FICHE DE TRAVAUX DIRIGES MATHS (LIMITES ET CONTINUITE)

Niveau : Tle D
Prof. : M. TEHUA

EXERCICE 1

(O ; I ; J) est un repère du plan.
(C) est la représentation graphique d'une fonction f ; d'ensemble de définition D_f.
Pour chaque proposition répond par Vrai ou Faux. (Exemple : 10 – Vrai ou 10 – Faux).

1	Si $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ \frac{2}{x^2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} + 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
2	La courbe représentative de la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.
3	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a\,;+\infty[$, alors, on a : $f([a\,;+\infty[) = \left[f(a)\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.
4	Si f une fonction et strictement decroissante sur un intervalle K et si $0 \notin f(K)$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans K.
5	Si f et g sont deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ telles que g ne s'annule pas. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x))}{g(x)} = -1$.
6	Si $f(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2}$; $x \neq 2$ et $f(2) = -\frac{5}{4}$ alors f est continue en 2.
7	(C) est la courbe représentative d'une fonction f telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

EXERCICE 2

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 4x^3 - x^{11} + 8$; 2. $f(x) = \frac{3x^2-2x+5}{-x^2+x-3}$; 3. $f(x) = \frac{2x}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$; 4. $f(x) = \sqrt{2}$

EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x+1}{x-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{2x^3+x}{x^2-2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to2} \frac{4-x^2}{x^2+x-6}$; 5. $\lim\limits_{x\to2018} 25$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{4-x^2}{x^3}$; 7. $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ >}} \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; 8. $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ >}} \frac{3x-2}{4-x^2}$; 9. $\lim\limits_{\substack{x\to5 \\ <}} \frac{x^2+2x+3}{x^2-25}$; 10. $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$; 5. $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{12-2x}}{x-4}$; 6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}$; 7. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x+1}-2}$

EXERCICE 5

A - On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} fog(x)$.

B - Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-2x^3+5x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1-2\pi x}{3x+4}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to2} \left|\frac{x^2+x-6}{2-x}\right|$; 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^4+2)^7$

EXERCICE 6

1. On donne f : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;-1],\ f(x) = \sqrt{1-x} \\ \forall x \in]-1;+\infty[,\ f(x) = \sqrt{3+x} \end{cases}$

   Justifions que f est continue en -1.

2. Justifions que la fonction g suivante n'est pas continue en 1.

$$g : \begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;-1[,\ g(x) = x^2 - x - 3 \\ \forall x \in [-1;+\infty[,\ g(x) = x - 2 \end{cases}$$

EXERCICE 7

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-3}{x-1}$

f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui préciser ce prolongement.

EXERCICE 8

Ecrire chacun des nombres réels ci-dessous sous la forme a^p, a étant un entier naturel et p un nombre rationnel.

$\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{6^{12}}$; $\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}$; $\sqrt[5]{3^4}\left(\sqrt[5]{3^3}\right)^5$; $\left(2^3\right)^3\left(\sqrt[4]{2^2}.\sqrt[3]{2^4}\right)$; $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{3}\times\sqrt{81}}$

EXERCICE 9

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^α où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\dfrac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$; $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}$.
2. Justifie que : $\dfrac{4\times\sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.
3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

EXERCICE 10

Partie A . g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.
4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontre que : $\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

3. Trace (T) et (C).

SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.