

Bac D 2011 session normale

Exercice 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$

1.a. Démontrer que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n , $a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

a. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n)

3. On pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

a. Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite (b_n) .

Exercice 2

La société “Gnamienlait” de Gnamien produit des sachets de lait caillé.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0.08	0.10	a	b	0.16	0.15	0.04

a et b sont deux nombres réels.

x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;

P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i

1.a. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b. Sachant que $E(X) = 250$, justifier que $a = 0,14$ et $b = 0,33$.

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et b données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250g

- Si un sachet de lait caillé a 240g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.

- Si un sachet de lait caillé a 230g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.

- Si un sachet de lait caillé a 220g, il est systématiquement éliminé.

- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240g soit éliminé est de 0,098.

b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{-2x+1}{x^2} + \ln x$.

1.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2.a. Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g

c. Dresser le tableau de variation de g

3.a. Démontrer que l'équation $x \in]0; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α

b. Justifier que $2,55 < \alpha < 2,56$

c. Démontrer que
$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

(Unités graphiques : OI = 2cm et OJ = 10 cm)

1.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que $f(a) = -\frac{1+a}{a^2} e^{-a}$

3.a Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f .

c. Dresser le tableau de variation de f

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

5. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O,I,J). On prendra $a = 2,6$

Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^x \ln x$.

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Calculer, en cm^2 et en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI), et les droites d'équation : $x = 3$ et $x = \lambda$.

b. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$