Terminale *D*

Exercices de Mathématiques

COLLÈGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMÉE Année scolaire 2006 / 2007

2ère Séquence / Novembre. 2006

T^le D	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES (02)	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair.

Exercice 1 (5,5 points)

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :
   $z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $z_P = 3 + 2i$
   et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe : $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$
   a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B par la translation t de vecteur $\vec{w}$. 0,5 pt
   b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$. 0,5 pt
   c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. 0,5 pt
   d) Placer les points P, Q, R et S. 1 pt
2. a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme. 0,5 pt
   b) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. 0,75 pt
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS. 0,5 pt
   c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$.
   On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon r. 0,75 pt
3. La droite (AP) est-elle tangente au cercle C ? 0,5 pt

Exercice 3 (6,5 points)

I. On pose : $f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$

1. Montrer que qu'il existe un réel r, et un seul, tel que f(r) = 0 0,75 pt
   Déterminer alors les nombres complexes a et b tels que :
   $\forall z \in \mathbb{C}: f(z) = (z-r)(z^2 + az + b)$ 0,75 pt
2. Résoudre, dans C l'équation f(z) = 0 1 pt

II.

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{8+8i}{\sqrt{3}-i}$ 0,75 pt
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \frac{8+8i}{\sqrt{3}-i}$ 1 pt

3. Soit A, B, C, D et E les images respectives des solutions de cette équation, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Quelle est la nature du polygone ABCDE ? 0,25 pt

III.

1. Linéariser $\cos^3 x \sin^3 x$ 1 pt
2. En utilisant d'une part la formule de Moivre et d'autre part le développement usuel de $(a + b)^4$, développer $(\cos x + i \sin x)^4$ 0,25 pt x 2
   En déduire ensuite les expressions de cos4x et sin4x en fonction de cos x et sin x 0,25 pt x 2

Exercice 4 (8 points)

Soit la fonction *f* définie sur D = IR \{ -1 ; 1 } par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$. On nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).
Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction.

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de *g* et dresser son tableau de variation 1 pt
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. et telle que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$ 0,75 pt
4. Déterminer le signe de *g* sur IR 0,5 pt

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Étudiez les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition. 1 pt
2. Montrer que f'(x) = g(x) x h(x) où h est une fonction à préciser
   En déduire, à l'aide de la partie A, le tableau de variation de la fonction f. 1,5 pt
3. a) Vérifiez que pour tout $x \in$ D , $f(x) = 2x + \dfrac{2x+3}{x^2-1}$. 0,25 pt

   b) En déduire que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentant *f*. 0,5 pt

   c) Étudiez la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote .
   Précisez en particulier les coordonnées du point d'intersection de d et $\mathscr{C}$ 1 pt
4. $\mathscr{C}$ admet-elle d'autres asymptotes ? Si oui les préciser. 0,5 pt
5. Tracez la courbe et ses asymptotes. 1 pt

INTITUTIONS SCOLAIRES DAUPHINES — Année scolaire 2006/2007
COLLEGE BILINGUE FÖ KAMGA Tel : 340 94 99
COLLEGE DAUPHINE II Tel: 337 51 53

Terminales D	Devoir surveillé de mathématiques Evaluation de la 2ème séquence	Durée : 3 heures Coefficient : 5

EXERCICE 1 : **2 points**

Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-\sin x}$ 0,5pt

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x+\tan 2x}{\tan x-\tan 2x}$ 0 ,5pt

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ 1pt

EXERCICE 2 : **5 points**

Soit le nombre complexe $Z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées complexes de Z. (on les écrira d'abord sous forme trigonométrique, ensuite sous forme algébrique). 1,25pt + 1,75pt

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$. (**NB** : écrire $\tan\frac{\pi}{8}$ sans radical au dénominateur). 0,5pt + 0,5pt + 1pt

EXERCICE 3 : **5 points**

On considère le polynôme de variable complexe z défini par : $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$.
1) Montrer que pour tout complexe z, on a : $P(z) = (z + 4)(2z^2 + 6z + 17)$. 0,5pt
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. 1,5 pt
3) On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de $P(z) = 0$ sachant que z_1 est réelle et $Im(z_2) > 0$.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

a) Calculer $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$. 0,75pt

b) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ? 0,25pt

c) Déterminer les points D et E tels que le quadrilatère BCDE soit un carré de centre A. 0,75pt ×2

d) Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D et E dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. 0,5pt

EXERCICE 4 : **4 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + 3i et 2i.
1) Soit S la similitude directe plane de centre B qui transforme O en A. On note z' l'affixe de M' transformé du point M d'affixe z.

a) Exprimer z' en fonction de z. 1,5pt

b) Calculer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude S. 0,25pt + 0,5pt

2) Soit T la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe $z'' = iz + 3$.
Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques. On notera Ω le point invariant par la transformation T. 0,75pt
3) Montrer que les points A, Ω et B sont les sommets d'un triangle isocèle dont on précisera le sommet principal. 1pt

EXERCICE 5 : **4 points**

Soit x un réel. Utiliser les nombres complexes pour linéariser $\sin^4 x$.

Powered by www.edumathcamer.net

COLLEGE CHEVREUL
BP 4093 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

Evaluation de fin de 1ère Séquence

Tle D	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 3
		Coefficient : 4

Exercice 1 — 5 points

1. a) Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases} 7a + b = 9 \\ a - 4b = -7 \end{cases}$ — 0,5 pt

   b) En déduire la résolution du système : $\begin{cases} 7|x| + (y+1)^2 = 9 \\ |x| - 4(y+1)^2 = -7 \end{cases}$ — 1,5 pt

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le triangle ABC tel que A(1 ; 2) ; B(1 ; 4) et C(5 ; 0).

   a) Déterminer a, b, c pour que le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit circonscrit au triangle ABC. — 2 pts

   b) Préciser le centre de ce cercle. — 1 pt

Exercice 2 — 4 points

Z est un nombre complexe différent de 1.

1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul $1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ — 2 pts
2. En déduire le calcul de S et S' tel que :
   $S = 1 + i + i^2 + \ldots\ldots + i^{1999}$ — 1 pt
   $S' = 1 - i + i^2 + \ldots\ldots + (-i)^{1999}$ — 1 pt

Exercice 3 — 5 points

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

1. Démontrer que si z_0 est racine de ce polynôme, les nombres $\frac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ sont aussi racine de ce polynôme. — 1 pt x 2
2. Calculer $(1 + i)^2$; $(1 + i)^3$; $(1 + i)^4$ puis P(1 + i) — 0,5 pt x 4
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation P(z) = 0 dont on admettra qu'elle a quatre solutions distinctes. — 1 pt

Exercice 4 — 6 points

$\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On appelle Z le nombre complexe défini par :

$Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$

1. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels. Calculer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z. — 0,5 pt x 2
2. Déterminer, puis représenter dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe z et telle que Z soit un nombre réel. — 0,5 pt x 3
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z = 0. — 1 pt
4. Soit A,B,C les images respectives des nombres complexes : 1 ; -1 + 2i ; -1 – 2i. Placer les points A, B, C et montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle. — 2,5 pts

« La clé du succès, c'est le travail ».

www.educamer.org

Powered by www.edumathcamer.net

COLLEGE CHEVREUL
BP 4093 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

2ème Séquence _ novembre 2006

Tle D	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 3
		Coefficient : 4

Exercice 1 **4 points**

On considère la fonction numérique de variable réelle f, définie sur R par $f(x) = x(1 + x)^n$

1. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f. 1 pt + 1 pt
2. En déduire le calcul de S_1 et S_2 suivant :
   $S_1 = 1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots\ldots\ldots + (n+1)C_n^n$ 1 pt
   $S_2 = 1 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n$ 1 pt

Exercice 2 **3 points**

a) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$ 1 pt

b) Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
Quel que soit x nombre réel $f(x + 2) = f(x)$
Quel que soit x élément de $[0 ; 2[$ $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$
où a, b et c sont des nombres réels.

Calculer f(2) et trouver une relation entre a, b et c pour que *f* soit continue en 2. 1 pt + 1 pt

Exercice 3 **3 points**

Etude de l'équation $x^5 - 5x - 5 = 0$ (E).

1. Soit *f* la fonction définie sur R par : $f(x) = x^5 - 5x - 5$
   a) Etudier les variations de f. 1,5 pt
   b) En déduire le nombre de solution de (E). 0,5 pt
2. Donner par la méthode de votre choix un encadrement de la (ou des) solution(s) d'amplitude 10^{-2}. 1 pt

Exercice 4 **5 points**

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation t de P dans P qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

1. a) Déterminer *x'* et *y'* en fonction de *x* et *y*. 0,5 pt
   b) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation t. 0,5 pt + 0,5 pt
2. Soit la transformation r, qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) z$
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r. 0,5 pt + 0,5 pt

3. Soit la transformation S = r∘t, qui au point M(x ; y) d'affixe z, associe le point $M_2(x_2 ; y_2)$ d'affixe z_2.
   a) Exprimer z_2 en fonction de z. 0,5 pt
   b) Déterminer les coordonnées de l'image C' du point C $(1;-\sqrt{3})$ par S. 0,5 pt
4. Soit la droite (D) dont une équation est $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$
   a) Montrer que le point C appartient à (D). 0,5 pt
   b) Soit (D') l'image de (D) par S.
   Déterminer le point d'intersection de (D) et (D'). 1 pt

Exercice 5 **5 points**

I. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation y = x. 1,5 pt

II. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C d'affixes respectives.
$Z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3})$; $Z_B = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$ et $Z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$

1. a) Calculer $Z_A - Z_B + Z_C$. 0,5 pt
   b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés (A ; 1) , (B ; - 1) et (C ; 1). 0,5 pt
2. Soit l'ensemble C des points M du plan tels que :
   $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|$
   a) Vérifier que B appartient à C. 0,5 pt
   b) Déterminer l'ensemble C. 1 pt
3. Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tel que :
   $2\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \right\|$. 1 pt

COLLÈGE EVANGELIQUE DE NEW BELL
B.P. 6022 DOUALA

Année scolaire 2006 / 2007

2ème Séquence_ novembre 2006

Tle D	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 2H Cœff. 4

Exercice 1 — 3 points

On désire partager équitablement une somme de **14400**F entre les enfants d'une même famille .Si l'on excluait 5 enfants de ce partage,la part de chacun se trouverait augmentée de **40**F.En désignant par n le nombre d'enfants de cette famille.

1. Montrer que n est solution de l'équation $n^2 - 5n - 1800 = 0$. 2 pts
2. Déterminer alors n. 1pt

Exercice 2 — 6 points

Soit (**E**) l équation: $z^3 + 2(1+i)z^2 - 2z + 4(2 - i) = 0$

1. Montrer que (**E**) admet une solution imaginaire pure, déterminer alors cette solution. 1 pt
2. Vérifier que $z_1 = -2i$ est une solution de (**E**). 1 pt
3. Ecrire (**E**) sous la forme $(z + 2i)(az^2 + bz + c)$, a, b et c étant des nombres complexes. 1 pt
4. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (**E**). 1 pt
5. On désigne par z_2 et z_3 les autres solutions de (**E**) telles que $Re(z_2)>0$.
   A,B et C les points d'affixes respectives z_1,z_2 etz_3.
   a) Placer les points A,B et C dans le repère orthonormé direct (0 , I ,J)
      avec $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\| = 1$ cm. 0,75 pt
   b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,AB, AC. 1,25 pt
   c) Donner alors la nature exacte du triangle ABC. 0,5 pt
6. On appelle F la similitude directe laissant B invariant et qui transforme A en C.
   a) Déterminer la bijection complexe associée à F. 2 pts
   b) Donner alors tous les éléments caractéristiques de cette similitude. 1,5 pt

Exercice 3 — 7 points

1. Donner le signe du polynôme $g(x) = 54x^2 + 50x + 15$ 1 pt
2. On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 18x^3 + 25x^2 + 15x - 2$.
   a) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de ces variations. 1 pt
   b) Montrer que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. 1 pt
   c) Montrer qu'il existe $x_o \in [0, 2]$ tel que $f(x_o)=0$. 1 pt
   d) Donner un encadrement de x_o par un intervalle d'amplitude 0,02. 2 pts
   e) L'équation $f(x)=0$ admet-elle une autre solution ? Pourquoi ? 1 pt

www.educamer.org

Powered by www.edumathcamer.net

COLLEGE DE LA RETRAITE
Département de Mathématiques

Année scolaire 2006 / 2007

Evaluation de fin de 1ère Séquence_07octobre 2006

Tle D	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H
		Coefficient : 4

Exercice 1 3 points

On considère la transformation S dont l'écriture complexe est donnée par : $Z'=-iZ + 1 + 2i$

1. donner la nature et les éléments géométriques de S — 1,5 pt
2. déterminer l'image par S de la droite Δ d'équation $X - y + 2 = 0$ — 1,5 pt

Exercice 2 6 points

On considère deux nombres complexes U et V définis par

$U = 1 + i\sqrt{3}$; $V = 5\ 5i$

1. Ecrire U et V sous forme trigonométrique
2. On pose $Z = U \times V$
   a) Ecrire Z sous forme algébrique — 0,75 pt
   b) Ecrire Z sous forme trigonométrique — 0,75 pt
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ — 1 pt
4. Soit un entier naturel n. Déterminer n pour que :
   a) U^n soit réel — 1 pt
   b) U^n soit imaginaire pur — 1 pt

Exercice 3 3 points

Dans le plan complexe, on désigne par M le point d'affixe Z
Déterminer et construire l'ensemble des points M pour que le nombre complexe
$Z + \frac{9}{Z}$ soit un nombre réel. Z

Exercice 4 8 points

On désigne par (E) l'équation suivante : $Z^3 - 3Z^2 + (3 + i)Z - 2 - 2i = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E sachant qu'elle admet une racine réelle. — 3 pts
2. Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique et ensuite sous exponentielle. — 1,5 pt
3. Soit U le produit des trois nombres complexes solutions de l'équation (E) déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe U. — 1,5 pt
4. A, B, et C désignent es points images des solutions de (E) déterminer suivant les valeurs du paramètre réel k, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$ — 2 pts

Powered by http://maths.educamer.org

LYCEE JOSS DE DOUALA Année scolaire 2006 / 2007

21 novembre 2006 / 2ème Séquence

Tle D	DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES	Durée : 03 H

EXERCICE 1 : 3,5 Points

I. On considère les transformations f, g et h du plan d'écritures complexes respectives :
$z' = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) z - 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z' = -2z + 3 - 6i$; $z' = z + 2 - 4i$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f, g et h. 2 pts
2. On désigne par L le point d'affixe $-2 - i\sqrt{2}$.
   Déterminer les coordonnées du M point tel que f(M) = L 0,5 pt

II. Déterminer et représenter l'ensemble E des points d'affixe z du plan complexe tel que les points d'affixes i, z et iz soient alignés. 1 pt

EXERCICE 2 : 7,75 Points

1. Déterminer les racines cubiques de -64. 0,75 pt

   Dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm,
   on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$; $b = \bar{a}$ et c = -4.
2. a. Calculer le module et l'argument principal de a.
   Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. 1 pt
   b. Calculer le nombre complexe $q = \frac{a - c}{b - c}$

   et déterminer le module et un argument de q. 0,75 pt

   En déduire la nature du triangle ABC. 0,5 pt
3. On désigne par M le point d'affixe z.
   a. Exprimer en fonction de z les affixes des vecteurs
   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ 0,5 pt
   b. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tel :
   $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$ 0,75 pt
4. Soit f la transformation du plan d'écriture complexe $z' = \frac{1}{8}az - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. 1 pt
   b. Donner la décomposition canonique de f. On donnera les écritures complexes de chacune des transformations de la composition. 1,5 pt
   c. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E}')$ image de $(\mathscr{E})$ par f. 1 pt

EXERCICE 3 : 4,5 Points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f. 1 pt
2. Déterminer les images par f de $[-1; 3[$; $[2; +\infty[$; $\mathbb{R}$. 0,75 pt
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{7}{4}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. 0,5 pt
4. a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans [0 ;2] 0,75 pt
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de cette équation qui est dans [0 ;2] 0,75 pt

5. Soit g la restriction de f à $\left]-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une bijection de $\left]-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right[$ vers un intervalle J que l'on précisera. Puis, dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1}. 0,75 pt

EXERCICE 4 : 4,25 Points

I. Calculer la limite en a de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$; $a = -\infty$ 0,5 pt

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$; $a = 2$ 0,5 pt

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $a = +\infty$ 0,5 pt

II. On considère la fonction g définie par $g(x) = xE\left(\dfrac{2}{x}\right)$,

où E désigne la fonction partie entière.

1. Préciser l'ensemble de définition de g. 0,25 pt
2. Montrer que pour tout x réel, on a $x - 1 < E(x) \leq x$ 0,5 pt
3. En déduire que :
   a. Pour tout $x > 0$, $2 - x < g(x) \leq 2$. 0,5 pt
   b. Pour tout $x < 0$, $2 \leq g(x) < 2 - x$. 0,5 pt
4. Déterminer les limites de g à gauche et à droite en 0. 0,5 pt
5. g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? si oui préciser-le. 0,5 pt

Powered by http://maths.educamer.org

COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / Baccalauréat Blanc _ Session de mars 2007

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 3. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 : 3 Points

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de la classe de Terminale C du Collège selon leurs moyennes (arrondies à l'unité près) du 1er trimestre.

Moyennes	8	9	10	11	12
Nombre de garçons	1	4	8	2	1
Nombre de filles	0	0	5	2	2

On représente le nom de chacun des élèves par un numéro de 1 à 25. On inscrit les 25 numéros sur des jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac.
On tire successivement trois jetons en remettant Chaque fois le jeton tiré dans le sac.
Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves ayant obtenu moyenne (arrondie à l'unité près) supérieure ou égale à 10.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. 1,5 pt
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. 1,5 pt
   N.B : On donnera les résultats sous la forme de fraction irréductible.

EXERCICE 2 : 3,5 Points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$. 1,5 pt
   On donnera les solutions sous la forme algébrique.
2. On désigne par A, B et C les images dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé, des solutions de (E) ; (D) la droite d'équation x = 3 et (Γ) l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 12 + \frac{3}{4}(x-3)^2$.
   Calculer la distance du point M à la droite (D) puis déterminer et construire (Γ). 2 pts

EXERCICE 3 : 2,5 Points

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B tels que AB = 6 cm.
On désigne par :

- C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
- S la similitude directe qui transforme A en B et C en D. On note I son centre.

1. Calculer $\frac{IA}{IB}$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. 1 pt
2. En déduire la construction géométrique du point I. 1 pt
3. Démontrer que le point I appartient au cercle circonscrit au triangle ADC. 0,5 pt

Problème : 11 Points

La Partie A est indépendante des parties B et C.

Partie A :

On considère dans IN*x IN*, l'équation (E) : 50x - 11y = 3.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD des couples *(x, y)* solutions de l'équation E ? 0.25 pt
   b. Résoudre l'équation (E). 0,75 pt
2. Soit n un entier naturel non nul, on pose : a = 11n + 3 et b = 13n-1.
   a. Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50. 0,25 pt
   b. En s'inspirant de la question 1.b., déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 50. 0,75 pt
   c. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 25. 1 pt

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] 0 ;+∞ [par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I , J).

1. a. Justifier que f est dérivable sur] 0 ; +∞[et calculer $f'(x)$. 0,5 pt
   b. En déduire le sens de variation de f. 0,25 pt
2. a. Pour $x > 0$, Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ à l'aide d'une intégration par parties. 0,5 pt
   b. Démontrer que pour tout $t > 1$, $\frac{\ln t}{2t^2} \le \frac{\ln t}{1+t^2} \le \frac{\ln t}{t^2}$.
   c. En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \le f(x) \le \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$. 0,25 pt
   d. On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, donner un encadrement de l. 0,25 pt
3. Soit g la fonction définie sur] 0 ; +∞[par $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{x})$.
   a. Démontrer que g est la fonction nulle sur] 0 ;+∞ [1 pt
   b. En déduire la limite de f en zéro. 0,5 pt
   c. Tracer l'allure de la courbe Γ. 0,5 pt

PARTIE C :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1. a. Démontrer que $0 \le U_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$. 0,25 pt
   b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite. 0,25 pt
   c. En remarquant que, pour tout x de [0 ; 1] on a : $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$.
   Calculer : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$. 0,25 pt
   d. Calculer U_n au moyen d'une intégration par parties. 0,5 pt
2. Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout $n \ge 2$, on pose : $S_n(x) = 1 - x + ... + (-1)^n x^n$.
   a. Démontrer que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$. 0,25 pt
   b. Démontrer que : $1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$. 0,75 pt
   c. Démontrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$. 1 pt
   d. En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 x^2 \ln(1+x)$. 0,25 pt
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$. 0,75 pt

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES **Année scolaire : 2012-2013**
Lycée de Nkolnda-Nsimalen **Série : C Durée : 4 heures**
Baccalauréat BLANC N°1 **Session de : Mars 2013**
Epeuve de : MATHÉMATIQUES **Coefficient : 05**
www.easy-maths.org **Examinateur : Romaric TCHAPNGA**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C le point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].

Placer ces points sur une figure.

1. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude s. **0,5 pt**

b. Determiner les images par s des points O, A, B, C. **1 pt**

2. **a.** Montrer que les points A, B et Ω sont alignés. **0,5 pt**

b. Montrer de même que les points I, C, Ω sont alignés. **0,5 pt**

c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure. **0,5 pt**

3. **a.** Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI]. **0,5 pt**

b. Montrer que $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires. **0,5 pt**

c. Montrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2. **0,5 pt**

Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure. **0,5 pt**

EXERCICE II **4 points**

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. **0,75 pt**

2. On suppose que n est pair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q$.

a. Montrer que $\text{PGCD}(S_{2q}\,;\, S_{2q+1}) = (2q+1)^2\text{PGCD}\left(q^2\,;\,(q+1)^2\right)$. **0,75 pt**

b. Calculer PGCD $(q\,;\,q+1)$.Puis calculer $\text{PGCD}\left(S_{2q}\,;\,S_{2q+1}\right)$. **1 pt**

3. On suppose que n est impair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q+1$.

a. Montrer que les entiers $2q+1$ et $2q+3$ sont premiers entre eux. **0,25 pt**

b. Calculer $\text{PGCD}\left(S_{2q+1}\,;\,S_{2q+2}\right)$. **0,5 pt**

4. Déduire qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux. **0,75 pt**

EXERCICE III **3,5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit A le point de coordonnées $(-2:0)$ et $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$.

EASY-MATHS PARTNERSHIP

1. Montrer que l'expression analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (Δ) : $x = -2$ et de rapport $\frac{1}{2}$ est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - 1 \\ y' = y \end{cases}$. **0,75 pt**

2. Déterminer une équation réduite de l'image (Γ) du cercle de centre A et de rayon 2 par l'affinité f. Preciser ses éléments caractéristiques. **1 pt**

3. Soit (C) l'ensemble des points m(x :y) dans $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'équation :
$13x^2 + 7y^2 + 6xy\sqrt{3} + 32x\sqrt{3} + 32y + 48 = 0$.

a. Déterminer une équation réduite de (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. **1 pt**

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C). **0,75 pt**

PROBLEME **7,5 points**

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A : On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'unité graphique étant 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]-\infty\,;\,1[$. **0,5 pt**

2. En déduire une asymptote à la courbe (C_f). **0,25 pt**

3. Dresser le tableau des variations de la fonction f. **0,75 pt**

4. Tracer la courbe (C_f). **0,5 pt**

5. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty\,;\,1[$. **0,5 pt**

6. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx$. puis calculer la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ? **0,75 pt**

7. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$? **0,5 pt**

8. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est - 1. **0,5 pt**

b. On notera β l'autre solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de β. **0,5 pt**

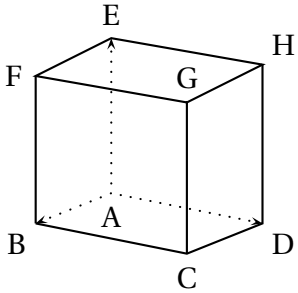
9. Soit a un élément de $]-\infty\,;\,1[$. Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$. **0,5 pt**

Partie B :

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, I designe le centre de gravité de CFH.

1. **a.** Montrer que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et à celui de [CF]. **0,75pt**

b. En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par le point I. **0,5 pt**



2. On considère le repère orthonormé direct de l'espace $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

a. Calculer le volume du tétraède CFGI. **0,25 pt**

b. En déduire la distance de G au plan (CFH). **0,25 pt**

3. $S_{(ABG)}$ et $S_{(EFC)}$ désignent les reflexions respectivement par rapport au plan (ABG) et (EFC). Donner la nature de $S_{(ABG)} \circ S_{(EFC)}$. **0,5pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

Ministère des enseignements secondaires
Lycée de Nkolnda-Nsimalen
www.easy-maths.org

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : 2012 Série : C
Epreuve : MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures Coefficient : 5
Examinateur : Romaric TCHAPNGA

l'épreuve comporte trois éxercices et un problème. Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3,5 points**

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

a. Donner la loi de probabilité de X. **0,75 pt**

b. Calculer $E(X)$ espérance mathématique, déterminer m pour que $E(X) = 1,2$. **1 pt**

2. Dans la suite de l'exercice on prend $m = 3$; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1 ère boule noire tirée.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,75 pt**

b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. **1 pt**

EXERCICE II **4,5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{3+4i}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2i}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Montrer que : $x' = \dfrac{3x+4y+1}{5}$ et $y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}$. **1 pt**

2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5 pt**

b. Quelle est la nature de l'application f ? **0,5 pt**

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel. **0,5 pt**

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,5 pt**

b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,75 pt**

5. On considère les points M d'affixe $z = x+iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{lm}(z')$ soient entiers. **0,75 pt**

EXERCICE III **2 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit (C) l'ensemble des point $M(xy)$ du plan tel que : $x^2+y^2+2x-4y=0$ et (Δ) la droite d'équation : $y-2=0$.

1. Déterminer l'expréssion analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport 2. **0,75 pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (C). **0,5 pt**

3. Montrer que l'image (C') de (C) par t est une conique dont on précisera l'équation réduite et l'excentricité. **0,75 pt**

PROBLEME **10 points**

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A : **4,5 points**

1. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence de $\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,25 pt**

2. Soit F l'application définie en x par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

b. Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

c. Soit $G : x \longmapsto \int_{2x}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $G'(x)$. **0,75 pt**

3. Montrer que pour tout $x > 1$, $F(x) < \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,5 pt**

4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par : $U_n = \int_1^n \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Donner le sens de variation de la suite (U_n). **0,5 pt**

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_1^n \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,5 pt**

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < 1 - \frac{1+\ln n}{n}$. **0,5 pt**

d. En déduire que la suite (U_n) est convergente et que $\lim U_n \leq 1$. **0,5 pt**

Partie B : **3 points**

Soient E le plan vectoriel réel rapporté à la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, h un endomorphisme de E défini par :

$h(x\vec{i}+y\vec{j}) = \left(-x-\frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (2x+y)\,\vec{j}$.

1. Montrer que $h\circ h$ est un endomorphisme nul. **0,5 pt**

h est - il un isomorphisme ? Justifier votre réponse. **0,25 pt**

2. Déterminer $Kerh$ et Imh. Comparer $Kerh$ et Imh. **1 pt**

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $Kerh$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $h(\vec{v}) = \vec{u}$. **0,25 pt**

b. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E. **0,5 pt**

c. Ecrire la matrice de h dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. **0,5 pt**

Partie C : **2,5 points**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arete 1 tel que $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ soit un repére orthonormé direct de $\mathscr{W}$. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le centre du carré $ADHE$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. **0,5 pt**

2. En déduire l'aire du triangle IGA. **0,5 pt**

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGA) dans le repère R. **0,5 pt**

4. Calculer le volume du tétraède $ABIG$ puis, de deux manières différentes, calculer la distance du point B au plan (IGA). **1 pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

LYCEE GENERAL LECLERC
Département de Mathematiques
www.easy-maths.org

Baccalauréat Blanc
Session de Mars 2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : C ; Durée : 4h ; Coef : 5

Exercice 1 : (3 pts)

1. Calculer PGCD(2688 ;3024). (0,5 pt)

2. On donne l'équation $(E) : 8x + 9y = -10$.

a. Vérifier que $(1;-2)$ est solution de (E). (0,25 pt)

b. Résoudre l'équation (E). (0,75 pt)

3. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$est un repère orthogonal de l'espace. $(S) : x + 2y - z + 2 = 0$ et $(\pi) : 3x - y + 5z = 0$ deux plans.

a. Montrer que (S) et (π) sont sécants suivant une droite (D). (0,5 pt)

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (E). (0,5 pt)

c. En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 pts)

I. $a \in \mathbb{R}_+^*$; $ABCD$ est un tétraèdre tel que $AB = AC = AD = a$. ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.

1. Quelle est la nature du triangle BCD? (0,25 pt)

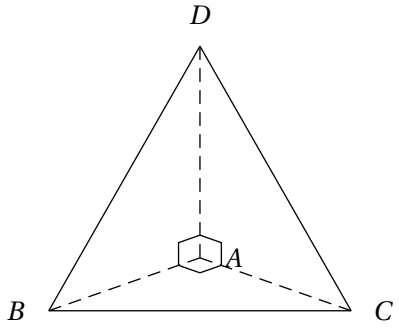
2. Soit H le centre de gravité du triangle BCD.

a. Justifier que (AH) est orthogonal au plan (BCD). (0,5 pt)

b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$; puis l'aire S du triangle BCD. (0,75 pt)

c. Exprimer AH en fonction de V et S et en déduire que $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (0,5 pt)

d. Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{AH}$. (0,5 pt)



II. On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarque que, lorsque on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et les trois autres sont visibles).

1. Calculer la probabilité qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur le tétraèdre. (0,5 pt)

2. Calculer la probabilité que la couleur bleue ne soit visible sur aucun des trois tétraèdres. (0,5 pt)

3. Calculer la probabilité de l'événement E : «les six faces rouges sont visibles». (0,5 pt)

4. On repète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

a. Calculer la probabilité P_n que l'événement E soit réalisé au moins une fois. (0,75 pt)

b. Calculer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0,25 pt)

Exercice 3 : (2 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et $3i$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de $3i$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-i}{iz+3}$.

1. Vérifier que $OM' = \dfrac{AM}{BM}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. (0,75 pt)

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) image par f des points de la droite d'équation $y = 2$. (0,5 pt)

3. Déterminer et construire l'ensemble (F) image par f des points du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B. (0,5 pt)

Problème : (10 pts) (Ce problème comporte 3 parties indépendantes.)

Partie A : (3 pts)

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f d'écriture complexe $z' = i\overline{z} + i$.

1. Montrer que $f = t \circ r \circ s$, s étant la reflexion d'axe $(O, \vec{i})$, r la rotation de centre O d'angle à préciser et t la transformation de vecteur $\vec{u}$ à déterminer. (1,5 pts)

2. En décomposant r, montrer que $r \circ s$ est une symétrie orthogonale d'axe (D) à déterminer. (0,5 pt)

3. Vérifier que f est une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,5 pt)

Partie B : (3 pts)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$. (0,5 pt)

2. Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, où f' désigne la dérivée de f.

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E. (0,75 pt)

b. Soit f un élément de E. Vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$. (0,5 pt)

c. En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. (0,5 pt)

d. Déterminer alors l'ensemble E. (0,75 pt)

Partie C : (4 pts)

Soit f : $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ une fonction.

1. **a.** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)

b. Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unité : 5 cm). (0,5 pt)

2. **a.** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$, puis en déduire $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\, dx$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. (1 pt)

b. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.

i. En utilisant le sens de variation de f sur $]0;1]$, montrer que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a : (0,5 pt)

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

ii. En déduire que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ et que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (1 pt)

c. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$. (0,25 pt)

Powered by www.educamer.org

Collège Evangélique de New - Bell Année Scolaire 2006/2007

DEVOIR SURVEILLE N°5_Epreuve de Mathématiques - 4h - TC Coeff. 6

Exercice 1 : (3 Pts)

1 - On considère les équations suivantes, dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

(1) $x^2 + 4y^2 = 16$
(2) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$
(3) $4x^2 - y^2 = 16$
(4) $4x - y^2 = 0$

Reconnaître dans chaque cas la courbe (C) correspondante ; préciser ses éléments caractéristiques : axe focal ; foyers axe de symétrie, sommets, asymptotes éventuelles, et tracer (C).

Exercice 2 : (3 Pts)

1 - Intégrer les équations différentielles suivantes :

(E_1) $y' - 3y = x^2$
(E_2) $2y'' - 5y' + 3y = 0$
(E_3) $y'' + 2y' - 3y = x^2 + x$

Exercice 3 : (4 Pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et direct avec AB = AC = ℓ où $\ell > 0$
On note D la symétrie de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (Γ) le cercle de diamètre [CD]. On désigne par s la similitude qui transforme D en B et B en C. On se propose de déterminer les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1 - a) Déterminer le rapport k et l'angle de s (0,5 Pt)

b) En déduire l'existence de I (0,25 Pt)

2 - Démontrer que ($\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{IC}$) = $\frac{-\pi}{2}$ [2π] (1)

et que IC = 2 ID (2) (0,5 Pt)

3 - a) A l'aide de (1) démontrer que I appartient à (Γ) (0,5 Pt)

b) En utilisant (2), montrer que ID = ℓ (0,5 Pt)

c) Etablir enfin que BI = BC (1 Pt)

4 - a) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de [IC] (0,25 Pt)

b) Préciser la nature du quadrilatère CADI, puis placer I. (0,5 Pt)

Problème : (10 Pts)

A/ Etude de la fonction f qui à x associe f(x) = $\frac{x\ln x}{x+1}$ si x > 0 et f(0) = 0

a_1) Quel est le domaine de f ? (0,5 Pt)

a_2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (2 x 0,5 Pt)

a_3) Soit h la fonction définie pour x > 0 par h(x) = 1 + x + lnx

a_4) Prouver que l'équation h(x) = 0 a une solution unique b, et donner un encadrement de b au centimètre près. (0,5 Pt)

a_5) Pour x > 0, exprimer f'(x) à l'aide de h(x). (0,25 Pt)

B/ Etude de l'équation f(x) = 1 sur]0, + ∞[

On définit la fonction g sur les x > 0 par g(x) = $e^{\frac{x+1}{x}}$

b_1) Démontrer que l'équation f(x) = 1, donner une solution unique a, et que 3,5 ≤ a ≤ 3,7 (2 x 0,5 Pt)

b_2) Démontrer que f(x) = 1 équivalent à g(x) = x (0,5 Pt)

Etudier la monotonie de g. (0,5 Pt)

b_3) Démontrer que si K désigne l'intervalle [3,5 ; 3,7] alors g(K) $\subset$ K (0,5 Pt)

b_4) Démontrer que, pour tout x de K, on a $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$ (0,5 Pt)

b_5) En déduire que $\forall\ x \in K\ |g(x) - a| \leq \frac{1}{3}\ |x - a|$ (0,5 Pt)

b_6) Si on pose U_0 = 3,5 et, pour tout x entier naturel, $U_{n+1} = g(U_n)$, démontrer que (U_n) converge et trouver sa limite. (1 Pt)

b_7) Donner une valeur approchée de a au millimètre près. (0,5 Pt)

Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **2 h**
Prof: M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*27 min*) [**4pts**]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant (*On utilisera la méthode du pivot de Gauss*):

$$\begin{cases} 3x+5y+4z &= 1215 \\ x+y+z &= 300 \\ y-z &= 15 \end{cases}.$$

2pts

2. Un libraire affiche les prix par feuille suivants: Mathématiques: 25 francs; Physique: 20 francs et Anglais:15 francs. Un élève de la terminale D dépense au total 6075 francs pour acheter trois livres à savoir: un livre de mathématiques, un livre de physique et un livre d'anglais. Sachant que le livre de mathématiques a 15 feuilles de plus que le livre de physique et que la somme totale des feuilles constituant ces 3 livres est de 600 pages.

a. Déterminer le système qui traduit les contraintes de ce problème. 1.25pt

b. En déduire le nombre de feuilles de chaque livre. 0.75pt

Exercice 2 (*30 min*) [**5pts**]

1. Calculer les limites suivantes: 1pt × 3

a. $\lim\limits_{x\to -1} -\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x}}+x}$ c. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{2-\cos x}$

2. On considère la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}$.

a. Donner l'expression de $f(x)$ sans la valeur absolue. 1pt

b. Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$. 1pt

Problème (*60 min*) [**11points**]

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x^2+1+\dfrac{2}{x}$.

1. Dresser le tableau de variation de f. On précisera les limites aux bornes du domaine de définition. 2pts

2. Montrer que $f(x)\geqslant 0$ sur $]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$. 1pt

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $D_g =]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que g est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$. 1pt

b. Étudier alors les variations de la fonction g sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$. 2pts

2. a. Montrer que, pour tout $x < -1$: $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1} = -\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$. 0.5pt

b. En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1. 0.5pt

c. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1. 0.5pt

3. a. Montrer que, pour tout réel x de D_g : $g(x) - x = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x}}+x}$. 0.5pt

b. En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. 0.5pt

c. Montrer de même que la droite (Δ') d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$. 1pt

4. Construire dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$, les asymptotes (Δ), (Δ') et la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en -1. 1.5 pt

Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **4 h**
Prof: M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4points]

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par: $f(x) = \dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x distinct de $-\frac{1}{2}$, 1.5 pt

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. 1.25 pt

3. Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$. 1.25 pt

Exercice 2 [5points]

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$$\text{(E): } z^3 - (2+3i)z^2 + (4+6i)z - 8 = 0$$

a. Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule. 1pt

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. 1.5pt

c. Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que A, B et C appartiennent au cercle centré au point d'affixe $\frac{3}{2}$i. 1.5pt

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (2+3i)z^4 + (4+6i)z^2 - 8 = 0$. 1pt.

Problème [11points]

Partie A :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O; $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle. 1pt

2. Placer les points A, B et C dans le plan complexe. 0.75pt

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. 0.5pt

4. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

a. i. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′. 0.75pt

ii. Placer les points A′, B′ et C′ dans le plan complexe. 0.5pt

iii. Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.1pt

b. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par f.

i. Déterminer les affixes des points G et G′. 0.5pt

ii. Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ? 0.25pt

Partie B :

1. Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. 2.5 pts

b. i. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.25 pt
On note α cette solution.

ii. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. 0.5 pt

c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x. 0.5 pt

d. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$. 0.25 pt

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$. 0.5 pt

b. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.25 pt

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Montrer que la distance AM est donnée par $\mathrm{A}M = \sqrt{f(x)}$. 0.5 pt

b. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

i. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.5 pt

ii. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées. 0.5 pt

iii. Montrer que $\mathrm{AP} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$. 0.5 pt

Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **2 h**
Prof: M. Loumsia Yonga Albert

SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2011

Ce sujet comporte deux pages. La page 2 comportant le Q.C.M. ainsi que le repère où tracer la courbe pour l'exercice 1 est à rendre avec votre copie, n'oubliez pas d'y apposer votre nom.

Exercice n° 1 (*7 points*)

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ fourni en page 3.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Dresser le tableau de variations de f.

5. Déterminer l'équation cartésienne réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A de la courbe d'abscisse 0.

6. Dans cette question, on étudie les positions relatives de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (T). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\varphi(x) = f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$

a. Démontrer que pour tout réel x, on a: $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^2$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\varphi(0)$

c. Conclure en ce qui concerne les positions relatives de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (T).

7. Tracer la tangente (T), la courbe $(\mathcal{C})$, et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ fourni en page 2.

8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ On note $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a. Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C})$?

b. Démontrer que g est impaire. Quelle propriété géométrique peut on en déduire concernant la courbe $(\mathcal{C}_g)$?

c. Quel rôle joue le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pour la courbe $(\mathcal{C})$? Expliquer.

Exercice n° 2 (*6 points*)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 7 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}\,, \\ u_{n+1} &= u_n + 2n - 5. \end{cases}$$

1. Vérifier les égalités $u_1 = 2$ et $u_2 = -1$.

2. Justifier que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.

3. Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = n^2 - 6n + 7.$$

Noms et Prénom:

Exercice n° 3 — Q.C.M. (*7 points*)

Ceci est un Q.C.M. Chaque question vaut 1 point, il peut y avoir plusieurs réponses correctes à chaque question. Vous devez cocher toutes les réponses valables (et elles seules) pour obtenir le maximum de points.

1. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1+\mathrm{i}|=2$ est:

☐ un cercle de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$. ☐ un cercle de rayon $\sqrt{2}$. ☐ un cercle de centre Ω d'affixe $1-\mathrm{i}$. ☐ un cercle de rayon 2.

2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z)\times\mathrm{Im}(z)=0$ est:

☐ la réunion de deux droites. ☐ l'origine du repère. ☐ une demie droite. ☐ l'axe des réels.

3. L'équation $z^2+z\bar{z}=0$ a pour nombre de solutions dans $\mathbb{C}$:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ une infinité

4. Cocher les nombres complexes solutions de l'équation: $z^2+\mathrm{i}\bar{z}=0$

☐ 1+i ☐ i ☐ −i ☐ 0

5. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x)^2}$. Alors on a aussi:

☐ $Q(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ ☐ $Q(x)=\mathrm{e}^{2x}$ ☐ $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{4x}}$ ☐ $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x}$

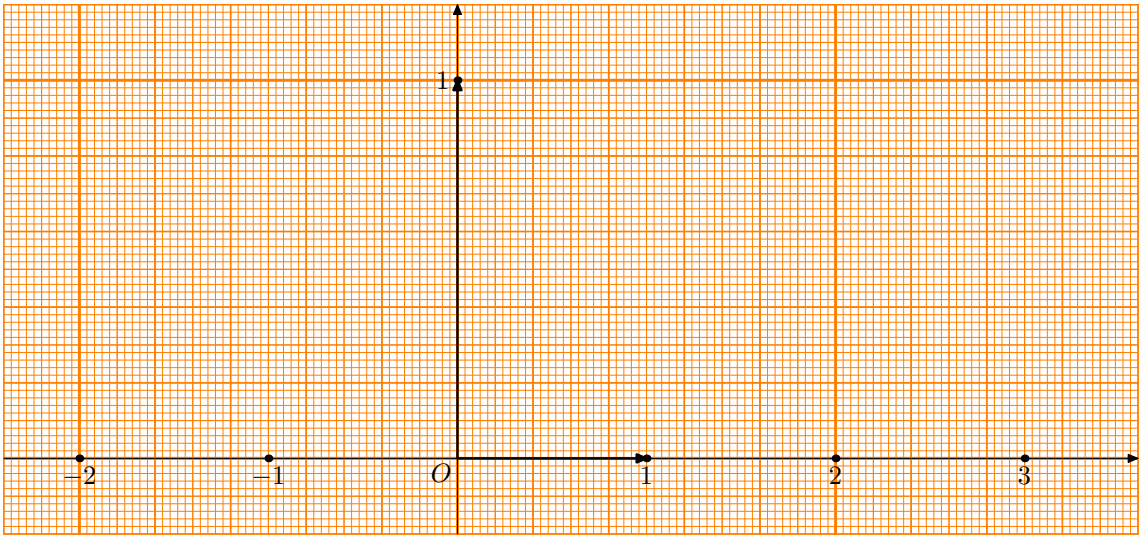
6. On considère pour x dans $\mathbb{R}$, l'équation (E): $\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^x=0$

☐ (E) n'a pas de solution. ☐ $x=1$ est solution de (E). ☐ (E) a deux solutions. ☐ (E) a les mêmes solutions que: $x^2=x$.

7. Une primitive sur $]-\infty;2[$ de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$ est:

☐ $F(x)=1-\ln(2-x)$; ☐ $F(x)=3\ln|2-x|$; ☐ $F(x)=\frac{1}{3}\ln|2-x|+c$; ☐ $F(x)=1-3\ln(2-x)$.

Repère pour l'exercice 1.



Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **4 h**
Prof: M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°4 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / FÉVRIER 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [3points]

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E). 0,5 pt

2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E′). 0,5 pt

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′). 1 pt

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E). 0,5 pt

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$. 0,5 pt

Exercice 2 [6,5points]

1. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par: $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. 1pt

2. Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

a. Représenter sur l'axe des abscisses les termes: u_1, u_2 et u_3. 1pt

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5pt

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < 2$ 1pt

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,5pt

3. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-2u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5pt

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0,5pt

c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 1pt

Problème [10,5points]

Partie A :

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 1 + x\ln x$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. 0,5pt

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\,;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$, on a $f(x) \leqslant 1$. 0.5pt

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$. 0.5pt

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. 0.5pt

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$ par $g(x) = 1 + x\ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et dresser le tableau de variation de g.2pts
On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T. 0.5pt

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\ \mathrm{d}x$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$. 1pt

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$. 0.5pt

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent. 0.5pt

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées. 1pt

Partie B :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E):$y' + m^2y = 0$ $(m \in \mathbb{R}^*)$, $y(0) = 40$. 0,5pt

2. **Applications**

Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est $30^\circ C$. A chaque instant t, on pose: $x(t) = \theta(t) - 30$.

On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie: $x' = -m^2x$ $(m \in \mathbb{R}^*)$.

A l'instant 0 la température du corps est $70^\circ C$ et au bout de 5 minutes elle n'est plus que $60^\circ C$.

a. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes. 1.5pt

b. A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes? 1pt

Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél : 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire 2009-2010
Classe : T^leD Coef : 4 Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

Baccalauréat Blanc n°2/ Épreuve de Mathématiques/ Mars 2009

L'épreuve comporte 3 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [2.5 points]

Soit s la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$ du plan complexe associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ du plan complexe tel que : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$

1. Déterminer l'expression de z' en fonction de z. 1pt
2. Donner les éléments caractéristiques de s. 0.25pt×3
3. Soit $(\mathcal{E})$ le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 5.Déterminer$(\mathcal{E}')$ l'image de $(\mathcal{E})$ par s. 0.75pt

Exercice 2 [2.5 points]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :$y' + m^2 y = 0$ $(m \in \mathbb{R}^*)$, $y(0) = 40$. 0.5pt
2. **Applications**

   Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est $30^\circ C$. A chaque instant t, on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$.

   On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie : $x' = -m^2 x$ $(m \in \mathbb{R}^*)$.

   A l'instant 0 la température du corps est $70^\circ C$ et au bout de 5 minutes elle n'est plus que $60^\circ C$.

   a. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes. 1.5pt

   b. A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes ? 0.5pt

Exercice 3 [4 points]

1. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.

   a. Étudier le sens de variation de g dans l'intervalle $[1\,;\,2]$. 1pt

   b. Montrer que $\forall x \in [1;2]$, on a : $1 \leqslant g(x) \leqslant 2.5$. 0.5pt

   c. En déduire un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$. 1pt
2. Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses.

   A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1 et en déduire un encadrement de A_2. 1.5pt

Problème [11points]

Partie A :

1. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. 1pt

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

a. Représenter les termes : u_1 ; u_2 et u_3 dans le repère orthonormé (O; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$). 0.75pt

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0.5pt

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < 2$ 0.5pt

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0.5pt

3. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1 + u_n}{2 - 2u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0.5pt

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0.5pt

c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0.5pt

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0.75pt

Partie B :

f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unités sur les axes : 2cm.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1.5pt

2. a. Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1} = \dfrac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. 0.5pt

b. Montrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ d'équations respectives : $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C_f). 1pt

c. Tracer les droites $(\mathscr{D})$; $(\mathscr{D}')$ et la courbe (C_f) dans le même repère orthonormé. 0.5pt

3. a. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une réciproque f^{-1} dont on donnera le tableau de variation. 1pt

b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C_f). 1pt

COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / 25 Avril 2007

T^le C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair.

Exercice 1 : 2,5 points

1. a) déterminer les entiers x et y tels que $14x - 31y = 3$ 1 pt
   b) Déterminer deux couples d'entiers premiers entre eux solutions de l'équation : (E) : $14x - 31y = 3$ 0,5 pt
2. Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? 1 pt

Exercice 2 : 2,5 points

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche 0,5 pt
   b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages. 0,5 pt
2. n étant un nombre entier naturel non nul, on effectue n tirages successifs d'une boules avec remise ; on appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours des ces n tirages une boules blanche uniquement au dernier tirage.
   a) Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_4 1 pt
   b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$
   Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer la limite de S_n 0,5 pt

Exercice 2 : 4 points

ABC est un triangle indirect rectangle en A tel que BC = 2AB et S la similitude directe du plan orienté, de centre B qui transforme C en A.

1. Préciser le rapport et une mesure de l'angle de S. 0,5 pt
2. Soit (H) l'ensemble des points M du plan vérifiant MB = 2d(M, (AC))
   a) Donner la nature de (H) et préciser ses éléments remarquables 0,75 pt
   b) Donner la nature puis le foyer et l'excentricité de l'image S(H) de (H) par S
3. Application : A, B et C ont pour affixe respectives 1 + 2i , 1 +5i et 7 + 2i 0,75 pt
   a) Donner la forme complexe de S 0,5 pt
   b) Ecrire une équation cartésienne de (H) 0,75 pt
   c) Construire (H) dans un repère orthonormé du plan complexe 0,75 pt

Problème 11 points

I.

On note f_n la fonction numérique définie sur IR - $\{-1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$; $n \in IN^*$.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1. Etudier les limites de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et -1 (on tiendra compte de la parité de n pour la limite en -1) — 1 pt
2. Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et étudier, suivant la parité de n, le signe de $f'_n(x)$ — 2 pts
   Dresser le tableau des variations de f_n — 1 pt
3. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point — 0,5 pt
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. — 0,75 pt
5. a) Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} — 0,5 pt

   b) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) — 0,5 pt
   Représenter graphiquement (C_1) et (C_2) — 1,5 pt

II.

Pour tout $n \in IN^*$, on définit la suite (U_n) par $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout $n \in IN^*$, on a : $U_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ? — 1,25 pt
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $\frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}}) \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$ — 0,75 pt
   En déduire la limite de la suite (U_n) — 0,25 pt
2. Etablir une relation entre U_n et U_{n+1}
   (On pourra utiliser le résultat de la question I.5.a) — 0,5 pt
   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{(x+1)^{n+1}} = 1$ — 0,5 pt

COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / Devoir surveillé

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 : 4 Points

On considère dans ℂ l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^5 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$
où a et b sont deux nombres réels

1- Démontrer que si z_0 est une solution de (E), $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont également des solutions de (E)

2- Déterminer a et b sachant que 1 + i est une solution de (E).
3- En déduire trois autres solutions de (E)
4- Achever la résolution de l'équation (E).

EXERCICE 2 : 5 Points

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice unité I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $A^{2n} = 2^n \times I$
2- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit : $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

a) Calculer A^7.
b) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

3- E est un plan vectoriel dont une base est B$\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$; f une endomorphisme de F dont la matrice relative à la base B est A.

a. Démontrer que f est bijectif et déterminer la matrice de sa bijection réciproque f^{-1} dans l a base B.
b. Soit α un nombre réel.
Montrer que s'il existe un vecteur non nul u tel que f(u) = αu, alors α = 2 ou α = -2
c. Déterminer deux vecteurs non nuls u_1 et u_2 tels que $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = -2u_2$
d. Démontrer que $B^2 = (u_1 , u_2)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 3 : 3 Points

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.

1. Soit k un entier naturel, $3 \leq k \leq n$. Déterminer la probabilité des événements suivants :
A_k : « Les trois boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k »
B_k : « Le plus grand numéro figurant sur les trois boules tirées est k ».
2. On place les n boules au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n : chaque boîte pouvant contenir toutes ces boules. On appelle P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   a. Démontrer que $P_n = \frac{n!}{n^n}$
   b. Soit x un nombre réel positif, démontrer que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
   c. En déduire que pour tout n, $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$
   d. Démontrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 : 8 Points

1. On considère les fonctions f définies de]0 ; $+\infty$[vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
   (1) : f est deux fois dérivables et $x^2f''(x) - 2f(x) = 0$ pour $x > 0$.
   a. Soit f une fonction définie sur]0 ; $+\infty$[et la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$
      Montrer que f vérifie les conditions (1) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$
   b. Trouver toutes les fonction f de]0 ; $+\infty$[qui vérifient les conditions (1)
   c. Trouver les fonctions f vérifiant les conditions (1) et qui se prolongent par continuité en 0

2. Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
   a. Calculer I_0 et I_1
   b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (2)
   c. En déduire I_2, I_3
   d. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}$
   e. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}$
   f. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante
   g. A l'aide de (2), établir que pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$
   h. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$
   i. Soit $W_n = \left(\frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1}$ pour $n \geq 1$, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$

LYCEE E DE NDOM **ANNEE SCOLAIRE 2010/2011,**

DEPARTEMENT DE MATHS **BAC « C », Durée : 3hrs,Coef :6**

DEVOIR COMPTANT POUR LA SEQUENCE N° 1

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte quatre exercices. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction, le soin apporté au tracé des figures sera pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice1 : (4,5 Points)

1. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7. En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Soit *p* un entier et le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$. Déterminer suivant que *p* = 3*n*, 3*n*+1 ou 3*n*+2 la divisibilité de A_p par 7.

Exercice 2 (5points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue *z* : $z^2+8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points *A* et *B* qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=-4\sqrt{3}-4i$ et $b=-4\sqrt{3}+4i$.

Calculer les distances *OA*, *OB* et *AB*. En déduire la nature du triangle *OAB*.

3. On désigne par *C* le point d'affixe $c=\sqrt{3}-i$ et par *D* son image par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe *d* du point *D*.

4. On appelle *G* le barycentre des points pondérés (*O* ; −1), (*D* ; 1) et (B ; 1).

a. Montrer que le point *G* a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points *A*, *B*, *C*, *D* et *G* sur une figure (unité graphique : 1 cm).

c. Démontrer que le quadrilatère *OBGD* est un parallélogramme.

Exercice 3 : 5points

A.a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3$ [7], dont l'inconnue *x* est un entier relatif, n'a pas de solution.
B). Montrer la propriété suivante :
Pour tous entiers relatifs *a* et *b*, si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise *a* et 7 divise *b* (vous pourrez utiliser un tableau des restes modulo 7)
B- Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1,5 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,75 *point. Une absence de réponse est*

comptée 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$x^2 - x + 4 \equiv 0$ *(modulo 6).*

a : toutes les solutions sont des entiers pairs.
b : il n'y a aucune solution.
c : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6).
d : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6) ou $x \equiv 5$ (modulo 6).

2. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :
a : $n \equiv 4$ (modulo 17) et $p \equiv 0$ (modulo 17).
b : p est un nombre premier.
c : $p \equiv 4$ (modulo 17).
d : $p \equiv 1$ (modulo 17).

Exercice 4 (5points)

1. On considère dans l'équation d'inconnue Z : (E) $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$

a. Vérifier que 8 est solution de cette équation. Déterminer les nombres réels α , β , γ tels que, pour tout complexe Z, $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$.

b. Résoudre l'équation (E).

2. $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm. On considère les points *A*, *B*, *C* d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}, b = 2 + 2i\sqrt{3}, c = 8$.

a. Calculer le module de *a* (noté $|a|$) et son argument θ. Placer les trois points *A*, *B* et *C*.

b. Calculer le complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument θ. En déduire la nature du triangle *ABC*.

GOOD LUCK

MOUALEU DANY PASCAL

PLEG MATHS

MINESEC **Année scolaire : 2015-2016**
Lycée de Nkolnda–Nsimalen **Classe : T^{le} C Durée : 4 heures**
Département de Mathématiques **Séquence I Date : 15/10/ 2015**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I : Raisonnement par récurrence **3 Points**

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $3^n + 4 \times 2^{3n}$ est un multiple de 5. **0,5 pt**

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. **0,5 pt**
En déduire la valeur exacte de la somme $R = 23^3 + 24^3 + 25^3 + \cdots + 65^3$. **0,5 pt**

3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 3x$.

a. Calculer $f'(x)$ et $f^{(2)}(x)$. **0,5 pt**

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $f^{(n)}(x) = (-3)^n \sin\left(3x - n\dfrac{\pi}{2}\right)$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de f. **1 pt**

EXERCICE II : Primitives et intégrales **4 points**

1. Déterminer l'ensemble des primitives de fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants : **1 pt**
$a) -\ f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2+2x}},\ I =]0;+\infty[\ ; \quad b) -\ f :\ x \longmapsto 2(1-4\cos x)(3+2\sin x),\ I =]0;+\infty[$

2. Calculer les intégrales suivantes : **1,5 pt**
$A = \displaystyle\int_3^{-1} \left(-3|-2x+4|^3 + x - 3\right) dx; \qquad B = \int_4^{-1} \frac{t^2}{\sqrt{3t+4}} dt; \qquad C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (x^2+x)\cos x dx.$

3. On considère les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(a^2 + \frac{\pi}{2}a\right)\cos^2 3a da$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(a^2 + \frac{\pi}{2}a\right)\sin^2 3a da$.

a. Calculer les intégrales $I + J$ et $I - J$. **1 pt**

b. En déduire les valeurs exactes de I et J. **0,5 pt**

EXERCICE III ; Barycentre et lignes de niveaux **3 points**

ABC est un triangle équilatéral de sens direct tel que : AB = 4 cm. O désigne son centre de gravité.
On pose $h(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ et $g(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $h(M) = 32$. **1 pt**

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que : $g(M) = 0$. **1 pt**

3. Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$. **1 pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

PROBLEME **10 Points**

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Suites et intégrales **3,5 Points**

Soit $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J(a\ ,\ n) = \int_0^1 x^a(1-x)^n dx$; $a \in \mathbb{N}^*$ et $J(a\ ,\ 0) = \int_0^1 x^a dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $J(a+1\ ,\ n) = \dfrac{a+1}{n+1} J(a\ ,\ n+1)$. **0,75 pt**

2. Montrer que $J(a\ ,\ n) - J(a\ ,\ n+1) = J(a+1\ ,\ n)$. **0,5 pt**

En déduire que $J(a\ ,\ n+1) = \dfrac{n+1}{n+a+2} J(a\ ,\ n)$. **0,75 pt**

3. a étant fixé ($a \in \mathbb{N}^*$), calculer $J(a\ ,\ 0)$ **0,5 pt**

puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $J(a\ ,\ n) = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}$. **1 pt**

Partie B : Suites numeriques **3 points**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 \in [-1;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-U_n}{2}}$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in [-1;1]$. **0,5 pt**

b. Déterminer U_0 pour que (U_n) soit constante. **0,5 pt**

2. Dans la suite, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $U_n = \sin \alpha_n$.

a. Que devient dire de la suite (U_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?. **0,25 pt**

b. Montrer que pour tout $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **0,25 pt**

c. Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n. **0,5 pt**

d. On pose : $\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (β_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. **0,5pt**

e. En déduire α_n puis U_n en fonction de n et α_0. Justifier que la suite (U_n) est convergente puis calculer sa limite. **0,5 pt**

Partie C : Géométrie de l'espace **3,5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$ et $C(3;2;6)$. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; 1 ; 1) et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; −2 ; 2).

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées. **0,75 pt**

2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5 pt**

3. Déterminer l'aire en unité d'aire du triangle ABC. **0,5 pt**

4. Soit H le projeté orthogonal du point F(2 ; 4 ; 4) sur le plan (ABC).

a. Déterminer les coordonnées de H. **0,75 pt**

b. Calculer le volume du tétraèdre FABC. **0,5 pt**

5. Déterminer l'ensemble $(\sum)$ des points M de l'espace tel que : $\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. **0,5 pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

MINESEC **Année scolaire : 2015-2016**
Lycée de Nkolnda–Nsimalen **Classe : T^{le} C** **Durée : 4 heures**
Département de Mathématiques **Séquence II** **Date : 17/11/ 2015**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I : Barycentres **3 Points**

ABC est un triangle dont les 3 angles sont aigus. On appelle A_0; B_0; C_0 les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C, H l'orthocentre du triangle. On pose : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Montrer que A_0 est le barycentre de $(B; b\cos\widehat{C})$ et $(C; c\cos\widehat{B})$. **0,75 pt**

2. En déduire que A_0 est le barycentre de $(B; \tan\widehat{B})$ et $(C; \tan\widehat{C})$. **0,75 pt**

3. Montrer que le barycentre de $(A; \tan\widehat{A})$, $(B; \tan\widehat{B})$, $(C; \tan\widehat{C})$ est le point H. **0,5 pt**

4. On suppose que le triangle n'est pas isocèle. Les droites (BC) et (B_0C_0) se coupent en A_1. On définit de même B_1 et C_1.

a. Montrer que le barycentre de $(B; \tan\widehat{B})$ et $(C; -\tan\widehat{C})$ est A_1. **0,5 pt**

b. Montrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés. **0,5 pt**

EXERCICE II : Isométries planes **4 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O. On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO). **0,25 pt**

b. En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que : $R_A \circ R_B = S_O$. **0,5 pt**

2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$. **0,5 pt**

b. En déduire que O est le milieu du segment [EG]. **0,5 pt**

c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.
Déterminer l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. **0,5 pt**
Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. **0,5 pt**

d. Placer H le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $R_F(H) = D$ et que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O. **1,25 pt**

EXERCICE III ; Suites numériques et intégrales **3,5 points**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On rappelle que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$ **0,75 pt**

2. En déduire à l'aide d'une intégration que, pour tout entier naturel n,

$$U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx.$$ **0,75 pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

3. Montrer que, pour tout entier $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$. **0,75 pt**

Puis montrer que : $\left|U_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \leq \dfrac{1}{2n+3}$. **0,75 pt**

4. Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite. **0,5 pt**

PROBLEME **9,5 Points**

Le problème comporte trois parties. Les parties B et C sont dépendantes.

Partie A : Application affine du plan **2,5 Points**

Le plan est muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}; 0\right)$, Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{8}; 0\right)$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \left(\overrightarrow{\Omega M}.\vec{u}\right)\vec{u} + \overrightarrow{\Omega M}$.

1. Donner l'expression analytique de f. Puis en déduire que f est une application affine. **0,75pt**

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5pt**

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera. **0,5pt**

4. Montrer que f est une affinité que l'on caractérisera. **0,75pt**

Partie B : Géométrie de l'espace **3,25 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. **0,5pt**

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5pt**

2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$. **0,5pt**

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan (ABC). **0,5pt**

c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC). Puis le volume du tétraède $ABCD$. **0,75pt**

3. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan (ABC). **0,5pt**

Partie C : Application affine de l'espace **3,75 points**

On considère l'application f de l'espace dans lui même qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que : $x' = \dfrac{1}{15}\left(13x+5y-z+7\right)$, $y' = \dfrac{1}{6}\left(2x+y+z-7\right)$ et $z' = \dfrac{1}{30}\left(-2x+5y+29z+7\right)$.

1. Déterminer l'ensemble $(\triangle)$ des points invariants par f. **0,5 pt**

2. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son image par f.

a. Montrer que la droite (MM') a une direction fixe que l'on précisera. **0,5 pt**

b. Montrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à l'ensemble $(\triangle)$. **0,5pt**

3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,5pt**

4. Soit (P) le plan d'équation : $x+y+3z+4=0$.

a. Montrer que le plan (P) est perpendiculaire au plan (ABC). **0,25 pt**

b. En déduire la nature et l'élément caractéristiques de l'application $g = S_{(P)} \circ f$. **0,75pt**

c. Déterminer l'expresssion analytique de l'application g. **0,75pt**

EASY-MATHS PARTNERSHIP

Lycée Classique d'Edéa
Département de Mathématiques — Année scolaire : 2009/2010

Classe : $Tle\mathbf{D}$ Durée : 4h ; coef : 6
samedi, 28 novembre 2009
Epreuve de Mathématiques. 2^e séquence
Examinateur : **Ngankou S. O**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires. Le candidat devra justifier autant que possible ses affirmations. Les calculatrices électroniques sont autorisées.

Exercice 1. *Récurences ,linéarisation et formule de Moivre[3pts]*

1. Démontrer par récurrence que ,pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. [1pt]
   <u>NB</u> :$\sin^{(1)}(x) = (\sin(x))'$;$\sin^{(2)}(x) = (\sin^1(x))'$;$\sin^{(n)}(x) = (\sin^{(n-1)}(x))'$.
2. Linéariser $\cos^4 x \sin^2 x$. [1pt]
3. (a) Ecrire $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. [0.5pt]
   (b) Déduire l'écriture de $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$. [0.5pts]

Exercice 2. *Limites , continuité et dérivabilité [6pts]*

1. Calculer les limites suivantes : [1.5pt]
   (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}$; (ii) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}$; (iii) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x}$.
2. Déduire de la question $1(iii)$ que la fonction $g(x) = \frac{\sin 3x}{2x}$ admet un prolongement par continuité en 0 et définir ce prolongement. [0.5pt]
   Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{1-|x+1|}$.
3. (a) Ecrire f sans valeur absolue et donner le domaine de définition de f. [1pt]
   (b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$. [1pt]
   (c) Que peut-on dire de la continuité de f en -1 et en -2 ? Justifier vos réponses. [1pt]
4. Etudier la dérivabilité de f en -1 et écrire lorsqu'elles existent, les équations des démi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1. [1pt]

Problème 1. *Nombres complexes et géométrie [11pts]*

Le problème comporte deux parties indépendantes.Dans chacune des parties le plan est rapporté à un repère orthonormé directe $(o, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$

PARTIE A [4.5pts]
On donne les nombres complexes : $u = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $w = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

1. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes u, v, w, uv. [1pt]
2. (a) Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques de w. [0.75pt]
   (b) Que représente v et uv pour w ? [0.25pt]

3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe uv et en déduire les valeur exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$. [1pt]
4. On considère les points V et K d'affixes respectives v et uv l'application f du plan dans lui même qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$
   (a) Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. [0.5pt]
   (b) Que représente le point K pour le point V ? [0.5pt]
   (c) Placer les points V et K dans le repère. [0.5pt]

PARTIE B [6.5pts]

θ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert :$]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation (E) d'inconnue z :(E) $z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [0.75pt]
   On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 + i\tan\theta$ et $z_2 = 1 - i\tan\theta$.
2. (a) Ecrire z_2 en fonction de z_1. [0,25pt]
   (b) Déterminer $z_1 + z_2$ et exprimer $z_1^2 + z_2^2$ et $z_1 z_2$ en fonction de θ. [0,75pt]
   (c) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $z_1^2 + z_2^2 = 0$? [0.25pt]
   (d) Calculer le module de z_1 en fonction de $\tan\theta$ puis en fonction de $\cos\theta$. [0.75pt]
   (e) Montrer qu'un argument de z_1 est θ. [0.5pt]
   (f) En déduire qu'un argument de z_2 est $-\theta$. [0.25pt]
3. On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
   (a) Déterminer un argument α de $\frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
   (b) Donner une interprétaion géométrique de :$\arg\frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
   (c) Quelle est la nature du triangle OAB ? [0,5pt]
   (d) Pour quelle(s) valeur(s)de θ ,OAB est un triangle équilateral ? [0.5pt]
4. On suppose que $\theta = \frac{-\pi}{4}$.
   (a) Montrer que : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$ [0.25pt]
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 1 + i| = 2$. [0.5pt]
   (c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq 1 + i$) tel que : $\frac{z-1+i}{z-1-i}$ soit un nombre réel. [0.75pt]

MINESEC - OBC

Session 1999

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXAMEN : BACCALAURÉAT D

Durée : 3 H
Coefficient : 4

Exercice 1 / 04,5 points

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $Z^2 + 2iz - 5 = 0$ 1 pt
   On note z_1 la solution de (E) dont la partie réelle est strictement négative et z_2 l'autre solution. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2)
   b. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $(2\sqrt{3}-1)i$, z_1 et z_2 0,5 pt
2. a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. 0,5 pt
   b. Construire le point G, isobarycentre des points A, B et C ; puis calculer AG. 1 pt
3. Déterminer puis tracer l'ensemble des points du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32$ 1,5 pt

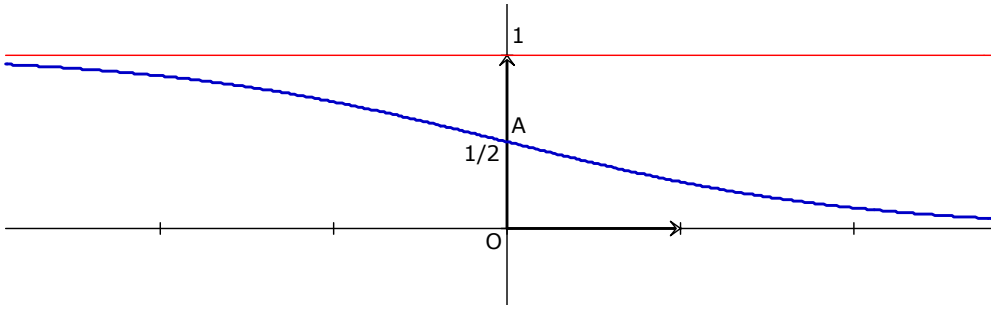
Exercice 2 / 06,5 points

Un joueur de basket-ball est amené à réaliser trois lancers consécutifs de balle dans le panier de l'équipe adverse. On note P_1, P_2 et P_3 les probabilités de réussir le lancer respectivement au premier, deuxième et troisième lancer. On admet que $P_1 = 0,4$; $P_2 = 0,5$ et $P_3 = 0,7$.

1. Calculer la probabilité pour que le joueur ait réussi un seul lancer parmi les trois. 2 pts
2. Calculer la probabilité pour que le joueur ait réussir au moins un lancer parmi les trois. 2,5 pts

Problème / 11 points

La représentation graphique ci-dessous est la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On précise de plus que le point A (0 ; 1/2) appartient à (C) (l'unité de longueur sur les axes est égale à deux centimètres).



Partie A

1. En utilisant la représentation graphique de f et les informations données ci-dessus :
   a. Dresser le tableau de variation de f. 1 pt
   b. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]0 ; 1[$ 1 pt
2. On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f.
   a. Dresser le tableau de variation de f^{-1}. 1 pt
   b. Tracer la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé (on précisera deux centimètres comme unité de longueur sur les axes).

3. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{1+e^x}$
   a. Calculer a. 0,5 pt
   b. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ 0,25 pt
   c. Soit un nombre réel strictement positif et (D) le domaine plan délimité par la droite d'équation x = , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C) de f.
   Évaluer en centimètres carrés de (D) en fonction de .
   Calculer la limite de cette aire lorsque tend vers plus infini. 1,25 pt

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^1 f(t)\,dt$ et pour tout n différent de 0

$u_n = \int_0^1 f(t)e^{nt}dt$

1. Calculer u_1 puis $u_n + u_{n+1}$ en fonction de n ; en déduire u_2 et u_3 1,25 pt
2. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0, 1],
   a. $e^{(n+1)x} \leq e^{nx}$ 0,5 pt
   b. $1/4 \leq f(x) \leq 1/2$ 0,75 pt
3. Déduire des questions précédentes le sens de variation et un encadrement de la suite (u_n) 1,5 pt
4. Calculer la limite de (u_n) 1 pt

MINEDUC - OBC

SESSION 2001

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
Les pages sont numérotées de 1 à 2

Exercice 1 : 3,5 points

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R\left(O , \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

1. a) Développer, réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de z l'expression : $(z + 2)(z^2 - 6z + 34)$ 0,5 pt

   b) Soit (E) l'équation $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$
   Démontrer que (E) admet un entier comme solution 0,5 pt

   c) Résoudre (E) dans l'ensemble C des nombres complexes. 1 pt

2. A, B et C désignent trois points de (P) d'affixes respectives -2 ; 3+5i ; 3-5i .
   La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K

   a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse 0,75 pt

   b) R désigne la rotation du plan telle que R(K) = K et R(B) = A
   Préciser la mesure principale de l'angle de R 0,75 pt

Exercice 2 : 5,5 points

Un collège bilingue de 930 élèves comporte une section anglophone et une section francophone.

30% des élèves sont en section anglophone ;

40% des élèves du collège sont des garçons ;

25% des élèves garçons du collège sont en section anglophone.

1. Recopier et compléter le tableau suivant : 1,5 pt

Catégorie d'élèves	**Nombre**
Elève en section anglophone	
Elève en section francophone	
Elève garçon en section anglophone	
Elève fille du collège	

2. On choisit au hasard un élève du collège, on suppose que tous les choix d'un élève sont équiprobable. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A « choisir un élève de la section anglophone » 1 pt

b) B « Choisir un garçon sachant qu'il est un élève de la section anglophone » 1,5 pt

c) C « choisir un élève de la section anglophone sachant qu'il est un garçon » 1,5 pt

Problème : 11 points

Dans tout ce problème on note :
- f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $f(x) = (x - 2)e^x + x$;
- (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur sur les axes 1 cm).
- Enfin, g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

le problème comporte trois parties liées A, B et C

Partie A

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt
2. calculer le dérivée de g et dresser le tableau de variation de g. 0,75 pt
3. En déduire le signe de g(x) sur IR. 0,25 pt

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ 0,25 pt
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$
   Etudier la position de (C) par rapport à (D) 1 pt
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$ 0,25 pt
   b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$;
   Interpréter graphiquement ce résultat. 0,75 pt
3. Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f 0,75 pt
4. a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α 0,5 pt
   b) Calculer les valeurs exactes, puis les troncatures à trois décimales de f(1,68) et f(1,7)
   En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut 1 pt
5. tracer (C). 1 pt

Partie C

t désigne un nombre réel négatif.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_t^0 (x - 2)e^x dx$ 0,5 pt
2. Calculer en centimètres carrés l'aire A(t) de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = t$; $x = 0$; $y = x$ et la courbe (C) 0,5 pt
3. Calculer la limite en $-\infty$ de A(t) 0,5 pt
4. On considère les équations différentielles suivantes :
   (E) : $y'' - 2y' + y = x - 2$; (E') : $y'' - 2y' + y = 0$
   a) Trouver une fonction affine h qui soit solution de (E) 0,5 pt
   b) Soit g au moins deux fois dérivable.
   Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E') 0,5 pt
   c) Résoudre (E') 0,5 pt
   d) En déduire les solutions de (E) et vérifier que la fonction f de la partie A est une solution de (E) 1 pt

MINEDUC - OBC

SESSION 2002

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

Exercice 1 : 4,5 points

On considère les nombres complexes $z_1 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1. a) Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes z_1 , z_2 et $z = \frac{z_1}{z_2}$ 1,5 pt

   b) Démontrer que, pour tout n de IN, z^{12n} est un réel 0,5 pt

2. a) Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$ 0,5 pt

   b) En déduire les valeurs exactes des $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ 1 pt

3. On considère l'équation dans IR d'inconnue t : $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos t + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin t = 2\sqrt{2}$.

   Résoudre cette équation dans $]-\pi\ ;\pi]$ 1 pt

Exercice 2 : 4,5 points

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 35 élèves d'une classe de terminale D selon leurs âges en années.

Âges	17	18	19	20
Nombre d'élèves	3	12	18	2

1. Représenter la série statistique ainsi obtenue par un diagramme circulaire. 1 pt
2. Calculer la moyenne des âges des élèves de la classe,

   (on arrondira le résultat à l'unité la plus proche). 0,5 pt
3. On représente le nom de chacun des élèves par un numéro de 1 à 35. On inscrit les 35 numéros sur des jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac.

   On tire successivement trois jetons en remettant chaque fois le jeton tiré dans le sac.

   Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves âgés de 19 ans.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X 2 pts

   b) Calculer l'espérance mathématique ainsi que l'écart-type de X 1 pt

Problème : 11 points

le problème comporte trois parties obligatoires A, B et C, elles sont dépendantes

On considère la fonction f de la variable réelle non nulle x telle que, $f(x) = \frac{x^2 + 7}{2x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra 1 cm comme unité de longueur sur les axes).

Partie A : Etude des variations de f et tracé de (C)

1. a) Vérifier que la fonction f est impaire. 0,5 pt
   b) Dresser le tableau de variation de f dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. 1,5 pt
2. a) Vérifier que (C) admet une asymptote verticale et une asymptote oblique que l'on notera (Δ). 0,75 pt
   b) Préciser, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, la position de (C) par rapport à (Δ). 0,5 pt
3. Tracer (C) après avoir précisé son centre de symétrie. 1,5 pt

Partie B : Calcul d'aire

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda \leq 1$.

On note (D) la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$, la droite (Δ) et la courbe (C).

On note aussi a_λ l'aire de (D) en cm² et en fonction de λ.

1. a) Calculer la valeur exacte de a_λ 0,75 pt
   b) Déterminer la limite de a_λ lorsque λ tend vers 0 à droite. 0,5 pt
2. On note λ_0 la valeur de λ telle que l'on ait $a_\lambda = \frac{7}{2}$.
   a) Calculer λ_0 0,75 pt
   b) Sachant que $2,718 < e < 2,719$, en déduire une valeur approchée de λ_0 et en indiquer la précision. 0,5 pt

Partie C : Etude d'une suite convergente liée à la fonction f

Dans cette partie, on considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1. a) Utiliser (C) pour représenter les trois premiers termes de la suite (U_n). 0,75 pt
   b) Faire une conjecture sur le sens de variation de (U_n). 0,5 pt
2. *Les démonstrations de cette question se feront par récurrence sur n, on pourra utiliser les propriétés de la fonction f.*
   a) Démontrer que la suite (U_n) est à termes strictement positifs 0,5 pt
   b) Démontrer que la suite (U_n) est minorée par $\sqrt{7}$ 0,75 pt
   c) Démontrer la conjecture de 1.b) 0,75 pt
3. Déterminer la limite de (U_n) en précisant votre démarche. 0,5 pt

MINEDUC - OBC

SESSION 2003

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat

Exercice 1 : 4,25 points

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R\left(O , \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

1. a) Développer, réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de z
   l'expression : $(z + 2)(z^2 - 6z + 34)$ 0,5 pt
   b) Soit (E) l'équation $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$
   Démontrer que (E) admet un entier comme solution 1 pt
   c) Résoudre (E) dans l'ensemble C des nombres complexes. 1,5 pt
2. A, B et C désignent trois points de (P) d'affixes respectives -2 ; 3+5i ; 3-5i .
   La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K
   a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse 0,75 pt
   b) R désigne la rotation du plan telle que R(K) = K et R(B) = A
   Préciser la mesure principale de l'angle de R 1 pt

Exercice 2 : 4,75 points

Un restaurant propose à ses clients le tableau suivant appelé menu du jour.

Catégorie	Description
Entrée	5 entrées au choix du client, 2 à 600 F chacune et 3 à 1200 F chacune
Plat du jour	4 "plats du jours" au choix du client ; un à 1500 F , 2 à 2000 F Chacun et un 2500 F
Dessert	3 dessert au choix du client ; 2 à 500 F et un à 1000 F.

Mme IKS se rend dans ce restaurant et commande un menu en choisissant au hasard une entrée, un "plat du jour" et un dessert.

Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B et C suivants :

a) A " le menu de Mme IKS " coûte 3100 F ; 1,25 pt
b) B " le menu de Mme IKS " coûte au plus 4000 F ; 1,75 pt
c) C " le menu de Mme IKS " coûte au moins 3500 F 1,75 pt

Problème : 11 points

Dans tout ce problème on note :
- f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $f(x) = (x - 2)e^x + x$;
- (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur sur les axes 1 cm).
- g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

le problème comporte trois parties liées A, B et C

Partie A

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt
2. calculer le dérivée de g et dresser le tableau de variation de g. 0,75 pt
3. En déduire le signe de g(x) sur IR. 0,25 pt

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ 0,25 pt
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$
   Etudier la position de (C) par rapport à (D) 1 pt
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$ 0,25 pt
   b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$;
   Interpréter graphiquement ce résultat. 0,75 pt
3. Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f 0,75 pt
4. a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α 0,5 pt
   b) Calculer les valeurs exactes, puis les troncatures à trois décimales de f(1,68) et f(1,7)
   En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut 1 pt
5. tracer (C). 1 pt

Partie C

t désigne un nombre réel négatif.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_t^0 (x - 2)e^x dx$ 0,5 pt
2. Calculer en centimètres carrés l'aire A(t) de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = t$; $x = 0$; $y = x$ et la courbe (C) 0,5 pt
3. Calculer la limite en $-\infty$ de A(t) 0,5 pt
4. On considère les équations différentielles suivantes :
   (E) : $y'' - 2y' + y = x - 2$; (E') : $y'' - 2y' + y = 0$
   a) Trouver une fonction affine h qui soit solution de (E) 0,5 pt
   b) Soit g au moins deux fois dérivable.
   Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E') 0,5 pt
   c) Résoudre (E') 0,5 pt
   d) En déduire les solutions de (E) et vérifier que la fonction f de la partie A est une solution de (E) 1 pt

MINEDUC - OBC

SESSION 2004

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 4 points

Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. On tire simultanément trois boules. On suppose que tous les résultats possibles d'un tel tirage sont équiprobables. On désigne par a, b et c les numéros de trois boules tirées.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 » 1 pt

B : « a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 » 1 pt

C : « a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison -2 » 2 pts

N.B. : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles.

Exercice 2 : 5 points

Soit le polynôme $P(Z) = 2Z^3 - 4Z + \lambda$ où Z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel.

On considère l'équation (E) : $P(Z) = 0$

1. a) Montrer que si (E) admet une solution complexe Z_0, alors $\overline{Z_0}$ est aussi solution de (E) 0,5 pt

   b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle. 0,5 pt
   On ne demande pas de la déterminer.

2. a) Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle 2 0,5 pt

   b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de $\lambda = 0$ 0,5 pt

3. On donne $\lambda = 8$

   a) Vérifier que $1+i$ est une solution de (E) 0,5 pt

   b) Résoudre alors l'équation (E) 1,75 pt

   c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de (E) 0,75 pt

Problème : 11 points

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le candidat devra traiter les deux parties.

Partie A

On considère l'équation différentielle : $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

1. résoudre cette équation — 0,75 pt
2. déterminer la solution particulière de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes : sa courbe représentative passe par le point A(0 ; 4) et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0. — 1 pt
3. a) Etudier les variation de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (4 - x)e^{\frac{1}{2}x}$ — 0,75 pt
   b) Dresser le tableau de variation de f — 1 pt
   c) Etudier les branches infinies à C_f — 0,25 pt
   d) Tracer dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe représentative C_f et la tangente à C_f au point d'abscisse 2 — 0,75 pt
4. a) Montrer que la restriction f_1 de f dans $]-\infty ; 2]$ est une bijection vers un intervalle que l'on déterminera — 0,5 pt
   b) tracer la courbe C_1 de la réciproque f_1^{-1} de f_1 — 0,5 pt
5. calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$ — 1 pt

Partie B

Soit g_a la fonction numérique définie sur IR par $g_a(x) = 1 + (-x^2 + ax + a)e^{-x}$, où a est un réel donné.

1. Montrer que les courbes C_a représentatives des fonctions g_a passent par un point fixe K dont on déterminera les coordonnées. — 0,75 pt
2. montrer que pour tout réel a différent de -2, la fonction g_a admet deux extremums dont l'un a pour abscisse $x = 0$ — 1 pt
3. Soit M_a le point d'abscisse (a+2) sur la courbe C_a. Calculer l'ordonnée de M_a — 0,5 pt
4. Quand le réel a varie, le point Ma décrit une courbe (Γ). Donner une équation cartésienne de la courbe (Γ) — 0,5 pt
5. Vérifier que (Γ) passe par le point K — 0,5 pt
6. Etudier les variations de g_0 et construire la courbe C_0 dans le plan muni d'un repère orthogonal
   Unités sur les axes : 1 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées — 1,25 pt

MINESEC - OBC

SESSION 2006

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 4 points

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme complexe p défini par : $p(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$.

1. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1 + i$; $1 - i$; $3 + i$ et $1 + 3i$.

a) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D. **1pt**

b) Montrer que les affixes respectives de ces points sont les solutions de l'équation $p(z) = 0$. **1pt**

c) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré. **0,75pt**

2. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

a) Déterminer l'affixe du point Ω tel que $h(\Omega) = \Omega$. **0,25pt**

b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de h. **0,5pt**

c) r est la rotation de centre Ω et d'angle 15°. Donner la nature et les éléments caractéristiques de s= hor. **0,5 pt**

Exercice 2 : 5 points

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y'\ln 2 = 0$. **1pt**

2. On considère la fonction numérique d'une variable réelle t définie par : $u(t) = e^{-t\ln 2}$.

Déterminer la primitive de u qui prend la valeur 1 en 0. **1,5pt**

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par :

$v_n = \int_{n-1}^{n} u(t)\,dt$ et on pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

a) Montrer que (v_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. **1pt**

b) Calculer S_n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$. **1,5pt**

Problème : 11 points

Partie A : Etude de la fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\ln x$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1,5pt**

2. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $x_0 = 1$. **1pt**

Partie B : Etude de la fonction f

Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln x$, C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Etudier les variations de f. **1,5pt**

b) Montrer que la courbe C_f admet une branche parabolique. **0,75pt**

c) Montrer que la courbe C_f coupe la droite (Δ) d'équation cartésienne $y = \frac{1}{2}x$ en un point unique A dont on déterminera les coordonnées. **0,75pt**

d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α. **0,25pt**

e) Montrer que $0,83 < \alpha < 0,84$. **0,5pt**

2. a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1. **1pt**

b) Tracer les droites (Δ), (T) et la courbe C_f dans le même repère. **1,5pt**

3. Γ est le domaine du plan limite par la courbe C_f, la droite (Δ) et les droites d'équation respectives x = 1 et x = λ, avec λ>1.

a) Calculer l'aire A(λ) de Γ. **1,5pt**

b) Déterminer la limite de A(λ) quand λ tend vers +∞. **0,75pt**

MINESEC - OBC

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXAMEN : BACCALAUREAT D

Durée : 4 H
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1. / 04 points

1. Dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. 0,5 pt

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

   a. Représenter sur l'axe des abscisses du repère précèdent les termes : u_1, u_2, u_3. 0,75pt

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5 pt

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$. 0,25 pt

   d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,25 pt

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $vn = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$

   a. Montrer que (vn) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5 pt

   b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0,5 pt

   c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,25 pt

4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n$.
   Exprimer Sn en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0,5 pt

EXERCICE 2. / 05 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations :

   $(E_1) : Z^2 + 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$ et $(E_2) : Z^2 - 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$. 1 pt

2. Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 4Z^2 + 16$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(Z) = 0$.

   a. Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que :
   $P(Z) = (Z^2 + aZ + 4)(Z^2 - aZ + 4)$. 1 pt

   b. En déduire les solutions de l'équation (E). 0,5 pt

3. Soient A ; B ; C ; D ; E et F les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; et $\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 . 0,75 pt

   b. Placer ces points dans le plan. 1 pt

   c. Montrer que ABCDEF est un hexagone régulier. 0,75 pt

PROBLÈME. **/ 11 points**

Partie A

Soit la fonction v définie sur]0 ; + ∞ [par : $v(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\frac{\ln x}{x^2} \leq v(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ 1 pt

2. Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$. On remarquera que $\frac{\ln x}{x^2} = (\ln x) \times \frac{1}{x^2}$. 2 pts

3. En déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} v(x)\, dx$. 1 pt

Partie B

f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unités sur les axes: 2 cm.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1,5 pt

2. a. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1} = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ 0,5 pt

   b. Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives: y = x − 1 et y = x + 1 sont asymptotes à la courbe (Cf) . 1 pt

   c. Tracer les droites (D) ; (D') et la courbe (C_f) dans le même repère orthonormé. 1 pt

3. a. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une réciproque f^{-1} dont on donnera le tableau de variation. 1 pt

   b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C_f). 0,5 pt

4. Soit a un réel supérieur ou égal à 1. A(a) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équation x = 1 et x = a.

   a. CalculerA(a) et préciserA(2) à 10^{-2} près. 1 pt

   b. Calculer la limite de A(a) quand a tend vers +∞. 0,5 pt

MINESEC - OBC

SESSION 2009

Épreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème obligatoires sue deux pages

EXERCICE 1. / 04 points

On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par :
$P(z) = z^3 - (6 + 6i)z^2 + 2iz + 15 - 5i$

1. Calculer P(i). 0,25 pt
2. En déduire que $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera. 0,75 pt
3. Résoudre dans ℂ l'équation $z^2 - (6 + 5i)z + 5 + 15i = 0$;
   en déduire les solutions de l'équation P(z) = 0. 1 pt
4. A, B et C sont des points du plan complexes d'affixes respectives :
   $\alpha = i$; $\beta = 3 + i$; $\gamma = 3 + i$
   a) Calculer le rapport $\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$ 1 pt
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? 0,5 pt
   c) Donner l'angle de la rotation r de centre B qui transforme A en C. 0,5 pt

EXERCICE 2 : / 05 Points

Le tableau ci-dessous représente la population X des pays de la zone CEMAC et le nombre Y d'analphabètes de chacun de ces pays (tous exprimés en millions d'habitants).

Pays	Cameroun	RCA	Congo	Gabon	Guinée Équatoriale	Tchad
Population	13,9	3,4	*2,7*	1,15	0,42	7,153
Nombre d'analphabètes	3,9337	1,9584	1,43	0,38	0,08	3,43

a) Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le nuage de points associé à cette série statistique
(on prendra en abscisse 1cm, et en ordonnées 4cm, pour un million d'habitants). 1,5 pt

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique. 1 pt

c) Déterminer en utilisant la méthode de Mayer une équation cartésienne de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points. 1,5 pt

d) Donner une estimation du nombre d'analphabètes qu'aura le Tchad lorsque la population de ce pays atteindra 10,2 millions d'habitants. 1 pt

Problème : / 11 points

Le problème comporte trois parties A , B et C obligatoires.

Partie A / 4 points

On considère la fonction numérique f et sa courbe (C) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ — 0,75 pt
2. Étudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f. — 1,5 pt
3. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I que l'on déterminera. — 0,5 pt
4. Tracer (C). — 1,25 pt

Partie B / 3 points

On considère les équations différentielles (E) et (E') suivantes
(E) : $3y'' + 2y' - y = -8e^{x} - 1$; (E') : $3y'' + 2y' - y = 0$

1. Vérifier que f est solution de (E) (f est la fonction définie dans la partie A). — 0,75 pt
2. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si g - f est solution de (E'). — 1 pt
3. Résoudre alors l'équation (E') et en déduire les solutions de (E). — 1,25 pt

Partie C / 4 points

F est la fonction numérique définie par $F(x) = (ax + b)e^{x} + x$

1. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f, où f est la fonction définie dans la partie A. — 1 pt
2. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par :

   $U_n = \int_2^n (f(x) - 1)dx$

   a) Calculer U1 et U2. — 1 pt

   b) Donner une interprétation géométrique de *Un* et donner son expression en fonction de n. — 1,5 pt

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ — 0,5 pt

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2010
Série : *D*
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 4

L'épreuve comporte sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires.

Exercice 1 (4,5points)**.** Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), (unité sur les axes 1cm). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complèxes, l'équation (e) : $z^2+(-7+i)z+12-16i=0$.

1. (a) Calculer $(5+5i)^2$. [0,5pt]
   (b) Résoudre l'équation (e) dans $\mathbb{C}$. [1pt]
2. Soient les points A et B d'affixes espectives $1-3i$ et $6+2i$. Calculer $\dfrac{z_O-z_B}{z_O-z_A}$; où z_O, z_A et z_B désignent les affixes respectives des points O, A et B ; en déduire la nature du triangle OAB. [0.75pt]
3. Que représente le point I d'affixe $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$ pour le segment $[AB]$? [0.5pt]
4. Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixes z tels que $\left|z-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. [0?75pt]
   i. $O\in(\Gamma)$; ii. $A\in(\Gamma)$; iii. $B\in(\Gamma)$.
   (b) Donner une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ). [1pt]

Exercice 2 (4,5points)**.** En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5% par an. Par ailleurs, aon constate une augmentation annuelle supplémentaire de 0,45 million d'habitants dès l'année 1991. L'unité étant le million d'habitants ; on note $U_0=50$ l'effectif de la population en 1990 et U_n le nombre d'habitants en $1990+n$.

1. (a) Calculer U_1 et U_2. [0.5pt]
   (b) Montrer que $U_{n+1}=1,01U_n+0,45$. [0.75pt]
2. On se propose de prévoir directement l'effectif de la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon ; pour cela on considère la suite (V_n) définie par $V_n=30+U_n$.
   (a) Calculer V_1 et V_2. [0.5pt]
   (b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. [0.75pt]
   (c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire alors l'effectif de la population de ce pays en l'an 2010. (On prendra le résultat arrondi en million d'habitants). [1.5pt]
   (d) Déterminer par calcul à partir de quelle année l'effectif de la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit de la même manière. [0.5pt]

Problème(11 points).
Partie A :(8points).

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}1+xe^{\frac{x}{2}} \text{ si } x\leq 0\\ x\ln x-x+1 \text{ si } x>0\end{cases}$. Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan et (C_f) la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Déterminer le domaine de définition de f. [0.5pt]
2. (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. [1pt]
   (b) Ecrire les équations des demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0. [0.5pt]

3. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. [0.5pt]
   (b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f). [1pt]
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. [1.5pt]
5. Tracer les demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0 et tracer (C_f). [1.5pt]
6. Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ (on pourra utiliser une intégration par partie). [1pt]
7. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]-\infty;0[$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty;0[$ dans une intervalle que l'on précisera. [0.5pt]

Partie B :(3points).
On se propose de résoudre l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^{\frac{x}{2}}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels, u la fonction définie par $u(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$. Déterminer a et b pour que u soit une solution de (1). [0.75pt]
3. (a) Montrer que v est solution de (1) si et seulement si $v - u$ est solution de (2). [0.75pt]
   (b) En déduire les solutions de (1). [0.5pt]
   (c) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0. [0.5pt]

Ministère des Enseignements Secondaires

Office du Baccalauréat du Cameroun

www.doualamaths.net

Examen : Baccalauréat *Session* **: 2016**
Série : D - TI
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

EXERCICE 1 : 4,5 points

Le tableau ci-dessous présente la taille x (en centimètres) et la pointure y (en centimètres) de dix élèves choisis au hasard dans une classe de Terminale D.

x	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
y	40	41	43	43	42	44	44	44.5	44.5	44

1. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique. **1pt**

2. **(a)** En prenant la covariance de la série (x, y) égale à $9,6$; pour écart-types σ_x et σ_y respectivement égaux à $7,4$ et $1,4$; calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, y). **0,5pt**

(b) Utiliser la méthode des moindres carrés pour donner une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x. **0,5pt**

(c) En déduire au centimètre près la pointure d'un élève de cette classe dont la taille est de $163cm$ dans le cas où le comportement général est proche de l'échantillon choisi. **0,5pt**

3. **(a)** On choisit au hasard et simultanément six élèves parmi les dix élèves sélectionnés. Calculer la probabilité d'avoir exactement trois élèves dont la pointure est d'au moins de $44cm$. **1pt**

(b) Calculer la probabilité de l'événement : « la taille est supérieure ou égale à $160cm$ sachant que la pointure est inférieure ou égale à $44cm$ », lorsqu'on choisit au hasard un élève parmi les dix. **1pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$. **1pt**

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, d'unité graphique $1cm$, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\vec{w} = -1 + \frac{5}{2}i$.

(a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$. **0,5pt**

(b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$. **0,5pt**

(c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **0,5pt**

www.doualamaths.net www.doualamaths.net www.doualamaths.net

(d) Placer les points P, Q, R et S. **0,5pt**

3. (a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme. **0,5pt**

(b) Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$. **1pt**

(c) Montrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0,5pt**

PROBLEME : 11 points

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (x-2)e^x + x$; (C_f) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$. **0,75pt**

(b) Justifier que f est une solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x - 2$. **0,75pt**

2. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

(a) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. **1pt**

(b) En déduire que g est positive sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

3. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5pt**

(b) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$. Étudier la branche infinie à (C_f) en $+\infty$. Étudier en fonction de x la position de (C_f) et de (Δ). **1,25pt**

4. (a) Soit f' la dérivée de f ; vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$; En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. **1pt**

(b) Justifier que la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser. **0,75pt**

(c) Dresser les tableaux de variation de f et de f^{-1} bijection réciproque de f. **1pt**

5. (a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0. **0,5pt**

(b) Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé *(unités graphiques : cm)* **2pts**

6. $\mathscr{D}$ est le domaine du plan limité par la courbe (C_f), la droite d'équation $y = x$ et les droites respectives $x = 0$; $x = 2$. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$. **1pt**

www.doualamaths.net www.doualamaths.net www.doualamaths.net

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2011
Série : D
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 4

Exercice 1 (4points)**.** A la suite de plusieurs campagnes de vaccination réalisées dans un village du Cameroun, les études ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de poliomyélite est de 0,05. On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de ce village.

1. Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de poliomyélite ? [0.5pt]
2. On a effectue un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans ce village. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « aucun enfant n'est atteint de poliomyélite » [1pt]

   B : « trois enfants sont atteints de poliomyélite » [1pt]

   C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite ». [1.5pt]

Exercice 2 (5points)**.** Soit P un plan affine muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). A tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe $f(z) = \dfrac{iz}{z+i}$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

1. Déterminer l'affixe z_0 du point B tel que $f(z_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$. [0.75pt]
2. On note r le module de $z+i$ et α son argument principal. Ecrire en fonction de r et α une forme trogonométrique de $f(z) - i$. [0.75pt]
3. Soit A le point d'affixe $-i$.
   (a) Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z vérifiant l'égalité $|f(z) - i| = 1$. [1pt]
   (b) Montrer que la droite (T) d'équation $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ est tangente à (C) en B.
4. Construire A, B, (T) et (C). [1.5pt]

Problème(11 points).

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$; (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le domaine de définition de f et les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini. [1pt]
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et dresser le tableau de variations de f. [1.5pt]
3. Calculer $f(x) - 2$, en déduire la position de la courbe (Γ) par rapport à son asymptote horizontale. [0.5pt]
4. Donner les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points d'abscisses respectifs 0 et 2. [1pt]
5. Tracer les tangentes précédentes et la courbe (Γ). [2pt]
6. Montrer que la restriction g de f à $[3, +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur un intervalle J que l'on déterminera. Tracer dans le même repère la courbe représentative de g^{-1}.
7. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 3. On appelle $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et la droite d'équation $y = 2$ d'une part, les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$ d'autre part.
   (a) Montrer que $A(\lambda) = \displaystyle\int_3^{\lambda} \frac{3x-6}{x^2-3x+3}\,dx$. [0.5pt]
   (b) Montrer que pour tout $x \geq 3$, on a $2x - 3 \leq 3x - 6$.
   En déduire que $\displaystyle\int_3^{\lambda} \frac{2x-3}{x^2-3x+3}\,dx \leq A(\lambda)$. [1pt]

(c) Quelle est la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$. [0.5pt]

8. On considère la suite (u_n) définie par : u_0 réel donné et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Pour $u_0 = 2$, montrer que la suite (u_n) est constante. [0.25pt]

(b) On donne u_0 tel que $2 < u_0 < 3$.

i. Montrer que pour tout n, on a $2 < u_n < 3$. [0.5pt]

ii. Montrer que la suite (u_n) est croissante. [0.5pt]

iii. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? [0.25pt]

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2012
Série : *D*
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 4

Exercice 1 (4,5points)**.** Une maîtresse a regroupé dans un tableau statistique les résultats d'une enquête portant sur le nombre de gâteau consommés pendant la récréation par 200 élèves d'une maternelle.

Modalités	0	1	2	3	4
Effectifs	10			35	
Effectifs cumulés croissants	10		80	115	
Fréquences en pourcentage		20		17,5	

1. Quelle est la nature du caractère étudié ? [0,5pt]
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. [2pts]
3. Quel est le mode de cette série statistique ? [0,25pt]
4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série étudiée. [1,75pt]

Exercice 2 (5points)**.**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2 - 2iz - 1 = 0$. [1,5pt]
2. Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\dfrac{-1+i}{2}$ et $\dfrac{1+i}{2}$.
   Démontrer que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O. [1pt]
3. On pose $Z = \dfrac{-1+i}{1+i}$.
   (a) Ecrire Z sous la forme trigonométrique. [0,5pt]
   (b) En déduire les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique puis sous la forme algébrique. [1,5pt]

Problème(11 points).
Le problème comporte trois parties A, B et C.

Partie A : 5,25 points

Soit la fonction numérique définie sur $]-1,0]$ par $f(x) = \ln(1-x^2) - x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans la plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique $10cm$).

1. Déterminer la limite de f à droite de -1.
   Donner une interpretation graphique du résultat obtenu. [0,5pt]
2. Etudier les variations de f et dresser sont tableau de variations. [1,5pt]
3. Donner le coefficient directeur de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 0. [0,25pt]
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-0,72; -0,71[$ une unique solution α. [0,75pt]
5. Tracer (D) et (C). [1,5pt]
6. Tracer dans le même repère la courbe représentative de $|f(x)|$. [0,75pt]

Partie B : 3 points

1. Vérifier l'égalité $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x^2)\,dx = \int_{\alpha}^{0} \ln(1+x)\,dx + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$. [0,5pt]

2. A l'aide des intégration par parties, calculer en fonction de α les intégrales suivantes :
   $I = \int_{\alpha}^{0} \ln(1+x)\,dx$ et $J = \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$. [1,5pt]
   On pourra remarquer que $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ et $\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$.
3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C), et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. Calculer $\mathscr{A}$ en fonction de α. [1pt]

Partie C : 2,75 points

On considère la suite U à termes positifs définies sur $\mathbb{N}^\star$ par : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ et $u_1 = 1$.

1. Calculer u_2 et u_3. Donner les résultats sous la forme 2^λ où λ est un réel. [0,5pt]
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n = -2\ln 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. [0,75pt]
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. [0,5pt]
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. [1pt]

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2013
Série : *D*
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

Exercice 1 (5points)**.** Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$. [0,5pt]
   (b) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique. [0,5pt]
2. (a) Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A=2+2i$, $z_B=2-2i$ et $z_C=4$. Placer les points A, B et C dans le plan. [0,25pt]
   (b) Calculer le raport $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$; en déduire la nature du triangle CAB, puis celle du quadrilatère $AOBC$. [1pt]
3. Soit f la similitude directe du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme la point A en O.
   (a) Donner l'écriture complexe de f. [1pt]
   (b) Donner les éléments caractéristiques de f. [0,75pt]
   Soit g la transformation de P dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(1-i)z+4i$.
   (c) Ecrire sous forme algébrique, l'affixe de G', image du barycentre G des points pondérés $(A,3)$; $(B,2)$ et $(C,-3)$ par g. [1pt]

Exercice 2 (4points)**.** Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne $100F$ et si les boules sont de couleurs différentes, le jour perd $100F$.

1. Dans cette question, on suppose $n=3$
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir :
      i. deux boules de même couleur ; [0,5pt]
      ii. deux boules de couleurs différentes. [0,5pt]
   (b) Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte ? [0,5pt]
2. Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successive sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.
   (a) Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $[X=-100]$ et $[X=100]$. [1pt]
   (b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X)=100\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$. [0,5pt]
   (c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X)<0$? [1pt]

Problème(11 points).

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout réel $x>1$, $f(x)>1$. [0,5pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$.

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$. [0,5pt]

   (b) Calculer v_1 et w_1. [0,5pt]

   (c) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. [1pt]

   (d) Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n. [0,75pt]

   (e) En déduire que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$; puis calculer $\lim\limits_{n=+\infty} u_n$. [(0,5+0,25)pt]

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. [0,5pt]

   (b) Etudier le sens de variations de h. [1pt]

   (c) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. [0,75pt]

2. (a) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction H définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction h. [0,5pt]

   (b) Soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel : $\int_0^\lambda h(x)\,dx$. [0,5pt]

   (c) $A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
   Déterminer $A(\lambda)$ puis calculer sa limite lorsque λ tend vers l'infini. [0,75pt]

Partie C :

On considère les équations différentielles suivantes :
(E) : $y'' - 2y' + y = x - 2$; (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.
On considère la fonction affine φ définie par $\varphi(x) = ax + b$.

1. Déterminer a et b pour que la fonction φ soit solution de l'équation (E). [0,5pt]
2. Soit g une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de (E'). [0,75pt]
3. Résoudre (E'). [0,75pt]
4. En déduire les solutions de l'équation (E). [0,75pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2014
Série : D-TI
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 4

EASY-MATHS PARTNERSHIP

EXERCICE 1 (5 points)

A- On considère le polynôme p défini par $p(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20i$, z étant un nombre complexe.

1. Montrer que $1 + 2i$ est une racine de p. [0,5pt]
2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $p(z) = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$. [0,75pt]
3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z) = 0$. [0,75pt]

B- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Pacer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -2 - i$, et $c = 4 - i$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. [0,75pt]
2. Soit D le point d'affixe $2 + 3i$; montrer que A, B et D sont alignés. [0,5pt]
   (a) Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique. [1pt]
   (b) En déduire la nature exacte du triangle ABC. [0,75pt]

EXERCICE 2 (4 points)

Une entreprise achète, utilise et revend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en miliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 1 cm pour une année en abscisse, et 1cm pour 20000 FCFA en ordonnée). [1,5pt]
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i) ainsi définie. [0,5pt]
3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de regression de y en x de cette série statistique. [1,5pt]
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation. [0,5pt]

PROBLEME (11 points)

Le problème comporte trois parties A, B et C obligatoires

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : 4,5 points

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. [1pt]
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. [1pt]
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; +\infty[$; montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. [1pt]
4. Tracer dans le même repère, la courbe (C) représentative de f, et la courbe (C') représentative de g^{-1}. [1,5pt]

Partie B : 2,5 points

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0;1]$. [0,5pt]
2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0;1]$, $f''(x) > 0$. [0,5pt]
3. En déduire que pour tout x de $[0;1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$. [1pt]
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$ (On ne demande pas de calculer α). [0,5pt]

Partie C : 4 points

On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$; quelle conclusion peut-on en tirer ? [1,25pt]
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$. [1,25pt]
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. [1pt]
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). [0,5pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2015
Série : D-TI
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)
On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $t(z) = 9z^2 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de t, alors $\bar{z}_0$ est aussi une racine de t. [0,5pt]
2. Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t. [0,5pt]
3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $t(z) = (z^2+1)(az^2+bz+c)$. [0,75pt]
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$. [1pt]
5. Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (*unité graphique : 3cm*).
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = i$, $z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.
   (a) Placer les points A, B, C et D. [0,5pt]
   (b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. [0,5pt]
   (c) En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD. [0,5pt]
   (d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. [0,75pt]

EXERCICE 2 (4 points)
Une urne contient 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 jetons de l'urne. Si les jetons sont de même couleur, le joueur gagne 1000 FCFA. S'ils sont de couleurs différentes, alors le joueur perd 1000 FCFA.

1. (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur. [0,75pt]
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes. [0,75pt]
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe le gain ou on la perte du joueur.
   (a) Donner les différentes valeurs possibles de X. [0,5pt]
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X. [0,5pt]
   (c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X. [1,5pt]

PROBLEME (11 points)
PARTIE A : (3 points)
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y = 16x + 16$.

1. Résoudre l'équation homogène (E') associée à (E) : $y'' - 4y = 0$. [0,5pt]
2. Déterminer les réels α et β tels que le polynôme $p(x) = \alpha x + \beta$ soit une solution particulière de (E). [0,5pt]
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E'). [0,5pt]
4. En déduire toutes les solutions de (E). [0,5pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

5. Déterminer parmi ces solutions celle qui vérifie les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = -4$. [1pt]

PARTIE B : (8 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4$.

1. Montrer que $g(x) = e^{-2x}\left(e^{4x} - 4e^{2x} + 4\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. [0,5pt]
2. Etudier le signe de $g(x)$. [1pt]
3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} - 4x$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $h(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-4x} - 4xe^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{2} - 4xe^{2x}\right)$. [0,5pt]
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. [1pt]
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g(x)$. [0,5pt]
   (d) En déduire le tableau de variation de h. [1pt]
   (e) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle α telle que $\alpha \in]1;2[$. [1pt]
   (f) Construire la courbe représentative (C_h) de la fonction h dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 3cm sur les axes. [1,5pt]
4. Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}\ln 3$. [1pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

MINESEC **CLASSE : Tle TI Séquence 1**
LYCEE DE BIYEM-ASSI **Durée : 2h Coeff : 4**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **Septembre 2015**

Epreuve de mathématiques :

L'épreuve comporte trois exercices. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 : 7pts

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
   a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. **1pt**
   b) $10^n - 1$ est un multiple de 9. **1,5pt**
   c) $\sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k-1} = (n-1)\, 2^n + 1$. **1,5pt**
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, on a : $2^n > 5(n+1)$. **1,5pt**
3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\, u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$. **1,5pt**

Exercice 2 : 7pts

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss le système a) et par la méthode par substitution les systèmes b) et c).
   a) $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 620 \\ 3x + 5y + z = 530 \\ 2x + 7y + 8z = 940 \end{cases}$ **(1,5pt)** b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 18 \\ -x + 3y - z = 2 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$ **(1,75pt)** c) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$ **(1,5pt)**
2. Au marché d'Acacias, trois clientes achètent les mêmes variétés de fruits.
   La première achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes ; elle paie 620 F.
   La deuxième achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papaye ; elle paie 530 F.
   La troisième achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes.
   Combien doit-elle payer ? **2,25pts**

Exercice 3 : 6pts

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$ et $z_3 = -\sqrt{3} + i$.

1. Calculer et mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
   $z_1 + 2\, z_2$; $z_1 \overline{z_2}$; $\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}$; $(z_1)^6$; $\frac{z_3}{z_2}$ et $|z_2|\, \overline{z_1}$. **6x0,5pt**
2. Ecrire sous forme trigonométrique z_1 et z_3, puis en déduire la forme trigonométrique de $z_1\, z_3$. **1,5pt**
3. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
   a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 2)$; $(B, -1)$ et $(C, 3)$. **0,75pt**
   b) Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. **0,75pt**

Proposée par : ***Patrick Diemo***

LYCEE DU MANENGOUBA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2013-2014
SEQUENCE : N°1/DUREE : 02H
CLASSES: T^{le} D / COEF: 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I 3points

1. Soit (S) le système dans $\mathbb{R}^3$ suivant : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x+2y+z=-12 \\ -6x+y=15 \end{cases}$
   a. Transformer le système (S) en un système triangulaire 1.5pt
   b. Déduire le quadruplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ solution du système (S) 0.5pt
2. Déterminer la fonction polynôme P du troisième degré telle que :
   $P(1)=0$ $P(2)=-12$ et $P'(-3)=15$
   (rappel : un polynôme de degré 2 est de la forme $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a,b\ et\ c$ sont des réels et $a\neq 0$) 1pt

EXERCICE II 3points

Utiliser le raisonnement par récurrence pour montrer que :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 1.5pt

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ 7^n-1 est divisible par 6 1.5pt

EXERCICE III 6.5points

I) On rappelle que : $cosa\ sinb=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)]$.
   1. Linéariser sin^3x 1.5pt
   2. En déduire une linéarisation de $cosx\ sin^3x$. 1.5pt

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$; on donne les nombres complexes $Z_1=-2+3i$, $Z_2=1-i$ et $Z_3=-1-2i$
   1. Placer dans le repère les points $A,B\ et\ C$ points images respectifs des complexes $Z_1,Z_2\ et\ Z_3$ 0.75pt
   2. Déterminer le module et un argument de Z_2 1pt
   3. Déduire le module et un argument du complexes $Z=(1-i)^5$ 1pt
   4. Donner la forme exponentielle du complexe Z 0.75pt

EXERCICE IV 7.5points

On considère le nombre complexe $Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

1. Déterminer la forme algébrique du complexe Z 1.5pt
2. On pose $Z_1 = \sqrt{3} - i \ et \ Z_2 = 1 + i$
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_1 \ et \ Z_2$ 2pts
   b. Déduire le module et un argument de Z 1pt
3. Donner la forme trigonométrique du complexe Z 1pt
4. Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ 1.5pt
5. Quelle est le plus petit entier naturel p non nul pour lequel $Z^p \ est \ un \ réel$ 0.5pt

INSTITUT PRIVE MITOUKEM
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2013-2014
SEQUENCE : N°1/DUREE : 02H30
CLASSES: T^{le} D / COEF: 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I 2pts

1. Soit (S) le système dans $\mathbb{R}^3$ suivant : $\begin{cases} 2x-y+7z=-19 \\ 3x+5y-z=14 \\ -x+y+4z=-4 \end{cases}$
   a. Transformer le système (S) en un système triangulaire 1.5pt
   b. Déduire le triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ solution du système (S) 0.5pt

EXERCICE II 3pts

Utiliser le raisonnement par récurrence pour montrer que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\ (n \geq 6)$ $2^n \geq 6n+1$ 1.5pt

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $9^{n+1}+2^{6n+1}$ est divisible par 11 1.5pt

EXERCICE III 7.5pts

I) On rappelle que : $sina\ cosb = \frac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)]$

1. Linéariser cos^3x 1.5pt
2. En déduire une linéarisation de $sinx\ cos^3x$ 1.5pt

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$; on donne les nombres complexes $Z_1 = 1-i$ et $Z_2 = -1+2i$

1. Placer dans le repère les points $A\ et\ B$ points images respectifs des complexes $Z_1\ et\ Z_2$ 0.5pt
2. Déterminer le module et un argument de Z_1 1pt
3. Déduire le module et un argument du complexes $Z = (1-i)^6$ 1pt
4. Donner la forme exponentielle du complexe Z 0.5pt
5. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe Z_M du plan complexe tels que : $|\overline{Z_M}-1+i| = 2$ et construire l'ensemble (E) 1.5pt

EXERCICE IV 7.5pts

On considère le nombre complexe $Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{-1+i}$

1. Déterminer la forme algébrique du complexe Z 1.5pt
2. On pose $Z_1 = 1-i\sqrt{3}\ et\ Z_2 = -1+i$
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_1\ et\ Z_2$ 2pts
   b. Déduire le module et un argument de Z 1.5pt
3. Donner la forme trigonométrique du complexe Z 1pt
4. Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ 1.5pt

LYCEE BILINGUE DE NYLON BRAZZAVILLE — Département de mathématiques

Niveau : T^le D — Année scolaire : 2013/2014

1re séquence — Coef :4 — Durée : 2h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES — Octobre 2013

Dans cette épreuve, i est le nombre complexe dont le carré est égal à -1.

Exercice 1 : (3 points)

Un vendeur de chèvres, de poulets et des canards compte au total 75 têtes et 210 pattes d'animaux. Après la vente de toutes ces bêtes, il perçoit une somme totale de 170 000F à raison de 3000F par chèvre, 1 500F par poulet et 2 000F par canard. Déterminer en justifiant clairement le nombre de chèvres, le nombre de poulets et le nombre de canards.(On posera un système de 3 équations à 3 inconnues que l'on résoudra ensuite.)

Exercice 2 : (6 points)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$
   Donner les solutions sous forme trigonométrique. ***2pts***
2) Résoudre dans C l'équation d'inconnue z suivante :
   $3iz + (1+i)\bar{z} + 1 = -8 - 8i$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z. ***1pt***
3) Déterminer les racines carrées de i sous forme algébrique. ***1,5pt***
4) Soit x un nombre réel. Linéariser$cos2xsin^3x$. **1,5pt**

Exercice 3 : (4,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I , J). Les points J et P ont pour affixes respectives i et -1-2i.

1) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - i| = \sqrt{10}$. ***0,5pt***
2) Justifier que P est un point de (C). Placer P et tracer (C) dans le repère. ***1pt***
3) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. ***0,75pt***
4) Déterminer l'affixe du point Q image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ puis en déduire la nature du triangle OQP. ***1,5pt***
5) Déterminer l'affixe du centre de gravité G du triangle JPQ. ***0,75pt***

Exercice 4 : (6,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I , J). On considère le nombre complexe $m = 1 + i\sqrt{3}$ et les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = m, z_B = -m$, $z_C = m^2$ et $z_D = \frac{2}{m}$.

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B , z_C et z_D . ***2pts***
2) Donner la notation exponentielle de chacun des nombres complexes $z_A$et z_D . ***0,5pt***
3) Placer les points A, B, C et D dans le repère. ***1pt***
4) Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC. ***1pt***
5) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera l'affixe du centre K et le rayon. ***2pts***

LYCEE DU MANENGOUBA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2012-2013
SEQUENCE : N°2/DUREE : 03h
CLASSES: T^{le} D / COEF: 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Proposée par : GHENKE GAPMEN GIOVANNI BERTRAND

Exercice 1 (2.5points)

1. Calculer le réel $A = \dfrac{\sqrt[5]{5}\times\sqrt{625}}{\sqrt{\sqrt[5]{15625}}}$ et donner le résultat sous sa forme la plus simplifiée 1pt
2. Linéariser $Sin^3 2x$ 1.5pt

Exercice 2 (8points)

I- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ et donne chacune de ses solutions sous la forme algébrique 2pts

II- On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par :
$p(z) = z^3 + (-4-i)z^2 + 9z - 4 + 7i$

1. Calculer $p(-i)$ 0.5pt
2. En déduire que $p(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. 1.5pt
3. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$. 0.75pt

III- Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;u,v)$.

A, B, et C sont des points du plan complexes d'affixes respectives :
$\alpha = 2 - i \quad ; \quad \beta = -i \quad et \quad \gamma = 2 + 3i$

a) Calculer le rapport $\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ 1pt
b) Quelle est la nature du triangle ABC ? 0.5pt
c) Déterminer l'angle de la rotation r de centre A qui transforme C en B 0.75pt
d) Déterminer l'écriture complexe de r 1pt

Exercice 3 (4points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;u,v)$.

I- Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ tel que : $|\bar{z} - 2 + i| = |4 - 3i|$ 1pt

II- On désigne par f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :
$z' = (-1 + \sqrt{3}\,i)z - 2\sqrt{3} - 4i$

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f 1.5pt
2. Donner une l'expression analytique de f 1pt
3. Quelle est l'image par f d'un point A d'affixe 1-2i ? 0.5pt

Exercice 4 (5.5 points)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3\sqrt{x^2+1}}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5Cosx+x^2}{x^2+1}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ 1.5pt

2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -x^3 + 3x + 1$$

a) étudier et dresser le tableau de variation de la fonction f 1pt

b) déterminer l'image par f de chacun des intervalles : $]1; +\infty[$ et $[-3; 0]$ 1pt

c) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$ 1pt

d) déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} et en déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut (on pourra utiliser la méthode par balayage) 1pt

Ministère des enseignements secondaires **Année Scolaire 2013 - 2014**
Délégation régionale du LITTORAL
Délégation départementale du WOURI
Bassin pédagogique de DOUALA III^{me}
www.doualamaths.com

EPREUVE DE MATHEMATIQUES/TD/SEQUENCE 2

L'épreuve comporte deux exercices et un problèmes répartis sur deux pages.

Exercice 1 — 5 pts

I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax-1}{x} \quad pour \quad x \in]-\infty;-2[\\ f(x) = x^2 - x + b \quad pour \quad x \in [-2;1[\\ f(x) = a\sqrt{x} - 2b + 1 \quad pour \quad x \in [1;+\infty[\end{cases}$ où a et $b \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. 0,5pt
2. Déterminer a et b pour que f soit continie sur $\mathbb{R}$

II - La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{5x-6}-x}$ admet - elle un prolongement par continuité en 2 ? si oui, définir ce prolongement. 0,75+0,5pt

III - Soit h la fonction numérique définie sur $[2;5]$ par : $h(x) = x^3 - 6x - 6$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α
2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près puis une valeur approchée de α à 10^{-2} près. 1pt

Exercice 2 — 4 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.
On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2z_B$

1. Déterminer les formes algébriques de z_C et z_B 0,25pt× 2
2. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$ 0,25pt× 3
3. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$, en déduire la nature du triangle IAC 0,25pt× 2
4. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$.
   Déterminer l'affixe du point E. 0,75pt
5. Le point D est l'image du point e par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point D. 1pt
6. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. 0,5pt

Problème — 11 points

Le problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A : 6 points

1. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - 1$ où $(z \in \mathbb{C})$
   a. Factoriser $P(z)$ sous forme d'un produit de quatre polynômes du premier degré dans $\mathbb{C}$ 0,5pt
   b. En déduire les solutions de l'équation $z^4 - 1 = 0$ 0,5pt
2. On considère l'équation $(E) : z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$, on pose $t = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
   a. Vérifier que t est solution de (E) 1pt
   b. Montrer que z_0 est solution de (E) si et seulement si $z_0 t$ est solution de (E) 0,75pt

c. En déduire sous la forme exponentielle les solutions de (E) 1,25pt

3. a. Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $a = 8(1 - i\sqrt{3})$ 0,5pt

b. En déduire sous la forme exponentielle les solutions de (E). 1,25pt

4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ 0,25pt × 2

Partie B : 5 points

Les suites (U_n) et (V_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \ ; \ V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \ ; \ V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = k(V_n - U_n)$ 0,5pt

2. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < V_n$ 0,5pt

3. a. Démontrer que la suite (U_n) est croissante et (V_n) décroissante. 0,5pt× 2

b. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes. 0,25pt× 2

4. a. Soit $W_n = \sum_{p=0}^{n-1}(V_p - U_p)$. Donner l'expression de W_n en fonction de n. 0,75pt

b. i. Exprimer $W_n = \sum_{p=0}^{n-1}(V_{p+1} - U_p)$ en fonction de w_n puis en fonction de U_n et U_0

ii. En déduire l'expression de U_n en fonction de n. 0,25pt

c. Quelle est la limite de la suite (V_n), 0,5pt

Ministère des enseignements secondaires
Délégation régionale du LITTORAL
Délégation départementale du WOURI
Bassin pédagogique de DOUALA III^{me}
www.doualamaths.com

Année Scolaire 2013 - 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES/TD/SEQUENCE 2

L'épreuve comporte deux exercices et un problèmes répartis sur deux pages.

Exercice 1 — 5 pts

I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax-1}{x} \quad pour \quad x \in]-\infty;-2[\\ f(x) = x^2 - x + b \quad pour \quad x \in [-2;1[\\ f(x) = a\sqrt{x} - 2b + 1 \quad pour \quad x \in [1;+\infty[\end{cases}$ où a et $b \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. 0,5pt
2. Déterminer a et b pour que f soit continie sur $\mathbb{R}$

II - La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{5x-6}-x}$ admet - elle un prolongement par continuité en 2 ? si oui, définir ce prolongement. 0,75+0,5pt

III - Soit h la fonction numérique définie sur $[2;5]$ par : $h(x) = x^3 - 6x - 6$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α
2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près puis une valeur approchée de α à 10^{-2} près. 1pt

Exercice 2 — 4 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.
On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2z_B$

1. Déterminer les formes algébriques de z_C et z_B 0,25pt× 2
2. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$ 0,25pt× 3
3. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$, en déduire la nature du triangle IAC 0,25pt× 2
4. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$.
   Déterminer l'affixe du point E. 0,75pt
5. Le point D est l'image du point e par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point D. 1pt
6. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. 0,5pt

Problème — 11 points

Le problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A : 6 points

1. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - 1$ où $(z \in \mathbb{C})$
   a. Factoriser $P(z)$ sous forme d'un produit de quatre polynômes du premier degré dans $\mathbb{C}$ 0,5pt
   b. En déduire les solutions de l'équation $z^4 - 1 = 0$ 0,5pt
2. On considère l'équation $(E) : z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$, on pose $t = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
   a. Vérifier que t est solution de (E) 1pt
   b. Montrer que z_0 est solution de (E) si et seulement si $z_0 t$ est solution de (E) 0,75pt

c. En déduire sous la forme exponentielle les solutions de (E) 1,25pt

3. a. Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $a = 8(1 - i\sqrt{3})$ 0,5pt

b. En déduire sous la forme exponentielle les solutions de (E). 1,25pt

4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$ 0,25pt × 2

Partie B : 5 points

Les suites (U_n) et (V_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \ ; \ V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \ ; \ V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = k(V_n - U_n)$ 0,5pt

2. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < V_n$ 0,5pt

3. a. Démontrer que la suite (U_n) est croissante et (V_n) décroissante. 0,5pt× 2

b. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes. 0,25pt× 2

4. a. Soit $W_n = \sum_{p=0}^{n-1}(V_p - U_p)$. Donner l'expression de W_n en fonction de n. 0,75pt

b. i. Exprimer $W_n = \sum_{p=0}^{n-1}(V_{p+1} - U_p)$ en fonction de w_n puis en fonction de U_n et U_0

ii. En déduire l'expression de U_n en fonction de n. 0,25pt

c. Quelle est la limite de la suite (V_n), 0,5pt

EVALUATION CONTINUE DE MATHEMATIQUES /26/01/2012

L'épreuve comporte deux exercices obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

Exercice 1 — 8 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O,I,J)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64 = 0$
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$
   a. Ecrire a et b sous forme exponentielle
   b. Déduire de la forme exponentielle de $\dfrac{a}{b}$ la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de D.
4. Soit le point du plan tel que G est barycentre de $\{(O,-1);(D,1);(B,1)\}$
   a. Determiner l'affixe de G.
   b. Placer les points A , B , C , D et G.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
5. Soit h l'homothétie du plan de centre A qui transforme B en C
   a. Déterminer le rapport de l'homothétie h.
   b. Démontrer que le triangle AGC est l'image du triangle OAB par h.
   c. Quelle est la nature du triangle AGC ?

Exercice 2 — 12 points

Partie A :

Calculer chacune des intégrale suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \sin x]\cos^3 x dx \qquad B = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 1}} dx \qquad C = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan 2x dx$$

Partie B :

Onconsidère la fonction f définie par $f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$: unité 5cm

I - g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2+1}$

1. a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$
   b. Etudier le signe de g' suivant les valeurs de x.
   c. Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite de 0.

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\propto$ vérifiant 0,5 $<\propto<$ 0,6

   b. En déduire le signe de $g(x)$

II

1. a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$

   b. En déduire le sens de variation de f.

2. a. En posant $t = \dfrac{1}{x^2}$, calculer la limite de $xf(x)$ en $+\infty$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   b. Calculer la limite de f à droite de 0.

3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser la tangente à (C) en 0.

4. Montrer que pour tout $x \in]0{,}5;\propto[$

   a. $0 \leqslant f'(x) \leqslant f'(0{,}5)$

   b. $0 \leqslant f(\propto) - f(0{,}5) \leqslant (\propto -0{,}5)f'(0{,}5)$ et $0 \leqslant f(\propto) - f(0{,}5) \leqslant (0{,}1)f'(0{,}5)$

   c. En déduire une valeur approchée de $f(\propto)$ à 10^{-3} près.

5. Dresser le tableau de variations de f

6. Construire la courbe de f.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 — 3 points

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$

1. a. Calculer la dérivée de f et montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ 1,5pts

   b. En déduire que $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$,$1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x \leqslant f(x) \leqslant 1+\frac{1}{2}x$ 1pt

2. Application : Donner un encadrement de $\sqrt{1{,}1}$ 0,5pt

Exercice 2 — 3 points

Soit $\begin{array}{l} f:]2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2} \end{array}$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x de $]-2;+\infty[$, $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$ 1pt

2. a. Que signifie la phrase : « F est une primitive de f sur $]-2;+\infty[$» ? 0,5pt

   b. Déduire de ce qui précède les primitives de f sur $]-2;+\infty[$ 1pt

3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 3. 0,5pt

Exercice 3 — 3,5 points

Soit $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1. a. Calculer $P(-1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$ 1pt

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$ 1pt

2. Déduire de ce qui précède la résolution dans R de l'équation : $2(\ln x)^3-5(\ln x)^2-4(\ln x)+3=0$ 1,5pts

Problème : 11 points

(P) désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique 4 cm

Partie A

Au point M d'affixe $z=x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on fait correspondant le point M' d'affixe z' quand il existe tel que : $z'=\dfrac{z+\overline{z}-i}{z-i\overline{z}}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

1. On définit ainsi une fonction f telle que $f(z)=z'$ et une fonction T telle que $T(M)=M'$. Quels sont les ensembles de définition de f et T

2. Résoudre dan $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=i$, d'inconnue z.

3. Calculer les coordonnées $(x';y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ de M.

4. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que $T(M)$ ait une affixe imaginaire pure. 0,75pts

5. Montrer que si le module de $f(z)$ est égale à $\sqrt{2}$, les coordonnées x et y sont liées par la relation $4y^2-8xy-1=0$ 0,75pts

Partie B

1. Soient u et v les fonction définies dans $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$ et $v(x) = -2x + \sqrt{4x^2+1}$

   a. Montrer que pour tout réel x : $u(x) = v(-x)$ et $u(x) \times v(x) = 1$ 0,5pt

   b. Montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $v(x) > 0$
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ 1,25pt

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$

   a. Calculer la dérivée de g et étudier le sens de variation de g 1pt

   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) - 2x = \frac{1}{2u(x)}$ et $g(x) - 2x = \frac{v(x)}{2}$ 1pt

3. a. Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ 0,5pts

   b. Préciser les asymptotes à la courbe (C) de g 0,5pt

   c. Construire (C) et ses asymptotes. 1pt

   d. Soit A le point de rencontre de (C) avec l'axe des ordonnées.
   Déterminer les coordonnées de A ainsi qu'une équation de la tangente à (C) en A
   Construire cette tangente. 0,75pt

4. a. Déduire de l'étude précédente que g admet une fonction réciproque h dont
   on précisera l'ensemble de définition D_h 0,5pt

   b. Montrer que $\forall x \in D_h$,$h(x) = \frac{4x^2-1}{8x}$ 0,5pt

MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
25.01.2014	EXAMEN :	DEVOIR DE SYNTHESE N° 3	Durée : 4h	T^le D1, D2 & TI
COEFF. 4	EPREUVE:	MATHEMATIQUES	Prof : T.N. AWONO MESSI	

L'examinateur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation de la copie.

EXERCICE 1 : 2,5 points

1. $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{yz}\right) = 1 \\ \ln(xyz) = 2 \\ \ln\left(\dfrac{xz^2}{y^3}\right) = 8 \end{cases}$ **1,5pt**

2. On définit une fonction f sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

(a) Calculer la fonction dérivée de f. **0,5pt**

(b) En déduire la valeur exacte du réel $K = \int_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - 8 = 0$. **0,75pt**

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique *2cm*. A, B et C sont les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

(a) Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique. Placer les points A, B et C. **0,75pt**

(b) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Quelle est la nature du triangle ABC ? **0,5pt**

(c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. **0,5pt**

(d) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points M d'affixe z vérifiant : $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$. Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. **1pt**

3. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

Caractériser géométriquement f, puis déterminer l'image de la droite (AC) par f. **1pt**

EXERCICE 3 : 3 points

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4e^3 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$.

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4$. **0,5pt**

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. **0,5pt**

(c) En déduire qu'elle est convergente vers une limite l que l'on déterminera. **0,5pt**

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. **0,5pt**

(b) Exprimer alors v_n en fonction de n. Quelle est la limite de v_n ? **0,5pt**

(c) Montrer que $u_n = 4e^{\left(\frac{3}{2^n}\right)}$. Retrouver alors le réel l de la question 1 (c). **0,5pt**

PROBLEME : 10 points

Le problème comporte deux parties A et B.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

PARTIE A : 2,5 points

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

1. Etudier les variations de g. **1pt**

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une seule solution α et que $0,27 < \alpha < 0,28$. **0,75pt**

3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. **0,75pt**

PARTIE B 7,5 points

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. **(a)** Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **1pt**

(b) Interpréter graphiquement le résultat. **0,5pt**

2. **(a)** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$. **0,75pt**

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **0,5pt**

(c) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$. **0,5pt**

(d) Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**

(e) Déterminer les points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$. **0,5pt**

(f) Tracer C_f dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (*unité graphique : 4 cm*) **0,75pt**

(g) Montrer que f est bijective de $[\alpha;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**

3. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

(a) Calculer $f^{-1}(0)$ et montrer que $\left(f^{-1}\right)'(0) = 2$. **1pt**

(b) Ecrire une équation de la tangente T à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0. **0,5pt**

(c) Tracer $C_{f^{-1}}$ et T dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. **0,5pt**

Bon Travail.....

Ministere des Enseignements Sécondaires
Délégation régionale du Littoral
Délégation départementale du Wouri
COLLEGE BILINGUE INTAC

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ANNÉE SCOLAIRE 2012-2013
Classe : Terminale D Coeff 4
Durée 4 heures

EVALUATION DE LA TROISIEME SEQUENCE /TERMINALE D/ JANVIER 2013

Exercice 1 — 4 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$, $x\neq -\dfrac{1}{2}$

1. Déterminer les nombres réel a et b tels que pour tout x distinct de $-\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}$ 1,5pts
2. En déduire les primitives de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ 1,15pts
3. Déterminer la primitive F de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ vérifiant $F(0)=1$ 1,25pts

Exercice 2 — 5 points

1. On considère dans 'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(E): z^3-(2+3i)z^2+(4+6i)z-8=0$
   a. Démontrer que (E) admet une racine réelle et une seule. 1pt
   b. Resoudre (E) dans $\mathbb{C}$ 1,5pts
   c. Soient A, B et C les point images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que les points A, B et C appartient au cercle centré au point d'affixe $\dfrac{3}{2}i$ 1,5pts
2. Resoudre dans l'équation $z^6-(2+3i)z^4+(4+6i)z^2-8=0$ 1pt

Problème — 11 points

Partie A :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$(unité graphique : 2 cm)

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=-3$

1. Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle. 1pt
2. Placer les points A, B et C dans le plan complexe. 0,75pt
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. 0,5pt
4. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{3}iz^2$. On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.
   a. i. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C' 0,75pt
   ii. placer les points A', B' et C' dans le plan complexe. 0,5pt
   iii. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' 1pt
   b. Soit G l'isobarycentre des points O, A , B et C. On note G' le point associé à G par f.
   i. Déterminer les affixes des points G et G' 0,5pt
   ii. Le point G' est - il l'isobarycentre des points O',A', B' et C' ? 0,25pt

Partie B :

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$. Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I, J)$. unité 1,5 pour 1cm.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ — 0,25pt

   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 3} \ \ si \ \ x \ \ \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[\\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \ \ si \ \ x \ \ \in [1; 3] \end{cases}$ — 0,5pt

2. a. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie à la courbe de f. — 0,5pt

   b. En déduire que l'on peut étudier f sur $D_e = [2 : +\infty]$ — 0,25pt

3. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 3,
   puis donner une interpretation géométrique des résultats obtenus. — 1pt

   b. Etudier le sens de variation de f sur D_e — 1,5pts

   c. Dresser le tableau de variation de f sur D_e — 1pt

   d. Etudier la branche infinie sur D_e — 0,5pt

   e. Construire la courbe de f sur D_e et en déduire la courbe de f sur D_f.
   (On laissera apparaître les traits de la construction) — 1pt

LYCEE DU MANENGOUBA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2012-2013
SEQUENCE : N°3/DUREE : 03h
CLASSES: T^le D / COEF: 4

EXERCICE I : 2.5pts

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty,1]$ par : $g(x)=\sqrt{1-x}$

1. démontrer que pour tout $x\epsilon\left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a : $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq g'(x)\leq -\frac{1}{2}$ (où g' est la fonction dérivée de g) 0.5pt
2. en appliquant l'inégalité des accroissements finis, déduire de 1) que : pour tout $x\epsilon\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $1-\frac{x}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{1-x}\leq 1-\frac{x}{2}$ (Considérer l'intervalle $[0;x]$ avec $x\epsilon\left[0;\frac{1}{2}\right]$) 0.75pt

II- soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=\frac{4x-3}{(2x-1)^2}$

1. montrer que pour tout $x\epsilon\,\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x)=\frac{2}{2x-1}+\frac{-1}{(2x-1)^2}$ 0.25pt
2. en déduire les primitives de f sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ 0.75pt
3. déterminer la primitive F de f sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ vérifiant $F(0)=1$ 0.25pt

EXERCICE II : 4.5pts

I- résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $ln(x-2)+ln(x+2)=ln(4+2x)$ 0.75pt
b) $ln(x+1)+ln(x-2)<2ln(3-x)$ 1pt

II- soit la fonction h définie par : $h(x)=ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

1. déterminer l'ensemble de définition de la fonction h 0.5pt
2. calculer les limites de la fonction h aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition 1pt
3. calculer $h'(x)$; puis déduire les variations de la fonction h. 1.25pt

EXERCICE III : 3.5pts

I- le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$. $A,B\ et\ C$ sont des points du plan complexes d'affixes respectives :

$Z_A=1$; $Z_B=-3\ et\ Z_C=2-\sqrt{3}i$, On désigne par S une similitude directe du plan.

1. Calculer le rapport $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ et en déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ 1pt
2. Calculer le rapport $\frac{AB}{AC}$ 0.25pt
3. Donner l'écriture complexe de la similitude S sachant que $S(A)=A$ et $S(C)=B$ 0.5pt
4. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et r la rotation de centre A et d'angle de rotation $\frac{\pi}{3}$
   a) Donner l'écriture complexe de h 0.5pt
   b) Donner l'écriture complexe de r 0.5pt
   c) Donner l'écriture complexe de roh ; que peut-on conclure ? 0.75pt

PROBLEME : 9.5pts

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par : $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 1cm)

PARTIE A : Etude de la fonction auxiliaire 2.5pts

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x-3$

1. dresser son tableau de variation de la fonction g 1pt
2. montrer qu'il existe un unique réel α tel que $(\alpha)=0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut du réel α 1pt
3. étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$ 0.5pt

PARTIE B : Etude de la fonction f 7pts

1. déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition 1.5pt
2. montrer que pour tout $x\epsilon\ \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$ 0.5pt
   en déduire, à l'aide de la partie A, les variations de la fonction f puis son tableau de variation 1.5pt
3. a) montrer que pour tout $x\epsilon\ \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$: $f(x)=2x+\frac{2x+3}{x^2-1}$ 0.25pt
   b) en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D): $y=2x$ en $+\infty\ et\ en\ -\infty$ 0.5pt
   c) étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à (D) 0.75pt
4. (C_f) admet-elle d'autres asymptotes ? si oui les préciser 0.5pt
5. tracer la courbe (C_f) et la droite (D) 1.5pt

EVALUATION DE LA TROISIEME SEQUENCE/TERMINALE D

Exercice 1 — 4 points

Les paries A et B sont indépendantes

Partie A :

Soit g une fonction défine et dérivable sur $[1;3]$ telle que $-5 \leqslant g'(x) \leqslant -2$; $g(1) = 2$ et $g(3) = -0{,}5$

1. Justifier que g est continue sur $[1;3]$. 0,5 pt
2. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\beta \in [1;3]$. 0,5 pt
3. Montrer que $\forall x \in [1;3]$, $\dfrac{11}{2} - 2x \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{29}{2} - 5x$. En déduire que $\beta \in [2{,}75; 2{,}9]$ 1 pt

Partie A :

1. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :
   a. $f_1(x) = 24x(4x^2+1)^5$ 0,5 pt
   b. $f_2(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$ 0,5 pt
2. Soit f la fonction définie sur $I = \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{cos^2 x} + 4\sin 2x$.
   Déterminer une primitive F de f sur I prenant la valeur 0 en $\dfrac{\pi}{4}$ 1 pt

Exercice 2 — 6 points

1. Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (4-4i)z - 8 - 2i = 0$ 2 pts
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On donne les points A , B et C d'abscisses respectives $z_A = 1+i$, $z_B = -1-i$ et $z_C = -5+3i$
   Déterminer suivants les valeurs du nombre réel k l'ensemble des point M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$ 2 pts
3. a. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. 0,5 pt
   b. Calculer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$,
   puis déduire la nature que quadrilatère $ABCD$. 1,5 pts

Problème

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A : 3 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. On considère l'application f γ de (P) dans (P) qui en tout point M d'affixe $z = x+iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x'+iy'$ où x,y,x' et y' sont des réels tels que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. Exprimer z' en fonction de z. 1,5 pts
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de γ 1,5 pts

Partie B : 7 points

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \text{ , } n \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$
2. Soit I l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$ t la fonction f définie sur I par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
   Montrer que f admet un unique point fixe dans I noté l. 0,5 pt
3. Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$ 1 pt
4. a. En appliquant l'inégalité des accroissement finis,
   montrer que pour tout entier n, on a $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - l|$ 2 pts
   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - l|$ 1,5 pts
   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 0,5 pt

Epreuve de mathématiques

Exercice1 6.5 points

I)

1. Résoudre dans IR l'équation suivante : $(x^2-4)lnx=0.$ 1pt
2. Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $-2ln^2x+5lnx-2>0.$ 1pt
3. Résoudre dans IR² le système d'équations suivant :$\begin{cases} ln\left(\frac{x}{y}\right)=0 \\ e^{-2x+1}\times e^{y-2}=1 \end{cases}$ 1.25pt

II)

On considère la fonction f deux fois dérivables sur$\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ par $f(x)=\sqrt{3-2x}$.

1. a) Calculer $f'(x)\ et\ f''(x.)$ 1pt

   b)Déduire le sens de variation de f'sur$\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$. 0.25pt

2. Déduire de la question 1. que pour tout ∈ $[0;1]$, $-1\leq f'(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1pt
3. Montrer que pour tout ∈ $[0;1]$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}+1\leq f(x)\leq-x+2.$ 1pt

   (On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[x;1]$)

Exercice 2. 2.5points

I) On considère la fonction k définie sur $]-1;1[\backslash\{0\}\ par\ k(x)=\frac{3x^2+2x-2}{x^2(x^2-1)}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in\ ]-1;1[\backslash\{0\}\ ,k(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x-1}$. 1pt
2. On considère la fonction t définie sur $]0;1[\ par\ t(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{5}{x-1}$.
   a) Déterminer les primitives $T\ de\ t$ sur $]0;1[$. 1pt
   b) En déduire la primitive T sur $]0;1[$ telle $T\left(\frac{1}{2}\right)=-5ln2$. 0.5pt

Problème. 11points

Partie A

Soit la fonction f définie de IR vers IR par :$f(x)=\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x^3+1}\ si\ \ x\neq-1 \\ f(-1)=\ \frac{1}{3} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. 0.5pt.
2. Etudier la continuité de f en -1 1pt

Partie B

I. On considère la fonction h définie sur IR par $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. 1.5pt
2. Calculer $h(\frac{1}{2})$ puis déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x. 1pt

II. Soit la fonction g définie $de\ IR \longrightarrow IR$ par $g(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$, et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (prendre $OI = OJ = 2cm$).

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de g. 0.25pt
   b) Calculer les limites de $g\ en + \infty; en - \infty\ et\ en - 1$. 1pt
   c)Déterminer une équation de la droite (d) asymptote à(C). 0.25pt
2. Montrer que pour tout $x \in IR\backslash\{-1\}$, $g'(x) = \frac{-h(x)}{(x^3+1)^2}$. 0.75pt
3. Déduire de I. le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 1.5pt
4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0. 0.5pt

   b) Etudier les positions relatives de (T) par rapport à (C). 0.5pt
5. a) Construire (C) et (T) dans le même repère. 1.5pt

   b) Représenter en pointillés sur le même repère la courbe de la fonction $x \longmapsto g(|x|)$ 0.75pt

Ministère des enseignements secondaires
Délégation régionale du LITTORAL
Délégation départementale du WOURI
Lycée Bilingue de Nylon Brazzaville
www.doualamaths.com

Année Scolaire 2013 - 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES/TERMINALE D/SEQUENCE 3

Exercice 1

Soit $A(1,1)$ et $B(1,0)$ deux point du plan rapporté à un repère orthonormal (O,I,J). le point C est l'image du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$

1. Montrer que le point C a pour coordonnées $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC
4. On considère l'application f du plan complexe dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affize z' tel que $z'=\frac{z+3}{z-1}$
   a. Etablir que $(z'-1)(z-1)=4$
   b. En déduire que $BM\times BM'=4$
   c. Quelle est l'image (C') par f, du cercle de centre B et de rayon 1 ?
   d. Une similitude directe S d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme (C) en (C')
      i. Justifier que S est de centre B et de rapport 4.
      ii. Ecrire une expression complexe de cette similitude

Exercice 2

Soit (U_n) une suite défine sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $U_0\in[-1;+\infty[$
et par la relation de récurrence $U_{n+1}=\sqrt{3U_n+4}$
On considère la fonction $f(x)=\sqrt{3x+4}$ définie sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ et sa courbe (C_f)

1. Etudier les variations de f. déterminer l'abscisse α du point d'intersection de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$
2. Etudier les variations de la suite (U_n) pour $U_0\in[-1;\alpha[$ puis, pour $U_0\in[\alpha;+\infty[$
3. a. Pour $U_0\in[-1;\alpha[$, montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, $0\leqslant U_n\leqslant\alpha$
   b. Pour $U_0\in[\alpha;+\infty[$, montrer que, pour tout entier $n\geqslant 0$, $U_n\leqslant\alpha$
   c. En déduire le comportement de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$
4. Montrer que pour $n\geqslant 1$ on a $|4-U_{n+1}|=\frac{|12-3U_n|}{4+\sqrt{3U_n+4}}$.
   En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$ on a $|4-U_{n+1}|\leqslant\frac{1}{2}|4-U_n|$
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $|4-U_n|\leqslant\frac{|4-U_0|}{2^n}$
6. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $|4-U_n|\leqslant 10^{-5}$

Problème

Partie A : Etude d'une fonction auxilliaire f

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations.
   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$
   b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]-1;0[$
   c. A l'aide de la méthode de balayage, donner un encadrement de α à 10^{-1}
2. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B : Etude et tracé d'une fonction g

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{(x+2)(1+x^2)}$

1. Préciser l'ensemble de définition de g t calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$
   En déduire que la courbe (C_g) admet des asymptotes dont on déterminera les équations.
2. Montrer que pour tout réel x différent de 2 : on a $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(2-x)^2(1+x^2)^2}$
3. En utilisant les résultats de la partie A préciser le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g
4. Tracer la courbe (C_g) de g. On prendra $\alpha = 0{,}75$

Parie C : Etude et tracé d'une réciproque.

On désigne par h la restriction de g sur l'intervalle $]2;+\infty[$

1. Montrer que h admet une réciproque h^{-1}
2. Tracer la courbe (C') de h^{-1}, justifier ce tracer.

MINESEC **CLASSE : Tle D & TI Séquence 4**
LYCEE DE BIYEMASSI **Durée : 4h Coeff : 4**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **Année scolaire 2015/2016**

Epreuve de mathématiques :

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 : 3,5pts

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :
   a) $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$, pour tout réel positif x. **0,75pt**
   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **0,75pt**
2. Soit $v(x) = \frac{3x^2-5x}{(x-1)^2} + e^{2x}$, pour tout réel x différent de 1.
   a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$, $\frac{3x^2-5x}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$. **0,75pt**
   b) En déduire sur $]-\infty;\ 1[$ la primitive de v qui prend la valeur 2 en 0. **1,25pt**

Exercice 2 : 6pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1. a) Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation (E). **0,5pt**
   b) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on a :
   $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 + az + b)$. **0,75pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . **1pt**
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4+i, 4-i$ et $-i$.
   a) Placer ces points dans le repère . **0,75pt**
   b) Le point Ω est le point d'affixe 2. Le point D est l'image de A par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Calculer l'affixe de D. **0,5pt**
   c) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**
3. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h\ o\ r$. **1pt**
   b) Déterminer une écriture complexe de $h\ o\ r$. **0,5pt**

Problème : 10,5pts

Le but de ce problème est d'étudier la fonction numérique f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

Partie A : 3,75pts

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$. **0,75pt**

b) Etudier les variations de la fonction g, puis déterminer le signe de $g(x)$. **1pt**

2. a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. **0,75pt**

b) Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$; puis dresser le tableau de variation de f. **1,25pt**

<u>Partie B</u> : 5,25pts

(Γ) désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J), unité graphique 2cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.
   a) Etudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 0{,}6]$. **1,25pt**
   b) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$. **0,5pt**
2. a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$. **0,5pt**
   b) Utiliser les résultats de la question **1. a)** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ). **0,5pt**
3. Construire (Γ) et (Δ) . **1pt**
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction v définie par $v(x) = |f(x)|$. **0,75pt**
5. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $v(x) = m$. **0,75pt**

<u>Partie C</u> : 1,5pt

1. En utilisant la méthode d'intégrations par parties, calculer $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$. **0,75pt**
2. Calculer, en centimètres carrées, l'aire du domaine délimité par la droite (Δ), la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. **0,75pt**

Proposé par : ***Patrick Diemo***

Ministere des Enseignements Sécondaires
Délégation régionale du Littoral
Délégation départementale du Wouri
COLLEGE BILINGUE INTAC

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ANNÉE SCOLAIRE 2012-2013
Classe : Terminale D
Durée : 4 heures

EVALUATION DE LA QUATRIEME SEQUENCE/TERMINALE D/ 2013

Exercice 1 — 3 points

L'objectif est de calculer les intégrales. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$
   a. Calculer la dérivée f' de f. 0,5 pt
   b. Déduisez - en la valeur de I. 0,5 pt
2. a. Sans calculer explicitement J et K, vérifiez que $J + 2I = K$ 0,5 pt
   b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, prouvez que $K = \sqrt{3} - J$ 1 pt
   c. Déduisez - en les valeurs de J et K 0,5 pt

Exercice 2 — 4,5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct (unité graphique 4cm). B et M_1 sont des points d'affixes respectives i et $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

1. Calculer le module et un argument de z_1 0,5 pt
2. M_2 est le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a. Trouver le module et un argument de z_2 0,5 pt
   b. Déduisez - en que le point M_2 est sur la droite d d'équation $y = x$ 0,5 pt
3. M_3 est le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$
   a. Vérifiez que $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$ 0,5pt
   b. Prouvez que les points M_1 et M_3 sont sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$ 1 pt
4. construisez à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; précisez les différentes étapes de la construction. 0,75 pt
5. A tout point M, distinct de B, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{1}{i-z}$. Trouvez, puis représentez l'ensemble ξ des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1. 0,75 pt

Exercice 3 — 3,5 points

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} + 2 = 0$ 1 pt
2. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^x - 3^{-x+2} = 8$ 1 pt
3. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^{-\frac{1}{3}} \geqslant 8$ 0,5 pt
4. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)$ 0,5 pt
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3^{2x}}{2^{3x}}$ 0,5 pt

Problème **9 points**

Partie A : On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x^2)+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$ — 1 pt
2. a. Soit g' la fonction dérivée de g. calculer $g'(x)$ — 0,5 pt
   b. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations. — 1 pt
3. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α — 0,5 pt
   b. Justifier que $0{,}1<\alpha<1$ — 0,5 pt
   c. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près par excès de α. — 0,5 pt
4. Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. — 0,5 pt

Partie B : On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^x\left[\ln(x^2)+\dfrac{2}{x}\right]$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 0,5 pt
   b. Déterminer la limite de f en 0. — 0,5 pt
2. a. Calculer la dérivée de la fonction f. — 0,5 pt
   b. Déterminer en utilisant la partie A, le sens de variation de f. — 0,5 pt
3. Construire avec soin, sur papier millimétré, dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f en prenant comme unité 4 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées. — 1 pt
4. a. Calculer la dérivée de la fonction numérique h, définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=e^x\ln(x^2)$ — 0,5 pt
   b. En déduire les primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$ — 0,5 pt
   c. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ — 0,5 pt

Délégation départementale du Moungo **Année scolaire 2013-2014**
Bassin de Nkongsamba **Evaluation harmonisée de la 4è séquence**
Département de Mathématiques **Niveau : TleD ; Durée : 4heures ; coef :4**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : l'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages.

Exercice 1 : 4points.

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\pi} cos^4 x dx \; et \; J = \int_0^{\pi} sin^4 x dx$.

1) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$. 0.5pt

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$. 1pt

c) Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$.

(on pourra remarquer que $J = \int_0^{\pi} sinx(sinx - sinxcos^2 x)dx$). 1pt

2) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4} \quad et \quad I - J = 0$. 1pt

b) En déduire les intégrales I et J . 0.5pt

Exercice 2 : 5points.

Le plan complexe est muni d'un repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $f : z \mapsto f(z) = \frac{z+i}{z+1} \; avec \; z \neq -1$ et A le point d'affixe -1.

1. Déterminer le module et un argument de $f(i)$. 1pt
2. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel $[f(i)]^n$ est un réel. 0.75pt
3. On pose $z = x + iy; x \in \mathbb{R} \; et \; y \in \mathbb{R}$.
   a) montrer que : $\mathcal{R}e[f(z)] = \frac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\mathfrak{I}m[f(z)] = \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2}$. 1pt
   b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z $(z \neq -1)$ pour lesquels $f(z)$ est un nombre complexe imaginaire pur ou nul. 1pt
4. Soit s la transformation du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$. et (C) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + x + y = 0$
   a) Donner la nature et l'élément caractéristique de s. 0.5pt
   b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') image de (C) par s. 0.75pt

Problème : 11points.

NB : les parties A et B du problème sont indépendantes.

Partie A :

On considère la fonction v de IR vers IR telle que : $v(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_v de v 0.5pt
2. Montrer que la fonction v est impaire 0.75pt
3. Montrer que v réalise une bijection de IR vers un intervalle K que l'on déterminera. 1pt
4. Déterminer la bijection réciproque $v^{-1}\ de\ v$. 1pt

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité graphique 2cm).

I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + lnx$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1pt
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x 0.75pt.

II. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = 2x - 1 - \frac{2lnx}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1. a) Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$. 0.5pt
   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. 0.5pt
2. a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $h'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$. 0.75pt

   b) En déduire les variations de h et dresser son tableau de variation. 1pt

3. a) Etudier la position de (C) par rapport à (D). 0.5pt

   b) Construire $(C)\ et\ (D)$. 1pt

4. Soit Δ le domaine plan limité par (C) , (D) et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = e$; et A son aire en cm^2.

   a) Hachurer Δ. 0.25pt

   b) Calculer A. 1.5pt

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

Soit le polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel. On considère l'équation $(E) : P(z) = 0$

1. a. Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0 , alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)
   b. En déduire que l'équation (E) admet au mois une solution réelle. On ne démande pas de la déterminer.
2. On donne $\lambda = 8$
   a. Vérifier que $1 + i$ est solution de (E)
   b. Resoudre alors l'équation (E)
   c. Déterminer le module et un argument de chaque solution de (E)
   a. Déterminer λ pour que l'équation (E) admet au comme solution rélle $\sqrt{2}$
   b. Resoudre l'équation (E) pour $\lambda = 0$
3.

Exercice 2

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$

1. Calculer $I + J$
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$
   a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
   b. En déduire $I - J$
   c. Calculer I et J

Problème

Préliminaires

On admet que pour tout nombre réel x strictement positif : $e^x \geqslant x + 1$ et $\ln x \leqslant x - 1$
En déduire que pour tout $x > 0$, $e^x - \ln x \geqslant 2$

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x}$ si $x > 0$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0,I,J)$

1. Montrer que f est continue en 0. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On désigne par g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$

a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

b. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [1{,}23; 1{,}24]$

d. Etudier le signe de $g(x)$ suivant le signe de x

4. a. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^a - \frac{1}{\alpha}}$ et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$

c. Tracer ka courbe (C) et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \displaystyle\int_1^n f(x)dx$

1. Interpreter géométriquement u_n

2. Etudier les variations de (u_n)

3. Soit φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$, par : $\varphi(x) = e^x - x\ln x - \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité de la partie préliminaire, démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi'(x) \geqslant 0$. En déduire que pout tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant 0$

4. a. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) - \dfrac{1+x}{e^x}$

b. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant xe^{-x}$

c. En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de l'entier naturels non nul n, les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^n xe^{-x}$ et $\displaystyle\int_1^n (1+x)e^{-x}$

5. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée, on appelle l sa limite

b. Démontrer que $\dfrac{2}{e} \leqslant l \leqslant \dfrac{3}{e}$

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

Soit le polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel. On considère l'équation $(E) : P(z) = 0$

1. a. Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0 , alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)
   b. En déduire que l'équation (E) admet au mois une solution réelle. On ne démande pas de la déterminer.
2. On donne $\lambda = 8$
   a. Vérifier que $1 + i$ est solution de (E)
   b. Resoudre alors l'équation (E)
   c. Déterminer le module et un argument de chaque solution de (E)
   a. Déterminer λ pour que l'équation (E) admet au comme solution rélle $\sqrt{2}$
   b. Resoudre l'équation (E) pour $\lambda = 0$
3.

Exercice 2

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$

1. Calculer $I + J$
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$
   a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
   b. En déduire $I - J$
   c. Calculer I et J

Problème

Préliminaires

On admet que pour tout nombre réel x strictement positif : $e^x \geqslant x + 1$ et $\ln x \leqslant x - 1$
En déduire que pour tout $x > 0$, $e^x - \ln x \geqslant 2$

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x}$ si $x > 0$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0,I,J)$

1. Montrer que f est continue en 0. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On désigne par g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$

a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

b. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [1{,}23; 1{,}24]$

d. Etudier le signe de $g(x)$ suivant le signe de x

4. a. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^a - \frac{1}{\alpha}}$ et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$

c. Tracer ka courbe (C) et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \displaystyle\int_1^n f(x)dx$

1. Interpreter géométriquement u_n

2. Etudier les variations de (u_n)

3. Soit φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$, par : $\varphi(x) = e^x - x\ln x - \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité de la partie préliminaire, démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi'(x) \geqslant 0$. En déduire que pout tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant 0$

4. a. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) - \dfrac{1+x}{e^x}$

b. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant xe^{-x}$

c. En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de l'entier naturels non nul n, les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^n xe^{-x}$ et $\displaystyle\int_1^n (1+x)e^{-x}$

5. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée, on appelle l sa limite

b. Démontrer que $\dfrac{2}{e} \leqslant l \leqslant \dfrac{3}{e}$

MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
07.04.2016	EXAMEN :	DEVOIR DE SYNTHESE N° 5	Durée : 4h	T^{les} D_1, D_2 ,TI
COEFF. 4	EPREUVE :	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

L'épreuve comporte deux exercices et un problème , tous obligatoires, sur trois pages numérotées de 1 à 3. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 : 4,5 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste *à choisir une urne puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.*

On note A l'événement « l'urne U_1 est choisie », B l'événement « l'urne U_2 est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

1. Dans cette question, l'urne U_1 contient une boule rouge et 4 boules blanches, l'urne U_2 contient 4 boules rouges et 2 boules blanches.

(a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(A)$, $p_A(R)$, $p(A\cap R)$. **0,75pt**

(b) Montrer que $p(R)=\dfrac{13}{30}$. **0,75pt**

(c) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne U_1 ? **0,75pt**

2. Soit $n\in\mathbb{N}(n\leq 5)$. On suppose que l'urne U_1 contient 4 boules blanches et n boules rouges, l'urne U_2 contient 2 boules blanches et $5-n$ boules rouges.

(a) Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n. **0,5pt**

(b) Démontrer que $p(R)=\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$. **1pt**

3. On sait que n ne prend que 6 valeurs entières.

Déterminer la répartition des 5 boules rouges entre les urnes U_1 et U_2 donnant la plus grande valeur possible de $p(R)$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 5 points

On considère la fonction polynôme P à variable complexe z définie par :

$P(z)=z^3+3z^2-3z-5-20i.$

1. **(a)** Démontrer que $2+i$ est une racine de P. **0,25pt**

(b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z)=0$. **1pt**

2. Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2+i, z_B=-1-2i$ et $z_C=-4+i$.

(a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC. **0,75pt**

(b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$. **0,25pt**

(c) En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$. **0,25pt**

(d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. **0,25pt**

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

(a) Montrer que l'écriture complexe de r est $z' = iz - 3 - i$. **0,5pt**

(b) Préciser les éléments géométriques de r. **0,25pt**

4. Soit h la transformation du plan $\mathscr{P}$ d'écriture complexe $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles h est une homothétie de rapport 2. **0,5pt**

(b) On suppose dans cette question que $\alpha = 1 - i$ et on pose $S = r \circ h$.

Déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments géométriques de S. **1pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C

PARTIE A : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda x^2 e^{-x}$, les équations différentielles $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$ et $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

1. Déterminer le réel λ pour que g soit solution de (E). **0,5pt**

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E_0). **0,5pt**

3. Résoudre l'équation (E_0) et en déduire les solutions de (E). **0,75pt**

4. Déterminer la fonction h, solution de (E) dont la courbe passe par $A(-1;0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$. **0,75pt**

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

(a) Etudier les variations de f et construire la courbe C_f. **1,5pt**

(b) Déterminer en cm^2 l'aire du domaine $\mathscr{D}$ défini par les points $M(x, y)$ du plan tels que : $0 \le x \le 2$ et $0 \le y \le f(x)$. **1pt**

PARTIE B : 3,5 points

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{3U_n}{1 + 2U_n}$.

1. (a) Calculer U_1 et U_2. **0,25pt**

(b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n$. **0,5pt**

2. On admet que pour tout entier naturel $n, U_n < 1$.

(a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante. **0,5pt**

(b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. **0,25pt**

3. Soit (V_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = \dfrac{U_n}{1-U_n}$.

(a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 3. **0,5pt**

(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n$ en fonction de n et en déduire que $U_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$. **1pt**

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **0,5pt**

PARTIE C : 2 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0. **0,5pt**

2. En intégrant I_n et J_n par parties, montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$. **1pt**

3. En déduire alors I_n et J_n. **0,5pt**

MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
04.04.2014	EXAMEN :	DEVOIR DE SYNTHESE N° 5	Durée : 4h	T^{les} D$_1$, D$_2$,TI
COEFF. 4	EPREUVE :	MATHEMATIQUES	Prof : T.N. AWONO MESSI	

www.doualamaths.com

EXERCICE 1 : 3,5 points

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \;;J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \;;K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx.$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.
   - **(a)** Calculer la dérivée f' de f. **0,5pt**
   - **(b)** Calculer la valeur de I. **0,5pt**
2. **(a)** Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J+2I=K$. **0,75pt**
   - **(b)** En intégrant K par parties, montrer que $K=\sqrt{3}-J$. **0,75pt**
   - **(c)** En déduire alors les valeurs de J et de K. **1pt**

EXERCICE 2 : 3,5 points

On considère un dé cubique homogène dont les faces sont numérotées : $0,0,-1,1,1,1$.

On lance le dé deux fois de suite et on note par a le résultat du premier lancer et par b celui du deuxième. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=(a+ib)z+ib$.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : « f est une symétrie centrale » ; B : « f est une translation ». **1,5pt**
   - C : « f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ ». **0,75pt**
   - D : « f est une similitude directe de centre $I(-1;0)$ ». **0,75pt**
2. Soit l'événement : $E=D/C$. Montrer que $p(E)=0,75$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 2,5 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=-\dfrac{1}{2} \\ u_n={u_{n-1}}^2+2u_{n-1}, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$

1. **(a)** Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, 1+u_n=(1+u_{n-1})^2$. **0,5pt**
   - **(b)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}: u_n>-1$. **0,5pt**
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\ln(1+u_n)$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera. **0,75pt**

(b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **0,75pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte trois parties A,B et C.

PARTIE A : 5,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{-|x|}-x+2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité graphique : 1cm)*.

1. (a) Ecrire $f(x)$ sans symbole de valeur absolue. **0,25pt**

(b) Etudier la continuité de f en 0. **0,5pt**

2. (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2\dfrac{e^{-|x|}-1}{x}-1$. **0,5pt**

(b) f est-elle dérivable en 0? **0,5pt**

3. (a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$. **0,5pt**

(b) Etudier les variations de f. **1pt**

(a) Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. *On construira les demi-tangentes au point d'abscisse* 0. **1,25pt**

4. Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$. On désigne par Γ_1 sa courbe représentative.

(a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**

(b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une solution que l'on encadrera à 10^{-1} près. **0,5pt**

PARTIE B : 2,5 points

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x)=1+x\ln x$. Γ_2 est sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de φ. **1pt**

2. Déterminer le point de rencontre de Γ_2 avec la droite Δ d'équation $y=x$. **0,5pt**

3. Construire la courbe Γ_2. **1pt**

PARTIE C : 2,5 points

On considère la transformation S du plan complexe qui à tout point M d'affixe $z=x+iy$ associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ telle que $z'=\dfrac{1}{2}(1-i)z-1$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S. **1pt**

2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **0,75pt**

3. Déterminer l'image de Γ_1 par S. **0,75pt**

MINESEC	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE 2010 /2011
LYCEE BILINGUE DE MBANGA	Cinquième Séquence	Classe : TD Coef : 4 Durée 4H

NB : L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotés 1 et 2.

La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 / 5,5pts

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 6iz^2 + (-13 + 6i)z - 18 - 12i = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle et une solution imaginaire pure que l'on précisera. **1pt**

2) Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$. **0,75pt**

II. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -2$; $b = -3i$; $c = 2 - 6i$ et $d = 2 - 6i$.

1. a) Placer ces points dans le repère. **0,5pt**

b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés. **0,5pt**

c) Calculer $\frac{d-c}{d-b}$ et en déduire que les points B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **1pt**

2. Soit S la similitude de centre D qui transforme C en B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S. **0,75pt**

b) Donner l'écriture complexe de S. **0,5pt**

c) Déterminer l'affixe b' du point B' image de B par S. **0,5pt**

EXERCICE 2 / 5,75pts

1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe de la fonction φ définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $\varphi(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. **1pt**

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_1, u_2 et u_3. **0,75pt**

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. **0,5pt**

c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n < 2$. **0,75pt**

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite. **0,75pt**

3. Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{u_n+1}{2-2u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison. **0,5pt**

b) Exprimer V_n puis u_n en fonction de n. **0,75pt**

c) Vérifier le résultat obtenu en **2. c)**. **0,25pt**

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_n$. Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer sa limite. **0,5pt**

PROBLEME / 8,75pts

Partie A / 2,25pts

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$.

1) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction h définie par $h(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une solution de (E). **0,5pt**

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. **O,5pt**

3) a) Montrer qu'une fonction g est solution de de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E'). **0,5pt**

b) En déduire les solutions de (E). **0,25pt**

3) Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0,2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. **O,5pt**

Partie B /6,5pts

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm. Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,5pt**

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1. **0,5pt**

3. a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}. **0,5pt**

4. Tracer (C), (T) et (C') où (C') désigne la courbe de f^{-1}. **1,5pt**

5. a) En utilisant une intégration par partie, Calculer $\varphi(x) = \int_0^x (t+1)dt$. **0,5pt**

b) En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A, Déterminer une primitive de f. **0,75pt**

6. Soit α un réel positif.

a) Calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$. **0,5pt**

b) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers plus infini. **0,25pt**

BONNE CHANCE A TOUS !!!

EVALUATION DE LA CINQUIEME SEQUENCE /TERMINALE D

Exercice 1 — 7 points

1. On donne les équations (E) et (E') définies par :
$(E) : 3y'' + 2y' - y = -8e^{-x} - 1$ et $(E') : 3y'' + 2y' - y = 0$
Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$
   a. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E) — 0,75 pt
   b. On pose $F = g - f$
      i. Démontrer que la fonction g est solution de (E) alors la fonction F est solution de l'équation (E') — 0,75 pt
      ii. Démontrer que si la fonction F est solution de (E') alors $F + f$ est solution de (E) — 0,75 pt
   c. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E') et en déduire les solutions de l'équation (E) — 1,5 pt
2. Soit la fonction G définie par : $G(x) = (ax+b)e^{-x} + x$
   a. Déterminer les réels a et b pour que G soit une primitive de f. — 1 pt
   b. Soit (U_n) la suite numérique défine par : $U_n = \int_2^n (f(x) - 1)dx$, $n \geqslant 2$
      i. Calculer U_2 et U_4 — 0,75 pt
      ii. Donner une interprétation géométrique de U_n — 0,5 pt
      iii. Exprimer U_n en fonction de n. — 0,5 pt
      iv. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ — 0,5 pt

Exercice 2 — 5,5 points

Soit la suite (U_n) défine par : $\begin{cases} U_0 = 9e \\ U_{n+1} = 3\sqrt{U_n} \end{cases}$ $n \geqslant 1$

On pose $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n}{9}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite (U_n) — 0,75 pt
2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ — 1 pt
3. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n. — 1 pt
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ — 0,5 pt
5. on pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$
   a. Exprimer S_n, puis S'_n en fonction de n et déduire S_{19} — 1,25 pt
   b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ — 1 pt

Problème **7,5 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right)e^{-2x} + 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité graphique : 1cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxillaire 3 pts

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+3)e^{-2x}$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. 0,5 pt
2. Dresser le tableau de variation de g. 0,75 pt
3. Calculer $g(-3)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$ 0,5 pt
4. On pose $I = \int_0^x (t+3)e^{-2t}$
   a. A l'aide d'une intégration par parites calculer I. 1 pt
   b. Déduire une primitive de la fonction g qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ en 0. 0,25 pt

Partie B : Etude de la fonction f 4,5 pts

1. Déterminer les limites de f au bornes de son ensemble de définition. 0,5 pt
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vérifier que $f'(x) = g(x)$ 0,75 pt
3. En déduire à l'aide de la partie A, le tableau de variation de la fonction f. 1 pt
4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure. 0,75 pt
5. Déterminer les valeurs exactes et les valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes : $-4, -2, -1, 0$ et 1. 0,5 pt
6. Construire la courbes (C_f) 1 pt

LYCEE DU MANENGOUBA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2013-2014
SEQUENCE : N°5/DUREE : 3h
CLASSES: T^{le} D / COEF: 4

EXERCICE I 3 points

Une urne contient 3 boules vertes, 2 boules bleus et 4 boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer les probabilités des événements suivantes :
   A : « obtenir les boules unicolores » et B :« obtenir au moins une boule bleu ». 2pts
2. a) Définir par une phrase l'événement $\bar{B}$. 0.5pt

   b) Calculer $p(\bar{B})$. 0.5pt

EXERCICE II 6 points

Soit la suite numérique (U_n) $n \in IN$ définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4}e^2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n} \end{cases}$ et on pose $W_n = \ln(4U_n)$.

1. Utiliser le raisonnement par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite est (U_n) est décroissante. 1pt
2. Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. 1pt
3. a) Exprimer (W_n) puis (U_n) en fonction de n . 1pt
   b) En déduire que la suite (U_n) converge. 0.5pt
4. On pose $S_n = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ et $T_n = U_0 + U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.
   a) Exprimer S_n $puis$ T_n en fonction de n. 0.5pt + 1pt
   b) Calculer les limites de S_n et T_n en $+\infty$. 1pt

PROBLEME

Partie A 4.25points

On considère la fonction h de IR vers IR par $h(x) = (-3 - 2x)e^{-x}$ et les équations différentielles $(E): y'' + y' - 2y = (8+4x)e^{-x}$ et $(E') : y'' + y' - 2y = 0$.

1. Montrer que h est solution de (E). 0.75pt
2. Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g + h$ est solution de (E). 1pt
3. a) Résoudre dans IR l'équation (E'). 1pt
   b) En déduire dans IR les solutions de (E). 0.5pt
4. Déterminer la solution de (E) pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. 1pt

Partie B 6.75 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$; on considère la fonction f à variable réel x telle que $f(x) = (-3-2x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative. (unité graphique $OI = OJ = 2cm$.)

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes. 0.75pts.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1.5pt.
3. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en déduire une interprétation géométrique. 0.5pt
4. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère et construire (C). 1.5pt
5. Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ $avec\ \alpha > 0$.
   a) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α. 1pt
   b) Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend $+\infty$. 0.5pt
6. Soit (V_n) $n \in IN$ la suite définie par $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = f(V_n). \end{cases}$
   Construire les 04 premiers termes de la suite (V_n) sur l'axe des abscisses. 1pt