

TONTISKO ORNEL EDU-IA

CORRIGÉ TRAVAUX DIRIGÉS

Limites et continuité

MATIÈRE

Mathématiques

NIVEAU

Terminale

SÉRIE

Terminale D

NUMÉRO DE LA LEÇON

1

THÈME

—

DURÉE

55 minutes

 Contenu généré avec l'assistance de l'intelligence artificielle.

Cette fiche constitue une proposition pédagogique destinée à accompagner l'enseignant dans sa préparation. L'enseignant doit vérifier, corriger et adapter son contenu conformément aux programmes, instructions et documents officiels en vigueur avant toute utilisation en classe.

Vérifiée par l'enseignant le 07/09/2026.

TONTISKO ORNEL EDU-IA

CORRIGÉ – TRAVAUX DIRIGÉS : LIMITES, ASYMPTOTES ET CONTINUITÉ

Niveau : Terminale

Série : Terminale D

Spécialité : Mathématiques

Matière / Discipline / Module : Mathématiques

Leçon : Limites et continuité

Durée : 2 heures

Exercice Exercice 1. 1. Pour le polynôme en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 2x^3 - x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -3(+\infty) = -\infty$$

2. Pour la fraction rationnelle en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x + 2}{2x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = 2$$

3. En $x = 2$, on a la forme $\frac{0}{0}$. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ et } x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

Pour tout $x \neq 2$:

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1} = \frac{4 + 4 + 4}{2 - 1} = 12$$

4. En $x = 1$, forme $\frac{0}{0}$. On multiplie par l'expression conjuguée $\sqrt{x + 3} + 2$:

$$\frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \frac{(x + 3) - 4}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Exercice Exercice 2. 1. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \times \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{5}{3}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = 1 \times 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

2. On utilise la limite de référence $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$ avec $u = 4x$:

$$\frac{1 - \cos(4x)}{x^2} = 16 \times \frac{1 - \cos(4x)}{(4x)^2}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2} = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

3. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$.

En divisant par $3x - 1 > 0$:

$$\frac{2x - 1}{3x - 1} \leq \frac{2x + \sin x}{3x - 1} \leq \frac{2x + 1}{3x - 1}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{3x-1} = \frac{2}{3}$.

Exercice Exercice 3. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. Limites aux bornes :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$.

- En 2 : numérateur $2(2)^2 - 5(2) + 5 = 8 - 10 + 5 = 3 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

(La droite $x = 2$ est asymptote verticale).

3. Par division euclidienne de $2x^2 - 5x + 5$ par $x - 2$:

$2x^2 - 5x + 5 = (x-2)(2x-1) + 3$.

Donc pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x-2}$.

Ainsi $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.

4. On a $f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x-2}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = 0$.

Donc la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et $-\infty$.

5. Signe de $f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x-2}$:

- Sur $]2; +\infty[$, $x - 2 > 0 \implies f(x) - (2x - 1) > 0 \implies (C_f)$ est strictement au-dessus de (D) .

- Sur $] -\infty; 2[$, $x - 2 < 0 \implies f(x) - (2x - 1) < 0 \implies (C_f)$ est strictement au-dessous de (D) .

Exercice Exercice 4. 1. Pour $x \neq 0$, on multiplie par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2 + 9} + 3$:

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{(x^2 + 9) - 9}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9} + 3}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{0}{3 + 3} = 0$$

2. Continuité en 0 :

On constate que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$.

Par définition, la fonction g est donc continue en 0.

Exercice Exercice 5. 1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$h'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Tableau de variations :

x va de $-\infty$ à $+\infty$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Application du théorème de la bijection :

- h est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme).

- h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $h(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Localisation :

$$h(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1 < 0.$$

$$h(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9 > 0.$$

Comme $h(1) < 0 < h(2)$ et h strictement croissante, $\alpha \in]1; 2[$.

Par balayage à la calculatrice :

$$h(1,15) \approx -0,029 < 0 \text{ et } h(1,16) \approx 0,041 > 0.$$

Donc un encadrement à 10^{-2} près est : $1,15 < \alpha < 1,16$.

4. Signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Comme h est strictement croissante et s'annule en α :

- Pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, $h(x) < 0$.

- Pour $x = \alpha$, $h(\alpha) = 0$.

- Pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $h(x) > 0$.

 Contenu généré avec l'assistance de l'intelligence artificielle. Cette fiche constitue une proposition pédagogique destinée à accompagner l'enseignant dans sa préparation. L'enseignant doit vérifier, corriger et adapter son contenu conformément aux programmes, instructions et documents officiels en vigueur avant toute utilisation en classe.

Dernière mise à jour : 07/09/2026

TONTISKO ORNEL EDU-IA – L'intelligence artificielle au service des enseignants.