AS EAGLE

PREPA BAC 2022 SERIE D

***Prof* : Mr Adam's**

***Niveau* : Tle D**

MATHEMATIQUES

Tests objectifs – Probabilités – Suites numériques – Fonctions

Exercice 1 **:** *Test objectif*

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivie de Vrai si l'affirmation est vraie et de Faux si l'affirmation est fausse.

1- $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}$

2- La fonction lnx est strictement positive et croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3- La variance d'une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres n et p est donnée par la formule de $V(X) = npq$

4- $\lim\limits_{x\to 0_>} \left(\frac{x}{2}\right) ln\left(\frac{2}{x}\right) = 0$.

Exercice 2 **:** *Test objectif*

Pour chacune des propositions suivantes indique, le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	On considère dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation (I) : $e^{-x} + 1 > 0$. I admet pour ensemble de solution	A	$]-1; +\infty[$
		B	IR
		C	0
		D	$]-\infty\,;1[$
2	La forme algébrique du nombre complexe $Z = -4e^{i\frac{\pi}{2}}$ est :	A	4
		B	0
		C	1
		D	-4
3	$\lim\limits_{x\to 0_>} \frac{e^x}{x} + \ln x - \frac{1}{x}$ est égal à :	A	$+\infty$
		B	0
		C	1
		D	$-\infty$
4	Soit f la fonction polynôme définie par $x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4$ La courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) admet un point d'inflexion au point d'abscisse.	A	-1
		B	$3 + 2\sqrt{2}$
		C	0
		D	4

Exercice 3 : *Probabilité*

En vue d'une bonne organisation de la coupe d'Afrique des nations de football 2023 en Côte d'ivoire, une entreprise de fabrique de ballon en caoutchouc vérifie la qualité de sa production avant la commercialisation.
Chaque ballon produit par l'usine est soumis à deux contrôles :
D'une part, l'aspect du ballon est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition.
D'autre part, sa solidité est testée. Il s'avère que :

- 92% sont sans défaut de finition.
- Parmi les ballons qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité.
- 2% des ballons ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On choisit au hasard un ballon parmi les seaux produits. On considère les événements suivants :
A : « le ballon choisi est sans défaut de finition ».
B : « le ballon réussit le test de solidité ».

1. a. Donner la valeur de chacune des probabilités suivantes : $P(A)$; $P_A(B)$ et $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.
   b. Calcule $P(\overline{A})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$
   c. Justifie que la probabilité $P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{4}$.
2. a. Construis un arbre de probabilité.
   b. Démontre que $P(B) = 0{,}934$.
   c. Un ballon a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

3. On prélève au hasard 4 ballons dans la production de l'usine. Les contrôles des 4 ballons sont indépendants les uns des autres et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de ballon de ce lot subissant avec succès le test de solidité.
   a. Détermine les valeurs prises par X.
   b. Calcule $P(0 < X \leq 2)$ et déterminer la loi de probabilité de X. *(Arrondi d'ordre 3 des résultats).*
   c. Calcule l'espérance mathématique E(X) et la variance de X.
4. Soit n un nombre entier naturel.
   On décide de choisir au hasard n ballons dans la production de l'usine et on s'intéresse au nombre de ballon du lot ayant réussi le test de solidité.
   a. Démontre que la probabilité P_n qu'au moins un ballon réussisse le test de solidité est
   b. $P_n = 1 - (0{,}066)^n$.
   c. Détermine la valeur minimale de l'entier n pour que P_n soit supérieure à 99%.

Exercice 4 **:** *Suites numériques*

Soit a un nombre réel donné.
On considère les suites U et V définies respectivement par :

- $U_0 = 3, U_1 = 5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_{n+1} - U_n$

1. On pose : $a = 1$.
   a. Démontre que la suite V est constante et donner sa valeur.
   b. En déduis que U est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
   c. On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
   Exprime U_n puis S_n en fonction de n.
2. On pose : $a = -5$.
   a. Démontre que la suite V_n est une suite géométrique dont la raison est 7.
   b. Exprime V_n en fonction de n.
   c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n où : $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$
   d. Exprime U_n en fonction de T_n.
   e. En déduis que la suite U est divergente.

Exercice 5 **:** *Etude de fonction*

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;1[$ par : $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x)$

1. Calcule $g(0)$.
2. On admet que g est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et on note g' sa fonction dérivée.
   a. Calcule $g'(x)$ pour tout x élément de $]-\infty\,;1[$.
   b. Détermine, suivant les valeurs de x, le signe de $g'(x)$.
   c. Dresse le tableau de variation de g.
3. Déduis du tableau de variation de g que : $\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in\,]0\,;1[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{ln(1-x)}{1-x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

1. a. Calcule la limite de f à gauche en 1.
   b. En déduis que (C) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.
2. Justifie que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$.
3. Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4. Etudie la position de (C) par rapport à (D).
5. On admet que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Justifie que : $\forall\, x \in\,]-\infty\,;1[,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$.

b. Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresser le tableau de variation de f.

6. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
   a. Démontre que h est une bijection de $]-\infty\,;0[$ sur l'intervalle K que l'on précisera.
   b. Démontre que l'équation $(E) : x \in]-\infty\,;1[, f(x) = 0$ admet exactement deux solution α_1 et α_2 telles que $-1{,}37 < \alpha_1 < -1{,}36$ et $0{,}5 < \alpha_2 < 0{,}52$.
   c. Vérifie que si un nombre réel α est une solution de l'équation (E) alors on a : $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$.
   d. On désigne par (C') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère (O, I, J).
   Construis (C) et (C'). *(On utilisera deux couleurs différentes).*

Partie C

Soit A l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (D) et la droite d'équation $x = \alpha_1$.

1. Calcule A et exprimer le résultat sans le symbole "ln".
2. Calcule une valeur approchée de A à 10^{-1} près.

Exercice 6 **:** *Situation complexe*

En regardant un documentaire à la télévision, un élève en classe de terminale D a appris que :

*« Dans une forêt africaine, la population de singes était de 512 en l'an 2000 et de 256 en 2016.
La vitesse de diminution de cette population est, à chaque instant, proportionnelle à cette population. »*

Cet élève rapporte cette information à ses amis de classe et le chef de classe affirme qu'il ne devrait plus avoir de singes dans cette forêt après l'an 2030.
N'étant pas convaincu par cette affirmation, certains élèves de la classe cherchent à la vérifier.
En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, confirme ou infirme l'affirmation du chef de classe.