MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION RÉGIONALE ABIDJAN 1
GROUPE SCOLAIRE LES FIGUIERS
COLLÈGE LE FIGUIER ABIDJAN
DIRECTION DES ÉTUDES DU SECOND CYCLE

Le Groupe Scolaire Les Figuiers
Le Collège Le Figuier
Humilité - Discipline - Travail

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

NIVEAU : Terminale D
CE : Maths

FICHE D'EXERCICES
LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1 : Calculs de limites fondamentales

Déterminer les limites suivantes en précisant la méthode employée (*factorisation, expression conjuguée, taux de variation, changement de variable*) :

1.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-2x\right)$

2.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)$

3.) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

4.) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{\sqrt{x+1}-1}$

5.) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

6.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2 : Limites par comparaison et encadrement

1.) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2-x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Démontrer que pour tout $x>0$: $2-x\leqslant f(x)\leqslant 2+x$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

2.) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x+2\cos x}{2x+1}$.

a) Établir que pour tout $x>0$: $\dfrac{x-2}{2x+1}\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{x+2}{2x+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

3.) Soit h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x}+\sin^2(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

Exercice 3 : Limites d'une fonction composée

En utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée ($\lim_{x\to x_0}u(x)=L$ et $\lim_{y\to L}v(y)=\ell\implies\lim_{x\to x_0}(v\circ u)(x)=\ell$), calculer les limites suivantes :

1.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x^2+1}{3x^2-x+2}\right)$

2.) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{\sin(3x)}{x}}$

3.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2-x+1}{x^2+5}}$

4.) $\lim\limits_{x\to2}\sin\left(\dfrac{\pi(x-2)}{x^2-4}\right)$

Exercice 4 : Comportement asymptotique et branches paraboliques

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, calculer les limites aux bornes puis préciser la nature de la branche infinie (*asymptote ou branche parabolique de direction* (OI) *ou* (OJ)) :

1.) $f(x) = x\sqrt{x} - 2x + 1$ au voisinage de $+\infty$.

2.) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3.) $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ au voisinage de $+\infty$.

4.) $k(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5 : Prolongement par continuité et continuité en un point

1.) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$. Définir explicitement son prolongement $\widetilde{f}$.

2.) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que g soit continue en 1.

Exercice 6 : Théorème des Valeurs Intermédiaires et Bijection

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 1$.

1.) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2.) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

3.) En déduire l'image par f de l'intervalle $I = [0, 1]$, puis de l'intervalle $J =]-\infty, 2[$.

4.) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.) Justifier que $\alpha \in]0, 1[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

6.) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.

7.) Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 7 : Fonction racine n-ième et puissances à exposants rationnels

Partie A : Simplification et calcul algébrique

1.) Écrire sous forme d'une seule puissance les expressions suivantes ($a > 0$, $b > 0$) :

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^2} \times a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[6]{a^5}} \quad ; \quad B = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8 \times b^4}}$$

2.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3 = -27$ **b)** $x^{\frac{2}{3}} = 4$ **c)** $\sqrt[3]{2x - 1} = 3$

Partie B : Calcul de limites avec racines n-ièmes

1.) On rappelle l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
En déduire que pour tous réels positifs u et v :

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \frac{u - v}{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v^2}}$$

2.) Calculer alors les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Exercice 8 : Problème de synthèse

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - x & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

1.) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2.) Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$ et en $x_0 = -1$.

3.) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4.) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + 2x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique (Δ) en $-\infty$.

c) Préciser la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9 : Problème de synthèse : Étude avec fonction auxiliaire (Type Bac)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1.) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.) Calculer la dérivée $g'(x)$, puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

3.) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $1 < \alpha < 2$, puis déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

4.) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Partie B : Étude de la fonction principale f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$. On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

1.) a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) En donner une interprétation graphique pour $(\mathscr{C}_f)$.

2.) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) En déduire la nature des branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.

3.) a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la dérivée $f'(x)$ est donnée par : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.

b) En utilisant les résultats de la **Partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4.) a) En exploitant la relation $g(\alpha) = 0$, montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha^2+3}{2(\alpha-1)}$.

b) À partir de l'encadrement de α obtenu à la **Partie A**, donner un encadrement de $f(\alpha)$.

5.) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exercice 10 : Situation d'évaluation / Situation complexe

Une entreprise est chargée de concevoir un système de refroidissement pour un nouveau type de smartphone. L'un des objectifs est de s'assurer que la température du nouveau modèle reste à un niveau acceptable, même après une utilisation prolongée.

La modélisation de l'évolution de la température, en degrés Celsius, du nouveau modèle de smartphone en fonction du temps t (en heures, $t \geqslant 0$), suivant une recharge complète de la batterie et lors de l'utilisation d'une application gourmande en énergie est décrite par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{30t + 70}{1 + t}$$

Avant sa mise sur le marché, trois employés de cette entreprise émettent chacun des hypothèses différentes et n'arrivent pas à se mettre d'accord :

- **Employé 1 :** « *La température de ce smartphone atteindra* 28 *degrés à un moment de la journée.* »
- **Employé 2 :** « *La température de ce smartphone évoluera régulièrement sans sauts abrupts au cours du temps et sera toujours comprise entre* 30 *et* 70 *degrés.* »

En utilisant tes connaissances mathématiques, départage les deux employés