

*Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

EXERCICE 1

Soit $Z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}$.

- 1) Ecrire Z sous forme exponentielle.
- 2) Dédire de la question précédente la forme algébrique de Z^{2011} .

EXERCICE 2

Mariam, une jeune fille diplômée sans emploi, a reçu un fond d'argent et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6.
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7.
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

- 1) on choisit un jour au hasard.
 - a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
 - b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B « Mariam réalise un bénéfice », est 0,58.
 - c) Calculer la probabilité qu'il y ait une affluence de clients ce jour-là. On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
- 2) Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés. On désigne par X la variable aléatoire qui désigne le nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
 - a) Déterminer les valeurs prises par X.
 - b) Déterminer la loi de probabilité de X.
 - c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{8x^2 - 1}{x}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 4x - 2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1cm.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) et de (D).

3. a) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que l'équation $x \in]0; +\infty[, f(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) Justifier que : $0,65 < \alpha < 0,66$.

5. a) Justifier que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

b) Calculer $f(1)$.

c) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en 2 existe puis le calculer.

6. Construire (C), (C') et (D) sur une feuille de papier millimétrée.