AS EAGLE

PREPA BAC 2022 SERIE D

Prof : Mr Adam's
Niveau : Tle D

MATHEMATIQUES

Tests objectifs – Statistiques – Nombres complexes– Fonctions

Exercice 1 : *Test objectif*

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivie de Vrai si l'affirmation est vraie et de Faux si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Le nombre complexe $Z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$ a pour argument principal $\frac{\pi}{6}$
2	La fonction h définie par $h(x) = e^{\frac{1}{x}} + e^x - 1$ a pour ensemble de définition IR
3	Soit X la variable aléatoire suivant une loi Binominale de paramètres n et p, q étant la probabilité de l'échec. On a : E(X) = n − nq
4	La suite (U_n) définie par $U_n = \ln(2 \times 3^n)$ est une suite arithmétique de raison ln3

Exercice 2 : *Test objectif*

Pour chacune des propositions suivantes indique, le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse. ***Exemple : 5 – B***.

	Enoncés	A	B	C
1	$\forall x \in IR, x + \ln(1 + e^{-x})$ *est égal* à	$\ln(e^x + 1)$	$x + \ln(1 + e^x)$	$x - \ln(e^x + 1)$
2	Une racine carrée de $3 + 4i$ est	$2 - i$	$-2 + i$	$2 + i$
3	L'équation (E) : $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ a pour solution	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
4	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x}$ est égal à	0	-3	3
5	Toute suite croissante converge si elle est	Arithmétique	Majorée	Géométrique

Exercice 3 : *Statistiques*

On a effectué une recherche sur la vitesse de propagation de l'influx nerveux dans une fibre nerveuse en fonction du diamètre de la fibre.
On désigne par X le diamètre en microns de la fibre nerveuse et par Y la vitesse en mètres par seconde (m/s) de l'influx nerveux dans la fibre de diamètre X.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Diamètre de la fibre nerveuse x_i	3	5	7	8	10	12	14	15	16
Vitesse de l'influx nerveux y_i	12	25	30	42	50	54	58	60	74

1. Représente le nuage de points associés à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *On prendra 1 cm pour 1 micron sur (OI) et 1 cm pour 5 m/s sur (OJ).*
2. Détermine les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X, Y).
3. a. Calcule la variance V(X) de X. *(On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).*
   b. Vérifie que l'arrondi d'ordre 2 de la variance de Y est V(Y) = 340,44.
4. a. Justifie que la covariance de X et Y est égale à $\frac{701}{9}$.
   b. Justifie l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.
5. Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a. Démontre qu'une équation de la droite (D) est : $y = 4{,}17x + 3{,}3$.
b. Trace la droite (D).
6. Détermine selon la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé :
a. La vitesse de l'influx nerveux à travers une fibre nerveuse de diamètre 18 microns.
b. Le diamètre de la fibre correspondant à une vitesse de 36 km/h.

Exercice 4 : *Nombres complexes et Géométrie du plan*

1. On considère l'équation (E), $z \not\subset$, $(1+i)z^3 + (5+i)z^2 - 2(1+3i)z - 24 = 0$.
   a. Démontre que l'équation (E) admet deux solutions réelles qu'on notera z_0 et z_1 avec $z_0 > z_1$.
   b. Détermine les nombres complexes a et b tels que l'équation (E) soit équivalente à $(z-2)(z+3)(az+b) = 0$.
   c. Résous l'équation (E). On notera z_2 la troisième solution.
2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points M, N et P d'affixes respectives 2 ; $-2+2i$ et -3. r désigne la rotation qui transforme M en N et J en P.
   a. Démontre que l'écriture complexe de r est : $z' = iz - 2$
   b. Détermine les éléments caractéristiques de r.
3. Soit s la similitude directe de centre le point A(-1 ; 2) de rapport 2 et d' angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Prouve que l'écriture complexe de s est $z' = 2iz + 3 + 4i$
   b. On pose $f = r \circ s$.
   Démontre que l'écriture complexe de f est : $z' = -2z - 6 + 3i$.
   c. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
4. On note E l'antécédent de M par s et F l'image de A par r.
   a. Détermine les affixes des points E et F.
   b. Démontre que les droites (AE) et (NF) sont parallèles.

Exercice 5 : *Etude de fonction*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{2x} - xe^x$.
On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité : 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^x - 1$.
1. Étudie les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.
2. a. Démontre que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Vérifie que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.
3. Démontre que : $\begin{array}{l} \forall x \in]-\infty\,;\alpha[,\ \ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ \ g(x) > 0 \end{array}$

Partie B

1. a. Calcule la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Interpréte graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b. Interpréte graphiquement les résultats obtenus.
3. Démontre que pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)g(x)e^x$.
4. Détermine le sens de variation de f.
5. a. Détermine que $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$.
   b. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ par deux entiers consécutifs.
6. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
7. a. Calcule $f(0)$.
   b. Démontre que l'équation, $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $f(x) = 0$ admet une unique solution β.
   Vérifie que $0{,}56 < \beta < 0{,}57$.
8. a. Détermine le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. Interpréte graphiquement le résultat ci-dessus.

9. Justifie que la tangente (T) à (C_f) au point O a pour équation $y = -x$.
10. Construis (T) et (C_f). On prendra $\alpha = 0{,}35$ et $\beta = 0{,}56$.

Partie C

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x}$.

1. À l'aide de deux intégrations par parties montre qu'une primitive de la fonction qui $\forall\, x \longmapsto x^2e^{2x}$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x}$.
2. Détermine les réels a et b tels que la fonction $x \longmapsto (ax + b)e^x$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto xe^x$.
3. On désigne par D le domaine du plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.
   a. Hachure le domaine D.
   b. Calcule l'aire du domaine D en cm².

Exercice 6 : *Situation complexe*

La coopérative d'un lycée a reçu le terrain représenté ci-dessous par la zone hachurée pour cultiver de la tomate.

Le géomètre qui a travaillé sur le lot du lycée affirme que la courbe (C) représentée ci-dessous est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 124$; x en mètres.

Les élèves de la promotion terminale souhaitent connaître l'aire de leur terrain pour acheter les grains de tomates. Ils te sollicitent pour cela.

En utilisant tes connaissances Mathématiques au programme, Détermine l'aire du terrain.