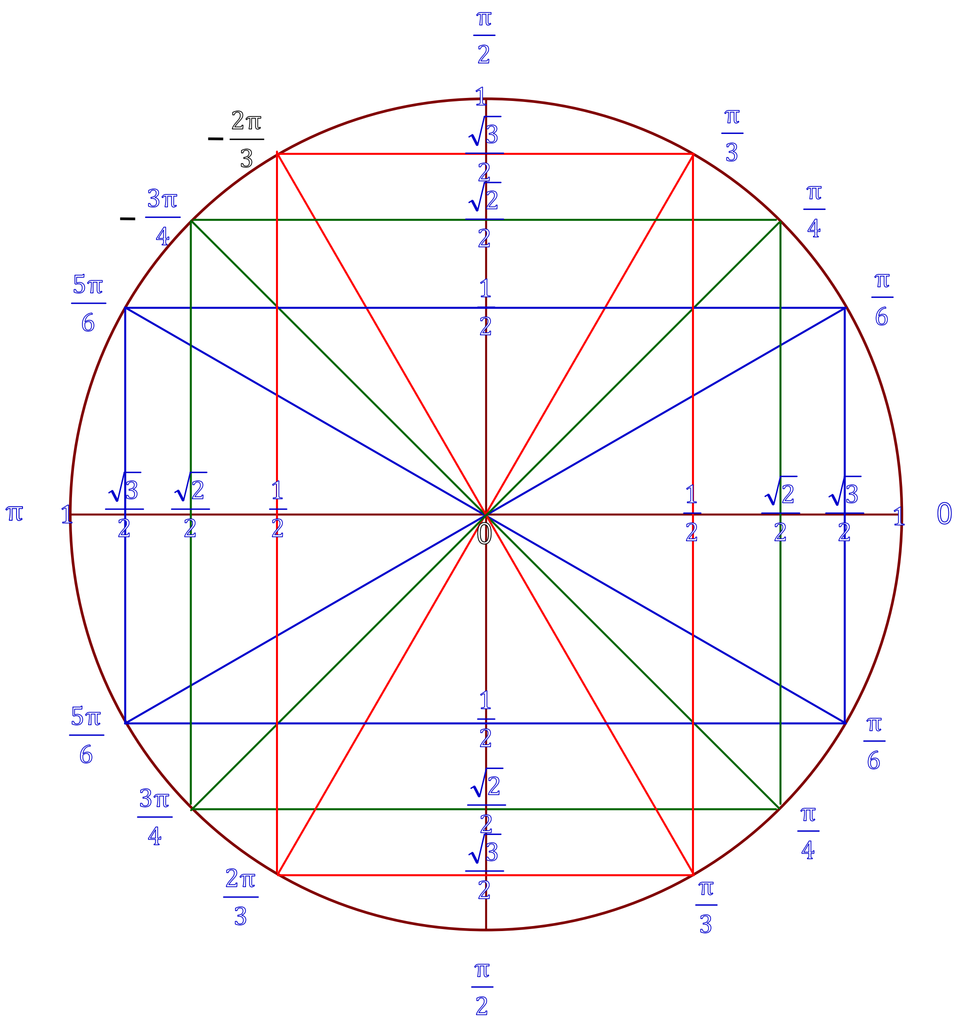
Résoudre dans ℂ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + z - 2 = 0$
2. $z^2 - 10z + 25 = 0$
3. $z^2 + z + 3 = 0$
4. $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$.

# TABLE TRIGONOMETRIQUE

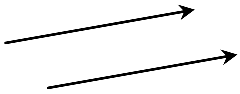
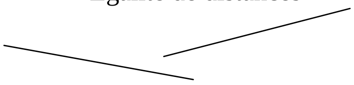
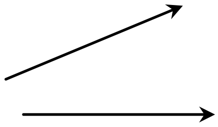
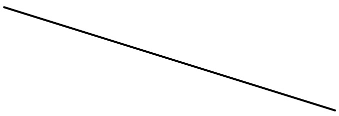
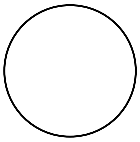
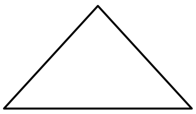
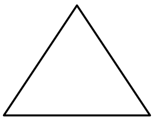
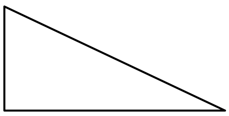
| **x** | **0** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cosx | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| Sinx | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

# CERCLE TRIGONOMETRIQUE



Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main


## PARTIE 2 : NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

| Configurations | Caractérisations géométriques | Caractérisations complexes |
|---|---|---|
| Egalité de vecteurs  | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ | $Z_B - Z_A = Z_D - Z_C$ |
| Egalité de distances  | AB = CD | $\lvert Z_B - Z_A \rvert = \lvert Z_D - Z_C \rvert$ |
| Angles orientés de vecteurs  | $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}$ | $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})} = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ |
| Alignement de points  | • $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ où $k \in \mathbb{R}^*$<br>• mes $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ | • $\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \in \mathbb{R}^*$<br>• $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ |
| Points Cocycliques  | • A, B, C et D $\in \mathcal{C}$(K, r)<br>AK = BK = CK = DK = r<br>• A, B, C et D $\in \mathcal{C}$(O, r)<br>OA = OB = OC = OD<br>• A, B, C et D sont cocycliques | • $\lvert z_K - z_A\rvert = \lvert z_K - z_B\rvert = \lvert z_K - z_C\rvert = \lvert z_K - z_D\rvert$<br>• $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert$<br>• $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \times \dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$ |
| ABCD est un parallélogramme  | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ | $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ |
| Triangle ABC isocèle en A  | AB = AC | • $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_B - z_A\rvert$<br>• $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $e^{-i\alpha}$ avec mes $\hat{A} = \alpha \neq k\pi$ |
| Triangle ABC équilatéral  | • AB = AC = BC<br>• AB = AC et mes $\hat{A} = \pm\dfrac{\pi}{3}$ | • $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_C - z_B\rvert$<br>• $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert$ et $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| Triangle ABC rectangle en A  | $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = \pm\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ |

**Exercice 3.20 résolu**

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 3iz^2 + (3 + i)z - 2 + 2i$.

1. a) Calculer P(-1).
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation p(z) = 0.
2. Soit f : $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

   $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{-iz-2}{z+1} \quad \forall\, z \neq -1$.

   A, B, C et E sont les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a = -1 ; b = 2i ; c = -i et e = 1 + i.
   a) Placer les points A, B, C et E. Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ? Justifier.
   b) Soit C' = f(C). Donner l'affixe de C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
   c) Soit G' le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. Calculer l'affixe du point G tel que f(G) = G'.
3. a) Calculer z' + i en fonction de z et en déduire que $|z' + i|\,|z + 1| = \sqrt{5}$
   b) M appartient au cercle de centre A et de rayon 2.
   Démontrer que M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. a) Justifier que pour tout point M du plan distinct de A et B, on a : $OM' = \dfrac{BM}{AM}$.
   b) En déduire l'ensemble ($\mathcal{D}$) des points M du plan dont l'image M' soit sur le cercle trigonométrique.
5. a) Démontrer que pour tout point distinct de A et B, on a :

   $\arg(z') = \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})} - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   b) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que z' soit un nombre réel strictement positif puis le construire.

***Résolution***

*1. a)* $P(-1) = (-1)^3 - 3i(-1)^2 + (3 + i)(-1) - 2 + 2i$
$= -1 - 3i + 3 + i - 2 + 2i$
$= 0.$

*1. b) P(-1) = 0, il existe donc des nombres a, b et c tels que* $P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c)$

*Détermination de a, b et c par le tableau de Hörner*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -3i | -3 - i | -2 + 2i |
| -1 | | -1 | 1 + 3i | 2 - 2i |
| | 1 | -1 - 3i | -2 + 2i | 0 |

$a = 1 \quad ; \quad b = -1 - 3i \quad$ *et* $\quad c = -2 + 2i$

*donc* $P(z) = (z + 1)(z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0$ *ou* $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$.

(1) : $z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$.

(2) : $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$

$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i)$
$= 1 + 6i - 9 + 8 - 8i$
$= -2i$

*Recherche des racines carrées de Δ.*

*Elles sont les solutions de l'équation z2 = -2i.*

*On pose z = x + iy et on a le système :*

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=2 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$$

*Les racines carrées de $\Delta$ sont $\delta_1 = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$.*
*Les solutions de l'équation $z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0$, sont :*

$z_1 = \dfrac{1+3i+1-i}{2} = 1+i$

$z_2 = \dfrac{1+3i-1+i}{2} = 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-1 ; 2i ; 1+i\}$

*2. a) voir la figure pour la construction*
*Par conjecture ABEC est un parallélogramme.*
*En effet :* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = b - a = 1 + 2i$

$z_{\overrightarrow{CE}} = z_E - z_C = e - c = 1 + 2i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CE}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. *Donc le quadrilatère ABEC est un parallélogramme.*

*2. b) C' = f(C).*
*Donc* $z_{C'} = \dfrac{-ic-2}{c+1} = \dfrac{-i(-i)-2}{(-i)+1} = \dfrac{-3}{1-i} = \dfrac{-3(1+i)}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

*Forme trigonométrique de C'*

$|C'| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

*Soit $\theta$ un argument de C'. on a :*

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{donc } z_{C'} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

*2. c)* $z_{G'} = \dfrac{1}{2}$ *et f(G) = G'*

*f(G) = G'* $\Leftrightarrow z_{G'} = f(z_G)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{-iz_G - 2}{z_G + 1}$

$\Leftrightarrow z_G\left(\dfrac{1}{2} + i\right) = -\dfrac{1}{2} - 2$

$\Leftrightarrow z_G = -1 + 2i$

3. a) $z' + i = \frac{-iz-2}{z+1} + i = \frac{-iz-2+iz+i}{z+1} = \frac{-2+i}{z+1}$

$z' + i = \frac{-2+i}{z+1}$

En passant au module, on a :

$|z' + i| = \left|\frac{-2+i}{z+1}\right| = \frac{|-2+i|}{|z+1|} = \frac{\sqrt{5}}{|z+1|}$.

D'où $|z' + i||z + 1| = \sqrt{5}$.

3. b) $M \in \mathcal{C}(A ; 2) \Leftrightarrow AM = 2$

$\Leftrightarrow |z + 1| = 2$

Or d'après la question 3.a) $|z' + i||z + 1| = \sqrt{5}$.

Donc $|z + 1| = 2 \Leftrightarrow |z' + i| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow CM' = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(C ; \frac{\sqrt{5}}{2})$.

4. a) pour tout point $M \neq A$ et $M \neq B$, on a :

$z' = \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{-i(z-2i)}{z+1}$.

Donc $|z'| = \left|\frac{-iz-2}{z+1}\right| = \frac{|-i(z-2i)|}{|z+1|} = \frac{|-i||(z-2i)|}{|z+1|} = \frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|}$.

Et comme $|z'| = OM'$ ; $|z_M - z_B| = BM$ ; $|z_M - z_A| = AM$ alors $OM' = \frac{BM}{AM}$.

4. b) M' est sur le cercle trigonométrique OM' = 1

$OM' = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1$

$\Leftrightarrow BM = AM$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]

(D) est donc la médiatrice de [AB].

5. a) $z' = \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{-i(z-2i)}{z+1}$.

$\arg(z') = \arg\left(\frac{-iz-2}{z+1}\right) = \arg\left(\frac{-i(z-2i)}{z+1}\right)$

$= \arg(-i(z-2i)) - \arg(z+1) + 2k\pi, k\mathbb{Z}$.

$= \arg(-i) + \arg(z-2i) - \arg(z+1) + 2k\pi, k\mathbb{Z}$.

$= -\frac{\pi}{2} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

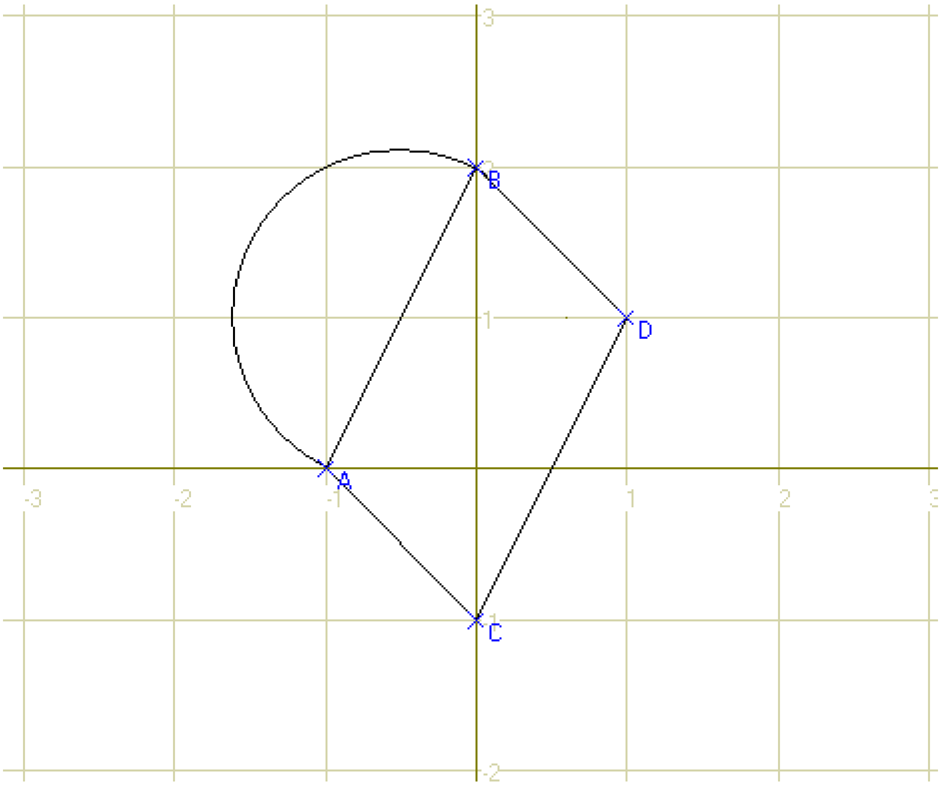
$arg(z') = mes\ \widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})} - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

*5. b)* $z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z') = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow Mes\ \widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})} - \dfrac{\pi}{2} = 0$

$\Leftrightarrow Mes\ \widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})} = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ *M appartient au demi-cercle (Γ) de diamètre [AB] tel que l'arc* $\widehat{BA}$ *soit orienté dans le sens positif (voir construction).*




## EXERCICES

### Exercice 3.21

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit les points A , B , C et D du plan d'affixes respectives –1 ; 2i ; – i et 1 + i.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

### Exercice 3.22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère les points E , F et G d'affixes respectives 1 + 2i ; 3 – i ; et – 1 + 5i.
Démontrer que le point E est le milieu du segment [GF].

### Exercice 3.23

Soit les points A et B d'affixes respectives –1 + i et 2 + 2i.
1. Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma_1)$ des points M du plan d'affixe z tels que : $|z + 1 - i| = 3$.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma_2)$ des points M du plan d'affixe *z* tels que :

$|z + 1 - i| = |z - 2 - 2i|$.

2. Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma_3)$ des points M du plan d'affixe $z$ tels que :
$|i\,\bar{z} - 2i + 2| = 3$.

**Exercice 3.24**

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par $P(z) = z^4 - z^3 + z - 1$.

1.a) Montrer que P(z) se met sous la forme $P(z) = (z - 1)Q(z)$ où Q est un polynôme à déterminer.

b) Ecrire Q(z) sous la forme $Q(z) = (z + 1)R(z)$ où R est un polynôme que l'on déterminera.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

3. On appelle $\alpha$ la solution de partie imaginaire strictement positive. Calculer $\alpha^2$ $\alpha^3$ $\alpha^4$ $\alpha^5$ $\alpha^6$ puis $\alpha^{2004}$.

**Exercice 3.25**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
Soit A , B , C et D les points du plan d'affixes respectives :
$z_A = 2 - 2i$ ; $z_B = -1 + 7i$ ; $z_C = 4 + 2i$ ; $z_D = -4 - 2i$.

1. Placer ces points dans le repère.

2. On pose $Q_1 = \dfrac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ et $Q_2 = \dfrac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}$.

a) Calculer les nombres complexes $Q_1$ et $Q_2$ sous forme algébrique.

b) En déduire que les points A , B , C et D sont cocycliques.

3. Soit $\Omega$ le point d'affixe $-1 + 2i$. Démontrer que $\Omega$ est le centre du cercle passant par les points A , B , C et D.

**Exercice 3.26**

On donne dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = 0$.

1. Vérifier que $-2i$ est une solution de (E).

2. On admet que (E) a une soltion réelle

3. Déterminer les nombres complexes a, b et c pour que :
$z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = (z - 2)(z + 2i)(az^2 + bz + c)$.

4. Résoudre l'equation (E).

5. Le plan est muni d'un repère orthnormé direct (O, I, J). Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2i$ ; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

a) Ecrire $z_B$ et $z_C$ sous forme trigonométrique.

a) Vériefier que $z_A$ ; $z_B$ et $z_C$ sonr les racines cubiques de 8i.

c) Le triangle ABC est inscrit dans un cercle (C). Déterminer le centre et le rayon de ce (C), puis vérifier que le point D d'affixe 2 appartient à (C).

d) Calculer la mesure de chaque côté du triangle ABC.

**Exercice 3.27**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation : $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

2. On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$.

a) Vérifier que $P(-1) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z + 1)(az2 + bz + c)$.

c) Préciser tous les zéros de P.

3. Dans le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on donne A(0 ; 2) ; B(2 ; 1) ; C(1 ; – 1) et D(–1 ; 0).

a) Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

4.a) Calculer l'affixe du centre K de ABCD.
b) Déterminer l'affixe de E graphiquement puis par le calcul.
5. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe ztels que $|2i\bar{z} - 2 - 4i| = 2\sqrt{5}$.

**Exercice 3.28**

1. On considère dans ℂ l'équation (E) : $z^3 - 7z^2 + (13 + 16i)z + 9 - 12i = 0$.
a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure zo que l'on précisera.
b) Résoudre l'équation (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives : i ; 1 + 2i et 6 – 3i.
a) Placer les points A, B et C puis démontrer que ABC est un triangle rectangle.
b) Démontrer que l'affixe du point D, image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 4 est : 5 + 2i.
c) Démontrer que les points A, B, C et D appaartiennent à un même cercle (C) dont précisera le centre et le rayon.

**Exercice 3.29**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1} ; \overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique 2 cm.
A est le point d'affixe -2 – i. On considère l'application f du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M du plan distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-i}{z+2+i}$.
On pose z = x + iy avec x et y des nombres réels.
1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
2. En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur, est le cercle de centre le point K(-1 ; 0), de rayon $\sqrt{2}$, privé du point A.
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe *z* tels que z' soit un nombre réel.
4. Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le repère$(O ; \overrightarrow{e_1} ; \overrightarrow{e_2})$.

## PARTIE 3 : NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

### I- Présentations

*Dans cette partie on suppose le plan complexe muni d'un repère orthogonal direct (O, I, J).*

#### 1. Définition

On appelle transformations du plan toute application bijective du plan dans lui-même.

#### 2. Transformations usuelles

La Translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale, l'homothétie, la rotation.

### II- Symétries particulières

**1. Symétrie par rapport à l'axe des abscisses - Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**

**Propriétés**

L'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe (OI) est :
$z' = \bar{z}$
L'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe (OJ) est :
$z' = -\bar{z}$

**2. Symétrie centrale**

**Propriétés**

L’écriture complexe de la symétrie centrale par rapport à l’origine O du repère est :
$z' = -z$

## III- Similitudes planes directes

**1. Définition**

On appelle similitude directe du plan, toute transformation dont l’écriture complexe est de la forme :
$z' = az + b$ où $a \in IR^*$ et $b \in IR$ .

**2. Nature et éléments caractéristiques d’une similitude**

Soit f une transformation du plan dont l’écriture complexes est : $z' = az + b$ avec $a \in \%^*$ et $b \in \%$ .

| Conditions sur a et b | | | Ecriture complexe | Nature et caractéristiques de la transformation f |
|---|---|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}^*$ | $a = 1$ | $b = 0$ | $z' = z$ | f est l’**identité** du plan. |
| | | $b \neq 0$ | $z' = z + b$ | f est la **translation** de vecteur d’affixe b. |
| | $a \neq 1$ | $b = 0$ | $z' = az$ | f est l’**homothétie** de centre O et rapport a. |
| | | $b \neq 0$ | $z' = az + b$ | f est l’**homothétie** de centre le point d’affixe $b/(1-a)$ et rapport a. |
| $a \notin \mathbb{R}^*$ | $\|a\| = 1$ | $b = 0$ | $z' = az$, $a = e^{i\alpha}$ | f est la **rotation** de centre O et d’angle de mesure $\arg(a) = \alpha$. |
| | | $b \neq 0$ | $z' = az + b$, $a = e^{i\alpha}$ | f est la **rotation** de centre le point d’affixe $b/(1-a)$ et d’angle de mesure $\arg(a) = \alpha$. |
| | $\|a\| \neq 1$ | $b = 0$ | $z' = az$ | f est la **similitude directe** de centre O, de rapport $\|a\|$ et de d’angle de mesure arg(a). |
| | | $b \neq 0$ | $z' = az + b$ | f est la **similitude directe** de centre le point d’affixe $b/(1-a)$, de rapport $\|a\|$ et de d’angle de mesure arg(a). |

**Remarque :** La Translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale, l’homothétie, la rotation sont des similitudes directes du plan.

**3. Propriétés des similitudes**

**a) Images de figures simples**

L’image d’une figure simple par une similitude est une figure de même nature :

- l’image d’une droite est une droite
- l’image d’une demi-droite est une demi-droite
- l’image d’un segment est un segment
- l’image d’un cercle est un cercle
- l’image d’un angle est un angle

**b) Conservation**

Toute similitude directe conserve :

- le barycentre (en particuliers le milieu d'un segment)
- l'alignement
- l'orientation des angles
- le parallélisme
- l'orthogonalité
- le contact.

**c) longueurs et aires**

Toute similitude de rapport k multiplie les longueurs par k et les aires par $k^2$

## EXERCICES

### Exercice 3.30

Soit A et B les points du plan d'affixes respectives -2i et 1 + i

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation *t* de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit la droite (D) d'équation y = x + 2. Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation *t* .

### Exercice 3.31

Déterminer l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. f est la rotation de centre A(3 – i) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ .
2. f est l'homothétie de centre Ω(-2 + 5i) et de rapport $-\frac{1}{2}$ .
3. f est la symétrie centrale de centre B (1 + i)
4. f est la similitude directe de centre A(2i), de rapport $3\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

### Exercice 3.32

Dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation f est donnée. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

1. $z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$
2. $z' = -\frac{3}{2}z+5(1-i)$
3. $z' = -3iz + 4 - 2i$
4. $z' = z + \frac{1+i}{2}$
5. $z' + 1 - i = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z + 1 - i)$
6. $z' - 4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 4)$
7. $z' + 3 - i = -5(z + 3 - i)$.

### Exercice 3.33

Le plan complexe est muni du repère orthnormé direct (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.
 Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = (z + 2)[z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i)]$.

2.a) Déterminer les raciness carrées du nombre complexe – 8 – 6i.
 b) Résoudre dans l'équation $(E_1)$ : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.
 c) En déduire les solutions de (E).

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectives – 2 ; 4i et 2 – 2i.
 a) Faire une figure.

b) Soit K le milieu du segment [BC]. On considère la similitude directe S de centre A qui transforme B en K.
Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.
c) Déterminer l'écriture complexe de S.
d) Déterminer l'angle et le rapport de S.

**Exercice 3.34**

On considère dans ℂ le polynôme défini par $P(z) = z^3 + (-8-4i)z^2 + (16+20i)z - 8 - 24i$

1) a- Calculer P (2).
b- En déduire qu'on peut écrire $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes.
a- Résoudre dans ℂ l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+2i$ ; $2$ et $4+2i$.
a- Placer les points A, B et C
b-Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

3) On considère la similitude directe S telle que S (A) = B et S (B) = C.
a- Déterminer l'angle et le rapport de S.
b- Donner l'écriture complexe de S.
a- Donner l'affixe du point K centre de la similitude S.

**Exercice 3.35**

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 + (7-10i)z + 9 + 7i$

1) a) Démontrer que P(z) admet une racine imaginaire pure que l'on notera $\beta$.
b) résoudre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (1-i)z^2 + (7-10i)z + 9 + 7i = 0$.
2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On donne A ( - i ) ; B ( 2 + 3i ) et C ( - 1 – 3i )
a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Calculer $z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés.
4) Déterminer et construire l'ensemble ( $\Delta$ ) des points M du plan d'affixe z tel que :
$|z - z_A| = |z - z_B|$

**Exercice 3.36**

**I/** On considère le polynôme p défini par : $P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + 8z - 12 + 4i$.

1) Calculer P (-2i) et P (2)
2) a) Ecrire p(z) sous forme de produits de facteurs du premier degré.
b) résoudre dans l'équation P(z) = 0.

**II/** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : 2 ; 1 + 3i et -2i.

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. (Unité graphique : 2 cm)
2) a) Construire le point E symétrique du point B par rapport à J.
b) Prouver par le calcul que $z_E = -1 - i$
3) Démontrer que :

a) Le triangle JAB est rectangle isocèle en J.

b) Les points A, J, E, C appartiennent à un cercle ( $\Gamma$) dont on précisera l'affixe du centre K et le rayon.

4) Construire ( $\Gamma$).

# 4. STATISTIQUES

On considère une population de n individus sur laquelle on a relevé deux types de valeurs (poids, taille par exemple). On note :

- $x_1$ ; $x_2$ ; …… ; $x_n$ les valeurs relevés pour le poids.
- $y_1$ ; $y_2$ ; …… ; $y_n$ les valeurs relevés pour la taille.

On pose $X = \{ x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n\}$

$Y= \{ y_1 ; y_2 ; \ldots\ldots ; y_n\}$

$X\times Y = \{(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; \ldots\ldots ; (x_n ; y_n)\}$

Les éléments de X×Y forment une série statistiques à deux variables ou simplement une série statistiques double.

On se propose d'étudier s'il existe un lien entre ces deux variables. Ce lien, s'il existe, est-il suffisamment fort pour permettre de faire des prévisions par le calcul ?

## I- Présentation d'une série statistique double

### 1. Présentation linéaire

Lorsque la série statistique présente un faible effectif, on peut simplement utiliser un tableau linéaire pour la présenter.

Exemple :

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'une denrée pour ces six dernières années.

| Années | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prix | 2050 | 2650 | 3300 | 3950 | 4100 | 4600 |

Visiblement le prix de la denrée semble dépendre du temps

### 2. Tableaux à double entrée – Séries marginales

Lorsque l'effectif de la population est élevé, on utilise un tableau à double entrée.

#### a) Séries non regroupées par classe

Exemple :

Deux examinateurs A et B ont, chacun, interrogé 100 candidats et attribué à chacun candidat une note dans l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}. Les résultats sont consignés dans le tableau à double entrée suivant où X désigne la variable « note attribuée par l'examinateur A » et Y la variable « note attribuée par l'examinateur B ».

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | **4** |
| 1 | 4 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | **13** |
| 2 | 0 | 4 | 15 | 13 | 5 | 0 | **37** |
| 3 | 0 | 2 | 10 | 7 | 3 | 3 | **25** |
| 4 | 0 | 0 | 3 | 6 | 4 | 3 | **16** |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | **5** |
| **Total** | **5** | **13** | **32** | **29** | **13** | **8** | **100** |

Définition : On appelle série marginale, la série statistique associée à l'une des variables X ou Y.

Série statistique de X

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 13 | 32 | 29 | 13 | 8 |

Série statistique de Y

| Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 13 | 37 | 25 | 16 | 5 |

**a) Séries regroupées par classe**

On regroupe une série par classe lorsque pour un effectif total élevé, on a de faibles effectifs pour la plupart des modalités.

Exemple :

Le tableau à double entrée suivant, donne la taille Y (cm) et le poids X (en kg) de 100 élèves de terminale.

| Y \ X | [156 ; 160[ | [160 ; 165[ | [165 ; 170[ | [170 ; 175[ |
|---|---|---|---|---|
| [46 ; 50[ | 16 | 8 | 2 | 0 |
| [50 ; 55[ | 3 | 18 | 6 | 1 |
| [55 ; 60[ | 1 | 9 | 9 | 6 |
| [60 ; 65[ | 0 | 3 | 8 | 15 |

On complète le tableau en y ajoutant le centre de chaque classe ; on obtient alors deux séries statistiques marginales comme suit :

| Centres | | 158 | 162,5 | 167,5 | 172,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | Y \ X | [156 ; 160[ | [160 ; 165[ | [165 ; 170[ | [170 ; 175[ |
| 48 | [46 ; 50[ | 16 | 8 | 2 | 0 |
| 52,5 | [50 ; 55[ | 3 | 18 | 6 | 1 |
| 57,5 | [55 ; 60[ | 1 | 9 | 9 | 6 |
| 62,5 | [60 ; 65[ | 0 | 3 | 8 | 15 |

Les séries marginales sont :

Série statistique de X

| X | 158 | 162,5 | 167,5 | 172,5 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 26 | 28 | 25 | 21 |

Série statistique de Y

| Y | 48 | 52,5 | 57,5 | 62,5 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 20 | 38 | 25 | 17 |

## II- Etude de séries statistiques doubles

Nous allons baser notre étude sur l'exemple suivant :

Exemple :

Le tableau suivant, présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active dans un pays de 1950 à 1996.

| Années | 1950 | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang des années $x_i$ | 0 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| Taux $y_i$ | 1,1 | 0,8 | 1,6 | 1,2 | 1,3 | 2 | 2,6 | 2,4 | 3,1 | 3,4 |

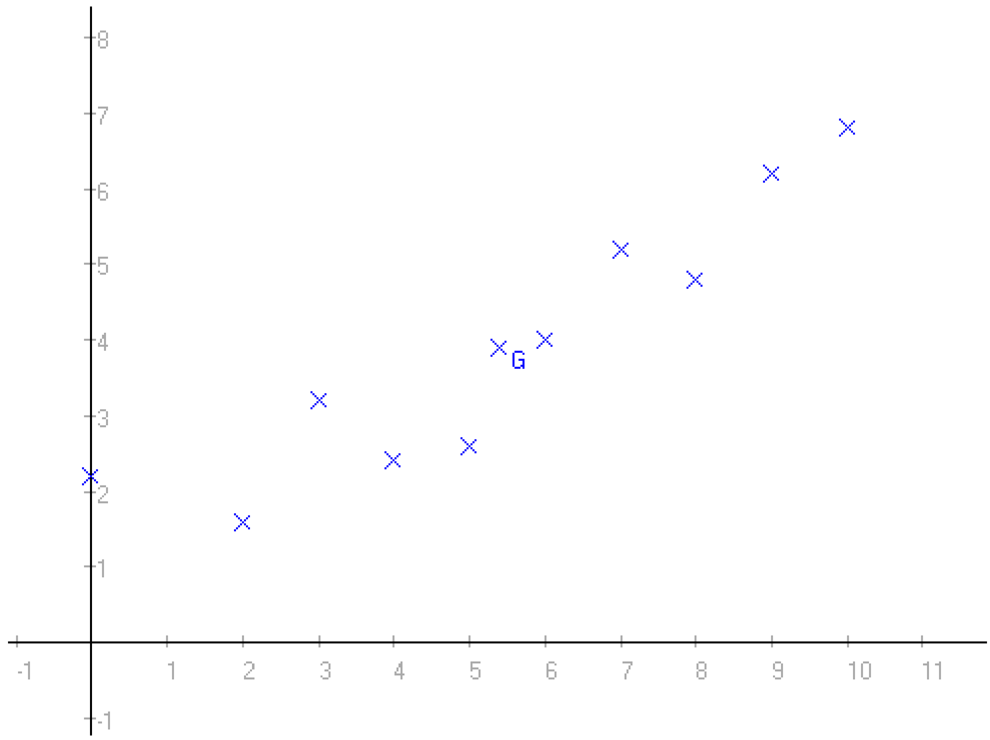
### 1. Nuage de point

#### a) Définition

Dans un repère orthogonal bien choisi, l'ensemble des points $M_i$ de coordonnées ($x_i$ ; $y_i$), avec $1 \leq i \leq n$, est appelé le nuage de points associé à cette série statistiques à deux variables.

#### b) Représentation graphique

Représentons la série ci-dessus dans un repère orthogonal pour lequel :
1 cm représente 5 années sur l'axe des abscisses,
1 cm représente un taux de chômage de 0,5% sur l'axe des ordonnées.




#### c) Point moyen

**Définition**

Notons $\bar{x}$ la moyenne des valeurs $x_i$ et $\bar{y}$ la moyenne des valeurs $y_i$. Avec les notations précédentes, on a :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

Le point G de coordonnées ($\bar{x}$ ; $\bar{y}$) est appelé le point moyen du nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.

Exemple :

Avec la série ci-dessus, on a :

$$\overline{x} = \frac{0+10+15+20+25+30+35+40+45+50}{10} = \frac{270}{10} = 27$$

$$\overline{y} = \frac{y_1+1,1+0,8+1,6+1,2+1,3+2+2,6+2,4+3,1+3,4}{10} = \frac{19,5}{10} = 1,95$$

Donc le point moyen G a pour coordonnées (27 ; 1,95). Il est indiqué sur le graphique précédent.

**2. Ajustement du nuage de points par une droite**

**a) Le principe de l'ajustement**

Lorsque le nuage de points associé à une série double a une forme approximativement rectiligne, on peut procéder à un ajustement affine en traçant une droite passant le plus près possible de ces points et qui donnera les meilleurs résultats.

Dans le repère choisi, cette droite passe par le point moyen G.

**b) La méthode d'ajustement : la méthode des moindres carrés**

**Validité de l'ajustement**

C'est attester que la droite d'ajustement linéaire peut ou non apporter les meilleurs résultats. Pour cela, on calcule le coefficient de corrélation linéaire r qui mesure la force du lien de dépendance entre les deux caractères.

- **Coefficient de corrélation linéaire**

  $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X\,;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ où :

  - $\mathrm{cov}(X\,;Y) = \dfrac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\ \overline{y}$
  - $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2$ et $V(Y) = \dfrac{1}{n}\sum y_i^2 - \overline{y}^2$

- **Propriétés**
  - On admet que : $-1 \le r \le 1$.
  - L'ajustement est considéré comme valide si $|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

- **Remarques**
  - r est positif dans le cas où les variables varient dans le même sens.
  - r est négatif dans le cas où les variables varient en sens contraires.

Exemple

Justifions que l'on peut ajuster le nuage à l'aide d'une droite par la méthode des moindres carrés.

Graphiquement le nuage est approximativement rectiligne, on peut donc envisager de l'ajuster par une droite.

Mais avant, il nous faut valider cette méthode en évaluant le coefficient de corrélation linéaire.

$$\mathrm{cov}(X;Y) = \frac{1}{10}(0\times1,1+10\times0,8+15\times1,6+20\times1,2+25\times1,3+30\times2+35\times2,6+40\times2,4+45\times3,1+50\times3,4) - 27\times1,95$$
$$= 11,85$$

$$V(X) = \frac{1}{10}(0^2+10^2+15^2+20^2+25^2+30^2+35^2+40^2+45^2+50^2) - 27^2$$
$$= 231.$$

$$V(Y) = \frac{1}{10}(1,1^2+0,8^2+1,6^2+1,2^2+1,3^2+2^2+2,6^2+2,4^2+3,1^2+3,4^2) - 1,95^2$$
$$= 0,7205.$$

$$r = \frac{11,85}{\sqrt{231 \times 0,7205}} \approx 0,919$$

Lorsque $0,87 \leq |r| \leq 1$, la corrélation entre les deux variables est forte.

**c) Droite d'ajustement**

- La droite de régression de y en x, a pour équation :
$$y = \frac{\text{cov}(X\,;Y)}{V(X)}(x - \bar{x}) + \bar{y}.$$
- La droite de régression de y en x, a pour équation :
$$x = \frac{\text{cov}(X\,;Y)}{V(Y)}(y - \bar{y}) + \bar{x}.$$

<u>Exemple</u>
Déterminons une équation de chacune des droites de régression :

*La droite de régression de y en x, a pour équation :*
$$y = \frac{11,85}{231}(x - 27) + 1,95 = 0,05x - 11,55 \Rightarrow y = 0,05x - 11,55.$$
*La droite de régression de y en x, a pour équation :*
$$x = \frac{11,85}{0,7205}(y - 1,95) + 27 = 16,45y - 5,08 \Rightarrow x = 16,45y - 5,08.$$
NB : de façon générale, c'est la droite de régression de y en x qui utilisée.

**d) Estimations – Erreur d'estimation**
<u>Exemple</u>
En utilisant la droite de régression de y en x :
a) Donner une estimation de l'année à partir de laquelle taux de chômage dépassera les 5%.
b) donner une estimation du taux chômage en 2005.
c) En réalité en 2005, le taux de chômage fût de 3,41%. A quelle erreur l'estimation conduit-elle ? Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

***Solution***

*a) $y = 0,05x + 0,6 \geq 5 \Rightarrow x \geq 88$ donc l'année est l'an 2038 (1950 + 88)*
*b) En 2005, x = 55. Donc $y = 0,05 \times 55 + 0,6 = 3,35$. En 2005, le taux de chômage à prévoir est de 3,35%.*

*c) Notons e l'erreur d'estimation. On a :*
$$e = \frac{|3,41 - 3,35|}{3,41} \times 100\% \approx 1,76\%$$
*Donc l'estimation est acceptable.*

**Exercices résolus**
**Exercice 4.1**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 1,48 | 1,45 | 1,39 | 1,40 | 1,36 | 1,30 | 1,24 | 1,18 |
| $Y_i$ | 101 | 104 | 105 | 107 | 108 | 110 | 114 | 115 |

Le tableau ci-dessus donne les valeurs de deux variables statistiques X et Y.
X représente le cours de la livre sterling par rapport au dollar américain sur une période de l'année 1984 et Y représente le prix, en livre sterling d'un produit.

1. a) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal (1 cm pour 0,02 unités en abscisse et 1 cm pour 0,2 unités en ordonnée).
   *On initialisera le repère en (1,1 ; 10).*
   b) Placer le point moyen G.
2. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y. Que peut-on déduire de ce résultat ?
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées. Construire cette droite sur le graphique.
4. Le cours de la livre étant à 1,16 par rapport au dollar, quel prix peut-on prévoir pour le produit étudié ? (On donnera la valeur à l'unité près)

**Exercice 4.2**

On donne le tableau à double entrée suivant relatif à l'étude de la série double suivante : 56 individus classés sous les deux caractères poids et taille. X désigne le poids en kg et Y la taille en cm.

| Y \ X | [45 ; 50[ | [50 ; 55[ | [55 ; 60] |
|---|---|---|---|
| [150 ; 155[ | 9 | 1 | 0 |
| [155 ; 160[ | 18 | 4 | 1 |
| [160 ; 165] | 5 | 12 | 6 |

1. Déterminer les centres des classes de X et Y.
2. Déterminer la série marginale des centres de classes associée à X puis celle associée à Y.
3. Peut-on réaliser un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés entre les variables X et Y ? Justifier votre réponse.

***Résolution***

***Exercice 4.1***

*1. a) Nuage des points (voir graphique)*

*1. b) Point moyen G*

$$\overline{X} = \frac{1{,}48+1{,}45+1{,}40+1{,}38+1{,}36+1{,}30+1{,}24+1{,}18+1{,}15}{8} = \frac{10{,}64}{8} = 1{,}33$$

$$\overline{Y} = \frac{101+104+105+107+108+114+115+118+}{8} = \frac{872}{8} = 109$$

*Pour la position de G voir le graphique.*

*2. Calcul du coefficient de corrélation linéaire :*

$$V(X) = \frac{1{,}48^2+1{,}45^2+1{,}40^2+1{,}38^2+1{,}36^2+1{,}24^2+1{,}18^2+1{,}15^2}{8} - \overline{X}^2$$

$$= \frac{14{,}2594}{8} - 1{,}33^2 = 0{,}013525$$

$$V(Y) = \frac{101^2 + 104^2 + 105^2 + 107^2 + 108^2 + 114^2 + 115^2 + 118^2 +}{8} - \overline{Y}^2$$

$$= \frac{95300}{8} - 109^2 \ = 31{,}5$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1{,}48 \times 101 + 1{,}45 \times 104 + 1{,}4 \times 105 + 1{,}38 \times 107 + 1{,}36 \times 108 + 1{,}24 \times 114 + 1{,}18 \times 115 + 1{,}15 \times 118}{8} - \overline{X} \times \overline{Y}$$

$$= \frac{1154{,}58}{8} - 144{,}97 = -0{,}6475$$

*Le coefficient de corrélation linéaire r*

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-0{,}6475}{\sqrt{0{,}013525 \times 31{,}5}} \approx 0{,}992$$

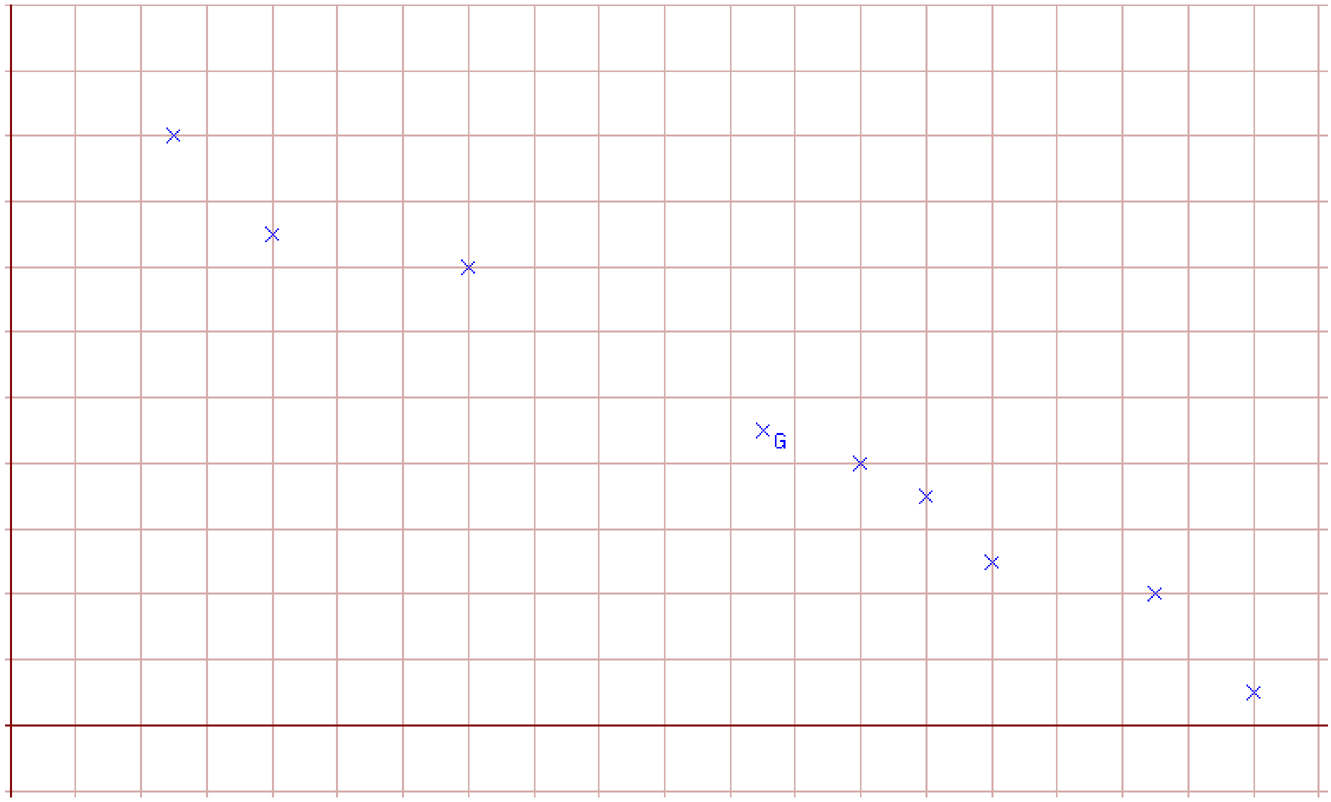
*Ce résultat montre qu'il y a une forte corrélation entre X et Y. d'où qu'un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés est envisageable.*

3. $Y = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}(X - \overline{X}) + \overline{Y}$ .

$$= \frac{-0{,}6475}{0{,}013525}(X - 1{,}33) + 31{,}5$$

$$= -47{,}87X + 172{,}67$$

*4. Selon l'ajustement, X = 1,16 implique que  Y = 117,1*
*Le prix du produit à prévoir est donc117,1 livres sterling.*




***Exercice 4.2***

*1. Le tableau suivant donne les centres des classes et leurs effectifs respectifs :*

| | | | *Centres des classes de X* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ***47,5*** | ***52,5*** | ***57,5*** | |
| | | X / Y | [45 ; 50[ | [50 ; 55[ | [55 ; 60] | *Effectifs de Y* |
| *Centres des classes de Y* | ***152,5*** | [150 ; 155[ | 9 | 1 | 0 | *10* |
| | ***157,5*** | [155 ; 160[ | 18 | 4 | 1 | *23* |
| | ***162,5*** | [160 ; 165] | 5 | 12 | 6 | *23* |
| | | *Effectifs de X* | *32* | *17* | *7* | |

*2. Séries marginales*
*Série marginale associée à X*

| *Centres $x_i$* | *47,5* | *52,5* | *57,5* |
|---|---|---|---|
| *Effectifs $n_i$* | *32* | *17* | *7* |

*Série marginale associée à Y*

| *Centres $y_j$* | *152,5* | *157,5* | *162,5* |
|---|---|---|---|
| *Effectifs $n_j$* | *10* | *23* | *23* |

*3. a) Calcul des moyennes, variances, covariance et coefficient de corrélation linéaire*

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{32\times 47{,}5 + 17\times 52{,}5 + 7\times 57{,}5}{56} = \frac{2815}{56} \approx 50{,}27$$

$$V(X) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{32\times 47{,}5^2 + 17\times 52{,}5^2 + 7\times 57{,}5^2}{56} - \left(\frac{2815}{56}\right)^2 \approx 12{,}43$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum n_j x_j}{N} = \frac{10\times 152{,}7 + 23\times 157{,}5 + 23\times 162{,}5}{56} = \frac{8885}{56} \approx 158{,}66$$

$$V(Y) = \frac{\sum n_j y_j^2}{N} - \overline{Y}^2 = \frac{10\times 152{,}7^2 + 23\times 157{,}5^2 + 23\times 162{,}5^2}{56} - \left(\frac{8885}{56}\right)^2 \approx 13{,}39$$

*Pour le calcul de la covariance utilisons le tableau suivant :*

| $x_i$ | $y_i$ | $n_{ij}$ | $n_{ij}x_iy_i$ |
|---|---|---|---|
| *47,5* | *152,5* | *9* | *65193,75* |
| *47,5* | *157,5* | *18* | *134662,5* |
| *47,5* | *162,5* | *5* | *38593,75* |
| *52,5* | *152,5* | *1* | *8006,25* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *52,5* | *157,5* | *4* | *33075* |
| *52,5* | *162,5* | *12* | *102375* |
| *57,5* | *152,5* | *0* | *0* |
| *57,5* | *157,5* | *1* | *9056,25* |
| *57,5* | *162,5* | *6* | *56062,5* |
| ***Total*** | | | ***447025*** |

*Cov(X, Y) =* $\dfrac{\sum n_{ij}x_i y_i}{N} - \overline{X}\times\overline{Y} = \dfrac{447025}{56} - \dfrac{2815}{56}\times\dfrac{8885}{56} \approx 7{,}06$

*Coefficient de corrélation linéaire :*

$r = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0{,}55.$

*Le lien entre les deux variables X et Y est faible. Tout ajustement linéaire pourrait conduire à des prévisions erronées.*

## EXERCICES

### Exercice 4.3

A la fin de l'année, tous les déchets de la d'Abidjan devront être traités par des déchetteries. Pour cela une étude a été faite sur l'expérience de la ville de Pretoria en Afrique du Sud.
Le tableau ci-dessus donne l'évolution du nombre de déchetteries à Pretoria depuis l'année 2000.

| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $X_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Nombre de déchetteries $Y_i$ | 12 | 18 | 33 | 53 | 69 | 83 | 95 |

1. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 en abscisse puis 1 cm pour 5 en ordonnée.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
3. On se propose d'évaluer le nombre de déchetteries à la fin de 2012.
   a) Un ajustement par la méthode des moindres carrés permet-il de faire des estimations fiables ? justifier votre réponse.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de Y en X.
   c) Donner une estimation du nombre de déchetteries en 2012.
   d) Les experts estiment qu'il faudrait 200 déchetteries pour traiter les déchets. En supposant que l'évolution se poursuit au même rythme, évaluer l'année au de laquelle ce nombre serait atteint.

### Exercice 4.4

En Côte D'Ivoire, les factures de CIE (factures d'électricité) sont distribuées tous deux (2) mois.
Monsieur Kouadio a noté régulièrement l'évolution des taxes sur ses factures.
Le tableau suivant donne les taxes sur les années 2008 et 2009.

| Dates | 02-08 | 04-08 | 06-08 | 08-08 | 10-08 | 12-08 | 02-09 | 04-09 | 06-09 | 08-09 | 10-09 | 12-09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Taxes Y | 675 | 710 | 715 | 755 | 760 | 770 | 820 | 820 | 835 | 895 | 920 | 955 |

1. Représenter graphiquement cette série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 en abscisse puis 1 cm pour 50 en ordonnée.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
3. Justifier que l'on peut ajuster linéairement cette série par la méthode des moindres carrées.
4. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X puis construire cette droite sur le graphique.
5. A l'aide de la droite :
   a) Déterminer une estimation des taxes en juin 2010.
   b) Déterminer la date à laquelle ces taxes vont-elles dépasser 1500.

**Exercice 4.5**

Voici le tableau donnant l'évolution des surfaces cultivables (en milliers d'hectares) dans un pays.

| Année | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année X | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Superficie en milliers d'ha Y | 805 | 629,7 | 534,3 | 431 | 218 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 0,5 cm pour une unité puis 2 cm pour 100 milliers d'hectares en ordonnée.
2. a) Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
   b) Calculer la variance de X, la variance de Y et la covariance de X et Y.
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. en donner le résultat au millième.
   d) Un ajustement linéaire est-il justifié ?
   e) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.
3. Quelle estimation, en milliers d'hectares, de la surface cultivable en 2004 peut-on faire à partir de la droite de régression ? En donner l'arrondi au dixième.
4. En réalité, en 2004 les surfaces cultivables avaient une superficie de 266, 2 milliers d'hectares. A quelle erreur l'estimation conduit-elle ? Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

# 5. LIMITES ET CONTINUITE

## I / LIMITES

### 1) Rappel de quelques limites de références

a et c étant des nombres réels et n un nombre entier naturel non nul, on a :

- $\lim\limits_{x\to a} c = c$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} c = c$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} c = c$
- $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
- Pour tout a positif, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

### 2) Limite à gauche – Limite à droite

**Propriété**

a et $\ell$ sont des nombres réels, f une fonction définie sur n intervalle ouvert centrée en a, sauf éventuellement en a.

• Si f n'est pas définie en a, alors

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = \ell$.

• Si f est définie en a, alors

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = f(a)$

**Exercice 5.1 résolu**

Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction au point 1 :

a) f est définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in ]-\infty;1],\ f(x) = x^2 - x + 3 \\ \text{pour } x \in ]1;+\infty[,\ f(x) = -5x + 3 \end{cases}$

b) f est définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in ]-\infty;1[,\ f(x) = -2x^2 - x + 1 \\ \text{pour } x \in ]1;+\infty[,\ f(x) = -5x + 3 \end{cases}$

***Résolution***

a) $f$ est définie en a et $f(1) = 1^2 - 1 + 3 = 3 = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -5\times 1 + 3 = -2$

*f n'admet pas de limite en 1 car* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

a) $f$ n'est pas définie en a et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -2\times 1^2 - 1 + 1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -5\times 1 + 3 = -2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) \Rightarrow f$ admet une limite en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$.

**3 ) Limite en l'infini de fonctions polynômes et fonction rationnelles.**
**Propriété**

- La limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) de son monôme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) du quotient des monômes de plus haut degrés du numérateur et du dénominateur.

**4) Limite d'une fonction composée**

**Propriété**

f et g sont des fonctions, a, $\ell$ et $\ell'$ des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} f(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to a} fog(x) = \ell'$

**Exercice 5.2 résolu**

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}$

***Résolution***

*Considérons* $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}} = fog\,(x)$ *avec* $g(x) = \dfrac{x+1}{2x}$ *et* $f(x) = \sqrt{x}$

*Comme* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *alors* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{2x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

***Autre rédaction***

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{2x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *car* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}} \sqrt{X} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

**Exercice 5.3**

Sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}$ .

**5) Opérations sur les limites**

f et g sont deux fonctions.

- Les résultats sont libellés avec la notation dénudée : lim f, lim g. il va de soit qu'il s'agit de la limite de f et celle de g « au même endroit » : soit en a ($a\in\mathbb{R}$ ), soit en $-\infty$ ou en $+\infty$. Chaque tableau énonce donc en fait trois propriétés correspondant à chacun de ces cas ci-dessus cités.
- Les cases (☠): ce sont les cases où à priori, on ne sait pas conclure de façon immédiate, plusieurs possibilités de résultats sont envisageables. On dit alors qu'il y a indétermination.
- $\ell$ et $\ell'$ sont des nombres réels puis la notation $\infty$ signifie ou $-\infty$ ou $+\infty$.

**a) Limites et somme :**
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f + g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

| lim g \ lim f | $\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell'$ | $\ell+\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ☠ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | ☠ | $+\infty$ |

**b) Limites et produit :**
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f × g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

| lim g \ lim f | $\ell\neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $\ell'\neq 0$ | $\ell\times\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | 0 |
| $-\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ☠ |
| $+\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ☠ |
| 0 | 0 | ☠ | ☠ | 0 |

**c) Limites et inverse :**
La fonction f a une limite (finie ou infinie), la fonction 1/f admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

| lim f | $\ell\neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 et $f<0$ | 0 et $f>0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| lim1/f | $1/\ell$ | 0 | 0 | $-\infty$ | $+\infty$ |

**d) Limites et quotient :**
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f/g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

| lim g \ lim f | $\ell\neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $\ell'\neq 0$ | $\ell/\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | 0 |
| $-\infty$ | 0 | ☠ | ☠ | 0 |
| $+\infty$ | 0 | ☠ | ☠ | 0 |
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | ☠ |

**e) Limites et valeur absolue :**
La fonction f a une limite (finie ou infinie), la fonction |f| admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau

| lim f | $\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| lim\|f\| | $\|\ell\|$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

**f) Limites et racine carrée :**
La fonction positive f a une limite (finie

| lim f | $\ell$ | $+\infty$ |
|---|---|---|

| ou infinie), la fonction $\sqrt{f}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le |
|---|

| | | |
|---|---|---|
| $\lim \sqrt{f}$ | $\sqrt{\ell}$ | $+\infty$ |

**Remarque :** il y a quatre formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$ ; $\infty/\infty$ ; $0/0$ ; $0 \times \infty$. Pour lever l'indétermination, on utilise d'autres moyens tels que l'expression conjuguée ; le changement de variable ; la factorisation ; le taux de variation ou une combinaison de ces moyens ci-dessus cités.

**Exercice 5.4 résolu**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4+x^3-2x+3)$  b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^4+x^3+2}{x^2-3x+1}$

***Résolution***

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}(-x^4+x^3-2x+3)=\lim_{x\to+\infty}(-x^4)=-\infty$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^4+x^3+2}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

**6) Exemples de calculs de limites et levée de formes indéterminées**

**1) Exercice 5.5 résolu  Forme $\left(\dfrac{\textbf{réel}}{\textbf{réel non nul}}\right)$**

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x-3}$$

***Résolution***

*On recherche* : $\lim\limits_{x\to2}x+3=5$ ; $\lim\limits_{x\to2}x-3=-1$ *on a* $\dfrac{5}{-1}=-5$ ***(cette recherche se fait au brouillon)***

*On obtient la forme* $\left(\dfrac{réel}{réel\ \ non\ \ nul}\right)$

*On rédige :*

$$\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x-3}=-5 \quad car \begin{cases}\lim\limits_{x\to2}(x+3)=5\\ \lim\limits_{x\to2}(x-2)=-1\end{cases}$$

**2) Exercice 5.6 résolu  Forme indéterminée « $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$ »**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$  2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}\ -2}{x-1}$  3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

***Résolution***

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

*On recherche :* $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+x-2)=0$ ; $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+3x+2)=0$. *On a* « $\frac{0}{0}$ » *on ne peut conclure*

***La forme* « $\frac{0}{0}$ » *est appelée forme indéterminée.***

***Comment lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ?***

*Pour lever la forme indéterminée* « $\frac{0}{0}$ »*, on peut procéder comme suit :*

***1[er] cas***

Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ donne « $\frac{0}{0}$ », on peut mettre (x - a) en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

*Ainsi :*

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1} = 3 \ \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to -2}(x-1)=-3\\ \lim\limits_{x\to -2}(x+1)=-1\end{cases}$$

*donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=3}$

***2[eme] cas***

Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ donne « $\frac{0}{0}$ », on peut utiliser l'expression conjuguée si éventuellement la fonction f contient une « racine carrée ».

*Ainsi :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4} \qquad \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=4\end{cases}$$

*donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}}$

***3[eme] cas :****/Lorsque* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *donne* « $\frac{0}{0}$ »*, on peut utiliser la définition du nombre dérivé ; donc la forme* $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ *où g(x) sera identifiée. Dans ce cas précis, si g est dérivable en a, alors*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.

*Ainsi :* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}$ *avec g(x) = sin x*

*Comme g est dérivable en* $\pi$ *, alors*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi} = g'(\pi) = \cos\pi = -1$$

*donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi} = -1}$

**Rappel : l'expression $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ est appelée taux de variation de la fonction g en a.**

**Exercice 5.7**

Justifier que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ puis calculer $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x-1}{x-\pi}$.

**3) Exercice 5.8 résolu** **Forme « $\left(\dfrac{\text{réel non nul}}{0}\right)$ »**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{x-4}{(x-3)^3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{x-4}{(x-3)^3}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

***Résolution***

*1.* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{x-4}{(x-3)^3}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{x-4}{(x-3)^3}$

*On recherche :* $\lim\limits_{x\to 3}(x-4) = -1$ ; $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^3 = 0$. *On a la forme* « $\left(\dfrac{\text{réel non nul}}{0}\right)$ »

*On transforme le quotient en produit de la façon suivante :* $\dfrac{x-4}{(x-3)^3} = (x-4)\times\dfrac{1}{(x-3)^3}$

*Comme* $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{(x-3)^3} = -\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{(x-3)^3} = +\infty\end{cases}$ *(limites de référence)*

*Alors on rédige :*

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}}(x-4)\frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3} x-4 = -1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{(x-3)^3} = +\infty\end{cases}$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}}(x-4)\frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \quad \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3} x-4 = -1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{(x-3)^3} = -\infty\end{cases}$$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

*On a* $\lim\limits_{x \to 4}(2-\sqrt{x})=0$.

*On cherche ensuite à déterminer le signe de* $(2-\sqrt{x})$ *pour les valeurs de x supérieures à 4 et proches de 4.*

*On a :* $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} > 2$. *Par conséquent* $(2-\sqrt{x})<0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \dfrac{1}{2-\sqrt{x}} = -\infty$ *car* $(2-\sqrt{x})<0$ *pour* $x > 4$.

**4) Exercice 5.9 résolu Forme indéterminée « 0×∞ »**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}(-x^3+3x+2)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}(x^2+3x+2)$

***Résolution***

*a)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}(-x^3+3x+2)$

*On recherche :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2+3x+2)=-\infty$ *on a « 0×∞ » on ne peut conclure.*

***La forme « 0×∞ » est appelée forme indéterminée***

***Comment lever la forme indéterminée « 0×∞ » ?***

*Pour lever la forme indéterminée « 0×∞ » on peut procéder comme suit :*

*Lorsque lim f(x) donne « 0×∞ », on peut transformer l'expression de f(x) en utilisant soit l'expression conjuguée, soit le développement, soit la levée du radical ou la factorisation.*

*Ainsi : a)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}(-x^3+3x+2)= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x}(-x^3+3x+2)= \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x}\times\dfrac{-x^3+3x+2}{x} = -\infty$

*car* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3+3x+2}{x} = -\infty \end{cases}$

*d'où* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}(-x^3+3x+2)=-\infty}$

*b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}(x^2+3x+2)= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

*d'où* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}(x^2+3x+2)=0}$

**6) Exercice 5.10 résolu      Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ »**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$      b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

***Résolution***

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

*On recherche :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$, *on a* « $\frac{+\infty}{-\infty}$ » *on ne peut conclure.*

***La forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » est appelée forme indéterminée.***

***Comment lever la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » ?***

*Pour lever la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » on peut procéder comme suit :*

***1^er^ cas***

Lorsque lim f(x) donne « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut utiliser la mise en facteur du terme dominant.

*Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-1} =$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x \times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})} = -1 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

*D'où* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -1}$

***2^éme^ cas***

Lorsque limf(x) donne « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut utiliser l'expression conjuguée.

*Ainsi,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}+2) = +\infty$      *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$.

*D'où,* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = +\infty.}$

**7) Forme indéterminée « - ∞ + ∞ ».**

**Exercice 5.11 résolu**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})$ .

***Résolution***

*a)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-3x$

*On recherche :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}=+\infty$ *;* $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x=-\infty$*. On a « + ∞ -∞ » on ne peut conclure.*

***La forme « + ∞ -∞ » est appelée forme indéterminée.***

***Comment lever la forme indéterminée « + ∞ -∞ » ?***

*Pour lever la forme indéterminée « + ∞ -∞ » on peut procéder comme suit :*

***1^er^ cas***

Lorsque limf(x) donne « + ∞ -∞ », on peut utiliser la factorisation.

*Ainsi,* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x})}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x)=$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(|x|\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3\right)=-\infty$$

$$car\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3=-2\end{cases}$$

*D'où,* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x)=-\infty$

***2^ème^ cas***

Lorsque limf(x) donne « +∞ - ∞ », on peut utiliser l'expression conjuguée.

*Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}}=$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+3)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$car \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2} = +\infty \end{cases}$$

*D'où* $\boxed{\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}) = 0}$

**3$^{ème}$ cas**

Lorsque limf(x) donne « + ∞ -∞ », on peut utiliser l'expression conjuguée et la factorisation.

*Ainsi,* $\lim_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})(x+3-\sqrt{x^2+3x+1})}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}} =$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3)^2-(x^2+3x+1)}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+8}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3+x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x(1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3+\frac{8}{x})}{(1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{3}{2}$$

$$car \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 3+\frac{8}{x} = 3 \\ \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2 \end{cases}$$

*d'où* $\boxed{\lim_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1}) = \frac{3}{2}}$

## EXERCICES

### Exercice 5.12

Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en – ∞ puis en + ∞.

a) $f(x) = -x^4 + x^3 - 2x + 3$ b) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 2$ c) $f(x) = 5x^6 + x^2 - 9$

d) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ e) $f(x) = -7 + x + x^3 - 5x^5$ g) $f(x) = 3 + x^5 + 6x^7$

i) $f(x) = \frac{x^4+2x+1}{1-2x}$ j) $f(x) = \frac{4x^2+x+1}{x^5+x^3-2}$ k) $f(x) = \frac{3(x+3)^2(x^2+2)}{3x^2+1}$

l) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x^3+1}$  m) $f(x)=\dfrac{x-4}{(x-3)(x-5)}$  n) $f(x)=\dfrac{x^4+5x-5}{1-2x^4}$

**Exercice 5.13**
Calculer des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5}{2x+7}$  b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+1}{1+x}$  c) $\lim\limits_{x\to -2}(\sqrt{2x^2+1}+1)$  d) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(-x^2+3x-1)$

**Exercice 5.14**
Calculer des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$  b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{1-x^2}$  c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-54}{x^2-9}$  e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3-4x-3}$  f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

**Exercice 5.15**
Pour chauqe cas, calculer la limite de la fonction à gauche puis à droite de $x_o$ :

$f(x)=\dfrac{2}{(x-3)^2}$ , $x_o=3$ ; $f(x)=\dfrac{-2}{(x+2)^3}$ , $x_o=-2$

$f(x)=\dfrac{4x+1}{(x-2)}$ , $x_o=2$ ; $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{(2x+1)^2}$ , $x_o=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{x|x-2|}{(x-1)^3}$ , $x_o=1$ ; $f(x)=\dfrac{\pi-\sqrt{2}x}{(x+3)}$ , $x_o=-3$

$f(x)=\dfrac{2-x}{9-x^2}$ , $x_o=3$ ; $f(x)=\dfrac{x-4}{(x-3)(x-5)}$ , $x_o=3$ et $x_o=5$

**Exercice 5.16**
Calculer des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$  b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$  c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$  e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$  f) $\lim\limits_{x\to\ \infty}(x+\sqrt{x^2+1})$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\quad -1}{x}$  h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\quad -1}$  i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

**Exercice 5.17**
Calculer des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$  b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$  c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$  d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x}$

**Exercice 5.18**

Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en – ∞ puis en + ∞.

a) $f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x + 1} - 2x$ b) $f(x) = \sqrt{7x^2 + 1} + 3x$

c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1} - 8x + 1$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + 4x$

**Exercices 5.19**

Calculer chacune des limites suivantes :

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{1 + x - \sqrt{1+12x^2}}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{\sqrt{3x^2+1} \quad +5x}{3x-1})$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2 + \sqrt{x^2 + x + 1})$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 - x - 3})$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + x - \sqrt{2x^2 + 1})$

**7) Limites et interprétations graphiques : Asymptotes – Branches Paraboliques**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (Cf) dans (O, I, J).

**a) Asymptote verticale - Asymptote horizontale - Asymptote oblique**

**Asymptote verticale**

**Propriété 1**

a est un nombre réel. La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à (Cf) si l'une des conditions présentées dans le tableau suivant est satisfaite :

| Conditions (limites) | Interprétations graphiques |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ | La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à (Cf)<br><br>*Ou bien*<br><br>La courbe (Cf) admet une aymptote verticale d'équation x = a |
| $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ | |
| $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$ | |
| $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ | |
| $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ | |
| $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ | |

**Asymptote horizontale**

**Propriété 2**

b est un nombre réel.

- La droite (D) d'équation y = b est asymptote horizontale à (Cf) en - ∞ ⇔ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$
- La droite (D) d'équation y = b est asymptote horizontale à (Cf) en + ∞ ⇔ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

**Exercice 5.20 résolu**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, $(Cf)$ est la représentation graphique de f .

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et donner une interprétation graphique de chaque limite s'il y a lieu.

f est définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ .

***Résolution***

- *On a :* $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-2$

  *Car* $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1$

*Comme* $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ *alors la droite d'équation y = -2 est asymptote horizontale à* $(C_f)$ *en - ∞.*

- *On a :* $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-2$

  *Car* $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$

*Comme* $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ *alors la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à* $(C_f)$ *en + ∞.*

- *On a :* $\displaystyle \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}2x\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty$ *car* $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-1}2x=-2\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty\end{cases}$

*Comme* $\displaystyle \lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$*, alors la droite d'équation x= -1 est asymptote verticale à (Cf)*

- *On a :* $\displaystyle \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\substack{x\to1\\>}}2x\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ *car* $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to1}2x=2\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty\end{cases}$

*Comme* $\displaystyle \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$*, alors la droite d'équation x =1 est asymptote verticale à (Cf)*

**Asymptote oblique**
**Propriété 3**

• La droite (D) d'équation y = ax + b est asymptote oblique à (Cf) en - ∞ ⇔
$\displaystyle \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$

• La droite (D) d'équation y = ax + b est asymptote oblique à (Cf) en + ∞ ⇔
$\displaystyle \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$

**Exercice 5.21 résolu**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, (Cf) est la représentation graphique de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -3x + 1 + \frac{1+x}{x^2+2}$

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = -3x + 1 est asymptote oblique à (Cf) en -∞ et en +∞.
2. Etudier la position relative de (Cf) et de (Δ).

***Résolution***

*1. Pour tout x de ℝ,* $f(x) - y = \frac{1+x}{x^2+2}$

*On a d'une part :* $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

*et d'autre part :* $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

*Donc (Δ) est asymptote oblique à (Cf) en -∞ et en +∞.*

*2. pour étudier la position relative de (Cf) et (Δ), nous étudier le signe de la différence f(x) – y.*
*Pour tout x de ℝ,* $(x^2 + 2) > 0$*. Donc f(x) – y a même signe que (1 + x).*
*Dressons un tableau de signe de (1 + x)*

| *x* | -∞ | | -1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| *(1 + x)* | | - | 0 | + | |

$\forall x \in ]-\infty ; -1[,\ f(x) - y < 0.$ *Donc (Cf) est au dessous de (Δ) sur ]-∞ ; -1[*

$\forall x \in ]-1 ; +\infty[,\ f(x) - y > 0.$ *Donc (Cf) est au dessus de (Δ) sur ]-1 ; +∞[*

$x = -1,\ f(x) = y.$ *Donc (Cf) coupe (Δ) au point A(-1 ; 4).*

**b) Branches paraboliques**
**Propriété**
f est une fonction de représentation graphique (Cf).
Si (Cf) admet une branche parabolique dans chacun des cas présentés dans le tableau ci-dessous :

| Limites | Interprétations graphiques |
|---|---|
| $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ | Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en - ∞. |
| $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ | Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en + ∞. |
| $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ | Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en - ∞. |
| $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ | Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en + ∞. |

**Exercice 5.22 résolu**

1. Démontrer que la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. Même question avec la fonction $g : x \mapsto \frac{x^3+1}{x-2}$ en $-\infty$.

***Résolution***

*1. On a d'une part* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

*Et d'autre part* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x+2}} = 0$ *car* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty \end{cases}$

*Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, *alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OI) en + ∞.*

*2. On a d'une part* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

*Et d'autre part* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

*Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, *alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OJ) en + ∞.*

## II / CONTINUITE

### 1) Continuité en a

#### a) Définition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a,

f est continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

**Exercice 5.23 résolu**

Soit f une fonction de ℝ vers ℝ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ si } x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$

Etudions la continuité de f en 2.

***Solution***

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$ *et* $f(2) = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. *Donc f est continue en 2.*

**b) Propriété**

f est une fonction définie en a
f est continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$.

**Exercice 5.24 résolu**

1. On donne f : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; -1], f(x) = \sqrt{1-x} \\ \forall x \in ]-1 ; +\infty[, f(x) = \sqrt{3+x} \end{cases}$

   Justifions que f est continue en -1.

2. Justifions que la fonction g suivante n'est pas continue en 1.

$$g : \begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; -1[, g(x) = x^2 - x - 3 \\ \forall x \in [-1 ; +\infty[, g(x) = x - 2 \end{cases}$$

***Résolution***

*1. Df =* $\mathbb{R}$

$f(-1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \sqrt{1-x} = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \sqrt{3+x} = \sqrt{2}$

*f est continue en -1 car* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)$

*2. Dg =* $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^2 - x - 3) = -3$ *et* $g(1) = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^2 - x - 3) \neq g(1)$ *donc g n'est pas continue en 1.*

**2) Prolongement par continuité**

**Définition**

Soit f une fonction d'ensemble de définition $D_f$, a un nombre réel n'appartenant pas à $D_f$.
Si f admet une limite finie l en a, alors la fonction f est prolongeable par continuité en a.
La fonction φ définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f, \varphi(x) = f(x) \\ \varphi(a) = 1 \end{cases}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

**Exercice 5.25 résolu**

On donne la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1}$

f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui préciser ce prolongement.

***Résolution** :$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2+4x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1} -(x-3) = 2$$

*$1 \notin D_f$ et f admet en 1 une limite finie égale à 2 donc f est prolongeable par continuité en 1.*
*Soit $\varphi$ le prolongement par continuité de f en 1 :*

$$\varphi : \begin{cases} \forall x \in ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[, \varphi(x) = \dfrac{-x^2+4x-3}{x-1} \\ \varphi(1) = 2 \end{cases}$$

**3) Continuité sur un intervalle**

**a) Définition**

f est continue sur un intervalle ouvert I, si f est continue en chaque élément de I.

**b) Propriété**

- Les fonctions valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur ℝ.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.

**c) Opérations et continuité fonctions sur un intervalle**

**Propriété**

- Toute fonction polynôme est continue sur ℝ.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.
- Si la fonction f est continue sur un intervalle K, alors la fonction $|f|$ est continue sur l'intervalle K.
- Si la fonction g est continue et positive sur un intervalle K, alors la fonction $\sqrt{g}$ est continue sur l'intervalle K.

**d) Image d'un intervalle par une fonction continue**

**Propriété**

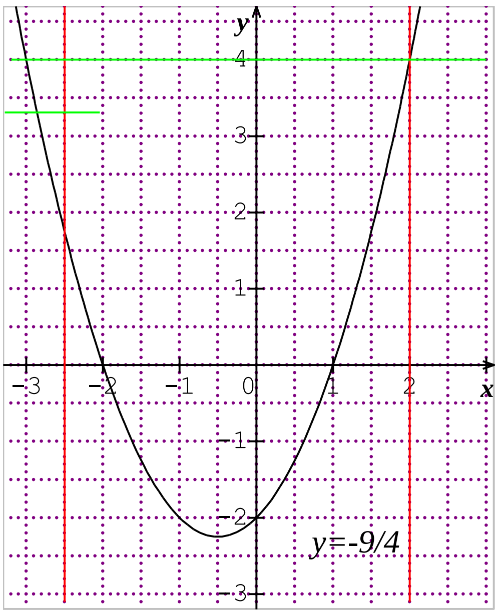
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

**Exercice 5.26 résolu**

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x^2 + x - 2$. Le graphique ci-dessous représente f. Déterminer graphiquement puis à l'aide du tableau de variation de f l'image de l'intervalle [-5/2 ; 2] par f.

***Solution***

- *Graphiquement*



*f ([-5/2 ;2]) = [-9/4 ; 4]*

- *A l'aide du tableau de variation*

| *x* | - ∞ | *-5/2* | | *-1/2* | | *2* | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f '(x)* | | | - | *0* | + | | |
| *f (x)* | ↘ | 7/4 | ↘ | -9/4 | ↗ | 4 | ↗ |

$f$ *est continue sur* $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

*f ([-5/2 ;2]) = [-9/4 ; 4]*

**Exercice 5.27**

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En utilisant le tableau de variation de f, donner l'image par f de chacun des intervalles suivants : [-3 ; -2] ; [-1 ; 1] et [3/2 ; 3].

**e) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**

**Exercice 5.28**

Compléter le tableau suivant :
f est une fonction continue et strictement monotone sur ℝ, a et b sont deux nombre réels tels que : a < b.

| Intervalle I | f strictement croissante sur I | f est strictement décroissante sur I |
|---|---|---|
| | f ( I ) | f ( I ) |
| [a ; b] | | |
| [a ; b [ | | |
| ] a ; b] | | |
| ] a ; b [ | | |
| [a ; + ∞ [ | | |
| ]- ∞ ; a [ | | |
| ℝ | | |

**Exercice 5.29**

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{7}{2}$

Donner l'image par f de chacun des intervalles suivants : [0 ; 1] ; ]- ∞ ; -1[ et [2 ; 4[.

### 4) Fonction continue et strictement monotone

#### a) Bijection continue et strictement monotone

**Propriété**

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection de K dans f(K).

#### b) Réciproque d'une bijection continue et strictement monotone

**Propriété**

φ est une bijection d'un intervalle K dans un intervalle L.
si φ est continue et strictement monotone sur K, alors sa bijection réciproque $\varphi^{-1}$ est également continue et strictement monotone sur L.
de plus, φ et $\varphi^{-1}$ont le même sens de variation.

**Exercice 5.30 résolu**

$f : [0\ ;\ 2] \rightarrow [-3\ ;\ 5]$
$x \mapsto x^2 + 2x - 3$

1. Démontrer que f est une bijection
2. a) Soit $f^{-1}$ la bijection réciproque de f, donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de $f^{-1}$
   b) Dresser le tableau de variation de $f^{-1}$
3. Construire la courbe de f et celle de $f^{-1}$
4. Déterminer l'expression explicite de $f^{-1}$

***Résolution***

*1.* $\forall x \in [0\ ;\ 2], f'(x) = 2(x + 1)$

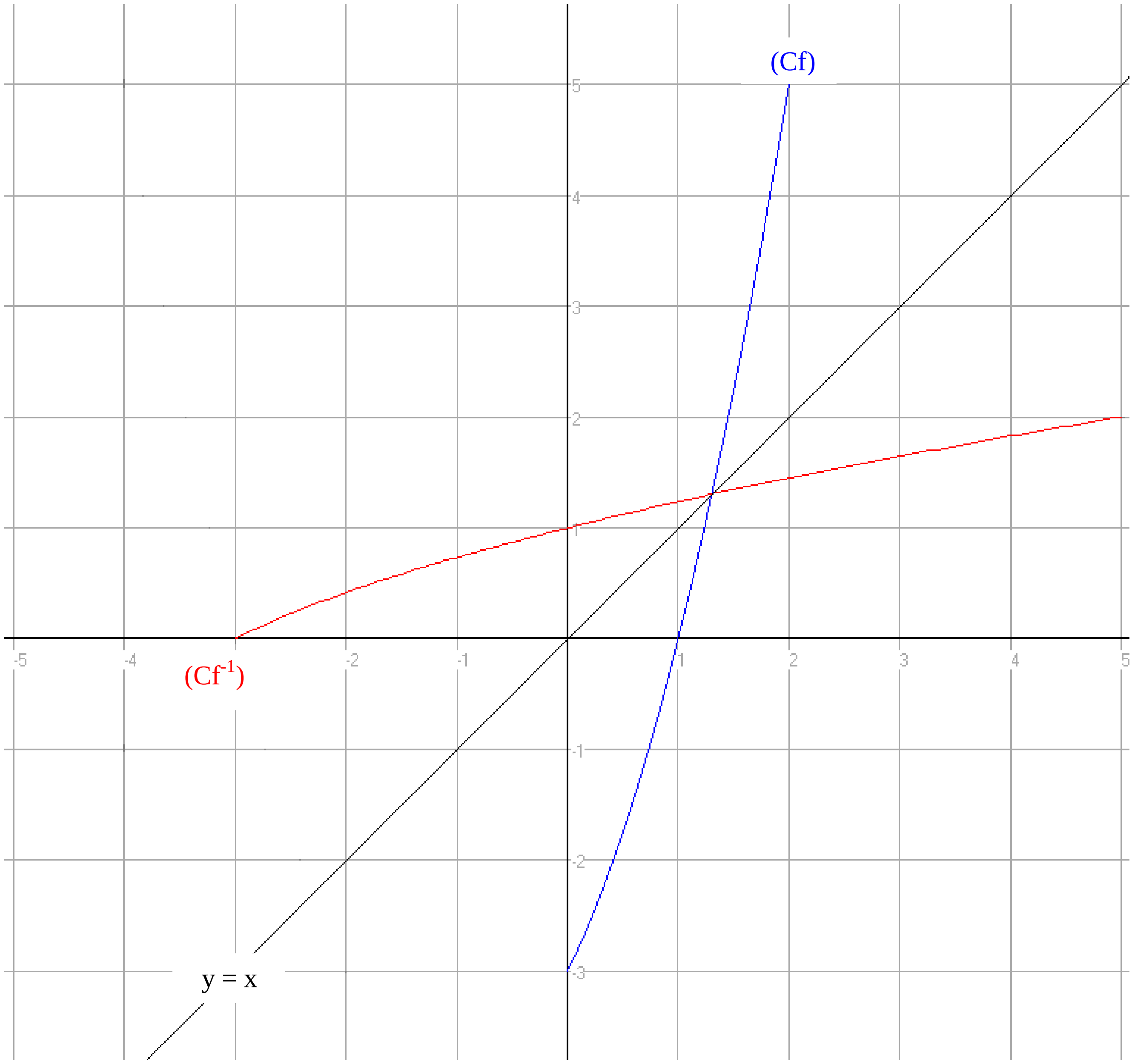
$\forall x \in [0\ ;\ 2], f'(x) > 0$. *Donc f est strictement croissante sur [0 ; 2].*

*f est continue et strictement croissante sur [0 ; 2], donc f réalise une bijection de [0 ; 2] sur f([0 ;2] ) = [-3 ;5].*

*2. a) L'ensemble de départ de $f^{-1}$ est [-3 ;5] et son ensemble d'arrivée est [0 ;2].*
*b) Le tableau de variation de $f^{-1}$ est : $f^{-1}$ est strictement croissante car $f^{-1}$ a le même sens de variation que f.*

| $x$ | $-3$ | $5$ |
|---|---|---|
| $(f^{-1})'(x)$ | + | |
| $f^{-1}(x)$ | $0$ ↗ | $2$ |

*3. Construction de la courbe de $f^{-1}$*




*4. Expression explicite de* $f^{-1}$

*Pour cela en posant f(x) = b écrivons x en fonction de b avec* $x \in [0 ; 2]$ *et* $b \in [-3 ; 5]$.

$f(x) = b \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 - b = 0$

$\Delta = 4(4 + b)$

*Comme* $b \in [-3 ; 5]$ *alors* $4 + b > 0 \Rightarrow \Delta > 0$. *Ainsi, on a deux valeurs de x :*

$x_1 = -1 - \sqrt{4+b}$ *et* $x_2 = -1 + \sqrt{4+b}$

*avec* $x_1 = -1 - \sqrt{4+b}$, $b \in [-3 ; 5] \Rightarrow x_1 \in [-4 ; -2]$.

*avec* $x_2 = -1 + \sqrt{4+b}$, $b \in [-3 ; 5] \Rightarrow x_2 \in [0 ; 2]$.

*Donc c'est la valeur de* $x = -1 + \sqrt{4+b}$ *qui convient. On peut donc définir* $f^{-1}$ *de la façon suivante :*

$f^{-1} : [-3 ; 5] \rightarrow [0 ; 2]$

$\qquad x \mapsto -1 + \sqrt{4+x}$

**Exercice 5.31**

On admet que la fonction ci-dessus définie est une bijection
$f : ]1 ; +\infty[ \rightarrow ]1 ; +\infty[$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

Déterminer $f^{-1}$.

**5) Calcul approché des zéros d'une fonction continue.**

**Propriété**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de f( I ), l'équation f( x ) = m admet une unique solution dans I.

**Corollaire**

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b].

Si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans l'intervalle ouvert ]a ; b[.

**Exercice 5.32 résolu**

1. Démontrer que l'équation (E) : cos x = x admet une solution unique α dans $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

2. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

***Résolution***

*1. Considérons la fonction* $f(x) = \cos x - x$

$\forall x \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = -\sin x - 1$.

$\forall x \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin x < 1 \Rightarrow -2 < -\sin x - 1 < -1$.

*Alors* $\forall x \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) < 0$. *D'où f est strictement décroissante sur* $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

*f est continue et strictement décroissante sur* $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, *de plus* $f(]0 ; \frac{\pi}{2}[) = ]-\frac{\pi}{2} ; 1[$.

*Comme* $0 \in ]-\frac{\pi}{2} ; 1[$, *alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans* $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ *par conséquent l'équation (E) admet une solution unique α dans.*

*2. Utilisons la méthode par balayage*

| *x* | *0,1* | *0,2* | *0,3* | *0,4* | *0,5* | *0,6* | *0,7* | *0,8* | *0,9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe f(x)* | + | + | + | + | + | + | + | - | - |

*On conclut alors que :* $0,7 < \alpha < 0,8$.

## 5) Fonctions puissances d'exposants rationnels

### Exercice 5.33 résolu

Ecrire plus simplement les nombres réels suivants :

1. $\sqrt[3]{5832\times125}$ 2. $\sqrt{\sqrt[6]{64}}$ 3. $\sqrt[4]{0{,}0081}$ 4. $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times7^2}{2^{-\frac{1}{3}}\times7^3}$

***Résolution***

*1.* $\sqrt[3]{5832\times125} = (2^3 3^6 5^3)^{1/3} = (2^3)^{1/3}\times(3^6)^{1/3}\times(5^3)^{1/3} = 2\times3^2\times5 = 90$

*2.* $\sqrt{\sqrt[6]{64}} = (2^6)^{1/12} = \sqrt{2}$

*3.* $\sqrt[4]{0{,}0081} = (81\times10^{-4})^{1/4} = (3^4\times10^{-4})^{1/4} = 3\times10^{-1} = 0{,}3$

*4.* $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times7^2}{2^{-1/3}\times7^3} = \dfrac{(2^5)^{1/3}\times7^2}{2^{-1/3}\times7^3} = \dfrac{2^{5/3}\times2^{1/3}}{7^3\times7^{-2}} = \dfrac{2^2}{7} = \dfrac{4}{7}$

### Exercice 5.34

Calculer :

A = $\sqrt[3]{5832\times125}$ B = $\sqrt[4]{0{,}0081}$ C = $\sqrt{\sqrt[6]{64}}$ D = $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times7^2}{2^{\frac{1}{3}}\times7^3}$

# 6. DERIVEES ET PRIMITIVES

## I- DERIVATION

### 1) Dérivabilité en $x_o$

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant $x_o$.et (Cf) sa courbe représentative.

On appelle taux de variation de f en $x_o$ la fonction $T_o$ définie sur $I\setminus\{x_o\}$ par $T_o(x) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Si $T_o$ admet une limite finie $\ell$ en $x_o$, on dit que f est dérivable en $x_o$. $\ell$ est appelé nombre dérivé de f en $x_o$ et on note $f'(x_o) = \ell$.

La droite d'équation $\mathbf{y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)}$ est tangente à (Cf) en son point d'abscisse $x_o$.

**Exercice 6.1 résolu**

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x+1}$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère (O ; I ; J).

1. Montrer que, en utilisant la définition, que f est dérivable en 2 puis préciser f'(2).
2. Donner une équation de la tangente à (Cf ) en 2.

***Résolution***

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)\quad f(2)}{x\quad 2}$ existe et est finie donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

*2. Soit (T) la tangente à (Cf) en 2.*

*(T) : y = f '(2)(x – 2) + f (2)*

*lim*

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x-2) + \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

### 2) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en $x_0$

**Définition**

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant $x_0$.

- f est dérivable à gauche en $x_0$ ⇔ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est notée $f'_g(x_0)$
- f est dérivable à droite en $x_0$ ⇔ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est notée $f'_d(x_0)$
- f est dérivable en $x_0$ ⇔ f est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

**Exercice 6.2 résolu**

On considère la fonction g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x^2 + x - 2|$$

Etudier la dérivabilité de g en -2 et interpréter graphiquement le résultat.

***Résolution***

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + x - 2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\|x^2 + x - 2\|$ | | $x^2 + x - 2$ | $0$ | $-x^2 - x + 2$ | $0$ | $x^2 + x - 2$ | |

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{g(x) - g(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x^2 + x - 2}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} (x-1) = -3$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{g(x) - g(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-x^2 - x + 2}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} -(x-1) = 3$$

$g'_g(-2) = -3$ *et* $g'_d(-2) = 3$ *g n'est pas dérivable en -2 car* $g'_g(-2) \neq g'_d(-2)$

*(Cg) (la courbe représentative de g) admet une demi tangente à gauche en -2 d'équation y = - 3x - 6 et une demi tangente à droite en -2 d'équation y = 3x + 6.*

**3) Tangente verticale**

**Propriété**

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant $x_0$.

Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

**Exercice 6.3 résolu**

On donne la fonction g sur [0 ; + ∞ [ par g(x) = $\sqrt{x-2}$.
Etudier la dérivabilité de g en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

***Résolution***

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(x-2)}{(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

*La fonction g n'est pas dérivable en 2 et (Cg) une demi tangente verticale à droite au point d'abscisse 2.*

## 3) FONCTIONS DERIVEES

### a) Dérivées successives

**Définition**

f est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- Sa dérivée f' est aussi appelée dérivée première de f et notée f(1) ou $\frac{df}{dx}$
- Si f' est dérivable sur K, sa dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée f'' ou f(2) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$
- Par itération, la dérivée $n^e$ de f est la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f.

**Exercice 6.4 résolu**

Soit le polynôme f définie par $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 1$.
Déterminons les deux premières dérivées de f.

***Solution***

*Il s'agit éventuellement de déterminer f' et f''.*

*f étant un polynôme, donc pour tout x de* $\mathbb{R}$*,* $f'(x) = 15x^2 + 8x - 7$.

*f' étant également un polynôme, on a : pour tout x de* $\mathbb{R}$*,* $f''(x) = (f')'(x) = 30x + 8$.

**Exercice 6.5**

Déterminer les dérivées successives d'ordre 1, 2 et 3 de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \cos x$ et $g(x) = \frac{x}{x+2}$

### b) Dérivée d'une fonction composée

**Définition**

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur f(K), alors la fonction gof est dérivable sur K et pour tout x de K, $(g\circ f)'(x) = f'(x) \times g'\circ f(x)$

**Exercice 6.6 résolu**

$$f : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\cos x}$$

On admet que f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer f'(*x*).

***Résolution***

*Considérons* $f(x) = g\circ h(x)$ *avec* $g(x) = \sqrt{x}$ *et* $h(x) = \cos x$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = (g\circ h)'(x) = h'(x) \times g'(h(x))$$

*D'où :* $f'(x) = -\sin x \times \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}} = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

**Conséquences**

Si u est une fonction dérivable sur K et $n \in \mathbb{N}$, alors les fonctions sinu, cosu et $u^n$ sont dérivables sur K et on a :

(sinu)' = u'cosu

(cosu)' = -u'sinu

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Si de plus u est strictement positive sur K, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur K et on a :

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

**Exercice 6.7 Résolu**

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I
Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de f sur I.

1. $f(x) = \sin(x^2 + 2)$ $\qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (-3x^2 - 4x + 2)^4$ $\qquad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ $\qquad I = ]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$

***Résolution***

1. $f(x) = \sin(x^2 + 2)$ *(formule utilisée: (sinu)'= u'cosu)*

   $f'(x) = 2x\cos(x^2 + 2)$

2. $f(x) = (-3x^2 - 4x + 2)^4$ *( formule utilisée:* $(u^n)' = nu^{n-1}u'$*)*

   $f'(x) = 4(-6x - 4)(-3x^2 - 4x + 2)^3$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ *( formule utilisée :* $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$*)*

   $f'(x) = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$

**c) Tableau récapitulatif de dérivées**
**Dérivée de fonctions élémentaires**

| Fonction f | Dérivée f' de f | f est dérivable sur l'intervalle |
|---|---|---|
| $x \mapsto c$ $[c \in \mathbb{R}]$ | $x \mapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^r$ $[r \in \mathbb{Q}^*]$ | $x \mapsto rx^{r-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$ |

| | | |
|---|---|---|
| $x \mapsto \frac{1}{x^r}$ $[r \in \mathbb{Q}^*]$ | $x \mapsto \frac{-r}{x^{r+1}}$ | $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi [, [k \in \mathbb{Z}]$ |

**Dérivées et opérations**

| Fonctions | Dérivée sur K | Conditions |
|---|---|---|
| $f + g$ | $f' + g'$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $af$ | $af'$ | |
| $fg$ | $f'g + fg'$ | |
| $\frac{1}{g}$ | $-\frac{g}{g^2}$ | $g(x) \neq 0$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ | $g(x) \neq 0$ |
| $gof$ | $f' \times g'of$ | |
| $f^r$ | $rf^{r-1} f'$ | $r \in \mathbb{Q}^*$ |
| $\sqrt{f}$ | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ | $f(x) > 0$ |
| $\cos f$ | $-f' \sin f$ | |
| $\sin f$ | $f' \cos f$ | |

**d) Nombre dérivé d'une bijection réciproque en un point M ($\alpha$; $\beta$)**
**Propriété**

Soit f une bijection et $f^{-1}$ sa réciproque soit $\alpha$ et $\beta$ tels que $f(\alpha) = \beta$. Si f est dérivable en $\alpha$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable au point $\beta$ et $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$.

**Point méthode**

Soit $f^{-1}$ la réciproque d'une bijection f
Pour éventuellement calculer le nombre dérivé de $f^{-1}$ en $\beta$, on peut procéder comme suit :

- On résout l'équation $f(x) = \beta$ pour en déterminer l'unique solution $\alpha$.
- Si $f'(\alpha) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $\beta$ et $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$.

**Exercice 6.8 résolu**

On considère la fonction f dérivable sur ℝ et définie par $f(x) = x^3 + 1$.
1. Montrer que f est bijective.
2. $f^{-1}$ est la bijection réciproque de f
   a) Démontrer que $f^{-1}$ est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.
   b) $f^{-1}$ est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse.

***Résolution***

*1. f est dérivable sur ℝ donc continue sur ℝ.*
*Pour tout x de ℝ, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
*f est donc strictement croissante sur ℝ.*
*$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*
*Donc f est une bijection de ℝ vers ℝ.*

*2.a)* $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 2$
$\Leftrightarrow x^3 = 1$
$\Leftrightarrow x = 1$

$f'(1) = 3 \neq 0$ *donc* $f^{-1}$ *est dérivable en 2 et* $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$

*2.b)* $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

$f'(0) = 0$ *donc* $f^{-1}$ *n'est pas dérivable en 0.*

**EXERCICES**

**Exercice 6.9**

On considère la fonction :

$$f : [0 ; \frac{\pi}{2}] \to [0 ;1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

1. Démontrer que f est une bijection.
2. Démontrer que $f^{-1}$ est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donner $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f^{-1}$ au point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Exercice 6.10**

On admet dans chacun des cas suivants que la fonction f est dérivable sur D. Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de D.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$  D = ℝ
2. $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 1)^3$  D = ℝ
3. $f : x \mapsto \cos^2 x$  D = ℝ
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$  D = ℝ
5. $f : x \mapsto |x^2 + x - 6|$  D = ℝ
6. $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$  D = ] 0 ; +∞ [

7. $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2}$ D = ℝ 8. $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$ D = ] 0 ; +∞ [

9. $f : x \mapsto \sin(\cos^2 x + 3)$ D = ℝ 9. $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ D = ] 0 ; +∞ [

**Exercice 6.11**

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + x + 1$ définie et dérivable sur ℝ.

1. Démontrer que $f$ est une bijection de ℝ vers ℝ.
2. Justifier que sa bijection réciproque $f^{-1}$ est dérivable en 13 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(13)$.

**Exercice 6.12**

Soit la fonction f définie sur ]-∞ ; 0[, par $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que *f* réalise une bijection de ]-∞ ; 0[ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(-\sqrt{2}\right)$ de deux manières.

## II / PRIMITIVES

### 1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K.
On appelle primitive de f sur K, toute fonction F dérivable sur K telle que : $\forall$ x $\in$ K, F'(x) = f(x)

**Exercice 6.13**

Soit f et F dérivable sur ℝ et définie par respectivement :
$f(x) = 2x + \cos x$ et $F(x) = x^2 + \sin x + 2$. Prouver que F est une primitive de f sur ℝ.

***Solution***

*On a : pour tout x de ℝ, F'(x) = 2x + cosx = f(x).*
*Donc F est une primitive de f sur ℝ.*

### 2) Propriétés

1. Si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors f admet une primitive sur K.
2. Si F est une primitive de f sur K, alors pour tout réel c, F + c est une primitive de f sur K
3. $x_0$ et $y_0$ sont des nombres réels. Si f admet des primitives sur K, il existe une unique primitive G de f sur K vérifiant $G(x_0) = y_0$.

**Exercice 6.14**

Soit f dérivable sur ℝ et définie par :
f(x) = 2x + cosx. Déterminer sur la primitive F de f qui prend la valeur 2 en 0.

***Solution***

*Les primitives sur ℝ de f sont de la forme : $F(x) = x^2 + \sin x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.*
*On a : $F(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$*
*Donc la primitive recherchée est la fonction de f est définie par $F(x) = x^2 + \sin x + 2$.*

**3) Primitives de fonctions élémentaires**

| Fonction f | Primitives de f | Sur l'intervalle |
|---|---|---|
| $x \mapsto a \quad [a \in \mathbb{R}]$ | $x \mapsto ax + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | ℝ |
| $x \mapsto x^n \quad [n \in \mathbb{N}]$ | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | ℝ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad [n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}]$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | $]0 ; +\infty[$ |
| $x \mapsto x^r \quad [r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}]$ | $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | $[0 ; +\infty[$ si $r \geq 0$<br>$]0 ; +\infty[$ si $r < 0$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto -\cos x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | ℝ |
| Fonction f | Primitives de f | Sur l'intervalle |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \sin x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | ℝ |
| $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \mapsto \tan x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, [k \in \mathbb{Z}]$ |

**4) Formules des primitives**

| Fonction f | Une primitive de f | Commentaire |
|---|---|---|
| $u'u^n \quad [n \in \mathbb{N}]$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | Sur un intervalle I où u est dérivable |
| $\frac{u'}{u^r} \quad [r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}]$ | $\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$ | Sur un intervalle I où u est dérivable et ne s'annule pas |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | Sur tout intervalle I où u est dérivable et strictement positive |
| $u'u^r \quad [r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}]$ | $\frac{u^{r+1}}{r+1}$ | Sur un intervalle I où u est dérivable et positive (strictement positive si $r < 0$) |
| u'sinu | -cosu | Sur un intervalle I où u est dérivable |
| u'cosu | sinu | Sur un intervalle I où u est dérivable |

**Exercice 6.15 résolu**

Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions de ℝ vers ℝ.
Démontrer que F est une primitive sur l'intervalle K de f.

1. $F(x) = -x^7 + 3x^5 - 6x - 20$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

   $f(x) = -7x^6 + 15x^4 - 6$

2. $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{\sin x}} - 2010$ $\quad$ $K = ]0 ; \pi[$

   $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}$

3. $F(x) = x^2\sin x + \cos x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

   $f(x) = (2x-1)\sin x + x^2\cos x$

***Résolution***

*1. $F'(x) = -7x^6 + 15x^4 - 6 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur ℝ*
*On peut procéder de la même manière pour les autres cas.*

**Exercice 6.16 résolu**

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f.

1. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \cos x - \sin x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 3(2x - 4)^{14}$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2x-3}}$ $\quad$ $K = ]\dfrac{3}{2};+\infty[$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}$ $\quad$ $K = ]0;\dfrac{\pi}{2}[$
6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^4}$ $\quad$ $K = \mathbb{R}_+^*$
7. $f(x) = \sin 2x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$
8. $f(x) = -\sin x$ $\quad$ $K = \mathbb{R}$

***Résolution***

*1. Les primitives de* $x \mapsto x^r$ *sont de la forme* $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ *(c* $\in \mathbb{R}$*).*

$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 5x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

*2.* $F(x) = -\sin x - \cos x + c$

*3. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est* $u'u^r$ *qui a pour primitive* $\frac{u^{r+1}}{r+1}$ $(r \neq -1)$

*avec* $u(x) = 2x - 4$*.*

$f(x) = 3(2x-4)^{14} = \frac{3}{2}\,[2(2x-4)^{14}]$

$F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{(2x-4)^{15}}{15} + c = \frac{1}{10}(2x-4)^{15} + c$

*4. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est* $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ *qui a pour primitive* $2\sqrt{u}$

*avec* $u(x) = 2x - 3$*.*

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x-3}} = \frac{-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$

$F(x) = \frac{-1}{2} \times 2\sqrt{2x-3} + c = -\sqrt{2x-3} + c$

*5. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est* $\frac{u'}{u^r}$ *qui a pour primitive* $\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$ $(r \neq 1)$

*avec* $u(x) = \cos x$*.*

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}} = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{5}{2}} x} = -\frac{-\sin x}{\cos^{\frac{5}{2}} x}$

$F(x) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}\cos^{\frac{3}{2}} x} + c = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\cos^{\frac{3}{2}} x} + c$

*6.* $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{1}{2x^4}$

$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{6x^3} + c$

*7. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est* $u'\sin u$ *qui a pour primitive* $-\cos u$
*avec* $u(x) = 2x$ *.*

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$

**Exercice 6.17 résolu**

Déterminer sur K, la primitive F de la fonction f prenant la valeur $y_0$ en $x_0$.

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ $\quad x_0 = 0$ et $y_0 = 2$ $\quad K = \mathbb{R}$.

***Résolution***

*Les primitives de f sont de la forme :* $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + c$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

$F(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$.

*Donc la primitive recherchée est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + 2$

**EXERCICES**

**Exercice 6.18**

Dans chacun des cas suivants, prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \tan^2 x$ ; $F(x) = \tan x - x$ ; $I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$
2. $f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$ ; $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ ; $I = ]0 ; +\infty[$

**Exercice 6.19**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$ ; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}$ ; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{-1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 1$ ; $I = ]0 ; +\infty[$
4. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ; $I = [1 ; +\infty[$
5. $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x - 2)^3$ ; $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ; $I = ]1 ; +\infty[$
7. $f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 3)^2}$ ; $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$ ; $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \frac{1}{x^2}(3 + \frac{4}{x})^4$ ; $I = ]0 ; +\infty[$.

**Exercice 6.20**

Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}$

1. Déterminer la fonction dérivée f ' de f de deux façons différentes.
2. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1 - 5x^4 + 4x^5}{(1 - x)^2}$$

**Exercice 6.21**

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée :

1. $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$ ; $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$

2. $f : x \mapsto 3x + 1 + \frac{1}{x^2}$ ; $I = ]-\infty ; 0[$ et $F(-2) = 1$.

**Exercice 6.22**

Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ par : $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^2}$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour x distinct de -2 et de 2, on ait :

$f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$

2. En déduire une primitive de f sur ]-2 ; 2[.

**Exercice 6.23**

On considère les fonctions f, g et h dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par $f(x) = 3x^3 - 4 - \frac{3x}{(1+2x^2)^3}$ ;

$h(x) = \frac{3x}{(1+2x^2)^3}$ et $g(x) = \frac{3(1-10x^2)}{(1+2x^2)^4}$.

Déterminer sur $\mathbb{R}$ une primitive H de h. En déduire sur $\mathbb{R}$ une primitive F de f.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g(x)$. En déduire sur $\mathbb{R}$ la primitive G de g qui prend la valeur 0 en 1.

**Exercice 6.24**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = ]-2 ; +\infty[$.

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que f(x) = $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$

b) Déterminer la primitive de f sur l'intervalle I qui prend la valeur 3 en 1.

**Exercice 6.25**

1. Déterminer une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. On considère le fonction g définie sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Montrer que & $x \in$ , $g'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3. En déduire une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$.

**Exercice 6.26**

f est une fonction et F une primitive de f sur K.
la fonction $x \mapsto F(2x)$ est-elle une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$.

# 7. ETUDES DE FONCTIONS

## I / GENERALITES SUR LES ETUDES DE FONCTIONS.

### 1) Parité d'une fonction

**Définition :**

f est une fonction d'ensemble de définition Df
f est paire si et seulement si $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$.
f est impaire si et seulement si $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

**Exercice 7.1 résolu**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+1}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Etudier la parité de f et de g.

***Résolution***

*Parité de f*

*On a* $Df = \mathbb{R} \Rightarrow x \in Df$, $-x \in Df$ *et* $f(-x) = \dfrac{-3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-3}{x^2+1} = f(x)$. *Donc f est paire.*

*Parité de g*

*On a* $Dg = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\} \Rightarrow x \in Df$, $-x \in Df$ *et* $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$. *Donc f est impaire.*

**Remarque**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (Cf)
Une fonction f est paire si et seulement si l'axe (OJ) est un axe de symétrie de (Cf).
Une fonction f est impaire si et seulement si l'origine O du repère est centre de symétrie de (Cf).

### 2) Eléments de Symétrie d'une représentation graphique

#### a) Centre de symétrie.

**Propriété 1**

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). A(a ; b) est centre de symétrie de (Cf) si et seulement si :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(a - x) \in Df \Leftrightarrow (a + x) \in Df$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

**Propriété 2**

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). A(a ; b) est centre de symétrie de (Cf) si et seulement si la fonction g définie par : $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire.

**Exercice 7.2 résolu**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).
Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{5}{3} + \frac{31}{3(3x-2)}$$

On note (Cf ) la courbe représentative de f.

Démontrer que le point A( $\frac{2}{3};\frac{5}{3}$ ) est centre de symétrie de (Cf).

***Résolution***

• *En utilisant la propriété 1*

$Df = ]-\infty ; \frac{2}{3}[ \cup ] \frac{2}{3} ;+\infty[$

*Soit* $x \in \mathbb{R}$ *;* $\frac{2}{3} - x \in Df \Leftrightarrow \frac{2}{3} - x \neq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3} + x$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} + x \neq \frac{2}{3}$

*Donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} - x \in Df \Leftrightarrow \frac{2}{3} + x \in Df$

*Soit* $x \in \mathbb{R}$, *tel que* $\frac{2}{3} - x \in Df$

$f(\frac{2}{3} - x) = \frac{5}{3} - \frac{31}{9x}$ *et* $f(\frac{2}{3} + x) = \frac{5}{3} + \frac{31}{9x}$

$f(\frac{2}{3} - x) + f(\frac{2}{3} + x) = \frac{10}{3}$

*D'où le point A(*$\frac{2}{3};\frac{5}{3}$*) est centre de symétrie à (Cf).*

• *En utilisant la propriété 2*

*Soit la fonction g définie par* $g(x) = f(x + \frac{2}{3}) - \frac{5}{3} = \frac{31}{3\left(3(x+\frac{2}{3})-2\right)} = \frac{31}{9x}$

*On a* $Dg = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \Rightarrow x \in Dg$, $-x \in Dg$ *et* $g(-x) = \frac{31}{9(-x)} = -\frac{31}{9(x)} = -g(x)$. *Donc g est impaire.*

*D'où le point A(*$\frac{2}{3};\frac{5}{3}$*) est centre de symétrie à (Cf).*

***b) Axe de symétrie***

***Propriété 1***

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). La droite (D) d'équation y = a est axe de symétrie de (Cf) si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(a - x) \in Df \Leftrightarrow (a + x) \in Df$ et $f(a - x) = f(a + x)$.

***Propriété 2***

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). La droite (D) d'équation y = a est axe de symétrie de (Cf) si et seulement si la fonction g définie par :
g(x) = f(x + a) est paire.

**Exercice 7.3 résolu**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{x^2 - 2x}$$

On note (Cf ) la courbe représentative de f.
Démontrer que la droite (D) d'équation x = 1 est un axe de symétrie à (Cf).

***Résolution***

• *En utilisant la propriété 1*
*Df =* $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\}$

*Pour tout x de* $\mathbb{R}$, $1 - x \in Df \Leftrightarrow 1 - x \neq 0$ *et* $1 - x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ *et* $1 \neq 2 + x$

$\Leftrightarrow x + 1 \neq 2$ *et* $0 \neq 1 + x$

$\Leftrightarrow 1 + x \in Df$

*Donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \in Df \Leftrightarrow 1 + x \in Df$

*Soit* $\forall x \in \mathbb{R}$, *tel que* $1 - x \in Df$ ,

$$f(1-x) = \frac{2}{(1-x)^2 - 2(1-x)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$f(1+x) = \frac{2}{(1+x)^2 - 2(1+x)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

*f(1 – x) = f(1 + x), la droite (D) est donc un axe de symétrie à (Cf).*

• *En utilisant la propriété 2*

*Soit la fonction g définie par* $g(x) = f(x+1) = \dfrac{2}{(x+1)^2 - 2x} = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

*On a* $Dg = \mathbb{R} \Rightarrow x \in Dg$, $-x \in Dg$ *et* $g(-x) = \dfrac{2}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{2}{x^2 + 1} = g(x)$. *Donc g est paire.*

*La droite (D) est donc un axe de symétrie à (Cf).*

## II- EXEMPLES D'ETUDES DE FONCTIONS

### Problème 7.4 résolu

1. Soit le polynôme g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   a) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$ .
   b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
   c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $2,1 < \alpha < 2,11$.
   d) En déduire que $\forall x \in ]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ et (Cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 1cm.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$, $f'(x) = g(x)\times h(x)$ où h est une fonction à préciser.
   b) En déduire les variations de f.
   c) Etudier les limites de f aux bornes de $D_f$ ; puis interpréter graphiquement (si possible) chacun des résultats obtenus.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + \dfrac{bx+c}{x^2-1}$
   b) En déduire que (Cf) admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote ($\Delta$) dont on précisera une équation.
   c) Etudier la position de (Cf) par rapport à ($\Delta$).
5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$.
6. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,;-1[$ une solution unique $\beta$.
   b) Déterminer un encadrement de $\beta$ d'amplitude 0,1.
   c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) suivant les valeurs de x.
7. Tracer (Cf), ($\Delta$) et les autres asymptotes dans un même repère orthonormé (O, I, J).

### Problème 7.5 résolu

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie x par $f(x) = -x + \sqrt{x^2-9}$ .

(Cf ) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 1cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de Df puis en déduire que (Cf ) admet une asymptote que l'on précisera.
2. Etudier la dérivabilité de f en -3 et en 3 puis interpréter graphiquement les résultats.

3. a) Démontrer que la droite ($\Delta$) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (Cf ) en $-\infty$.
   b) Etudier la position de (Cf) par rapport à ($\Delta$).

4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[$ , vérifier que :

$$\forall x \in ]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}.$$

5. a) Montrer que $x \in ]-\infty ; -3[$, $x - \sqrt{x^2 - 9} \leq 0$.

b) Montrer que $x \in ]3 ; +\infty[$, $x - \sqrt{x^2 - 9} \geq 0$.

c) En déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

6. Tracer (Cf) et (Δ).

**Problème 7.6 résolu**

Soit f la fonction dérivable et définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$, par $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

On note (Cf ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

Unité graphique : 2 cm.

1. a) Pour tout x de $D_f$ donner l'écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.

b) Etudier les limites de f aux bornes des intervalles de $D_f$. Eventuellement, on donnera une interprétation graphique de chacune de ces limites.

2. a) Exprimer f'(x) et étudier le signe de f'(x) sur chacun des intervalles de $D_f$.

b) En déduire le sens de variation de f dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que, (Cf) coupe l'axe (OI) exactement en deux points distincts d'abscisses α et β. $\alpha < \beta$ .

b) Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ de α puis de β.

c) En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

4. a) Vérifier que les droites $(\Delta_1)$ : y = x + 1 et $(\Delta_2)$ : y = -x - 1 sont asymptotes obliques à (Cf) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier la position de (Cf) par rapport à $(\Delta_1)$ sur ]-∞ ; -1[.

c) Etudier la position de (Cf) par rapport à $(\Delta_2)$ sur ] -1 ; 1[∪ ]1 ; -∞ [.

5. Trouver une équation de la tangente ( T) à (Cf) au point A d'abscisse 0.

6. Tracer (Cf), ses asymptotes et la tangente ( T).

***Résolution***

***Problème 7.7***

*1. a) limites de g*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

*1.b) Etudes des variations de g*

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

$\forall x \in ]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$. *Donc g est strictement croissante sur* $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

$\forall x \in ]-1 ; 1[$, $g'(x) < 0$. *Donc g est strictement décroissante sur* $]-1 ; 1[$.

*Tableau de variation de g*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*1.c)* • $g(]-\infty\,;1]) = ]-\infty\,;-1]$.

Comme $0 \notin ]-\infty\,;-1]$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,;-1]$.

• $g(]1\,;+\infty[) = ]-5\,;+\infty[$ et

$g$ est continue et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$ et

comme $0 \in ]1\,;+\infty[$, alors l'équation $g(0)$ admet une solution unique $\alpha \in ]1\,;+\infty[$.

*1.d)* On a : • $g(]-\infty\,;\alpha[) = ]-\infty\,;0[$. Donc $\forall x \in ]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) < 0$.

• $g(]\alpha\,;+\infty[) = ]0;+\infty[$. Donc $\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

*2.a)* $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, $f'(x)$

$$= \frac{6x^2(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^3-3x-3)\times 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= (x^3-3x-3)\times\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Avec $h(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, on a bien $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, $f'(x) = g(x)\times h(x)$.

*2.b)* Les variations de $f$

Tableau de signe de $f'$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, $h(x)$ a même signe que $2x$ puisque $(x^2 - 1) > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x$ | | $-$ | ‖ | $-$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$\forall\, x \in ]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;0[\,\cup\,]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$ et $]\alpha\,;+\infty[$.

*$\forall\, x \in ]0\,;1[\, \cup\, ]1\,;\alpha[$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;\alpha[$.*

*2.c) Limites de f*

*• Les limites à l'infini*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

*• Les limites en 1*

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$, $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x+1} \times \dfrac{1}{x-1}$.

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+3}{x+1} = \dfrac{5}{4} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+3}{x+1} = \dfrac{5}{4} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

*• Les limites en -1*

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$, $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x-1} \times \dfrac{1}{x+1}$.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^3+3}{x+1} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^3+3}{x+1} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \end{cases}$$

*2.d) Tableau de variation de f*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3\alpha$ | ↗ | $+\infty$ |

*3.a) Nous allons procéder en effectuant une division euclidienne*

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 + 3 & x^2 - 1 \\ \cline{3-3} - & \underline{2x^3 - 2x} & 2x \\ & \quad 2x + 3 & \end{array}$$

*Donc* $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$, $f(x) = 2x + \dfrac{2x+3}{x^2-1}$.

*On a alors :* $a = 2$ ; $b = 2$ *et* $c = 3$.

*3.b)* $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$, $f(x) - 2x = \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [\,f(x) - 2x\,] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [\,f(x) - 2x\,] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

*Ainsi la droite (Δ) d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique à (Cf) en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.

*3.c)* $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$, $f(x) - 2x = \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

*Etudions le signe de la différence* $f(x) - 2x = \dfrac{2x+3}{x^2-1}$ *sur* $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3/2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | \|\| | $+$ | |

- $\forall\, x \in ]-\infty\,;\,-3/2[\, \cup\, ]1\,;\,+\infty[$, $f(x) - 2x > 0$, *donc (Cf) se trouve au dessus de (Δ) sur* $]-\infty\,;\,-3/2[$ *et sur* $]1\,;\,+\infty[$
- $\forall\, x \in ]-3/2\,;\,-1[\, \cup\, ]-1\,;\,1[$, $f(x) - 2x < 0$, *donc (Cf) se trouve au dessus de (Δ) sur* $]-3/2\,;\,-1[$ *et sur* $]-1\,;\,1[$
- *(Cf) et (Δ) se coupent au point* $A(-3/2\,;\,-3)$

*5. Montrons que* $f(\alpha) = \alpha$

*D'après la question 1.c),* $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0 \iff \alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$

$\qquad\quad \iff \alpha^3 = 3(\alpha + 1)$

$\qquad\quad \iff \alpha^2 = 3 \times \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$. $(\alpha > 0)$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1} = \frac{2\times 3(\alpha+1)+3}{3\frac{\alpha+1}{\alpha}-1} = \frac{6\alpha+9}{\frac{2\alpha+3}{\alpha}} = \frac{3\alpha(2\alpha+3)}{2\alpha+3} = 3\alpha$$

6.a) On a :

$\begin{cases} \bullet\ f \text{ est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur } ]-\infty\,;-1[. \\ \bullet\ f(]-\infty\,;-1[) = ]-\infty\,;+\infty[ = \mathbb{R}, \\ \bullet\ 0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

*Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ sur $]-\infty\,;-1[$.*

*Encadrement de $\beta$ d'ordre 0,1*

$$\begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } ]-\infty\,;-1[ \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} f(x) = +\infty \\ f(-2) \approx -4{,}33 \end{cases} \Rightarrow \beta \in ]-2\,;-1[$$

*Procédons en utilisant la méthode par balayage*

| $x$ | -1,9 | -1,8 | -1,7 | -1,6 | -1,5 | -1,4 | -1,3 | -1,2 | -1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | - | - | - | - | - | - | - | - | + |

*Donc on a : $-1{,}2 < \beta < -1{,}1$.*

*6.b) Signe de f*

*On a :*

$f(]-\infty\,;\beta[) = ]-\infty\,;0[$

$f(]\beta\,;-1[) = ]0\,;+\infty[$

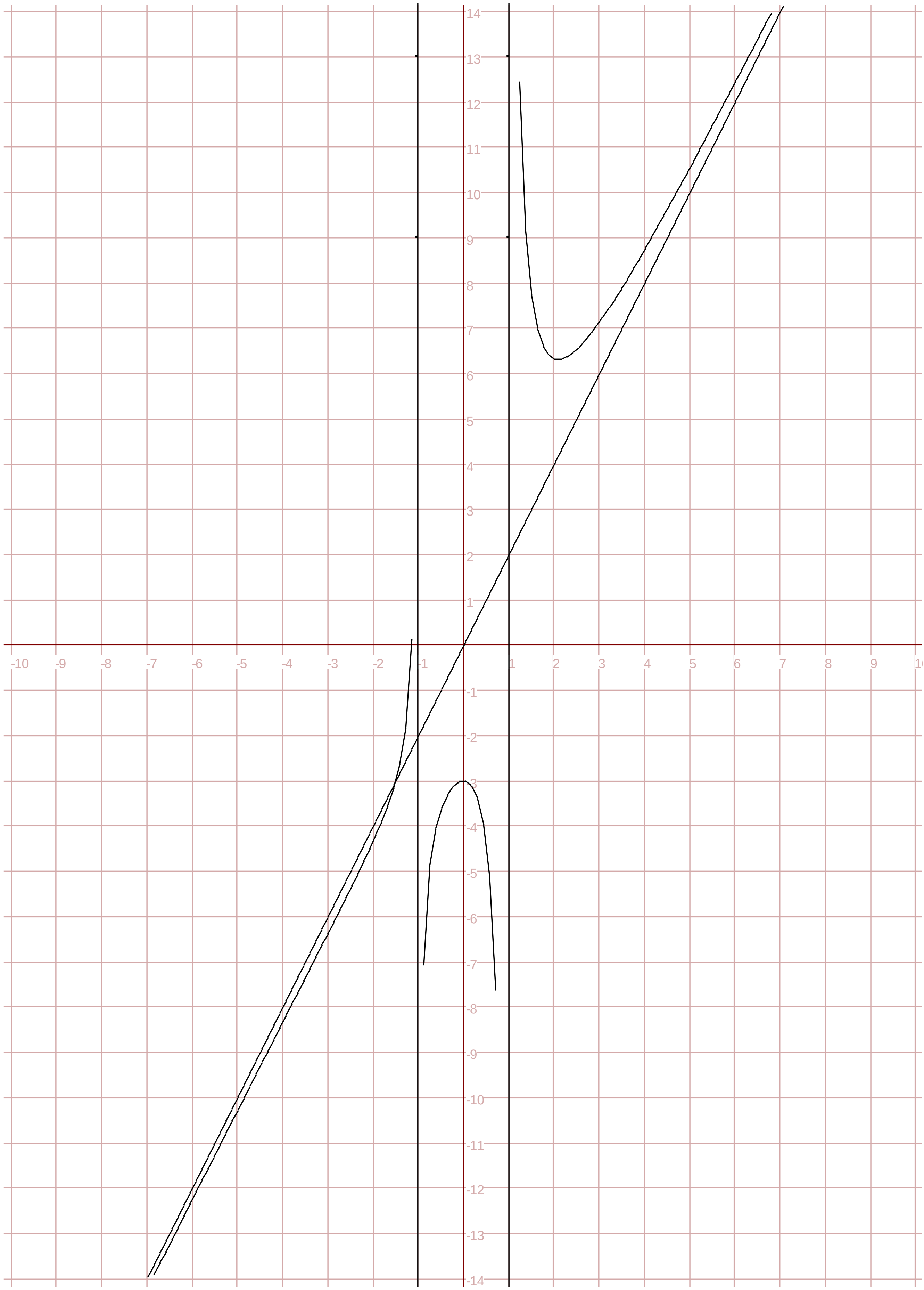
$f(]-1\,;1[) = ]-\infty\,;-3[$

$f(]1\,;+\infty[) = ]3\alpha\,;+\infty[$

$f(\beta) = 0$

*donc :*
- $\forall x \in ]-\infty\,;\beta[\,\cup\,]-1\,;1[,\ f(x) < 0,$
- $\forall x \in ]\beta\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[,\ f(x) > 0,$
- $f(\beta) = 0.$

*7. Tracé de (Cf), (Δ) et des asymptotes verticales*


-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14

***Problème 7.8***

*1.a) Ensemble de définition Df de f*

$\forall x \in Df \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in ]-\infty\ ;\ -3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$

$Df = ]-\infty\ ;\ -3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$

*1.b) limites de f aux bornes de Df*

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (-x+\sqrt{x^2-9}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(-x+\sqrt{x^2-9})(x+\sqrt{x^2-9})}{x+\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-9}{x+\sqrt{x^2-9}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-9}) = +\infty$

*Interprétation graphique :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ *la droite (OI) est une asymptote horizontale à (Cf) en* $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+\sqrt{x^2-9}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-9} = +\infty$

*2. • Etude de la dérivabilité de f en -3*

$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{(-x+\sqrt{x^2-9})-3}{x+3} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{-(x+3)+\sqrt{x^2-9}}{x+3} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \left(-1+\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} \dfrac{x-3}{x+3} = \lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} (x-3)\times\dfrac{1}{x+3} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-3}(x-3) = -6 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} \dfrac{1}{x+3} = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{x-3}{x+3} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = +\infty$$

*f n'est pas dérivable en -3 mais admet une tangente verticale en son point d'abscisse -3.*

*• Etude de la dérivabilité de f en 3*

$$\lim_{\substack{x\to3\\>}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to3\\>}} \frac{(-x+\sqrt{x^2-9})+3}{x-3} = \lim_{\substack{x\to3\\>}} \frac{-(x-3)+\sqrt{x^2-9}}{x-3} = \lim_{\substack{x\to3\\>}} \left(-1+\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\right)$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \dfrac{x+3}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} (x+3)\times\dfrac{1}{x-3} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to3}(x+3) = 6 \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to3\\>}} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to3\\>}} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to3\\>}} \frac{f(x)-f(-3)}{x-3} = +\infty$$

*f n'est pas dérivable en 3 mais admet une tangente verticale en son point d'abscisse 3.*

*3.a)* $\forall x \in ]-\infty\ ;\ -3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$, $f(x) - y = f(x) + 2x = x+\sqrt{x^2-9}$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-9})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-9})(x-\sqrt{x^2-9})}{x-\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x-\sqrt{x^2-9}}=0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-9=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-9})=-\infty$

*Donc la droite (Δ) est bien une asymptote oblique à (Cf) en -∞.*

*3.b) Etude de la position relative de (Cf) et de (Δ)*

$\forall x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$, $f(x)-y=f(x)+2x=x+\sqrt{x^2-9}$

- $\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x>0$ et $\sqrt{x^2-9}>0 \Rightarrow f(x)-y>0$. *(Cf) est au-dessus de (Δ) sur* $]3\,;+\infty[$.

- $\forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $f(x)-y=x+\sqrt{x^2-9}=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-9})(x-\sqrt{x^2-9})}{x-\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{[x^2-(x^2-9)]}{x-\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{9}{x-\sqrt{x^2-9}}$

  $\forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $x<0$ et $-\sqrt{x^2-9}<0 \Rightarrow f(x)-y<0$. *(Cf) est au-dessous de (Δ) sur* $]-\infty\,;-3[$.

*4. Dérivée de f*

$\forall x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$,

$$f'(x)=\left(-x+\sqrt{x^2-9}\right)'=-1+\frac{(x^2-9)'}{2\sqrt{x^2-9}}=-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{-\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{x-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}.$$

*5.a) Montrons que* $\forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $x-\sqrt{x^2-9}<0$

*En effet,* $\forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $x<0$ et $-\sqrt{x^2-9}<0 \Rightarrow x-\sqrt{x^2-9}<0$.

*5.b) Montrer que* $\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x-\sqrt{x^2-9}>0$

*En effet,* $\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x-\sqrt{x^2-9}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-9})(x+\sqrt{x^2-9})}{x+\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{[x^2-(x^2-9)]}{x+\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{9}{x+\sqrt{x^2-9}}$

$\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x>0$ et $\sqrt{x^2-9}>0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2-9}>0 \Rightarrow \dfrac{9}{x+\sqrt{x^2-9}}>0$.

*Par conséquent* $\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x-\sqrt{x^2-9}>0$.

*5.c) Sens de variation de f*

$\forall x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$, $\sqrt{x^2-9}>0$, *alors* $f'(x)$ *a même signe que* $x-\sqrt{x^2-9}$.

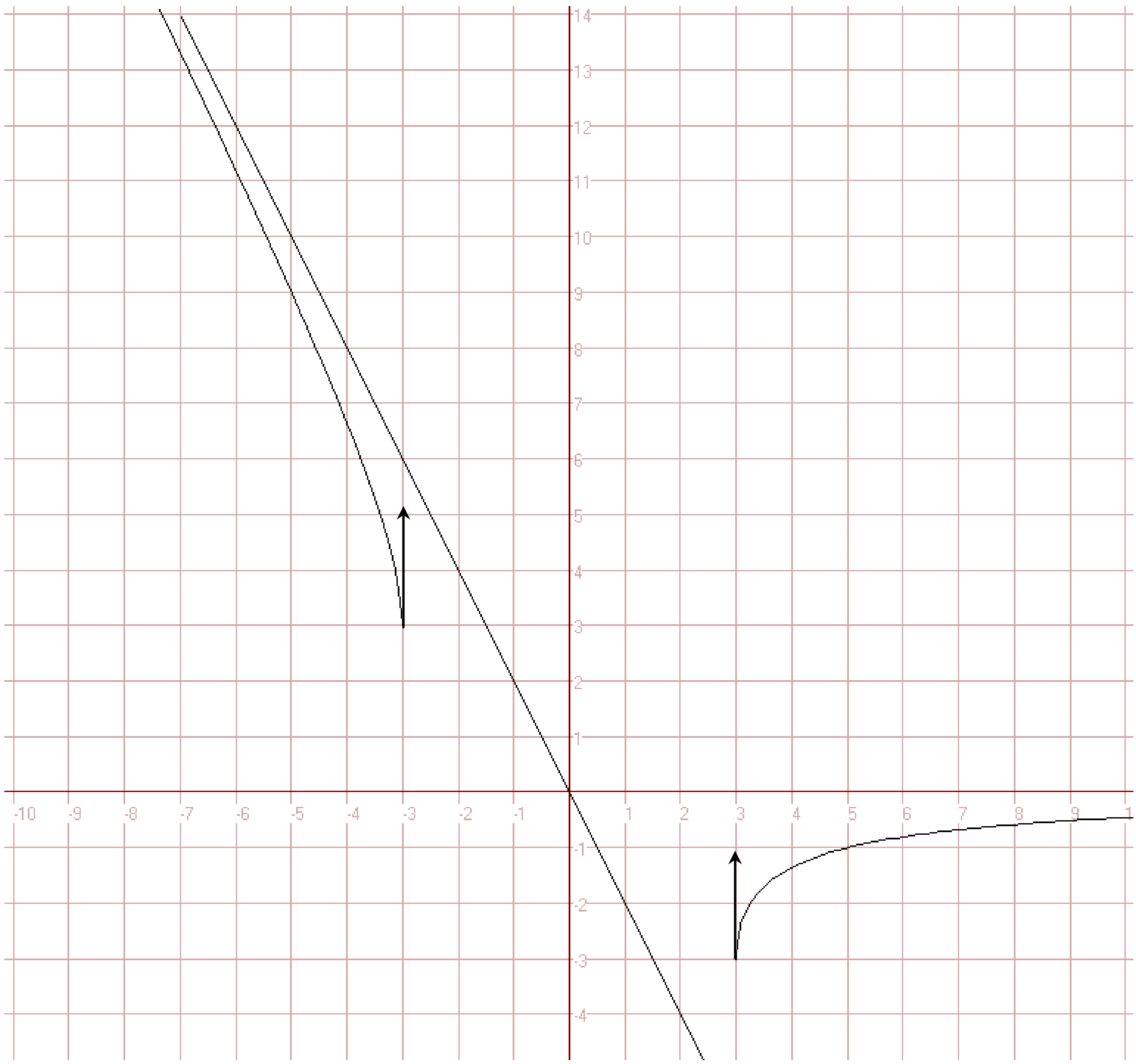
*Ainsi :*

- $\forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $x-\sqrt{x^2-9}<0 \Rightarrow \forall x\in\,]-\infty\,;-3[$, $f'(x)<0$. *Donc f est strictement décroissante sur* $]-\infty\,;-3[$
- $\forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $x-\sqrt{x^2-9}>0 \Rightarrow \forall x\in\,]3\,;+\infty[$, $f'(x)>0$. *Donc f est strictement croissante sur* $]3\,;+\infty[$.

*Tableau de variation de f*

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

*6. Tracés de (Cf) et de (Δ)*



***Problème 7.9***

*1.a) Expression de f(x) sans le symbole de valeur absolue*

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $(x-1)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $\|x+1\|$ | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ | $x+1$ |
| $f(x)$ | $-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$ | ‖ | $x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$ ‖ | $x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$ |

*On a donc :*

- $\forall x \in ]-\infty\,;-1[$, $f(x) = -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$
- $\forall x \in ]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, $f(x) = x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

*1.b) Limites aux bornes de Df*

*Limites à l'infini*

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

*Limites en -1*

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}(-x-1+\dfrac{x}{x^2-2})=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}(-x-1+\dfrac{x}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1})=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to-1}(-x-1)=0$ ; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1+\dfrac{x}{x^2-2})=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1+\dfrac{x}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1})=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ ; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$

*(Cf) admet une asymptote verticale d'équation x = -1.*

*Limites en 1*

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(x+1+\dfrac{x}{x^2-2})=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(x+1+\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{1}{x-1})=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ ; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}(x+1+\dfrac{x}{x^2-2})=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}(x+1+\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{1}{x-1})=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ ; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

*(Cf) admet une asymptote verticale d'équation x = 1.*

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main


*2.a) Expression de f ’(x)*

• $\forall x \in ]-\infty\ ;\ -1[$, $f'(x) = \left(-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}\right)' = -\left(1+\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)$

• $\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \left(x+1+\dfrac{x}{x^2-1}\right)' = -1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$

*Signe de f ’*

$\forall x \in Df$, $(x^2-1)>0$, donc :

• $\forall x \in ]-\infty\ ;\ -1[$, $f'(x) = -\left(1+\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right) < 0$.

• $\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a même signe que $x^2(x^2-1)$. Dressons un tableau de signe

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-3$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2(x^2-3)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• $\forall x \in ]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ \sqrt{3}[$, $f'(x) \le 0$.

• $\forall x \in ]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$

*Tableau de signe de f ’(x) sur Df*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

*2.b) Sens de variation de f*

- $\forall x \in ]-\infty\ ;\ -1[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$,
- $\forall x \in ]-1\ ;\ 1[$, $f'(x) \le 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow$ $f$ est strictement décroissante sur $]-1\ ;\ 1[$,
- $\forall x \in ]1\ ;\ \sqrt{3}[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur $]1\ ;\ \sqrt{3}[$,
- $\forall x \in ]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est strictement croissante sur $]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$.

*Tableau de variation de f*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $f(\sqrt{3})$ | ↗ | $+\infty$ |

*3.a) Sur l'intervalle ]- ∞ ; -1[*

- *f est continue et strictement décroissante sur ]- ∞ ; -1[*
- *f(]- ∞ ; -1[) = ]- ∞ ; +∞[=ℝ,*
- *0∈ ℝ.*

*Par conséquent, l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans ]- ∞ ; -1[. Donc sur l'intervalle ]- ∞ ; -1[, la courbe (Cf) coupe l'axe (OI) en unique point d'abscisse α.*

*Sur l'intervalle ]-1 ; 1[*

- *f est continue et strictement décroissante sur ]-1 ; 1[*
- *f(]-1 ; 1[) = ]- ∞ ; +∞[=ℝ,*
- *0∈ ℝ.*

*Par conséquent, l'équation f(x) = 0 admet une solution unique β dans ]-1 ; 1[. Donc sur l'intervalle ]-1 ; 1[, la courbe (Cf) coupe l'axe (OI) en unique point d'abscisse β.*

*Sur l'intervalle ]1 ; + ∞ [*

- *f(]1 ; + ∞ [) = ]λ ; + ∞ [ avec λ = f($\sqrt{3}$) ≈ 1,866 > 0.*
- *0 ∉ ]λ ; + ∞ [*

*Par conséquent l'équation f(x) = 0 ne peut admettre de solution dans ]1 ; + ∞ [.Donc sur l'intervalle ]1 ; + ∞ [, la courbe (Cf) ne coupe pas l'axe (OI).*

*En définitive, la courbe (Cf) coupe l'axe (OI) en deux points d'abscisse α et β avec α∈ ]- ∞ ; -1[ et β∈ ]-1 ; 1[.*

*3.b) Utilisons la méthode par balayage*
*Encadrement de α*
*On a : f(-2) = -1,666 ⇒ α∈ ]-2 ; -1[*

| x | -2 | -1,9 | -1,8 | -1,7 | -1,6 | -1,5 | -1,4 | -1,3 | -1,2 | -1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f(x) | + | + | - | - | - | - | - | - | - | - |

*On a : -1,9 < α < -1,8*

*Encadrement de β*
*On a : f(0) = 1 ⇒β∈ ]0 ; 1[*

| x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f(x) | + | + | + | + | + | + | + | + | - | - |

*On a : 0,7 < β < 0,8*

*3.c) Signe de f*
*On a :*

- *f(]- ∞ ; α[) = ]0 ; +∞ [,*
- *f(]α ; -1[) = ]-∞ ; 0[,*

- $f(]-1\,;\,\beta[) = ]0\,;\,+\infty[$,
- $f(]\beta\,;\,1[) = ]-\infty\,;\,0[$,
- $f(]1\,;\,+\infty[) = ]\lambda\,;\,+\infty[$,
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

*Ainsi :*

- $\forall x \in ]-\infty\,;\,\alpha[\cup]-1\,;\,\beta[\cup]1\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$,
- $\forall x \in ]\alpha\,;\,-1[\cup]\beta\,;\,1[$, $f(x) < 0$.
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

*4.a)* • *Montrons que* $(\Delta_1) : y = -x - 1$ *est asymptote à (Cf) en* $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}[\,f(x)-y\,] = \lim_{x\to-\infty}[(-x-1+\frac{x}{x^2-1})-(-x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

*Donc* $(\Delta_1)$ *est bien une asymptote à (Cf) en* $-\infty$.

• *Montrons que* $(\Delta_2) : y = x + 1$ *est asymptote à (Cf) en* $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[\,f(x)-y\,] = \lim_{x\to+\infty}[(x+1+\frac{x}{x^2-1})-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

*Donc* $(\Delta_2)$ *est bien une asymptote à (Cf) en* $-\infty$.

*4.b)* • *Position relative de* $(\Delta_1)$ *et (Cf) sur* $]-\infty\,;\,-1[$.

$\forall x \in ]-\infty\,;\,-1[$, $f(x) - y = \dfrac{x}{x^2-1}$

*Or* $\forall x \in ]-\infty\,;\,-1[$, $x < 0$ *et* $(x^2 - 1) > 0$. *Donc* $f(x) - y < 0$.
*D'où la courbe (Cf) est au-dessous de la droite* $(\Delta_1)$ *sur* $]-\infty\,;\,-1[$.

• *Position relative de* $(\Delta_2)$ *et (Cf) sur* $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

$\forall x \in ]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$, $f(x) - y = \dfrac{x}{x^2-1}$

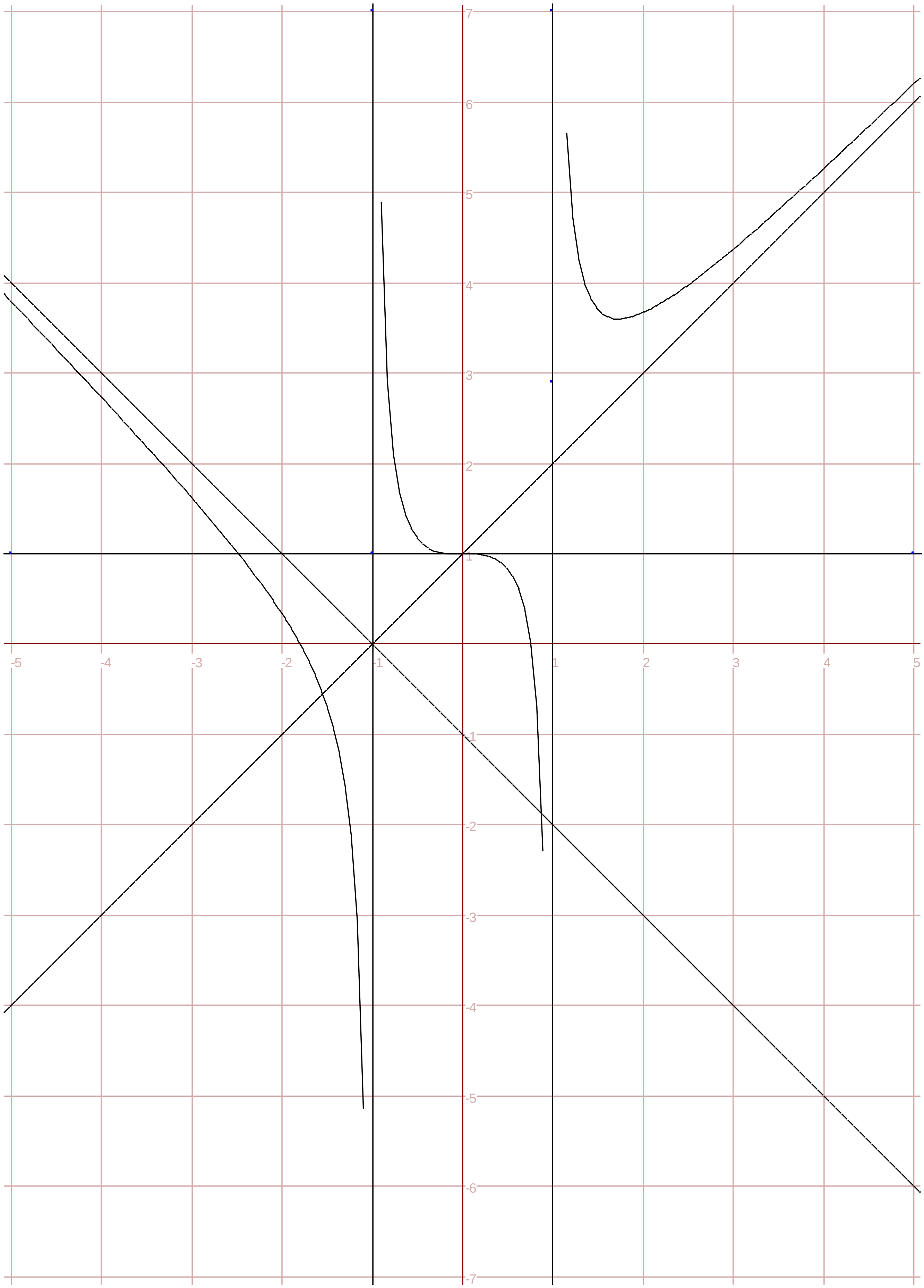
*Etudions le signe de* $\dfrac{x}{x^2-1}$ *sur* $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $x^2 - 1$ | ‖ | $-$ | \| | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x) - y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

- $\forall x \in ]-1\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$, $f(x) - y > 0$. *D'où (Cf) est au-dessus de* $(\Delta_2)$ *sur* $]-1\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$.
- $\forall x \in ]0\,;\,1[$, $f(x) - y < 0$. *D'où (Cf) est au-dessus de* $(\Delta_2)$ *sur* $]0\,;\,1[$.

*5.* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 0$
*En A(0 ; 1), (Cf) admet une tangente horizontale (T) d'équation* $y = 1$.

*6. Tracé de (Cf), ses asymptotes et la tangente (T).*


7
6
5
4
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

## EXERCICES

### Exercice 7.10

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ, définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$. On note (𝒞f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 2 cm.

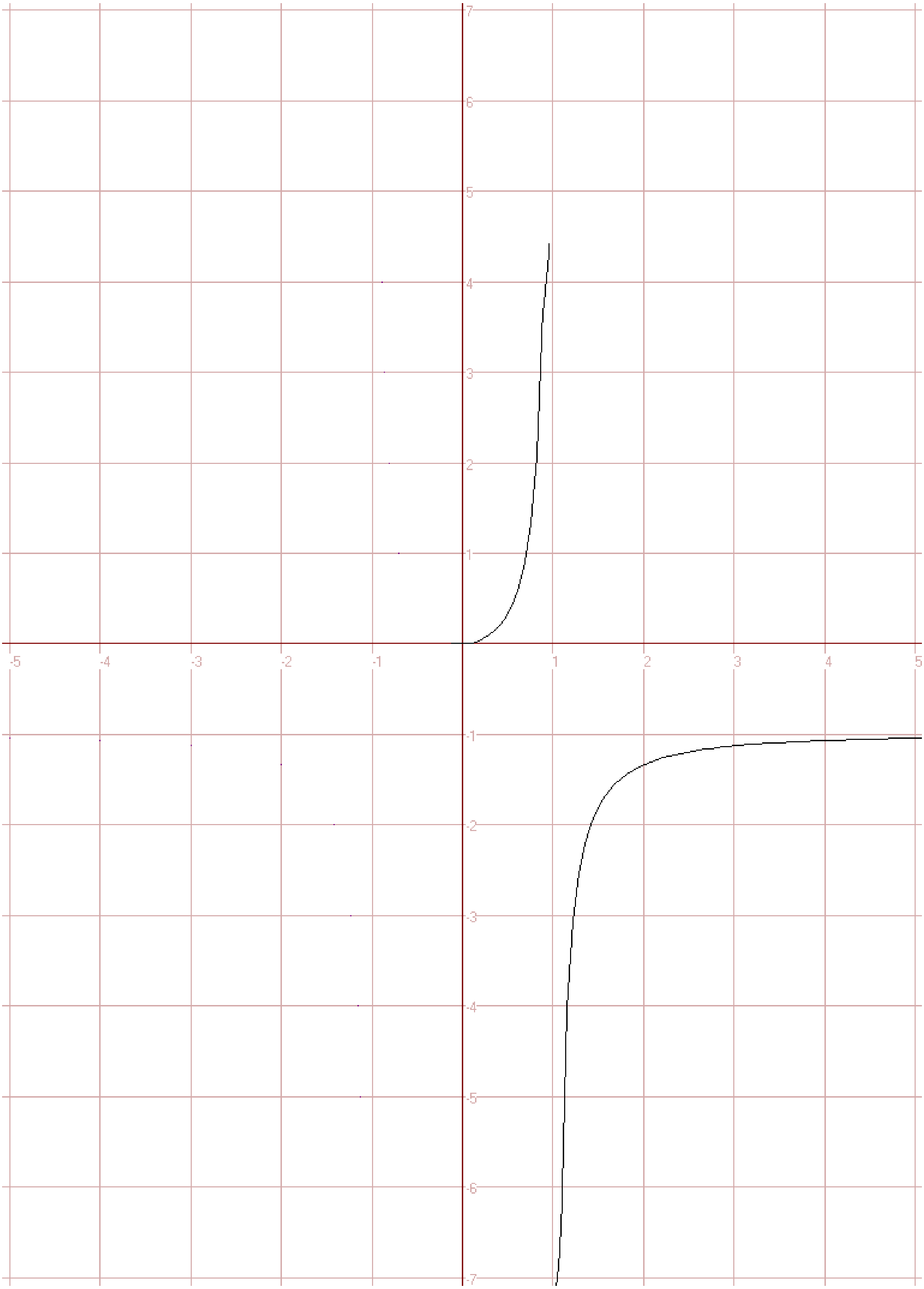
1. Justifier que l'ensemble de définition Df de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$.
2. Etudier la parité de f. en déduire un élément de Symétrie de (𝒞f).
3. Calculer les limites de f aux bornes de Df puis donner une interprétation graphique de chacun des résultat obtenus
4. a)Pour tout x de Df, calculer f'(x).
   b) Etudier le signe de f' puis donner le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (𝒞f) en son point d'abscisse 2.
6. Soit h la restriction de f à $]1 ; +\infty[$.
   a) Justifier que h réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) $h^{-1}$ est la bijection réciproque de h.
      donner le sens de variation de $h^{-1}$ et établir son tableau de variation.
   c) Vérifier que $f(2) = -\frac{4}{3}$. Justifier que $h^{-1}$ est dérivable en $-\frac{4}{3}$ puis calculer $h^{-1})'(-\frac{4}{3})$.
7. La feuille annexe représente f sur représente $[0 ; +\infty[$.
   Achever la construction de f. Puis construire la représentation graphique (𝒞$h^{-1}$) de $h^{-1}$ sur le même graphique.

### Exercice 7.11

Soit f la fonction numérique de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$ et (𝒞f) désigne la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier la limite de f en -1. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. a) Montrer qu'il existe une fonction g et deux nombres réels a et b tels que $f(x) = ax + b + g(x)$.
   b) En déduire que (𝒞f) admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation.
   c) Etudier la position relative de (𝒞f) et de (D).
6. Construire (𝒞f).

## Feuille annexe de l'exercice 6.10



**Exercice 7.12**

Soit f la fonction numérique de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ et (𝒞f) désigne la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2.Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Etudier la dérivabilité de f en -1. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
4. Déterminer la limite de f(x) puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en . Interpréter graphiquement le résultat.
5. a) On admet que f est dérivable sur ]-1 ; 0[ et sur ]1 ; +∞ [. Calculer f'(x).
   b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
6. Soit h la restriction de f à [0 ; +∞ [.
   a) Justifier que h réalise une bijection de [0 ; +∞ [ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) $h^{-1}$ est la bijection réciproque de h.
      Donner le sens de variation de $h^{-1}$ et établir son tableau de variation.
7. Tracer (𝒞f) et la courbe (𝒞$h^{-1}$) de $h^{-1}$ sur le même graphique

**Exercice 7.13**

On donne le tableau de variation d'une fonction f et on désigne par (𝒞f) sa courbe représentative.

| x | -∞ | | -2 | | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | | ‖ | | | | ‖ | | |
| f(x) | -3 | ↘ | -∞ ‖ -∞ | ↗ | -1 | ↘ | -∞ ‖ +∞ | ↘ | -2 |

Par lecture du tableau de variation :
1. Déterminer Df
2. a) Justifier que (𝒞f) admet deux asymptotes horizontales que l'on précisera.
   b) Justifier que (𝒞f) admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
3. Recopier puis compléter le tableau.
4. Justifier que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à ]1 ; +∞ [.
5. Déterminer le signe de f.
6. Tracer une allure de la courbe (𝒞f) dans le repère (O, I, J).

# 8. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## I/ DEFINITION-PROPRIETES.

### 1) Définition et notation.

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction inverse qui prend la valeur 0 en 1. On la note : ln.
& $x > 0$, ln(x) sera souvent écrit lnx.

### 2) Propriétés immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- la fonction ln est dérivable et $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- $\ln 1 = 0$.
- $\forall x \in ]0\,;1[$, $\ln x < 0$ et $\forall x \in ]1\,;+\infty[$, $\ln x > 0$. (Signe de la fonction ln)

### 3) Ensemble de définition de fonction composée avec ln.

**a) Fonction lnou**

$x \in D_{\ln\circ u} \Leftrightarrow x \in Du$ et $u(x) > 0$

**b) Fonction lno|u|**

$x \in D_{\ln\circ|u|} \Leftrightarrow x \in Du$ et $u(x) \neq 0$

**Exercice 8.1 résolu**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

1. $f(x) = \ln(-2x + 3)$
2. $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{2x+3}\right|$
3. $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x)$

***Résolution***

*Méthode utilisée :*

- $x \in D_{\ln\circ u} \Leftrightarrow x \in Du$ *et* $u(x) > 0$
- $x \in D_{\ln\circ|u|} \Leftrightarrow x \in Du$ *et* $u(x) \neq 0$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $-2x+3 > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ *et* $x < \frac{3}{2}$

$D_f = ]-\infty\,;\frac{3}{2}[$

2. $x \in D_f \Leftrightarrow 2x + 3 \neq 0$ et $\frac{x-1}{2x+3} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}$ et $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} | \{-\frac{3}{2} ; 1\}$

3. $x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x > 0$ et $x > 0$.

$\Leftrightarrow x < 2$ et $x > 0$.

$D_f = ]0; 2[$

**Exercice 8.2**

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x - 2)$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x - 2) + \ln(9 - 2x)$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln|x - 2|$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

**4) Propriétés algébriques de ln**

**Propriétés**

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

• $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

• $\ln(a^r) = r\ln a$

• $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$

• $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

• $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

**Exercice 8.3**

1. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de ln3 et ln5 :

$\ln 15$ ; $\ln 45$ ; $\ln\frac{25}{3}$ ; $\ln 75\sqrt{5}$.

2. Démontrer que $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$.

3. Dans chacun des cas suivants, comparer sans utiliser la calculatrice les nombres x et y :

a) $x = \ln 5$ et $y = \ln 2 + \ln 3$

b) $x = 2\ln 3$ et $y = 3\ln 2$

4. Simplifier les écritures suivantes :

$a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$

$b = \ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln\sqrt{15} - \ln\sqrt{27}$

**5) Le nombre réel e**

La fonction ln étant une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre réel noté e tel que $\ln e = 1$. e est le nombre de Neper.

On a $e \approx 2,718$ et & $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.

**6) Equations – Inéquations**

**a) Equations**

Pour résoudre une équation (E) de type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$, on peut procéder comme suit :
- On détermine l'ensemble de validité $E_v$ de (E)
  Sur $E_v$, (E) est équivalent à l'équation (E') : $u(x) = v(x)$.
- Les solutions de (E) sont donc les solutions de (E') sur $E_v$.

**Exercice 8.4 résolu**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $\ln(4 - x) = \ln(x - 3)$
2. $\ln|2x + 1| = 0$
3. $\ln(x - 4) = 2$
4. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(5 + x)$
5. $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$

***Résolution***

*1. Ensemble de validité*

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x > 0 \text{ et } x - 3 > 0\}$,
$= \{x \in \mathbb{R} / 4 > x \text{ et } x > 3\}$
$= ]3 ; 4[$.

*Pour tout x de $E_v$, $\ln(4 - x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4 - x = x - 3$*
$\Leftrightarrow x = 7/2$

*Comme $7/2 \in E_v$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{7/2\}$.*

*2. Ensemble de validité*

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0\}$,
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1/2\}$,
$= \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.

*Pour tout x de $E_v$, $\ln|2x + 1| = 0 \Leftrightarrow \ln|2x + 1| = \ln 1$*
$\Leftrightarrow |2x + 1| = 1$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = -1$ ou $2x + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 0$
*Comme* $-2 \in E_v$ *et* $0 \in E_v$ *alors* $S_{\mathbb{R}} = \{-2 ; 0\}$.

*3. Ensemble de validité*
$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x - 4 > 0\}$,
$= \{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$,
$= ]4 ; +\infty[$.

*Pour tout x de* $E_v$, $\ln(x - 4) = -2 \Leftrightarrow x - 4 = e^{-2}$
$\Leftrightarrow x = 4 + e^{-2}$
*Comme* $4 + e^{-2} \in E_v$ *alors* $S_{\mathbb{R}} = \{4 + e^{-2}\}$.

*4. Ensemble de validité*
$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$ et $5 + x > 0\}$,
$= \{x \in \mathbb{R} / x > 1$ et $x > -1$ et $x > -5\}$,
$= ]1 ; +\infty[$.

*Pour tout x de* $E_v$, $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(5 + x) \Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x + 1)] = \ln(5 + x)^2$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 5 + x$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$
*Comme* $-2 \notin E_v$ *et* $3 \in E_v$ *alors* $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.

*5. Ensemble de validité*
$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$,
$= ]0 ; +\infty[$.

*Pour tout x de* $E_v$, *en posant* $X = \ln x$, $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$
$\Leftrightarrow X = -3$ ou $X = 2$
$\Leftrightarrow \ln x = -3$ ou $\ln x = 2$
$\Leftrightarrow x = e^{-3}$ ou $x = e^2$.
*Comme* $e^2 \in E_v$ *et* $e^{-3} \in E_v$ *alors* $S_{\mathbb{R}} = \{e^2 ; e^{-3}\}$.

**b) Systèmes d'équations**

**Exercice 8.5 résolu**

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y = 5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 12 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln(xy) = 12 \end{cases}$

***Résolution***

*1. Ensemble de validité*
$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0$ et $y > 0\}$
$= ]0 ; +\infty[ \times ]0 ; +\infty[$

*Pour tout* $(x ; y) \in ]0 ; +\infty[ \times ]0 ; +\infty[$, *en posant* $X = \ln x$ *et* $Y = \ln y$, *alors*

$$\begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y \;\; = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X - 2Y = -2 \\ 3X \;+\; Y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = e \\ y = e^2 \end{cases}$$

*$e \in ]0 ; +\infty[$ et $e^2 \in ]0 ; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(e ; e^2)\}$.*

*2. Ensemble de validité*
*$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / x > 0$ et $y > 0\}$*
*$= ]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$*

$\forall (x ; y) \in ]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$, $\begin{cases} x \;+\; y \;= 7 \\ \ln x + \ln y \;= \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln xy = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

*x et y sont les solutions de l'équation : $X^2 - 7X + 12 = 0$*

*$\Delta = 1 \Rightarrow X = 3$ ou $X = 4$ (3 et 4 sont des éléments de $]0 ; +\infty[$)*

*Les couples solutions sont (4 ; 3) et (3 ; 4)*

*$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(4 ; 3) ; (3 ; 4)\}$.*

*3. Ensemble de validité*
*$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / x > 0$ et $y > 0$ et $xy > 0\}$*
*$= ]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$*

$\forall (x ; y) \in ]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$, $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -11 \\ \ln(xy) \;\;= -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -11 \\ \ln x + \ln y \;\;= -12 \end{cases}$

*lnx et lny sont les solutions de l'équation : $X^2 + 12X - 11 = 0$*

*$\Delta = 100 \Rightarrow X = -1$ ou $X = -11$*

*Donc lnx = -1 et lny = -11 ou lnx = -11 et lny = -1.*

*D'où $x = e^{-1}$ et $y = e^{-11}$ ou $x = e^{-11}$ et $y = e^{-1}$*

*Les couples solutions sont $(e^{-1} ; e^{-11})$ et $(e^{-11} ; e^{-1})$*

*$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(e^{-1} ; e^{-11}) ; (e^{-11} ; e^{-1})\}$.*

**b) Inéquations**

Pour résoudre une équation (I) de type $\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité $E_v$ de (I)
  Sur $E_v$, (I) est équivalent à l'équation (I') : u(x) = v(x).
- Les solutions de (I) sont donc les solutions de (I') sur $E_v$.

**Exercice 8.6 résolu**

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

1. $\ln(4 - x) \leq \ln(x - 3)$
2. $\ln|2x + 1| < 0$
3. $\ln^2 x + \ln x - 6 > 0$

***Résolution***

*1. Ensemble de validité*
*$E_v = \{\in x\mathbb{R} / 4 - x > 0$ et $x - 3 > 0\}$*
*$= \{x\in\mathbb{R} / 4 > x$ et $x > 3\}$*
*$= ]3 ; 4[$*

*Pour tout x de $E_v$, $\ln(4 - x) \leq \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4 - x \leq x - 3$*
*$\Leftrightarrow x \leq 7/2$*

*Alors $S_{\mathbb{R}} = ]3 ; 7/2]$.*

*2. Ensemble de validité*

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1/2\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$

*Pour tout x de $E_v$,* $\ln|2x + 1| < 0 \Leftrightarrow \ln|2x + 1| < \ln 1$
$\Leftrightarrow |2x + 1| < 1$
$\Leftrightarrow -1 < 2x + 1 < 1$
$\Leftrightarrow -2 < x < 0$

*Alors $S_{\mathbb{R}} = ]-2 ; -1/2[ \cup ]-1/2 ; 0[$*

*5. Ensemble de validité*

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$
$= ]0 ; +\infty[$.

*Pour tout x de $E_v$, en posant $X = \ln x$,* $\ln^2 x + \ln x - 6 > 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 > 0$
$\Leftrightarrow X < -3$ ou $X > 2$
$\Leftrightarrow \ln x < -3$ ou $\ln x > 2$
$\Leftrightarrow x < e^{-3}$ ou $x > e^2$.

*Alors $S_{\mathbb{R}} = ]0 ; e^{-3} [ \cup ] e^2 ; +\infty [$.*

## II/ DERIVEES – PRIMITIVES – LIMITES

### 1. Dérivées

**Propriété**

- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur K et : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur K et : $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.

**Exercice 8.7 résolu**

Déterminer sur l'intervalle I, la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(3x^2 + 4x - 2)$ ; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln|5x^2 + 2x - 3|$ ; $I = ]-\infty ; -1[$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{7 - x}{3x + 4}\right)$ ; $I = ]-\frac{4}{3} ; 7[$
4. $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$ ; $I = ]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

***Résolution***

*1. Pour tout x de ℝ,* $f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x-2)'}{3x^2+4x-2} = \dfrac{6x+4}{3x^2+4x-2}$

*2. Pour tout x de ]-∞ ; -1[,* $f'(x) = \dfrac{(5x^2+2x-3)'}{5x^2+2x-3} = \dfrac{10x+2}{5x^2+2x-3}$

*3. Pour tout x de* $]-\dfrac{4}{3}\,;\,7[$, $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{7-x}{3x+4}\right)'}{\left(\dfrac{7-x}{3x+4}\right)} = \dfrac{\dfrac{-25}{(3x+4)^2}}{\left(\dfrac{7-x}{3x+4}\right)} = \dfrac{-25}{(3x+4)^2}\times\dfrac{3x+4}{7-x} = \dfrac{-25}{(3x+4)(7-x)}$

*4. Pour tout x de* $]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{2x^2-1})'}{\sqrt{2x^2-1}} = \dfrac{\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}}}{\sqrt{2x^2-1}} = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}} = \dfrac{2x}{(2x^2-1)}$.

**Exercice 8.8**

Dans chacun des cas suivants on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ; Calculer la fonction dérivée f 'de f.

1. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ ; I = ℝ
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ; I = ]1 ; +∞ [
3. $f(x) = \ln(x - 1) - \ln x$ ; I = ]1 ; +∞ [
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ; I = ]0 ; +∞ [
5. $f(x) = \ln(\ln x)$ ; I = ]e ; +∞ [
6. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ ; I = ]1 ; +∞ [

**2) Primitives**

**Propriété**

On admet la propriété suivante :

u étant une fonction dérivable sur un intervalle K, sur lequel elle ne s'annule pas, $\dfrac{u'}{u}$ admet pour primitive lno|u|.

**Exercice 8.9**

Déterminer sur l'intervalle K, les primitives de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ K = ]-∞ ; 0[
2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ K = $]\dfrac{\pi}{2}$ ; 0[
3. $f(x) = \dfrac{3}{4-x}$ K = ]-∞ ; 4[

***Résolution***

*1.* $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ *K = ]-∞ ; 0[*

$f(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = x$.

*D'où* $\forall x < 0$, $F(x) = -\ln|x| + c = -\ln(-x) + c$, $c \in IR$.

2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad K = ]\dfrac{\pi}{2} ; 0[$

$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = \sin x$.

*D'où* $\forall x \in ]\dfrac{\pi}{2} ; 0[$, $F(x) = \ln|\sin x| = \ln(\sin x) + c$, $c \in IR$.

3. $f(x) = \dfrac{3}{4 - x}$ $\quad K = ]-\infty ; 4[$

$f(x) = \dfrac{-3\times(-1)}{4-x} = \dfrac{-3u(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = 4 - x$.

*D'où* $\forall x < 4$, $F(x) = -3\ln|4 - x| + c = -3\ln(4 - x) + c$, $c \in IR$.

**Exercice 8.10**

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ ; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \tan x$ ; $I = ]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ ; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ ; $I = ]1 ; +\infty[$

**8) Limites**

**Limites de référence**

**Propriétés**

On admet les propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

**Remarques**

- La fonction ln définie une bijection de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

En effet, ln est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et

$\ln(]0 ; +\infty[) = ]\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty ; \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty[ = ]-\infty ; +\infty[ = \mathbb{R}$.

- La courbe de la fonction ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

**Exercice 8.11**

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ ; en 0
2. $f(x) = -x + \ln x$ ; en $+\infty$
3. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ ; en 0
4. $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ ; en 0
5. $f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ; en $+\infty$
6. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ ; en $+\infty$

***Résolution***

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}(\ln x - 1) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x - 1) = -\infty \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x + \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x(1 - \frac{\ln x}{x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{x} - \ln x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x+1}(x\ln x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + x\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 + \ln(1+\frac{1}{x})) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x(1+\frac{1}{x}) = 0$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{X\to+\infty} 4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$ avec $X = \sqrt{x}$.

**Exercice 8.12**

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I

1. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ; $I = ]1; +\infty[$
2. $f(x) = x(1 - \ln x)$ ; $I = ]0; +\infty[$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ ; $I = ]-\infty ; -1[$
4. $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$ ; $I = ]1; +\infty[$
5. $f(x) = x + \ln(x + 1) - \ln x$ ; $I = ]0; +\infty[$

**EXEMPLE D'ETUDE DE FONCTIONS COMPORTANT ln**

**Problème 8.13 résolu**

**Partie A**
On considère la fonction g définie sur ]0 ; +∞ [ par $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.
1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Montrer que $\forall$ x $\in$ ]0 ; +∞ [, $g'(x) = \dfrac{8x^2 - 1}{x}$.
   b) Etudier le signe de g'(x) sur ]0 ; +∞ [.
3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que $\forall$ x $\in$ ]0 ; +∞ [, g(x) > 0.

**Partie B**
On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + 4x - 2$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. a) Montrer que la droite (D) d'équation y = 4x – 2 est une asymptote oblique à (C) en +∞.
   b) Etudier la position relative de (C) et de (D).
3. a) Vérifier que $\forall$ x $\in$ ]0 ; +∞ [, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire les variations de f, puis dresser son tableau de variation.
4. a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α telle que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
   b) Donner un encadrement de α à $10^{-2}$ près.
5. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.
6. a) Démontrer que f détermine une bijection de l'intervalle ]0 ; +∞ [ dans un intervalle K que l'on précisera.
   b) On désigne par $f^{-1}$ la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative. Déterminer le sens de variation de $f^{-1}$ puis établir son tableau de variation.
7. a) Déterminer une primitive F de f sur ]0 ; +∞ [.
   b) Calculer F(e) – F(1).
8. Construire (C), (C'), et (D).

***Résolution***

***Partie A***
*1. limites de g aux bornes de ]0 ; +∞ [*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (4x^2 + 1) = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(4x - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} 4x = +\infty$$

2. a) $\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $g'(x) = (4x^2 - \ln x + 1)' = 8x - \frac{1}{x} = \frac{8x^2-1}{x}$.

b) $\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $g'(x) = \frac{8x^2-1}{x} = \frac{(\sqrt{8}x+1)(\sqrt{8}x-1)}{x} = \frac{(\sqrt{8}x+1)}{x}(\sqrt{8}x-1)$.

$\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $\frac{(\sqrt{8}x+1)}{x} > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que $(\sqrt{8}x-1)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

Ainsi :

- $\forall x \in ]0\ ;\frac{1}{\sqrt{8}}[$, $g'(x) < 0$.
- $\forall x \in ]\frac{1}{\sqrt{8}}\ ;+\infty[$, $g'(x) > 0$.
- $g'(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 0$.

3. Sens de variation de g

- $\forall x \in ]0\ ;\frac{1}{\sqrt{8}}[$, $g'(x) < 0$ ; g est strictement décroissante sur $]0\ ;\frac{1}{\sqrt{8}}[$.
- $\forall x \in ]\frac{1}{\sqrt{8}}\ ;+\infty[$, $g'(x) > 0$ ; g est strictement croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{8}}\ ;+\infty[$.

Tableau de variation de g

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{8}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(\frac{1}{\sqrt{8}})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. $\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 - \ln\frac{1}{\sqrt{8}} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 8 > 0$.

Donc $\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $g(x) > 0$.

**Partie B**

1. a) Ensemble de définition de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in Df \Leftrightarrow x > 0$. Donc $Df = ]0\ ;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\frac{1}{x}\times\ln x + 4x - 2) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(4x-2) = -2$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ $\Leftrightarrow$ la droite (OI) est une asymptote verticale à (C).

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-2) = +\infty$

2. a)

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main


$\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[,\ f(x) - y = \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - y \,] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

*Donc la droite (D) est une asymptote oblique à (C) en + ∞.*

*b) Position relative de (C) et de (D).*

*on a que :* $\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[,\ f(x) - y = \dfrac{\ln x}{x}$

*et comme x > 0, alors [f(x) – y] a le même signe que lnx. Ainsi :*

$\forall x \in ]0 \,;\, 1[$, *[f(x) – y] < 0 donc (C) est au-dessous de (D) sur ]0 ; 1 [.*

$\forall x \in ]1 \,;\, +\infty[$, *[f(x) – y] > 0 donc (C) est au-dessus de (D) sur ]1 ; +∞ [.*

*x = 1, f(x) = y donc (C) coupe (D) au point A(1 ; 2).*

*3. a)* $\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[,\ f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x} + 4x - 2\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} + 4 = \dfrac{1 - \ln x + 4x^2}{x^2} = \dfrac{4x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

*b) d'après la partie A,* $\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[$, *g(x) > 0 et comme* $\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[,\ x^2 > 0$ *alors*

$\forall x \in ]0 \,;\, +\infty[$, *f'(x) > 0. Donc f est strictement croissante sur ]0 ; +∞ [.*

*Tableau de variation de f.*

| *x* | *0* | $+\infty$ |
|---|---|---|
| *f'(x)* | + | |
| *f(x)* | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

*4. a) on a :*

- *f est dérivable et strictement croissante sur ]0 ; +∞ [*
- *f(]0 ; +∞ [) =* $\mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{R}$.

*Donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.*

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\ln 2 < 0$ *et f(1) = 2 > 0. Donc on a :* $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

*b) Utilisons la méthode de balayage*

| *x* | *0,5* | *0,6* | *0,7* | *0,8* | *0,9* | *1* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de f(x)* | - | - | + | + | + | + |

*On a alors : 0,6 < α < 0,7*

| *x* | *0,6* | *0,61* | *0,62* | *0,63* | *0,64* | *0,65* | *0,66* | *0,67* | *0,68* | *0,69* | *0,7* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de f(x)* | - | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + |

*En définitive, on a : $0,65 < \alpha < 0,66$.*

*5. (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.*
*Avec $f'(1) = 5$ et $f(1) = 2$, on a :*
*(T) : $y = 5(x-1) + 2$*
*$= 5x - 3$.*

*6. a) on a :*
*• f est dérivable et strictement croissante sur*
*• $f(]0\ ;+\infty[) = \mathbb{R}$*
*Donc f est une bijection de $]0\ ;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$*

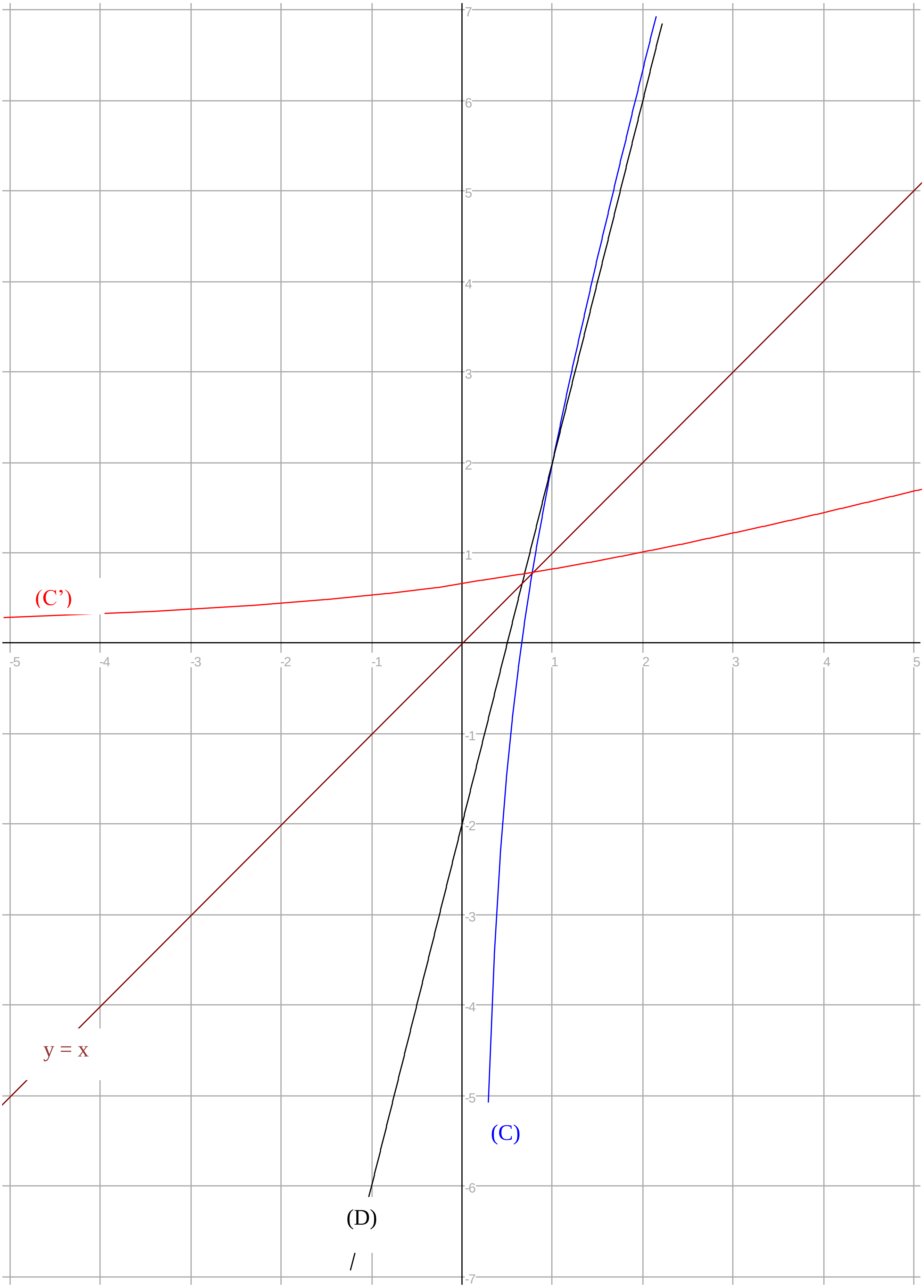
*b) $f^{1}$ et f ont le même sens de variation. Donc $f^{-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
*Tableau de variation de $f^{-1}$*

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $(f^{-1})'(x)$ | + | |
| $f^{-1}(x)$ | 0 ↗ | $+\infty$ |

*7. a) $\forall x \in ]0\ ;+\infty[$, $F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + 2x^2 - 2x$*

*b) $F(e) - F(1) = \dfrac{1}{2} + 2e^2 - 2e$*

*8. Constructions (voir graphique)*


(C')
y = x
(C)
(D)

## EXERCICES

### Exercice 8.14

1. Résoudre dans ℝ chacune des équations ci-dessous proposées :
   a) $\ln(x^2 - 8) = 0$
   b) $\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$
   c) $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$
   d) $3\ln^2 x - 2\ln x - 16 = 0$.

2. Résoudre dans ℝ chacune des inéquations ci-dessous proposées :
   a) $1 - 2\ln x > 0$
   b) $(1 - \ln x)(3 + \ln x) \leq 0$
   c) $\ln(5 - x) + \ln(x - 1) - \ln 3 \geq 0$
   d) $3\ln^2 x - 2\ln x - 16 \leq 0$.

### Exercice 8.15

Résoudre dans ℝ chacun des systèmes d'équations ci-dessous proposées :

1. $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = -2 \\ \ln x + \ln y = 5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y = 12 \\ \ln x - \ln y = \ln 5 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \ln x + \ln y = 12 \end{cases}$

### Exercice 8.16

Dans chacun des cas suivants, résoudre dans l'ensemble IN des entiers naturels, l'inéquation d'inconnue n proposée :

1. $2^n \leq 100$ 2. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

3. $0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 4. $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

## ETUDE DE FONCTIONS COMPORTANT « ln »

### Exercice 8.17

Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Calculer les limites de f en -1 ; 1; $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que la fonction f est impaire.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

### Exercice 8.18

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .et (Cf) sa représentation graphique dans plan muni du le repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer les limites de f au bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ .
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à (Cf).
   b) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à la droite (D).
   c) Construire (Cf) et ( D ) dans le repère (O, I, J).

**Exercice 8.19**

**A) Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur [0 ; +∞ [ par g(x) = $\dfrac{x^2}{x^2+1} - \ln\left(1+x^2\right)$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que sur l'intervalle [1 ; +∞ [ l'équation admet une solution unique α et que 1,9 < α < 2.
3. Préciser le signe de g sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

**B) Etude d'une fonction**

f est la fonction définie sur I = [0 ; +∞ [ par : f(x) = $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.
2. a) Vérifier que pour tout réel x > 0, f(x) = $\dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$,

   b) En déduire la limite de f en +∞.
3. On admet que f est dérivable sur ]0 ; +∞ [ .

   a) Démontrer que pour tout réel x > 0, f '(x) = $\dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b) En déduire les variations et dresser son tableau de variation.

   c) Tracer la courbe représentative (Cf) de f et sa tangente au point d'abscisse 0 dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

**Exercice 8.20**

Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞ [ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) & \text{si } x \in ]0\,;+\infty[ \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(Cf) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Etudier la limite f en +∞.
3. On admet que f est dérivable sur ]0 ; +∞ [.
   a) Démontrer que pour tout x ∈ ]0 ; +∞ [, f'(x) = x(lnx – 1).
   b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1.
5. Soit la fonction h définie sur ]0 ; +∞ [ par h(x) = f(x) + x - $\dfrac{1}{4}$.
   a) Etudier les variations de la fonction dérivée h' de h sur ]0 ; +∞ [ et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites)
   b) En déduire le signe de h' sur ]0 ; +∞ [, puis le sens de variation de h .
   c) Calculer puis déduire de la question précédente le signe de h(x) suivant les valeurs de x.
   d) En déduire la position relative de (T) et (Cf).
6. Construire (T) et (Cf) dans un repère orthonormé.

**Exercice 8.21**

**Partie A**

Soit la fonction g définie sur ]0 ; +∞ [ par $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (sans calculer les limites).
2. En déduire le signe de g(x) sur ]0 ; +∞ [.

**Partie B**

On considère la fonction f définie sur ]0 ; +∞ [ par $f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}$.

(Cf) es la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Déterminer la limite de f en +∞.
   b) Monter la droite (D) d'équation y = x est asymptote à en +∞.
   c) Déterminer la position de par rapport à (D) sur.
3. Etudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer le point B de (Cf) où la tangente (T) est parallèle à (D).
5. a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que f(α) = 0.
   b) Copier puis compléter le tableau suivant par les arrondis d'ordre 2 de f(x):

| x | 0,3 | $\frac{1}{e}$ | 1 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | |

   c) Déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
6. Tracer (Cf) et les droites (D) et (T) dans le repère (O, I, J).

**Exercice 8.22**

**Partie A**

Soit g la fonction définie sur ]0 ; +∞ [ par $g(x) = x(1-x^2) + 1 - 2\ln x$.

1. Déterminer les limites de en 0 et +∞.
2. Démontrer que pour tout réel strictement positif, $g'(x) = \frac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$ .
3. Démontrer que g est strictement décroissante sur ]0 ; +∞ [.
4. Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans ]1 ; +∞ [.
5. Démontrer que ∀ x ∈ ]0 ; α [, g(x) > 0 et ∀ x ∈ ]α ; +∞ [, g(x) < 0.

**Partie B**

Soit f la fonction définie sur ]0 ; +∞ [ par $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right)$.

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé ( O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et +∞.
2. Vérifier que ∀ x ∈ ]0 ; +∞ [, $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}$.
3. Démontrer que la droite (Δ) est asymptote à (Cf) en +∞.
4. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

5. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Calculer f(1) puis justifier que f(α).
7. Démontrer l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans l'intervalle [α ; +∞ [.

**Partie C**

Soit la fonction h définie sur ]0 ; +∞ [, par h(x) = lnx – x.
1. Dresser le tableau de variation de h.
2. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, on a h(x) < 0.
3. Déterminer les positions relatives de (Cf) et (Δ).
4. Construire (Cf) et (Δ).

# 9. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

## I/ DEFINITION - PROPRIETES ALGEBRIQUE.

### 1) Définition-notation

On appelle fonction exponentielle, l'application réciproque de la fonction logarithme népérien.
On la note exp.

### 2) Propriétés immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- la fonction exp est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. (Signe de la fonction exp)

### 3) Propriétés algébriques

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

### 4) Equations – Inéquations

**a) Equations**

**Exercice 9.1**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $e^{2x-1} = 3$.
2. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$.
3. $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$.

**b) Systèmes d'équations**

**Exercice 9.2**

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2e^x + e^y = 5 \\ e^x - 2e^y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 2 \\ e^x \times e^y = e^3 \end{cases}$

**c) Inéquations**

**Exercice 9.3**

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x-1} < 8$.
2. $e^{2x} + e^{x} - 6 \geq 0$.
3. $e^{2x} - 4e^{x} + 3 > 0$.

## II/ DERIVEE – PRIMITIVES – LIMITES.

### 1) Dérivée

**Propriété**

- La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et elle est égale à sa dérivée [ $(e^{x})' = e^{x}$]
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors $e^{u}$ est dérivable sur K et $(e^{u})' = u'e^{u}$

**Exercice 9.4**

Dans chacun des cas suivants, donner la dérivée de la fonction f sur ℝ.

1. $f(x) = e^{-4x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x} + 1}$

### 2) Primitives

**Propriété**

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $e^{u}$ est une primitive sur K de la fonction $u'e^{u}$ .

**Exercice 9.5**

Déterminer sur K les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos x e^{\sin x}$ ; K = ℝ
2. $f(x) = e^{-3x+7}$ ; K = ℝ
3. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 4}$ ; K = ]4 ; +∞ [

### 3) Limites

**Limites de référence**

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

**4) Conséquences de la croissance comparée**
**Limites de référence**
Pour tout réel α strictement positif, on a :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$  (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$  (4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha \ln x = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

**EXERCICES**

**Exercice 9.6**

Etudier la limite de f en chacun des endroits indiqués :

1. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ en 0, -∞ et +∞
2. $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ en -∞ et +∞
3. $f(x) = 2xe^{-x}$ en +∞
4. $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ en -∞ et +∞
5. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ en -∞ et +∞
6. $f(x) = \frac{1}{x}(e^{2x} - 1)$ en 0 et +∞
7. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ en +∞
8. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ en 0

**Exercice 9.7**

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $(e^x)^3 e^{2x}$
2. $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}}$
3. $\frac{e^{3x}}{\left(e^{-x}\right)^2 \times e^x}$
4. $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

**Exercice 9.8**

Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. Démontrer que $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1$
2. Démontrer que $g(2x) = 2[g(x)]^2 - 1$ et que $h(2x) = 2g(x) \times h(x)$.

*On remarquera que $e^{2x} - e^{-2x} = (e^x - e^{-x})(e^x + e^x)$*

**Exercice 9.9**

Résoudre dans ℝ chacune des équations ci-dessous proposées :

1. $e^{3-x} = 1$
2. $e^{2x^2+3} = e^{7x}$
3. $2 - e^x = 0$
4. $e^x + 7 = 0$
5. $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$
6. $e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$
7. $2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$
8. $e \times e^x = e^{\frac{2}{x}}$

**Exercice 9.10**

Résoudre dans ℝ chacune des inéquations suivantes :

1. $e^x - 3 \geq 0$
2. $e^{-x} - 4 > 0$
3. $e^{1-x} + 2 > 0$
4. $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$
5. $(e^x - 3)(5 - e^x) \leq 0$
6. $\dfrac{e^x - 1}{e^x - 2} \geq 0$.

**Exercice 9.11**

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur ℝ. Calculer la fonction dérivée de f .

1. $f(x) = e^{-2x+1}$
2. $f(x) = xe^{x^2}$
3. $f(x) = e^x \ln x$
4. $f(x) = (1 - x)e^{1-x}$
5. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
6. $f(x) = x^2e^{-x}$

**Exercice 9.12**

1. Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de la fonction f sur ℝ :

a) $f(x) = e^{-4x}$

b) $f(x) = xe^{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

2. Soit les fonctions f et g définies sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

a) Déterminer une primitive de f sur ℝ.

b) Déterminer une primitive de f + g sur ℝ

c) En déduire une primitive de g sur ℝ.

**Exemple d'étude de fonction comportant « exp »**

**Problème 9.13 résolu**

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ, définie par $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

**Partie A**

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

b) Montrer que la fonction g définie par g(x) = f(x) – 1 est impaire. En déduire un élément de symétrie pour la courbe (C).

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Interpréter chacun des résultats obtenus.

3. a) Démontrer que : pour tout x de , $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

b) On considère la fonction h définie par h(x) = f(x) – (x + 1). Démontrer que pour tout x de

$h'(x) = -\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$. En déduire le sens de variation de h.

c) Calculer h(0). Puis déterminer le signe de h.

d) Déduire de ce qui précède, la position de (C) par rapport à (T).

5. Tracer la droite (T), la courbe (C) et ses asymptotes.

**Partie B**

1. Montrer que pour tout x de, f(x) = $\frac{4e^x}{e^x+1}-1$.
2. En déduire une primitive F de f sur ℝ.
3. Calculer F(1) – F(0)

**Partie C**

1. Montrer que f réalise une bijection de vers un intervalle J que l'on précisera.
2. $f^{-1}$ désigne la bijection réciproque de f.
   Déterminer le sens de variation de f. Puis dresser son tableau de variation.
3. a) Calculer f(ln3).
   b) Justifier que $f^{-1}$ est dérivable en 2 et calculer $f^{-1}(2)$.
4. (C') désigne la courbe de $f^{-1}$ dans le repère (O, I, J). Construire (C').

***Résolution***

*1. a)* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1 > 0$.
*Donc Df =* $\mathbb{R}$.

*b)* $g(x) = f(x) - 1 = \frac{3e^x-1}{e^x+1} - 1 = \frac{3e^x-1-e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x-2}{e^x+1} = 2\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

*On a Dg =* $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ *et* $g(-x) = 2\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = 2\frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = 2\frac{(1-e^x)}{(1+e^x)} = -2\frac{e^x-1}{e^x+1} = -g(x)$.

*g est donc impaire. Par conséquent la point A(0 ; 1) est un centre de symétrie de (C).*

*2. a)* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x-1}{e^x+1} = -1$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(3-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3-e^{-x})}{(1+e^{-x})} = 3$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

*b)* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

*3. a) dérivée de f*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right)'$$
$$= \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right)'$$
$$= \frac{(3e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(3e^x)(e^x+1)-(e^x)(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

*b) Sens de variation de f*

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0 \Rightarrow 4e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | $-1 \nearrow 3$ |

*4. a) Equation de la tangente (T)*

(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Avec $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$ on a : (T) : $y = x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1$$

$$= \frac{4e^x - (e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$= -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \le 0$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. h est par conséquent strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h(0) = f(0) - 1$ or $f(0) = 1$ donc $h(0) = 0$.

Comme h est strictement croissante sur, on a :

$\forall x < 0$, alors $h(x) < h(0) = 0$

$\forall x > 0$, alors $h(x) > h(0) = 0$.

Donc $\forall x \in ]-\infty ; 0[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $h(x) > 0$ et $h(0) = 0$.

d) $f(x) - y = h(x)$. Ainsi :

- $\forall x \in ]-\infty ; 0[$, $h(x) < 0$, alors (C) est au dessous de (T) sur $]-\infty ; 0[$.
- $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $h(x) > 0$, alors (C) est au dessus de (T) sur $]0 ; +\infty[$.
- $h(0) = 0$, alors (C) et (T) se coupent au point A(0 ; 1).

5. Construction (voir graphique)

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{4e^x}{e^x+1} - 1 = \dfrac{4e^x - (e^x+1)}{e^x+1} = \dfrac{3e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+1} - 1 = 4\dfrac{e^x}{e^x+1} - 1 = 4\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1} - 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 4\ln(e^x+1) - x$

3. $F(1) - F(0) = [4\ln(e+1) - 1] - 4\ln 2 = 4\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right) - 1$

Partie C

1. $f$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = ]-1\ ;\ 3[$.

2. $f$ et $f^{-1}$ ont le même sens de variation. Donc est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 3[$.
Tableau de variation de $f^{-1}$.

| $x$ | $-1$ | $3$ |
|---|---|---|
| $(f^{-1})'(x)$ | $+$ | |
| $f^{-1}(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

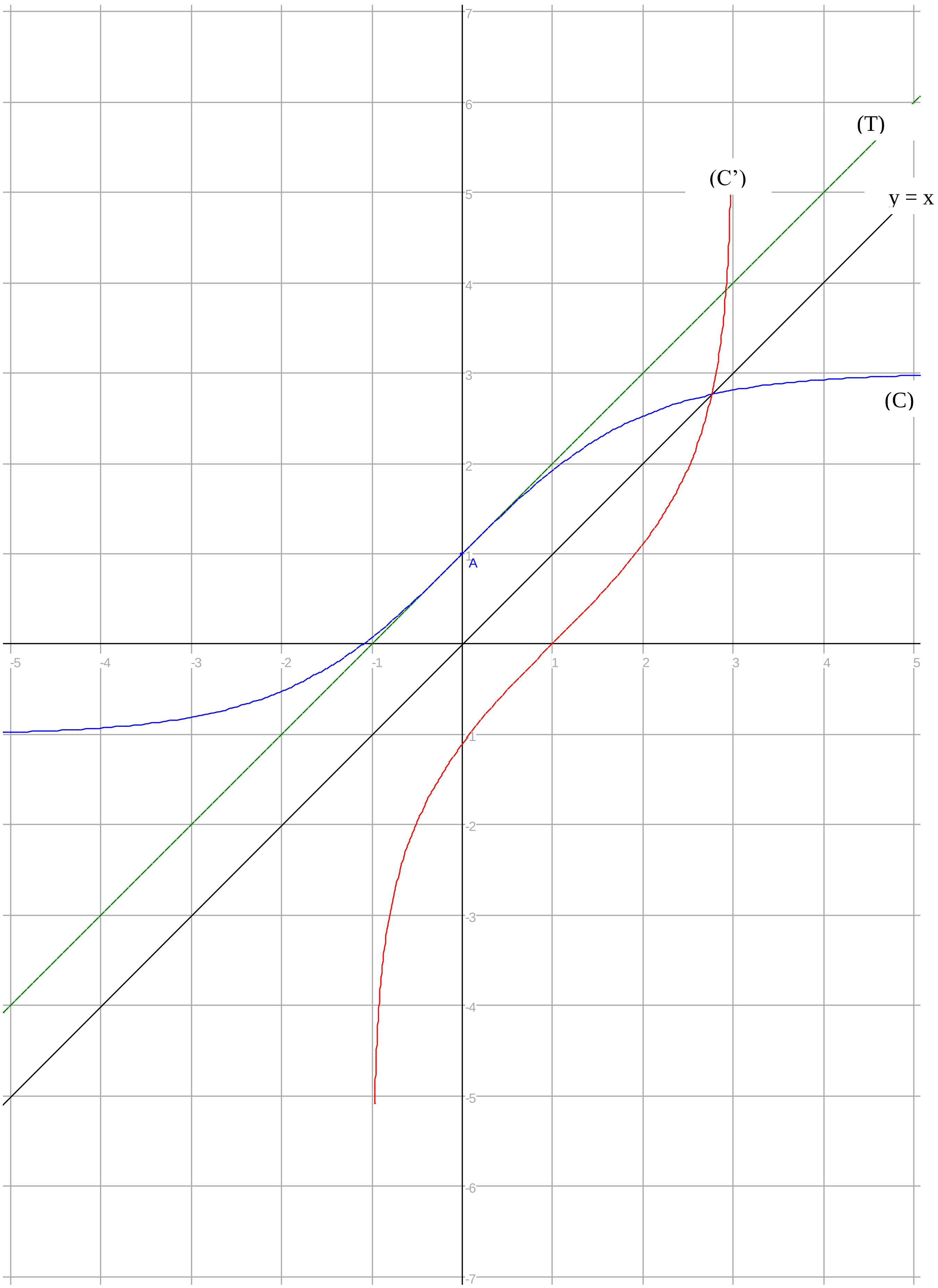
3. a) $f(\ln 3) = \dfrac{3e^{\ln 3} - 1}{e^{\ln 3}+1} = \dfrac{9-1}{3+1} = 2$

b) $f'(\ln 3) = \dfrac{4e^{\ln 3}}{\left(e^{\ln 3}+1\right)^2} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est une bijection} \\ f'(\ln 3) \neq 0 \\ f(\ln 3) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable en } 2$$

et $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(\ln 3)} = \dfrac{4}{3}$

4. Construction (voir graphique)


(T)
(C')
y = x
(C)
A

## EXERCICES

### Exercice 9.14

**Partie A**

Soit la fonction h dérivable sur ℝ et définie par : $h(x) = 3 + (x - 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (2 - x)e^{-x}$.
   b) En déduire les variations de h et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty\ ; 2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que
   $-1 < \alpha < 0$.
4. En déduire que pour tout nombre réel x, $\begin{cases} h(x) < 0 \text{ si } x \in ]-\infty\ ; \alpha[ \\ h(x) > 0 \text{ si } x \in ]\alpha\ ; +\infty[ \end{cases}$

**Partie B**

Soit la fonction numérique définie sur ℝ par $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$. (Cf) est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = h(x)$.
3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
5. Etudier la position relative de (Cf) et (Δ).
6. Démontrer que (Cf) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.
8. Tracer (Cf), (Δ) et (T).
   On prendra $\alpha = -0{,}6$ et $f(\alpha) = 0{,}3$.

### Exercice 9.15

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

**Partie A**

On considère la fonction g dérivable sur ℝ et définie par $g(x) = x + 1 - e^{-x}$.

1. Calculer les limites de en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout x de ℝ.
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.
   En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

On considère la fonction f dérivable sur ℝ et définie par $f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$. (Cf) est la courbe de f dans le repère (O, I, J).

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Calculer les limites de f(x) et $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).

2.a) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(-x^2 + x + 1)e^{-x}$.

b) Etudier suivant les valeurs de x le signe de f(x) et dresser le tableau de variation de f.

On ne cherchera pas à calculer $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$.

c) Déduire de la partie A la position relative de (Cf) par rapport à (T).

4. Tracer avec précision, dans le repère (O, I, J), la tangente (T) et la courbe (Cf).

On prendra $\sqrt{5} = 2{,}2$ ; $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1{,}3$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2{,}5$.

**Exercice 9.16**

**Partie A**

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $= 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de g et calculer les limites de g aux bornes de $D_g$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation g(x) = 0.
3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
4. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \ln|4(1 - e^x)|$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de f .

b) Déterminer les limites de f aux bornes de $D_f$.

2. a) Justifier que $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\ ;\ 0[,\ f(x) = x + \ln 4 + \ln(1 - e^x) \\ \forall x \in ]0\ ;+\infty[,\ f(x) = 2x + \ln 4 + \ln(1 - e^x) \end{cases}$

b) Justifier que les droites ($D_1$) et ($D_2$) d'équations respectives : y = x + ln4 et y = 2x + ln4 sont asymptotes obliques à (Cf) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (Cf) et ($D_1$).

d) Etudier la position de (Cf) par rapport à ($D_2$) sur $]0\ ;+\infty[$.

3. a) On admet que f est dérivable sur. Vérifier que $\forall\ x \in D_f$, $f'(x) = g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

a) Montrer que h définie une bijection de $]0\ ;+\infty[$ vers un intervalle K que l'on déterminera.

b) Justifier que l'équation h(x) = 0 admet dans $]0\ ;+\infty[$ une solution unique $\alpha$ et que $0{,}18 < \alpha < 0{,}19$.

c) Calculer la valeur exacte de h(ln2)

d) Montrer que $h^{-1}$ est dérivable en ln8 puis calculer $(h^{-1})'(\ln 8)$, $h^{-1}$ étant la bijection réciproque de h.

5. Prouver que la courbe (Cf) coupe l'axe (OI) en deux points P et Q dont on déterminera les

coordonnées. On prendra $x_P < x_Q$.

6. Tracer avec soin dans le repère (O, I, J) :
   a) La courbe (Cf) et toutes ses asymptotes. On marquera les points A , P et Q.
   b) La courbe ($\Gamma$) de $h^{-1}$ et ses asymptotes.

**Exercice 9.17**

**PARTIE A**

Soit la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (x - 2)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de *g* en $+\infty$ et $-\infty$ .
2. a) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (3 - x)e^{-x}$.
   b) En déduire les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que sur $]-\infty ; 3]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et que $0 < \alpha < 1$.
4. En déduire que $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; \alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha ; +\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$

**PARTIE B**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + (1 - x)e^{-x}$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que la droite ($\Delta$) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (Cf) et ($\Delta$).
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.
6. Dans le repère (O, I, J), tracer (Cf), ($\Delta$) et (T).
   On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = -1{,}2$.

**Exercice 9.18**

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = -x - \dfrac{x + \ln|x|}{x^2}$ et (Cf) sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), unité graphique : 1 cm.

**Partie A**

Soit le polynôme p définie par $p(x) = -3x^3 + x + 2$. .

1. Calculer p(1) et déterminer une factorisation de p(x).
2. Justifier que $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; 1[, & p(x) > 0 \\ \forall x \in ]1 ; +\infty[, & p(x) < 0 \end{cases}$

**Partie B**

Soit la fonction numérique g de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = -x^3 + x - 1 + 2\ln|x|$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ , $+\infty$ et 0.
2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et on note $g'$ sa dérivée.

   a) Calculer g'(x) et montrer que : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[, & g'(x) < 0 \\ \forall x \in ]0\,;1[, & g'(x) > 0 \end{cases}$

   b) En déduire le tableau de variation de g.
3. a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α et que $-1{,}3 < \alpha < -1{,}2$.

   b) Justifier que $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;\alpha[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha\,;0[\cup]0\,;+\infty[, & g(x) < 0 \end{cases}$

**Partie C**

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et 0.
2. Montrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (Cf) en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1 est parallèle à (D).
5. Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $u(x) = -x - \ln|x|$

   a) Calculer les limites de u en $-\infty$, $+\infty$ et 0.

   b) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

   c) Montrer que (Cf) et (D) se coupent en un unique pont d'abscisse β tel que $0{,}56 < \beta < 0{,}57$.

   d) Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x et en déduire la position relative de (Cf) par rapport à (D).
6. Construire (Cf), (D) et (T). On prendra α = -1,25.

**Exercice 9.19**

**PARTIE A**

On note g la fonction définie sur ]0 ; +∞ [ par $g(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

1. a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet sur ]0 ; +∞ [ une solution unique α.

   b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,1.

   c) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**PARTIE B**

On note $h_n$ la fonction définie sur ]0 ; +∞ [ par $h_n(x)$ = où n est un entier naturel non nul.

1. a) Calculer les limites de $h_n$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de $h_n$ et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que l'équation $h_n = 0$ admet une solution unique $\beta_n$ et que cette solution appartient à l'intervalle [1 ; 3[.

**PARTIE C**

Soit $f_n$ la fonction définie sur ]0 ; +∞ [ par $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$. Et $(C_n)$ désigne la courbe représentative de fn dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Calculer les limites de $f_n$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer la courbe représentative $(C_n)$ de fn admet un asymptote oblique $(\Delta_n)$ dont on précisera une équation.

c) Etudier les positions relatives de $(C_n)$ et $(\Delta_n)$.

2. a) Démontrer que pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$, $f_n'(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de $f_n$ dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$, $f_n(x) = x - ng(x)$.

b) En déduire que toutes les courbes $(C_n)$ passent par un point fixe A de coordonnées $(\alpha ; \alpha)$.

c) Etudier les positions relatives de $(C_n)$ et $(C_{n+1})$.

4. Construire dans le repère (O, I, J) les courbes$(C_1)$ et $(C_2)$.

# 10. CALCUL INTEGRAL

## I/ INTEGRAL D'UNE FONCTION CONTINUE

### 1) Définition – notation.

f est une fonction continue sur un intervalle K, F une primitive sur K de f, a et b des éléments de K.

Le nombre réel F(b) –F(a), est indépendant du choix de la primitive F ; il est appelé intégral de a à b de f.

On note : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$

**Exercice 10.1**

Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$ .

### 2) Propriétés de l'intégrale

#### a) Egalité de Chasles

**Propriété**

f étant une fonction continue sur un intervalle K et a, b, c des éléments de K. On a :

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ .

**Exercice 10.2**

Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^{2} |x^2 + 2x - 3|dx$ .

#### b) Linéarité

**Propriété**

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle K, a et b des éléments de K, α un nombre réel quelconque,

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ .
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ .

**Exercice 10.3**

1. Calculer les intégrales : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x \, dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{4}{x} dx$ .

2. En déduire $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{4}{x}\right)dx$ .

**c) Inégalité et intégrale**

**Propriété**

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle [a ; b],

Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

**Exercice 10.4**

1. Démontrer que l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$ est positive.

2. Démontrer que $\int_1^2 xe^x\,dx \geq \int_1^2 x^2e^x\,dx$.

**3) Intégration par parties**

**Propriété**

f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle [a ; b].
Si les fonctions dérivées f ' et g' sont continues sur un intervalle [a ; b], alors :

$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$.

**Exercice 10.5**

A l'aide d'une intégration par parties calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \ln x\,dx$ 2. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx$ 4. $\int_{-1}^1 (1+x)e^x\,dx$

**II/ CALCULS D'AIRES**

**1) Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe.**

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
f étant une fonction continue sur un intervalle [a ; b], de représentation graphique (C).
Nous nous proposons de calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par (C), (OI), les droites d'équations x = a et x = b.

- Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors : Aire de $\Delta = \int_a^b f(x)dx \times ua$
- Si $f \leq 0$ sur [a ; b], alors : Aire de $\Delta = -\int_a^b f(x)dx \times ua$

NB : ua est l'unité aire et 1ua = (unité de OI × unité de OJ)

**Exercice 10.6**

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm.

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ on note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

Déterminer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI), les droites d'équations x = 1 et x = 2.

**2) Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes.**

Le plan est muni du repère orthogonal ( O;I ;J).

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle [a ; b], de représentation graphique respectives (Cf) et (Cg). On suppose que $f \geq g$ sur [a ; b].

On veut calculer l'aire de la partie $\Delta$ du plan délimitée par les courbes (Cf), (Cg) et les droites d'équations x =a et x = b.

Aire de $\Delta = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \times ua$  1ua = (unité de OI × unité de OJ)

**Exercice 10.7**

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm.

Soit $f(x) = x + 3 - xe^x$ et $g(x) = x + 3$. On note (Cf) et (Cg) respectivement les courbes représentatives de f et g dans le repère (O, I, J).

Déterminer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par (Cf), (Cg), et les droites d'équations x= 0 et x = e.

**EXERCICES**

**Exercice 10.8**

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 2t(t^2+1)dt$ ; $B = \int_1^2 \dfrac{(t+1)}{(t^2+2t)^2}dt$ ; $C = \int_1^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)dt$

$D = \int_0^1 e^{-3x+4}dx$ ; $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx$ ; $J = \int_1^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}dx$

$K = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ; $L = \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$.

**Exercice 10.9**

1. Soit la fonction f définie sur ]-2 ; +∞ [ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)}$.

   a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout élément x de ]-2 ; +∞ [, on ait :

   $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+2)}$.

   b) En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2. Soit la fonction définie sur par ]0 ; +∞ [ par $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout élément x de ]0 ; +∞ [, on ait :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

b) En déduire l'intégrale $I = \int_1^2 g(x)dx$.

**Exercice 10.10**

Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

1. Calculer J.
2. Calculer I + J puis déduire la valeur de I.

**Exercice 10.11**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties, ou au besoin, deux intégrations par parties :

$E = \int_0^{-1} (1-t)e^t dt$ ; $F = \int_1^2 (t+3t^2)\ln t\, dt$

$G = \int_1^2 t\sqrt{(1+t)}\, dt$ ; $H = \int_1^2 (\sin t)e^t dt$.

**Exercice 10.12**

On pose $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx$ , $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties, prouver que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.
2. a) Calculer I + J et I - J.
   b) En déduire les valeurs de I et J.

# 11. SUITES NUMERIQUES

## I- Rappels et compléments

### 1) Définition

On appelle suite numérique, toute fonction $u$ de ℕ vers ℝ.

L'image $u(n)$ de n par la fonction $u$ est notée $u_n$ et est appelée terme général de la suite $u$.

Si l'ensemble de définition de $u$ est E, alors la suite $u$ est notée $(u_n)_{n\in E}$. S'il n'y a pas d'ambigüité, on la note simplement $(u_n)$.

Soit a le plus entier pour lequel la suite $u$ est définie, $u_a$ est appelé le premier terme de la suite $u$.

### 2) Modes de définition d'une suite

#### a) Suite définie par une formule explicite

C'est une suite définie par la donnée explicite du terme général $u_n$ en fonction de n.

**Exemple**

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto 5n - 2 \qquad \text{ou simplement} \qquad u_n = 5n - 2$$

**Exercice 11.1**

Déterminer les six premiers termes de la suite $u_n = 5n - 2$.

#### b) Suite définie par une formule de récurrence

C'est une suite définie par la donnée d'au moins un terme et d'une formule qui permet de calculer de proche en proche les autres termes de la suite en utilisant certains des termes précédents.

**Exemple**

Soit la suite $v$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n + 4 \end{cases}$

**Exercice 11.2**

Déterminer les six premiers termes de la suite $v$ précédemment définie.

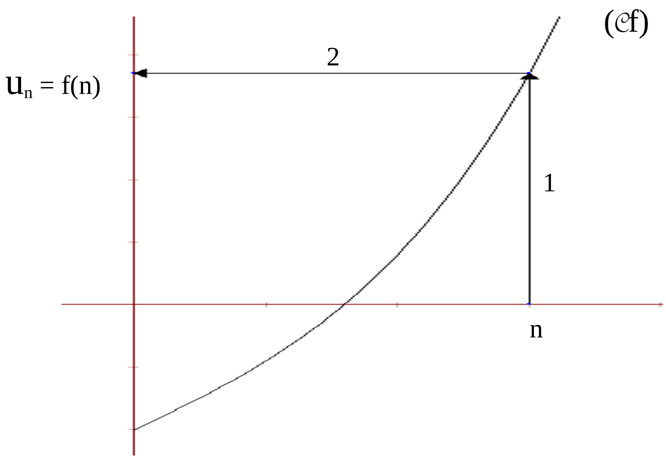
### 3) Représentation graphique des termes d'une suite

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

#### a) Cas d'une suite définie par une formule explicite

f est une fonction et $u_n = f(n)$ : $u_n$ est l'image de n par la fonction f.

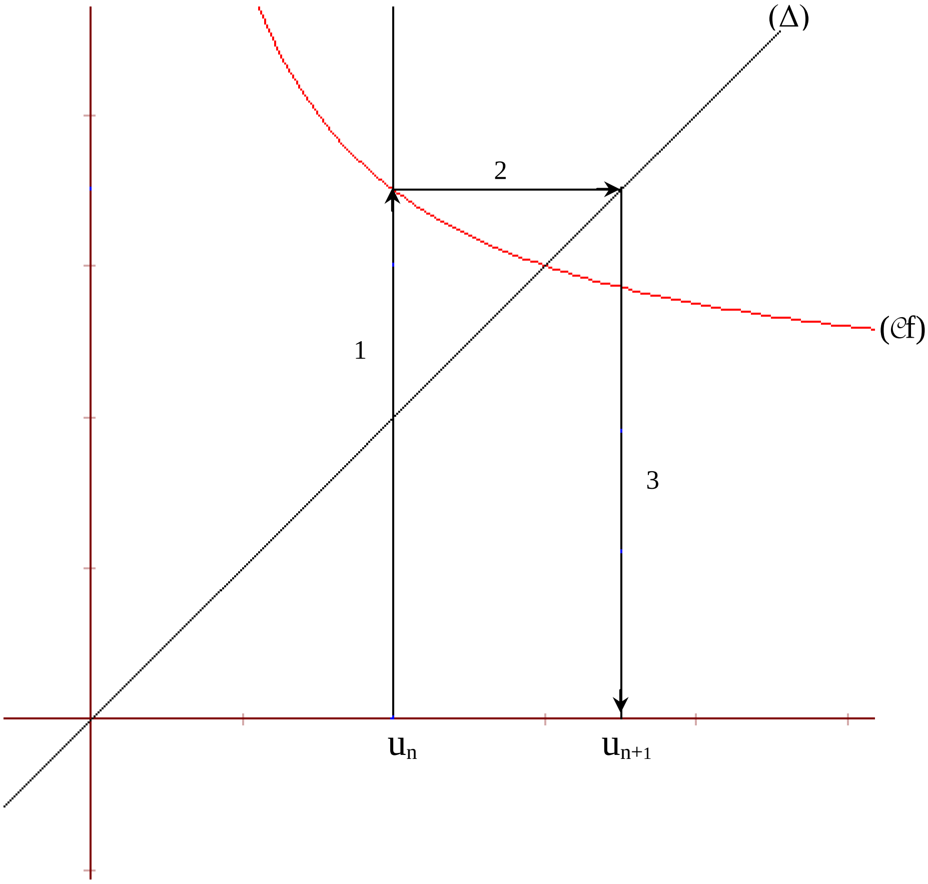
A l'aide de la représentation graphique (𝒞f) de f, la valeur de n sont abscisses et $u_n = f(n)$ en ordonnées.



**b) Cas d'une suite par la formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.**

(Δ) est la droite d'équation y = x et (𝒞f) la représentation graphique de f.

Les termes de la suite sont représentés de proche en proche. On part du terme $u_n$ placé sur l'axe des abscisses (OI) puis par projections successives sur (𝒞f) puis sur (Δ) enfin sur (OI) on obtient $u_{n+1}$.




**Exercice 11.3**

Représenter graphiquement les quatre premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 5 - 2n$

2. v : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -v_n + 3 \end{cases}$

**4) Principe de démonstration par récurrence**

Soit E = {$n_0$, $n_0+1$, … } une partie infinie de IN et $p_n$ une proposition qui dépend de l'entier naturel n
($n \in E$).

Pour démontrer que $p_n$ est vraie pour tout $n \in E$, on procède comme suit :

- On vérifie que la proposition est vraie pour $n_0$ c'est-à-dire que $p_{n_0}$ est vraie (initialisation)
- On suppose que $p_k$ vraie pour un entier $k \geq n_0$ et on démontre que $p_{k+1}$ est vraie. (hérédité)
- On conclut que la proposition $p_n$ est vraie pour tout entier n de E.

**Exercice 11.4 résolu**

Soit la suite ($u_n$) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 - 2^n$.

***Résolution***

*1.* $u_1 = 2u_0 - 3 = 2\times2 - 3 = 1$
$u_2 = 2u_1 - 3 = 2\times1 - 3 = -1$
$u_3 = 2u_2 - 3 = 2\times(-1) - 3 = -5$
$u_4 = 2u_3 - 3 = 2\times(-5) - 3 = -13$
$u_5 = 2u_4 - 3 = 2\times(-13) - 3 = -16$

*2.*
*Vérifions que la proposition est vrai pour n = 0 :*
$3 - 2^0 = 3 - 1 = 2 = u_0$
*Donc la proposition est vrai pour n = 0.*

*Supposons que la proposition est vraie pour n = k c'est-à-dire* $u_k = 3 - 2^k$
*Démontrons qu'elle est vraie pour n = k + 1.*
$u_{k+1} = 2u_k - 3 = 2(3 - 2^k) - 3 = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$.
*Donc la proposition est vraie pour k+1.*

*Ainsi pour tout entier naturel n, on a :* $u_n = 3 - 2^n$.

## II. Sens de variation d'une suite

### 1) Définitions

Soit $(u_n)$ une suite définie sur E.
$(u_n)$ est croissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n \leq u_{n+1}$.
$(u_n)$ est décroissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n \geq u_{n+1}$.
$(u_n)$ est constante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n = u_{n+1}$.
$(u_n)$ est dite monotone lorsqu'elle soit croissante soit décroissante.

### 2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite.

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)$, on peut :

- Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Si les termes $U_n$ sont strictement positifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- Etudier le sens de variation de la fonction f si $u_n = f(n)$.
- Procéder par récurrence en s'aidant éventuellement du sens de variation de la fonction f si $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Exercice 11.5 résolu**

Etudier le sens de variation de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
2. $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{n+2}}$
3. $u_n : \begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

***Résolution***

*1. On remarquera que la suite est définie pour n ≥ 1.*

$u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1}$

$u_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}$

$\forall n \geq 1$, $\dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$. *Donc la suite est strictement croissante.*

*Méthode 2 : Etude du sens de variation de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ .

$\forall x > 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}(x-1)$ .

$\forall x > 1$, $f'(x) > 0$. *Donc f est strictement croissante sur ]0 ; +∞ [. La suite est aussi strictement croissante.*

*2. On remarquera que cette suite est à termes strictement positifs*

$u_{n+1} = \dfrac{2^{2(n+1)}}{3^{(n+1)+2}} = \dfrac{2^2 \times 2^{2n}}{3^1 \times 3^{n+2}} = \dfrac{2^2}{3^1} \times \dfrac{2^{2n}}{3^{n+2}} = \dfrac{4}{3}u_n$

*donc pour tout n,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4}{3} > 1$.

*La suite est par conséquent par strictement croissante.*

*3. Procédons par récurrence*

*On a* $u_1 = \dfrac{1+u_0^2}{2u_0} = \dfrac{65}{16} = 4{,}0625 < u_0$

$u_1 < u_0$

*supposons que* $u_{k+1} < u_k$ *. montrons que* $u_{k+2} < u_{k+1}$

*en effet :*

*On remarquera que* $\forall n$, $u_n > 0$. *(on le démontrera plus tard)*

*Considérons la fonction f : . On a :*

$f(u_k) = u_{k+1}$

$f(u_{k+1}) = u_{k+2}$

*f est strictement croissante sur ]0 ; +∞ [.*

*Donc* $u_{k+1} < u_k \Rightarrow f(u_{k+1}) < f(u_k) \Rightarrow u_{k+2} < u_{k+1}$

*Donc la suite est strictement décroissante.*

## VI- Suites majorées – Suites minorées – Suites bornées

### 1) Définitions

Soit $(u_n)$ une suite définie sur E.

- $(u_n)$ est dite majorée il existe un réel M tel que, pour tout n de E, $u_n \leq M$.
- $(u_n)$ est dite minorée il existe un réel m tel que, pour tout n de E, $u_n \geq M$.
- $(u_n)$ est dite bornée $(u_n)$ est à la fois majorée et minorée.

**Exercice 11.6 résolu**

1. $u_n$ : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

Montrer que pour tout n, $u_n > 0$.

2. u : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que la suite est minorée par $\dfrac{3}{2}$ et majorée par 2.

***Résolution***

*1. $u_0 = 8 > 0$.*

*Supposons que $u_n > 0$*

*Alors, $2u_n > 0$ et $1 + u_n^2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{u_n} > 0$.*

*Donc pour tout n, $u_n > 0$.*

*2. $u_0 = 2$. On a donc $\dfrac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$*

*Supposons que $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$*

*Alors :* $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{2}{3}$

$1 + \dfrac{1}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n} \leq 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \leq 2$

$\dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{5}{3} \leq 2$

*Donc la suite est majorée par 2 et minorée $\dfrac{2}{3}$.*

**Exercice 11.7**

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2n-1}{3n-2}$ 2. $u_n = e^{1-2n}$ 3. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

4. $u_n = \dfrac{3}{(-2)^n}$ 5. u : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 2 \end{cases}$

**Exercice 11.8**

Soit u la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

Démontrer que pour tout n, $u_n < 3$.

## V- Convergence d'une suite numérique

### 1) Définition

Une suite $(u_n)$ est dite convergente si $(u_n)$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ . On dit que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.
On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente (dans ce cas la suite soit admet une limite infinie soit elle n'admet pas de limite)

NB : lorsqu'on parle de limite d'une suite, il s'agit exclusivement de la cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.

### 2) Propriété

La limite dune suite lorsqu'elle existe, elle est unique.

### 3) Limite d'une suite définie par une formule explicite.

**a) Propriété**

f est une fonction de vers, $(u_n)$ la suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$.
si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

**b) Conséquence**

Si f admet une limite finie $\ell$ + ∞, alors la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.
Si f n'admet pas de limite en $+\infty$ , on ne peut rien conclure sur la convergence de la suite $(u_n)$.

**Exemple :**

La suite Un = sin $(n\pi)$ converge vers 0 mais la fonction $f(x) = \sin(x\pi)$ n'a pas de limite en + ∞.

### 4) Convergence d'une suite monotone

Propriété :
- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

**Exercice 11.9**

Soit la suite u définie par $u_n$ : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

Etudier la convergence de la suite u.

## V- Suites arithmétiques – Suites géométriques

### 1) Définitions

- Une suite $(u_n)$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé la raison de la suite arithmétique $(u_n)$
- Une suite $(v_n)$ est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n, on ait : $v_{n+1} = v_n$. q est appelé la raison de la suite géométrique $(v_n)$.

**2) Tableau récapitulatif**

| | Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|---|
| Premier terme | $u_a$ | $v_a$ |
| Raison | r | q |
| Formule explicite | $u_n = u_a + (n - a)r$ | $v_n = v_a.q^{n-a}$ |
| Formule de récurrence | $u_{n+1} = u_n + r$ | $v_{n+1} = q.v_n$ |
| Somme $S_n$ de n termes consécutifs d'indices de i à j | $S_n = \frac{n}{2}(u_i + u_j)$ | $S_n = \begin{cases} v_i.\frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n.v_i & \text{si } q = 1 \end{cases}$ |

**Exercice 11.10**

En janvier 2010, la production d'une entreprise est de 370 unités. Face à la demande pressante de la clientèle, l'entreprise décide d'augmenter sa production mensuelle de 20 unités supplémentaires, chaque mois.
$p_0$ désigne la production en janvier 2010 et on note $p_n$ la production du $n^{ème}$ mois après janvier 2010.
1. a) Déterminer $p_1$, $p_2$, $p_3$ et $p_5$.
   b) Calculer $p_{n+1} - p_n$. En déduire la nature de la suite $(p_n)$.
   c) Exprimer le terme général $p_n$ en fonction de n. En déduire $p_{20}$.
2. Cette entreprise a une capacité de production limitée à 1000 unités.
   a) Pendant combien de temps pourra-t-elle maintenir son effort de production ?
   b) Quelle aura été sa production totale pendant toute cette période ?

**Exercice 11.11**

Guillaume a été embauché dans une entreprise avec un salaire initial de 7.000F mensuel.
Chaque mois son salaire augmente de 0,4%.
On note $u_0$ son salaire d'embauche et un le salaire du nème mois après son embauche.
1. a) Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_5$.
   b) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. En déduire la nature de la suite $(u_n)$.
   c) Déterminer le terme général $u_n$ en fonction de n. En déduire $u_{30}$.
2. a) Au bout de combien de mois son salaire aura-t-il augmenté de 20% ?
   b) Quel taux mensuel d'augmentation aurait-il fallu prévoir pour que cela se produise au $35^{è}$ mois après son embauche (donner la valeur décimale du taux à 0,01 près) ?
3. Calculer le total des salaires perçus par Guillaume durant l'année qui suit son embauche.

**3) Convergence de suites arithmétiques – suites géométriques**

**a) Convergence de suites arithmétiques**

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_a$
- Si r = 0, alors $(u_n)$ converge vers $u_a$ (car dans ce cas la suite est constante et vaut $u_a$)
- Si r > 0, alors $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Si r < 0, alors $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

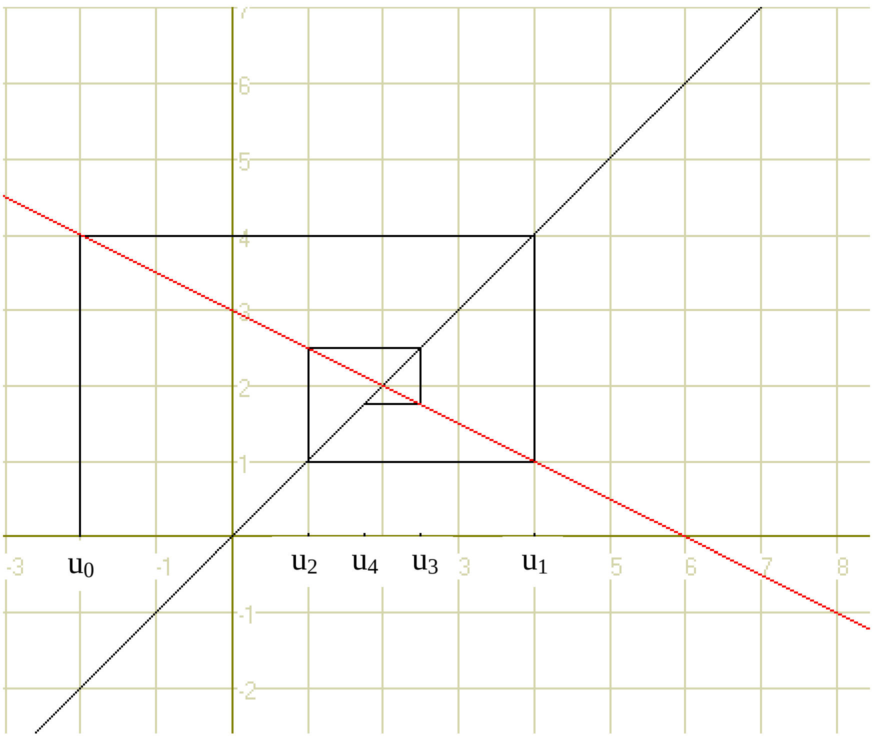
**Exercice 11.12 résolu**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

1. a) Déterminer graphiquement les 5 premiers termes de $(u_n)$.
   b) Conjecturer le sens variation et la limite de la suite $(u_n)$.
2. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
   a) Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.
   c) En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
3. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
   a) Calculer $S_1$, $S_2$ et $S_3$.
   b) Démontrer que $S_n = -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n$
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

***Résolution***

*1.a)Représentation graphique de 5 premiers termes de la suite (un)*




*1. b)sens de varaition de la suite*
*la suite n'est ni croissante ni décroissante. Cependant elle semble converger vers 2.*

*2.a)* $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$

*donc la suite* $(v_n)$ *est une suite géométrique de raison* $-\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_1 = u_1 - 2 = -4$.

*b)* $v_n = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et* $u_n = v_n + 2 = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$.

*Donc* $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et* $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$.

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3. a) *on a :* $u_1 = -2$ ; $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = 4$ *et* $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 3 = 1$

$S_1 = u_1 = -2$

$S_2 = u_1 + u_2 = -2 + 4 = 2$.

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = -2 + 4 + 1 = 3$.

b) *$S_n$ est la suite de n termes consécutifs :*

$$S_n = -4\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + 2n = -4\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} + 2n = -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n.$$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -\frac{8}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ .

$$\frac{Sn}{n} = -\frac{8}{3n}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2.$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{3n}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = 2$.

**b) Convergence suites géométriques**

Soit ($v_n$) une suite géométrique de raison q et de premier terme $v_a$

- Si $0 < |q| < 1$, alors ($v_n$) converge vers 0.
- Si q = 1, la suite converge vers $v_a$ (car dans ce cas la suite est constante et vaut $v_a$)
- Si q > 1, alors ($v_n$) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si $q \leq -1$, alors ($v_n$) diverge (dans ce cas la suite n'admet pas de limite).

**EXERCICE**

**Exercice 11.13**

Soit la suite numérique ($u_n$) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

1. Calculer les quatre premiers termes de cette suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < (u_n) < 6$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n < u_{n+1}$.
   Qu'en déduire pour la suite ($u_n$) ?
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.

a) Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de n, puis, en déduire celle de $(u_n)$ en fonction de n.
c) Calculer les sommes $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

**Exercice 11.14**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)$ est définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$.
   a) Démonter que la suite $v_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Préciser la limite de la suite $v_n$ .
   c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

**Exercice 11.15**

$(u_n)$ et $(v_n)$ sont les suites définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
   b) Calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 11.16: Suites adjacentes**

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel n par :
$u_0 = 3$ et $v_0 = 4$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$.

1. Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$.
2. On note $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   a) Démontrer que $(w_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer $w_n$ en fonction de n . Quelle est la limite de la suite $(w_n)$ ?

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.

**Exercice 11.17**

Soit la suite $u$ définie définie par la formule explicite suivante : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite $u$.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite $u$ sur (OI).
3. Etudier le sens de variation de la suite $u$.
4. Montrer que $u$ est converge, puis déterminer sa limite.

**Exercice 11.18**

Soit la suite $v$ définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1. Etudier le sens de variation de la suite $v$.
2. Etudier la convergence de la suite $v$.

**Exercice 11.19**

Soit la suite $u$ définie par $u : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \neq 1$.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   Montrer que la suite $v$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $v_0$.
3. Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.
4. Calculer la limite de $u$.

**Exercice 11.20**

On considère les suites $u$ et $v$ définies par $u : \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{3}{2}u_n\right)$

1. Calculer $v_0$ et démontrer que la suite $v$ est une suite géométrique de raison 2.
2. Exprimer $v_n$ en fonction de n et calculer la limite de $v$.
3. Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$ puis déduire la limite de $u$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose :

   $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

   $T_n = u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1}$.

   a) Démontrer que $S_n = (1 - 2n)\ln 2$.

   b) Exprimer $T_n$ en fonction de n.

   c) Justifier que $T_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

**Exercice 11.21**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5}$ .

1. Représenter les 5 premiers termes de la suite $(u_n)$.

2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq -\dfrac{1}{2}$.

b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

3. La suite $(v_n)$ est définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$.

a) Démonter que la suite $v_n$ est une suite géométrique
dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.

**Exercice 11.22**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1.a) Calculer $I_0$
b) Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.
2.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide d'une intégration par parties établir que la relation : $I_n = e - nI_{n-1}$.
b) En déduire $I_2$, $I_3$, $I_4$ et $I_5$.
3.a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
b) Montrer que la suite I est décroissante.
c) Que peut-on conclure quant à la convergence de la suite I ?
4.a) Démontrer l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

**Exercice 11.23**

On donne la suite I définie par : $I_0 = \int_1^e x dx$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1.a) Calculer $I_0$
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = \frac{1+e^2}{4}$.
2.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide d'une intégration par parties établir que la relation : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.
b) En déduire $I_2$.
3.a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
b) Montrer que la suite I est décroissante.
c) Etudier la convergence de la suite I.

# 12. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I- Généralités : vocabulaire et notation

- Une relation entre une variable x, une fonction f de x et au moins l'une des dérivées successives f', f'', f''', … , est appelée équation différentielle.

Exemple :
$f'(x) + 3f(x) = 2x^2+1$
$f''(x) – 9f(x) = 0$.

- Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.

Exemple :
L'équation $f'(x) + 3f(x) = 2x^2+1$ est une équation différentielle d'ordre 1 (à cause de f').
L'équation $f''(x) + 9f'(x) – f(x) = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 (à cause de f'').

- Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.

- Intégrer ou résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur K.

- la courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale de cette équation différentielle.

## II- Résolution de quelques types d'équations différentielles

### 1. Tableau récapitulatif

| Types d'équations différentielles | Solutions générales sur $\mathbb{R}$ |
|---|---|
| $f' = af,\ a \in \mathbb{R}$ | $f(x) = ke^{ax} \quad (k \in \mathbb{R})$ |
| $f'' = 0$ | $f(x) = Ax + B \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |
| $f'' – \omega^2 f = 0,\ \omega \in \mathbb{R}^*$ | $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |
| $f'' + \omega^2 f = 0,\ \omega \in \mathbb{R}^*$ | $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |

### 2. Propriétés

a) Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) ; $x_0$ et $y_0$ des nombres réels.
Il existe une unique solution f de telle que $f(x_0) = y_0$.
b) Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay= 0$ ($a \in \mathbb{R}$) ; $x_0$, $y_0$ et $z_0$ des nombres réels.
Il existe une unique solution f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

### Exercice 12.1 résolu

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E) : $y' = 2y$.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E') : $3y' + 6y = 0$.
   b) En déduire la solution de (E ) vérifiant $f(0) = 2$.

***Résolution***

*1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation* (E) *sont les fonctions $f : x \mapsto ke^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).*
*2.a) (E') $\Leftrightarrow y' = -2y$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') sont les fonctions $f : x \mapsto ke^{-2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).*
*b) $f(0) = 2 \Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 2 \Leftrightarrow k = 2$. Donc la solution est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2e^{-2x}$.*

**Exercice 12.2 résolu**

1. Résoudre dans ℝ, l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' = 4y$.
2. a) Résoudre dans ℝ, l'équation différentielle suivante : (E') : $y'' + 25y = 0$.
   b) En déduire la solution de (E) vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = -10$.

***Résolution***

*1. (E) $\Leftrightarrow y'' - 4y = 0 \Leftrightarrow y'' - 2^2y = 0$.*
*Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $f : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).*

*2. a)(E') $\Leftrightarrow y'' + 5^2y = 0$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') sont les fonctions $f : x \mapsto A\cos 5x + B\sin 5$ avec ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).*

*b) On a : $f'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$.*
*$f(0) = 2$ et $f'(0) = 1 \Leftrightarrow A = 2$ et $B = -2$.*
*Donc la solution est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par* $f(x) = 2\cos 5x - 2\sin 5x$

$$= 2\sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

**Exercice 12.3 résolu**

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $f''(x) + 4f(x) = 12x$.
1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E) sur ℝ.
2. a) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E)si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $f''(x) + 4f(x) = 0$.
   b) Résoudre (E')
   c) En déduire les solutions de (E).

***Résolution***

*1. on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.*
*Donc pour tout x,* $g''(x) + 4g(x) = 0 + 4\times(ax + b) = 12x \Leftrightarrow 4ax + 4b = 12x$
$\Leftrightarrow 4a = 12$ et $4b = 0$
$\Leftrightarrow a = 3$ et $b = 0$.
*g est donc la fonction définie par $g(x) = 3x$.* ***(On dit que g est une solution particulière de (E)).***

*2. a) On a que g est solution de (E ) c'est-à-dire $g''(x) + 4g(x) = 12x$*
*Alors h est solution de (E )* $\Leftrightarrow h''(x) + 4h(x) = 12x$
$\Leftrightarrow h''(x) + 4h(x) = g''(x) + 4g(x)$
$\Leftrightarrow h''(x) - g''(x) + 4[h(x) + g(x)] = 0.$
$\Leftrightarrow (h - g)'' + 4(h + g) = 0.$
$\Leftrightarrow h - g$ *est solution de* $f''(x) + 4f(x) = 0$.

*b) (E') : $f''(x) + 4f(x) = 0$.*
*(E') $\Leftrightarrow y'' + 2^2y = 0$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') sont les fonctions $f : x \mapsto A\cos 2x + B\sin 2x$, avec ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).*

*c) les solutions de (E ) sont les fonctions h de vers définies par :*
$h(x) = f(x) + g(x)$
$= A\cos 2x + B\sin 2x + 2x$. ***(On dit que h est la solution générale de l'équation (E).***

## EXERCICES

**Exercice 12.4**

Intégrer chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée.

1. $y' = 4y$ ; $y(1) = 2e$.
2. $y' + 3y = 0$ ; $y(-1) = e$.
3. $y'' = y$ ; $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$.
4. $y'' + 36y = 0$ ; $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 6$.
5. $y'' = 0$ ; $y(1) = 2$ et $y'(1) = 1$.

**Exercice 12.5**

On considère l'équation différentielle suivante : $y' - 2y = 2x + 1$

1. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto -x - 1$ est une solution de (E).
2. a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
   b) Résoudre (E')
   c) En déduire les solutions de (E). Puis la solution h de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

**Exercice 12.6**

On considère l'équation différentielle suivante : $y'' + 9y = x^2 + x + 1$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 9y = 0$.
   b) Résoudre (E')
   c) En déduire les solutions de (E). Puis la solution h de (E) qui vérifie $h(0) = \sqrt{3}$ et $h'(x) = 6$.