

EXERCICE 1 : BAC 2018

1. Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$.
2. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
 - a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
 - b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C = -1$
 - a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B .
 - b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.
4. Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
 - a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.
 - b) Démontrer que $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD .
5. Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O . On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B .
 - a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques.
 - b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par S .

EXERCICE 2 : BAC 2017

- Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :
- $$P(z) = z^4 + (3-i)z^3 + (4-3i)z^2 + (12-4i)z - 12i$$
- et l'équation $(E): z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
1. a. Montrer que $P(z)$ est divisible par $(z-i)(z+3)$
 - b. Factoriser $P(z)$
 - c. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sous la forme trigonométrique.
 2. a. Déterminer les nombres complexes α et β solutions de l'équation (E) et $\text{Im}(\alpha) > 0$
 - b. Écrire α et β sous la forme trigonométrique.
 3. On considère un dé bien équilibré à six faces et sur chaque face, on inscrit l'un des nombres : $i; 2i; -2i; \sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i$ et -3 .
On lance ce dé et on note z le nombre qui apparaît sur sa face supérieure.
 - a) Calculer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
 $A: \ll z \text{ est réel} \gg \quad B: \ll z \text{ est imaginaire pur} \gg$
 - b) On lance 5 fois de suite ce même dé. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la réalisation de B .

4. On définit la variable aléatoire θ qui, à chaque nombre z inscrit sur une face, associe son argument principal.
 - a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par θ .
 - b) Déterminer la loi de probabilité θ .
 - b) Calculer son espérance mathématique $E(\theta)$.

EXERCICE 3 : BAC 2016

1. On considère l'équation $(E): z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$ où z est un nombre complexe.
 - a) Déterminer la solution réelle de (E) .
 - b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2. On pose $a = 3; b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c . Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B .
 - a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC .
 - b) On pose $\frac{z-3}{z-5+2i}$. Donner une interprétation géométrique de Z .
En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit un réel non nul.
3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.
 - a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$
 - b) Déterminer l'image (C') de (C) par r .
Construire (C') .

EXERCICE 4 : BAC 2015

1. Soit $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.
 - a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de $P(z)$
 - b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i, -1 - 2i$ et $-4 + i$.
 - a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC .
 - b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) [2\pi]$.
 - c) En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
 - d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC .
3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .
 - a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$
 - b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r
4. Soit $T: M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2.

b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$.

5. On considère la transformation $g = r \circ T$. On suppose dans ce qui suit $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g .

EXERCICE N°5 : BAC 2014

A- Questions de cours

1. Rappeler les formes algébrique, exponentielle et

trigonométrique d'un nombre complexe z non nul

2. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d'angle θ .

B- On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Donner une écriture trigonométrique de z_0 .

2. Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

4. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 2 cm, Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.

6. Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

7. Vérifier que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$.

8. En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°6 : BAC 2013

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. S est la similitude plane directe de centre

O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$

1. Exprimer z' en fonction de z

2. On définit la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon

suivante : $\begin{cases} M_0 \text{ d'affixe } z_0 = 1 + i \\ M_n = S(M_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

z_n est l'affixe de M_n , pour tout entier naturel n .

a) Déterminer les affixes des points M_1 , M_2 et M_3

b) Exprimer z_n en fonction de z_{n-1} pour $n \geq 1$

c) En déduire que $z_n = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n z_0$

d) Soit $a_n = |z_n|$, montrer que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

e) Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

EXERCICE N°7 : BAC 2012

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct. Unité 2 cm

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0. \quad (E)$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2i$ et i . Placer les points A, B et C dans le repère.

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+i$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$

a) Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$.

b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des

points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur

c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$.

4. Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B.

a) Déterminer la nature du triangle ABC.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S

c) Déterminer les images par S de (E_1) et (E_2) puis les construire. (Utiliser des couleurs différentes)

EXERCICE N°8 : BAC 2011

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct.

I. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ et x, y réels.

1. Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est la partie réelle ? Quelle est la partie imaginaire ?

2. Quel est le module de z ?

3. Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z .

4. Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ . Exprimer z' en fonction de z et θ .

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit. (E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E).

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.

Calculer OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB

3. On désigne par C le point d'affixe $\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O, 1); (D, -1) et (B, -1).

a) Montrer que le point G a pour affixe

$$g = -4\sqrt{3} + 6i.$$

b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1 cm)

5. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{GA}, \vec{GC})$. En déduire la nature du triangle GAC

EXERCICE N°9 : BAC 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\text{cm}$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En remarquant que $2^3 = 8$, déduire de 1) a) les solutions de l'équation $z^3 = 8$

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$, 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

a) Placer ces points dans le repère

b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

c) En déduire la nature du triangle ABC

3. On considère f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z$.

a) Déterminer la nature de f puis donner ses éléments géométriques caractéristiques.

b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f .

En déduire l'image de la droite (AC) par f .

EXERCICE N°10 : BAC 2009

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants

A : « M appartient à l'axe des abscisses » ;

B : « M appartient à l'axe des ordonnées » ;

C : « M appartient aux deux axes » ;

D : « M n'appartient à aucun des axes » ;

E : « l'angle $(\vec{OM}, \vec{i})$ est égal à $\frac{\pi}{4}$ » ;

F : « le point M appartient au cercle trigonométrique ».

2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer la fonction de répartition de X .

EXERCICE N°11 : BAC 2008

1. On considère l'équation : (E) :

$$z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$$

a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).

b) Achever la résolution de (E) (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution)

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$, $3 + 3i$ et $3 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC

2. Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .

a) Donner une écriture complexe de f .

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE N°12 : BAC 2007

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$$

1. a) Déterminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déterminer la troisième solution de cette équation.

2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives

$1, i$ et $2 + i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon r à déterminer.

EXERCICE N°13 : BAC 2006

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E) : z^2 + 2z + 2 = 0.$$

b) On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution de (E).

Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On considère les

points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et

$\sqrt{3} + i$. Placer les points A, B et C .

c) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

3. On considère l'équation différentielle :

$$ay'' - by' + cy = 0, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ désignent trois paramètres éléments de l'ensemble } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pour déterminer a, b et c , on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

a) Justifier que l'équation différentielle :

$$ay'' - by' + cy = 0 \text{ a pour solutions les fonctions de la forme}$$

$x \mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x$ où A et B sont des réels si et seulement si $1 + i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z $az^2 + bz + c = 0$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x. A \text{ et } B \text{ étant des constantes réelles.}$$

EXERCICE N°14 : BAC 2005

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2. a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, Déterminer sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique les racines de (E)

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE N°15 : BAC 2004

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite

arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

1. a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n b) Enduire z_n .

2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

3. Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n .

a) Déterminer la nature de la transforme F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1} .

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$$

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n .

b) Démontrer que si n est impair alors Z_n est réel.

EXERCICE N°16 : BAC 2003

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer

b) Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions (E)

c. Donner l'ensemble des solutions de (E).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i, 3i, -2 + 3i$. Soit $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, -2), (C, 1)\}$

a) Montrer que les vecteurs $\vec{GA}, \vec{GB}$ et $\vec{GC}$ ont pour

affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i$ et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces

affixes sont dans cet ordre en progression

géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C . Donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE N°17 : BAC 2002

1. Montrer que dans $\mathbb{C}$ la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est égale à zéro $n \geq 2$.

2. En utilisant les résultats du 1) montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ est solution de l'équation } 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE N°18 : BAC 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}.$$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $f(z) = z$. Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer $z_1^4 + z_2^4$.

2. Soit $M(z)$ un point de (P) . Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur, donner une équation cartésienne de (Γ) , Tracer (Γ) .

3. Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$.

EXERCICE 19 : BAC 2000

On considère les points A_1, A_2 et A_3 d'affixes

respectives : $z_1 = 1, z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$.

b) Donner une écriture trigonométrique de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

En déduire les valeurs exactes $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1

a) Préciser les éléments caractéristiques de S

b) On désigne par M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z .

Exprimer z' en fonction de z . En déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE N°20 : BAC 1999

On considère l'équation

$$(E): z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b) Achever la résolution de (E).

2. Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -1, z_B = -2 + i \text{ et } z_C = i.$$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C .

EXERCICE N°21 : BAC 1998

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^2 - 2z + 5 = 0$

$$b) z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

2. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i, 1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i$ et $1 - 2i$.

a) Placer A, B, C, D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$ en déduire la nature du triangle ABD .

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

2. On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0; \theta \in \mathbb{R}.$$

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C) .

EXERCICE N°22 : BAC 1997

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe : $w = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$ b) En déduire ses racines carrées.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0.$$

3. Soit z_1 la solution imaginaire pure et z_2 l'autre solution, montrer que $\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = w$

4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ soit A, B et C les points d'afixes respectives $2i, z_1, z_2$. Préciser la nature du triangle ABC en utilisant 1. a)

EXERCICE N°23 : BAC 1996

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\sin^2 \alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2 \alpha = 0; 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

2. On désigne par Z' et Z'' les solutions obtenues avec $\text{Im}(Z') > 0$. Vérifier que $Z'^2 + Z''^2$ est un réel indépendant de α .

3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par M' et M'' les points respectives Z' et Z'' .

a) Déterminer α tel que : $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$

b) α étant le réel trouvé au 3-a-, montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

EXERCICE N°24 : BAC 1995

On considère le polynôme P de variable complexe z définie par $P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i$

1. Calculer $P(i)$ puis déterminer toutes les racines de $P(z)$ on notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.

1. a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe $\frac{z_1 - i}{z_2 - i}$.

b) Dans le plan complexe de repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par $A(i), B(z_1)$ et $C(z_2)$

Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC .

2. On considère $A(i), B(-i)$ et $M(z)$ on pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$

a) Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur

1. a) Interprétez géométriquement les modules de $z - i$ et $z + i$.

b) Montrer que $|Z| = 1$ si et seulement si z est réel

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ déduire de la question précédente que l'équation

$$(E): \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a \text{ n'admet que des solutions réelles. (On ne demande pas de les calculer).}$$

d) Résoudre l'équation $Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$. En déduire les solutions de (E) .

EXERCICE N°25 BAC 1994

On considère le nombre complexe $c = 1 - i$.

1. Calculer c^2 et c^5 . Dans un plan muni d'un repère orthonormé, marquez les points qui ont pour affixe, c, c^2 et c^5 .

2. A tout point M , d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' , avec : $z' = cz + c^5$. On définit ainsi une transformation T du plan.

Déterminer l'affixe du point S , invariant par T .

Précisez la nature et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE N°26 BAC 1992

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, soit M le point d'affixe z , A celui d'affixe i et B celui d'affixe $-i$. On pose :

$$Z = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. a) Déterminer l'ensemble D des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble C des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

2. a) Interpréter géométriquement les modules de : $z - i$ et $z + i$.

Montrer que $|Z| = 1$, si et seulement si z est réel.

b) Soit n un entier naturel non nul et a un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Déduire de la question précédente que l'équation :

$(E): \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a$, n'admet que des solutions réelles. (On ne demande pas de les calculer)

c) Résoudre l'équation : $Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$ En déduire les solutions de (E) .

EXERCICE N°27 BAC 1991

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$$P(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 24X + 40$$

1. Montrer qu'il existe deux complexes imaginaires purs solutions de $P(X) = 0$.

2. En déduire une factorisation de $P(X)$ en produit de deux polynômes du 2^{ème} degré à coefficients réels.

3. Résoudre $P(X) = 0$.

EXERCICE N°28 BAC 1990

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z associe le nombre complexe z définie par :

$$Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$$

1. Montrer que le nombre $\omega = 1 + i$ est invariant par f .

2. Montrer que $Z - \omega = (1 + i\sqrt{3})(z - \omega)$

3. Soit m, M, W les représentant dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ des nombres complexes z, Z, ω .

- a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\frac{z-\omega}{z-\bar{\omega}}$.
- b) Montrer que M est l'image de m dans la composée d'une rotation dont on précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
- c) Faire une figure représentant W, m, M .
- d) Montrer que le triangle (WmM) est un triangle rectangle.
4. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\left(\frac{z-\omega}{z-\bar{\omega}}\right)^n$ où n est un entier naturel, en fonction de n .

EXERCICE N°29 BAC 1989

Soit le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$P(z) = iz^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + i$$

1. a) Calculer $P(i)$.
- b) En déduire dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des racines de l'équation : $P(i) = 0$ (α).
2. On appelle z_1 la solution de l'équation (α) dont la partie réelle est strictement positive.
3. Soit $Z = z_2 - 1$.
- a) Mettre Z sous forme trigonométrique.
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
- c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

EXERCICE N°30 BAC 1988

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z + 3i}{i\bar{z} - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, M, M' et M'' les points d'affixes respectives : $-3i, 1, z, \bar{z}$ et $i\bar{z}$, z étant élément de D_f .
- a) Placer les points A, B, M, M' et M'' (on choisira pour ce dessin : le point $M(z)$ sur la droite (AB) avec $Re(z) > 0, Im(z) > 0$. ($Re(z) > Im(z)$)).
- b) Déterminer l'ensemble S_1 des points M tels que : $M'' = B$.
- c) Déterminer l'ensemble S_2 des points M tels que : $M'' = M$, le dessiner.
- d) Donner une interprétation géométrique des arguments de : $(z + 3i)$ et $(i\bar{z} - 1)$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de $f(z)$.
- e) Déterminer l'ensemble S_3 des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit imaginaire pur.

- f) En déduire l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{BM''}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux et le dessiner.