

**P<sub>4</sub> : OSCILLATIONS MECANQUES LIBRES**

**EXERCICE 1**

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse  $m$  relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur  $K$ . A l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide (S) coïncide avec l'origine  $O$  d'un repère  $(O, \vec{i})$  d'axe  $x$  horizontal parallèle à l'axe du ressort.

On ne tiendra pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, d'une distance  $x_0$  et on le lance, à  $t = 0$ , avec une vitesse initiale  $v_0$ .

On donne, ci-contre, la courbe traduisant l'évolution de l'élongation  $x(t)$  en fonction du temps :

1) a - Montrer que l'équation horaire du mouvement est :  $\mathbf{x(t) = 7,6 \cdot 10^{-2} \sin(10 \cdot t + \frac{\pi}{6}) \text{ m.}}$

b - Dédire que l'équation horaire de la vitesse est :  $\mathbf{v(t) = 76 \cdot 10^{-2} \sin(10 \cdot t + \frac{2\pi}{3}) \text{ m.s}^{-1}}$

c - Déterminer la valeur de la vitesse  $v_0$ .

2) Une étude expérimentale appropriée a permis de tracer la courbe représentative de l'évolution de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  du pendule en fonction de  $v^2$ .

a - Montrer que :  $\mathbf{E_{pe} = \frac{1}{2} m (V^2_m - v^2)}$

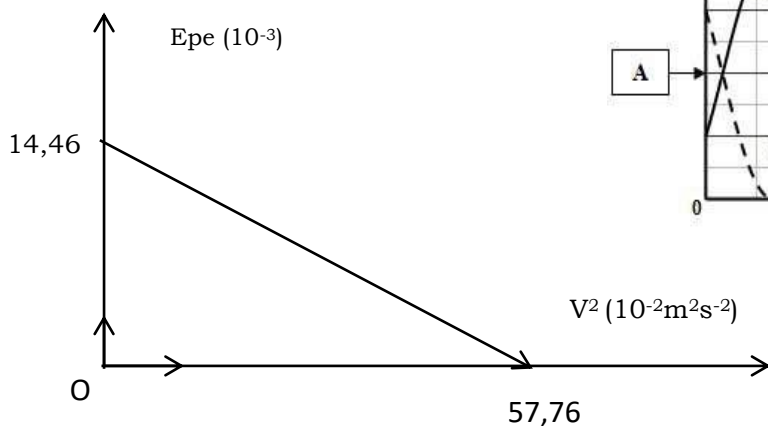
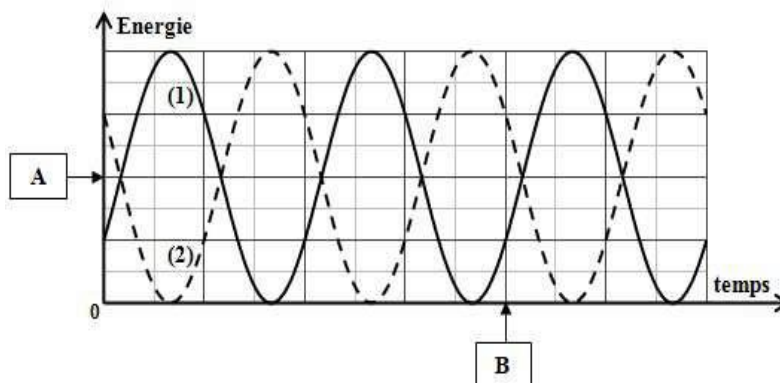
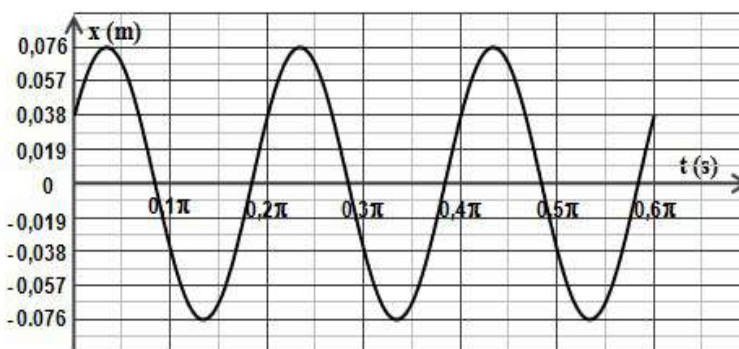
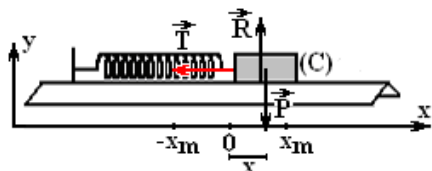
b - Déterminer, graphiquement, la valeur de la masse  $m$  de la bille.

c - En déduire la valeur de la constante de raideur  $k$  du ressort.

3) Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes illustrant l'évolution de l'énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  du système {solide + ressort} en fonction du temps.

a - Donner les valeurs de A et B.

b - Identifier parmi, les courbes (1) et (2), celle qui correspond à l'énergie cinétique  $E_c$ .



## EXERCICE 2

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse  $m$  relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur  $K$ . A l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide (S) coïncide avec l'origine  $O$  d'un repère  $(O, \vec{i})$  d'axe  $x$  horizontal parallèle à l'axe du ressort. On ne tiendra pas compte des frottements.

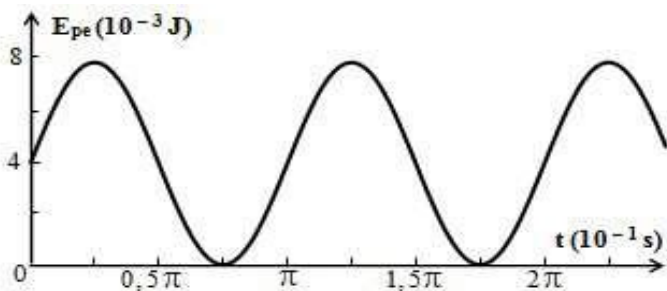
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, jusqu'à l'abscisse  $x_0$  et on le lance, à  $t = 0$ , avec une vitesse initiale  $v_0$  positive.

1) a - Donner l'expression de l'énergie mécanique  $E$  du pendule élastique en fonction de  $m$ , de  $K$ , de l'élongation  $x$  de l'oscillateur et de la vitesse  $v$  du mouvement.

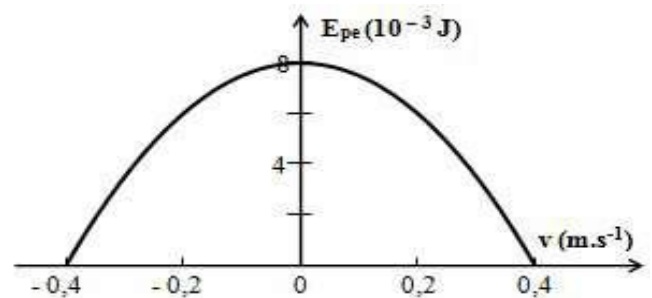
b - En exploitant la conservation de l'énergie  $E$  au cours du temps, déduire l'équation différentielle qui relie l'élongation  $x$  à sa dérivée seconde par rapport au temps.

c - Vérifier que pour  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , l'expression  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$  est une solution de cette équation différentielle. Préciser le nom attribué à  $\omega_0$

2) On donne ci-dessous les graphes (a) et (b) représentant les variations de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  emmagasinée par l'oscillateur respectivement en fonction du temps  $t$  et en fonction de la vitesse  $v$  du mouvement.



graphe (a)



graphe (b)

a - Montrer que  $E_{pe}(t) = \frac{1}{4} K X_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

b - Exprimer la période  $T$  de  $E_{pe}(t)$  en fonction de la période propre  $T_0$  de l'oscillateur.

c - En exploitant les graphes (a) et (b), déterminer la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur ainsi que celle de la vitesse maximale  $V_m$  du mouvement.

En déduire la valeur de l'élongation maximale  $X_m$  du pendule.

d - Calculer alors les valeurs de la raideur  $K$  du ressort et de la masse  $m$  du solide.

3) a - Déterminer la valeur de  $x_0$  et celle de  $v_0$

b - Ecrire les équations horaires de l'élongation  $x(t)$  et de la vitesse  $v(t)$ .

## EXERCICE 3

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse  $m = 0,1 \text{ Kg}$  relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur  $K$ .

A l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide (S) coïncide avec l'origine  $O$  d'un repère  $(O, \vec{i})$  d'axe  $x$  horizontal parallèle à l'axe du ressort. On ne tiendra pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, d'une distance  $x_0 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  et on le lance, à  $t = 0$ , avec une vitesse initiale  $v_0$  positive.

1) L'élongation  $x(t)$  du mouvement satisfait une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

En déduire la nature du mouvement du pendule.

2) Le graphique ci-dessous représente la fonction  $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$

a - En exploitant le graphe, déterminer la pulsation propre  $\omega_0$  du pendule élastique.

b - Calculer la constante de raideur  $K$  du ressort.

c - Sachant que l'amplitude des oscillations est  $X_m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , calculer la valeur de l'énergie mécanique  $E$  du pendule ?

d - Calculer alors la valeur de la vitesse maximale  $V_m$  du pendule.

3) Soit  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$  l'élongation du mouvement du pendule.

a - Déterminer la valeur de  $\varphi_x$

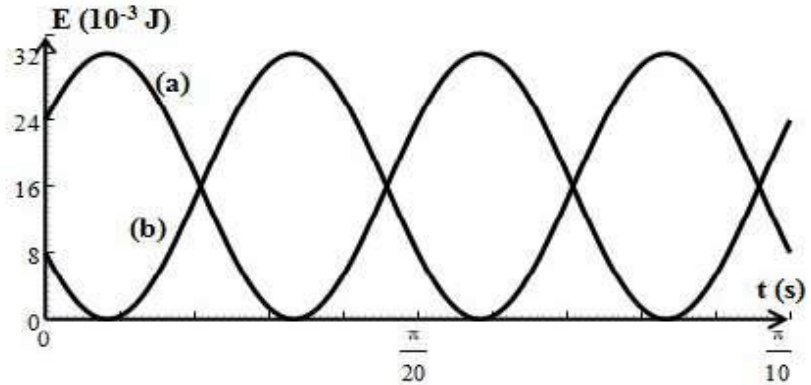
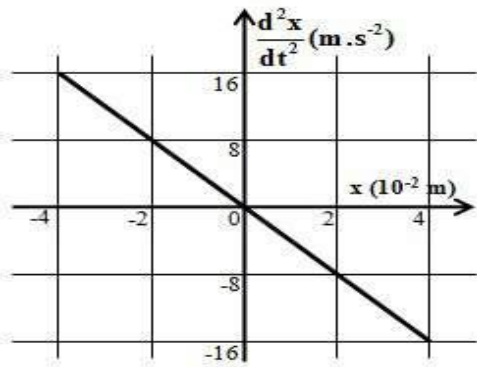
b - En déduire la valeur de la vitesse initiale  $v_0$  du pendule.

c - Ecrire alors l'équation horaire de l'élongation  $x(t)$  et celle de la vitesse  $v(t)$  du pendule.

4) Le graphe ci-dessous donne les variations au cours du temps de l'énergie cinétique  $E_C$  et de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  du pendule élastique :

a - Faire correspondre, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à l'énergie qu'elle représente.

b - Retrouver, à partir du graphe, les valeurs de  $x_0$  et  $v_0$ .



#### EXERCICE 4

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse  $m$  relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur  $K = 8 \text{ N.m}^{-1}$ .

A la position l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O. On ne tiendra pas compte des frottements.

L'enregistrement de l'évolution en fonction du temps (exprimé en (s), de l'élongation  $x(t)$  (exprimée en

(m), et de la vitesse  $v(t)$  (exprimée en  $(\text{m.s}^{-1})$ ), permet d'obtenir les courbes (1) et (2) ci-dessous :

1) a - Exprimer l'énergie mécanique  $E$  du pendule élastique en fonction de  $m$ ,  $K$ ,  $v$  et  $x$ .

b - Sachant que  $E$  se conserve, déduire que l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $x(t)$

s'écrit sous la forme :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ . Donner le nom de  $\omega_0$

c - Déterminer graphiquement la valeur de la période propre  $T_0$  du pendule élastique.

Exprimer  $T_0$  en fonction de  $m$  et  $K$ . Calculer alors la valeur de la masse  $m$  du solide (S).

2) L'équation horaire de l'élongation s'écrit sous la forme  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

a - Sachant que  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , justifier que la courbe (2) représente  $x(t)$ .

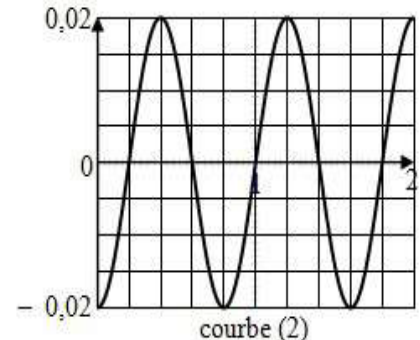
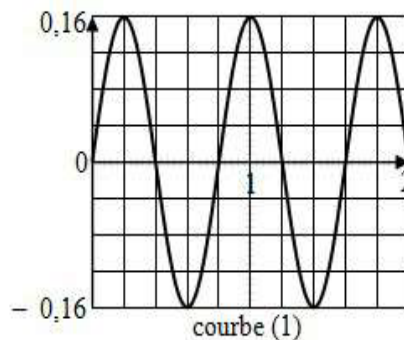
b - Déterminer les valeurs de  $X_m$ ,  $\omega_0$  et  $\varphi_x$

c - Déduire alors l'équation horaire de la vitesse  $v(t)$ .

3) a - Donner l'expression de l'énergie  $E$  en fonction de  $K$  et  $X_m$ . Calculer la valeur de  $E$ .

b - Calculer les valeurs initiales  $E_{pe}(0)$  de l'énergie potentielle élastique et  $E_c(0)$  de l'énergie cinétique.

c - Déterminer graphiquement l'instant  $t$  pour lequel  $E_{pe}(t) = E_c(0)$  pour la première fois. Retrouver ce résultat par le calcul.



## EXERCICE 5

Un ressort (R) de masse négligeable, à spires non jointives, a une constante de raideur de valeur  $K = 10 \text{ N.m}^{-1}$ . L'axe du ressort est horizontal. Il est fixé à son extrémité gauche à un support fixe. A son extrémité droite on accroche un solide (S), de centre d'inertie G, de masse  $m = 250 \text{ g}$ , qui peut coulisser le long d'une tige horizontale (figure 1).

On travaille dans le repère (O,i), l'origine O du repère coïncide avec le centre d'inertie G de (S) quand le ressort n'est ni étiré, ni comprimé. On repère la position de G par son abscisse  $x = x(t)$ .

Les frottements sont modélisés par une force dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse et dont le sens est opposé à celui du mouvement. La (figure 2) donne l'évolution, au cours du temps, de l'élongation du solide (S). La (figure 3) donne l'évolution, au cours du temps, des énergies mécanique  $E_m$ , cinétique  $E_c$ , et potentielle élastique  $E_p$  du système (solide + ressort).

1) a - A l'aide de la (figure 2), déterminer le pseudo période  $T$  du mouvement.

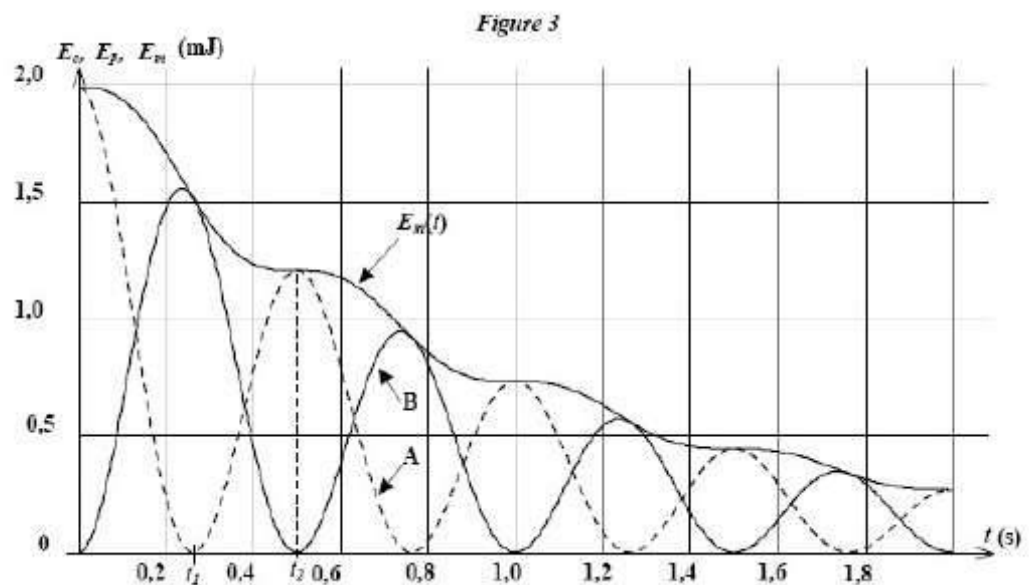
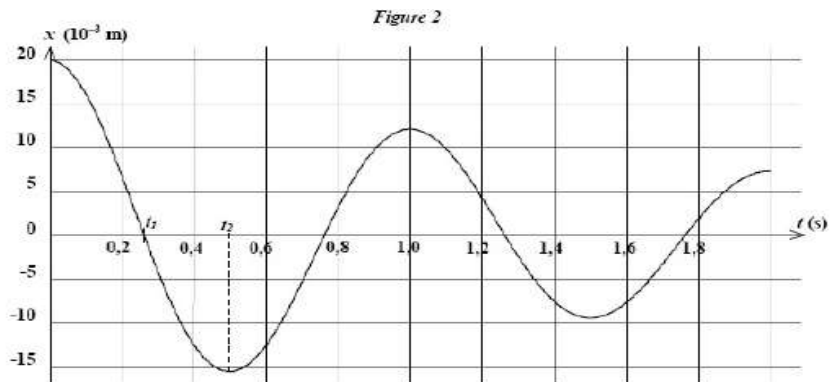
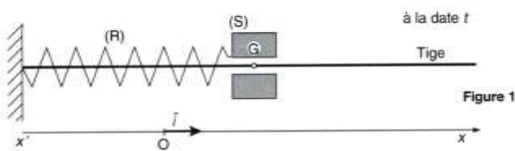
b - Calculer la valeur de la période propre  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  de l'oscillateur. Comparer les valeurs de  $T$  et  $T_0$ .

2) a - A l'aide de la (figure 3), identifier par leur lettre A et B, en le justifiant, les courbes  $E_c$  et  $E_{pe}$ .

b - Pourquoi l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du temps ?

3) a - En utilisant la (figure 2), indiquer, en le justifiant, auquel des instants  $t_1$  et  $t_2$  la vitesse du solide (S) est maximale ou nulle.

b - Que peut-on en conclure quant à la valeur de la force de frottement à chacun de ces instants ?



Un solide (S) de masse  $m$ , de centre d'inertie G, peut glisser sans frottements sur une tige horizontale. Il est accroché à un ressort (R) à spires non jointives, de masse Négligable et de raideur  $K = 4,0 \text{ N.m}^{-1}$ .

L'ensemble constitue un oscillateur élastique non amorti.

On étudie le mouvement de translation du solide (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Lorsque le solide (S) est à l'équilibre, son centre d'inertie G se situe à la verticale du point O, origine de l'axe des abscisses. Le solide est écarté de 10 cm de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à la date  $t = 0 \text{ s}$ .

On procède à l'enregistrement des positions successives de G au cours du temps par un dispositif approprié.

On obtient la courbe ci -contre :

1) Représenter et nommer les forces en G s'exerçant sur le solide (S).

2) L'élongation du mouvement s'écrit :  $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_x\right)$

a - Trouver graphiquement les valeurs de  $X_m$  et  $T_0$ .

b - En déduire l'équation numérique de  $x(t)$ .

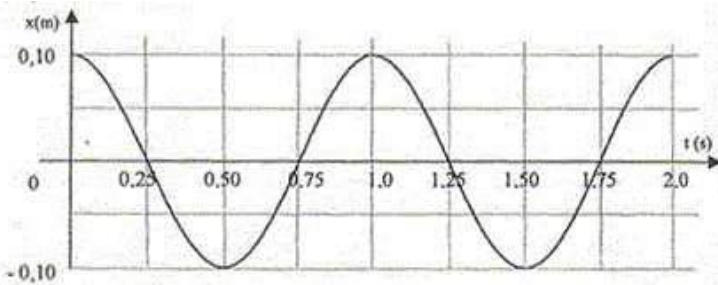
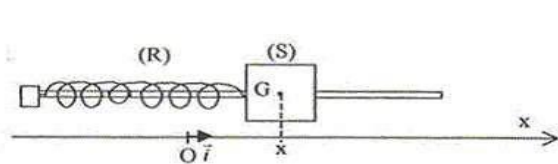
c - Calculer la masse  $m$  du solide (S).

3) a - L'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle dans le plan horizontal passant par G.

Donner l'expression littérale de l'énergie mécanique du système {ressort + solide}, en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $x$  et sa dérivée première.

b - À partir de l'enregistrement ci-dessus, trouver pour quelles dates l'énergie potentielle élastique du système (ressort + solide) est maximale. Que vaut alors l'énergie cinétique ?

c - Calculer la valeur de l'énergie mécanique du système



### EXERCICE 7

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse  $m = 0,1 \text{ Kg}$  relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur  $K$ .

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère (O,i) d'axe  $x'x$  horizontal parallèle à l'axe du ressort. On ne tiendra pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre et on le lâche, à  $t = 0$ , sans vitesse initiale.

1) a - Etablir l'équation différentielle gérant le mouvement du pendule élastique.

b - En déduire l'expression de la période propre  $T_0$  des oscillations en fonction de  $m$  et de  $K$ .

2) On donne ci-contre la courbe d'évolution de l'élongation  $x$  du pendule en fonction du temps :

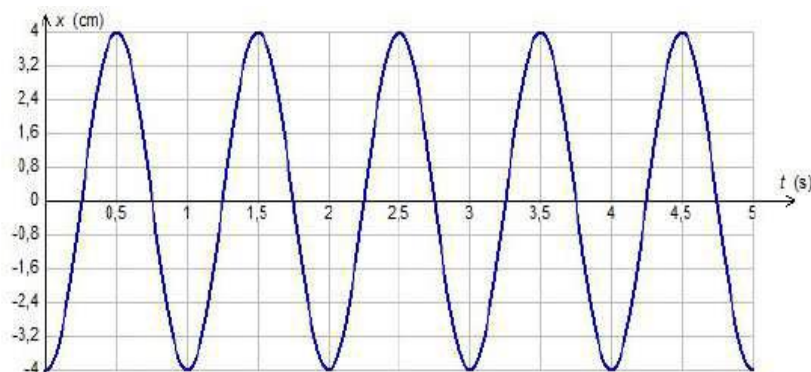
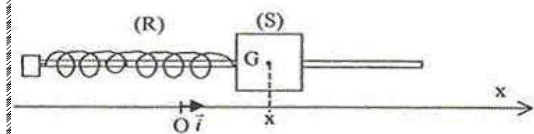
a - Trouver graphiquement la valeur de  $T_0$ .

En déduire la valeur de la constante de raideur  $K$  du ressort.

b - L'équation horaire de l'élongation s'écrit :  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$  avec  $X_m > 0$ .

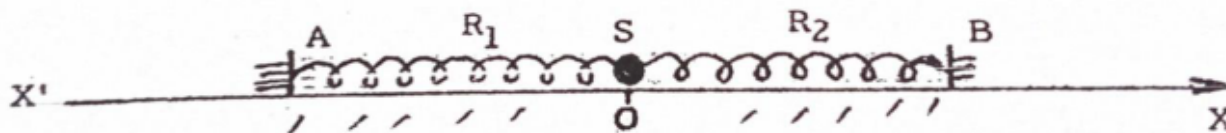
Déterminer les valeurs de  $\omega_0$ ,  $X_m$  et  $\varphi_x$ .

- c - Quelle est alors l'équation horaire de la vitesse  $v(t)$  du mouvement ?  
 2) Calculer la valeur de l'énergie mécanique  $E$  emmagasinée par le pendule élastique.



### EXERCICE 8

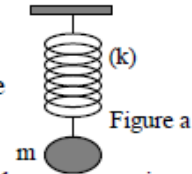
Un solide ponctuel (S) de masse  $m = 0,2$  kg mobile sur une table à coussin d'air horizontal, est accroché à deux ressorts identiques  $R_1$  et  $R_2$  de masse négligeable tendus entre deux points A et B comme l'indique la figure ci-après.



La longueur à vide de chaque ressort est  $l_0 = 15$  cm et sa constante de raideur  $k = 10$  N.m<sup>-1</sup>. La distance des points d'attache A et B vaut  $L = 40$  cm.

1. Déterminer, à l'équilibre, l'allongement  $x_0$  de chaque ressort. (0,5 pt)
2. S étant en équilibre, on l'écarte horizontalement de 3 cm vers B et on le lâche sans vitesse initiale à la date  $t = 0$ . Le centre d'inertie G du solide est repéré sur l'axe horizontal  $x'Ox$  ; l'origine O des abscisses coïncidant avec la position de G à l'équilibre. On néglige les frottements.
  - 2.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G par application du théorème du centre d'inertie. (0,5 pt)
  - 2.2. Ecrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie en précisant les valeurs numériques de l'amplitude, de la pulsation et de la phase initiale. (1 pt)
  - 2.3. A quelle(s) date(s) le mobile passe-t-il par l'abscisse 1,5 cm en allant dans le sens négatif des élongations ? Quelle(s) valeur(s) prend sa vitesse ? (1,25 pt)
3.
  - 3.1. Exprimer à la date  $t$  l'énergie mécanique totale  $E_m$  du système (ressort-solide) en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $x_0$  l'abscisse instantanée  $x$  du centre du solide et sa dérivée première par rapport au temps  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . En déduire l'expression de  $E_m$  en fonction de  $k$ , de l'amplitude  $X_m$  du mouvement de S et de l'allongement initial  $x_0$  de chaque ressort. L'énergie potentielle élastique de chaque ressort est nulle lorsqu'il n'est ni comprimé ni tendu. (0,5 pt)
  - 3.2. Retrouver l'équation différentielle du mouvement de S établie à la question 2) en utilisant l'expression de l'énergie mécanique. (0,25 pt)

### EXERCICE 9



Un groupe d'élèves utilise deux méthodes différentes pour déterminer la constante de raideur  $k$  d'un ressort à spires non jointives.

1. La méthode statique

L'extrémité supérieure du ressort est fixée. A son extrémité libre, sont suspendues successivement des masses de différentes valeurs (figure a). Pour chaque masse  $m$ , l'allongement  $\Delta l$  du ressort est mesuré à l'aide d'une règle (non représenté sur la figure). Le tableau de valeurs suivant est obtenu :

$m$ (kg)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\Delta l$ (cm)	2,5	5,0	7,5	10	12,4	15,1	17,5	19,8

1.1. Tracer le graphe  $\Delta l$  en fonction de la masse  $m$ . En déduire la relation numérique entre  $\Delta l$  et  $m$ . (0,75 pt)

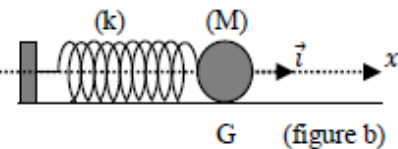
1.2. Sur le schéma, représenter les forces s'exerçant sur la masse  $m$ . Traduire alors la condition d'équilibre et en déduire l'expression de  $k$  en fonction de  $m$ ,  $\Delta l$  et l'intensité de la pesanteur  $g$ . (0,75 pt)

1.3. En déduire la valeur de la constante de raideur  $k$ . On prendra  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . (0,25 pt)

2. La méthode dynamique

Dans cette partie, le ressort précédent est utilisé pour réaliser un oscillateur horizontal. Le solide de masse  $M$ , de valeur inconnue, solidairement lié au ressort, se déplace sur un support horizontal (figure b). Tous les frottements sont négligés. On utilise un axe  $X'X$  horizontal orienté par le vecteur unitaire  $\vec{i}$  et on repère la position du centre d'inertie  $G$  du solide par son abscisse  $x$  sur cet axe.

A l'équilibre, le ressort n'est ni comprimé, ni allongé et l'abscisse  $x$  est nulle (le point  $G$  est confondu avec l'origine de l'axe  $X'X$ ).



2.1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la masse  $M$  à un instant  $t$  donné et les représenter sur un schéma. (0,5 pt)

2.2. Par application du théorème du centre d'inertie appelé aussi deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement. En déduire l'expression de la période  $T_0$  des oscillations en fonction de la constante de raideur  $k$  et de  $M$ . (0,5 pt)

2.3. La mesure de 10 oscillations donne 10,6 s. Calculer  $T_0$ . (0,25 pt)

2.4. L'objet précédent de masse  $M$  est surchargé d'une masse  $m_1 = 20\text{g}$  fixée sur lui. Le système est à nouveau mis en oscillation comme précédemment. Cette fois la durée de 10 oscillations donne 10,7 s. Exprimer la nouvelle période  $T$  en fonction de  $k$ ,  $m_1$  et  $M$ . (0,5 pt)

2.5. En déduire l'expression de  $k$  en fonction de  $T_0$ ,  $T$  et  $m_1$ .

2.6. Calculer  $k$ . Comparer avec le résultat obtenu par la méthode statique. Expliquer. (0,5 pt)

### EXERCICE 10

Un oscillateur mécanique libre est constitué d'un ressort élastique de constante de raideur  $k$ , d'axe horizontal, relié à un solide  $S$  supposé ponctuel, de masse  $m$ . Le solide  $S$  peut se déplacer, sans frottement sur un plan horizontal, le long de l'axe du ressort.

1. Schématiser l'oscillateur à un instant où le solide  $S$  est écarté de sa position d'équilibre ; représenter à cet instant les forces qui s'exercent sur le solide  $S$ . (0,5 pt)

2. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide  $S$ . (0,5 pt)

3. La solution de cette équation différentielle est de la forme  $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Rappeler la signification des paramètres de cette équation, donner également leurs unités dans le système international. (0,75 pt)

4. L'énergie potentielle de cet oscillateur est nulle quand le solide  $S$  est à sa position d'équilibre.

a. Exprimer l'énergie mécanique de cet oscillateur en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $x$  et  $dx/dt$  ( $x$  est l'abscisse du solide).

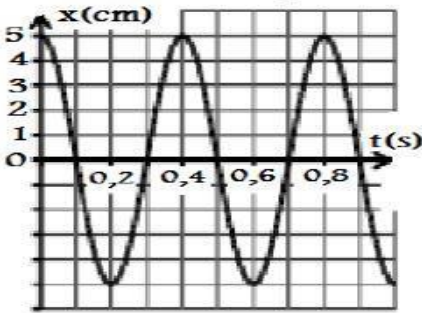
b. En déduire l'expression de son énergie mécanique en fonction des grandeurs  $k$  et  $X_m$ .

5. On réalise une série d'expériences et on enregistre, avec un dispositif approprié, l'évolution de la position  $x$  du solide ponctuel au cours du mouvement (courbes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ). Pour la courbe  $C_3$ , l'enregistrement a été fait avec le solide  $S$  supportant une surcharge de masse  $m'$  ; les autres courbes ont été enregistrées avec le solide  $S$  sans surcharge.

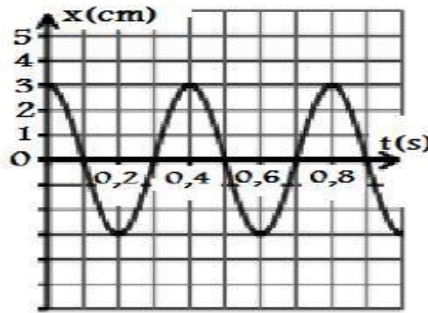
a. L'amplitude du mouvement du solide  $S$  influence-t-elle la période des oscillations ? Justifier. (0,5 pt)

b. La période des oscillations change-t-elle si on modifie la masse du solide relié au ressort ? Justifier. (0,5 pt)

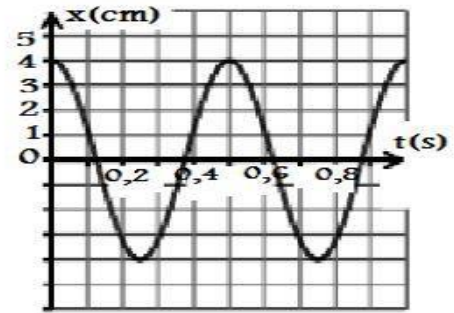
c. Le solide ponctuel S a une masse  $m = 650$  g. Déterminer la constante de raideur  $k$  du ressort élastique et la masse  $m'$  de la surcharge. (0,5 pt)



C1: Oscillation du solide S seul



C2: Oscillation du solide S seul



C3: Oscillation du solide S + la surcharge

### EXERCICE 11

Pour améliorer le confort des automobilistes, on utilise des ressorts comme éléments de suspension. Un de ces ressorts, de masse négligeable, est fixé sur une tige horizontale et peut se déplacer sans frottement. Il est solidaire à un solide S de masse  $m = 100$  kg (figure 1).

A la date  $t_0 = 0$ , on déplace de sa position d'équilibre, le centre d'inertie G du solide S, jusqu'à la position  $+X_{max}$  puis on le lâche sans vitesse initiale. Par un dispositif approprié, on enregistre les courbes représentant les variations de l'énergie potentielle  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  du système (ressort-solide S) d'une part et de l'accélération du solide S d'autre part (figures 2 et 3). Sur la figure 2, chacune des courbes  $C_1$  et  $C_2$  est une sinusoïde de période  $T$ .

- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique du système "ressort-solide S" en fonction de la constante de raideur  $k$  du ressort et de la position  $x$  du centre d'inertie G du solide S.
- Rappeler l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du système "ressort-solide S" (on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur). Cette énergie mécanique  $E_m$  est-elle constante ? (réponse à justifier).
- A partir de l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$ , établir l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G du solide S.
- Retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G du solide S à partir d'une étude dynamique de ce mouvement.
- L'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du solide S est :  $x = 5 \cdot 10^{-2} \cos(\omega t)$  ( $x$  en m).
  - Sur la figure 2, identifier la courbe représentant les variations de l'énergie potentielle  $E_p$  et celle représentant les variations de l'énergie cinétique.
  - En utilisant l'équation horaire et l'une des courbes de la figure 2, déterminer la valeur de la constante de raideur  $k$  du ressort utilisé.
  - Retrouver la valeur de la constante de raideur  $k$  du ressort utilisé par exploitation de la courbe de la figure 3.

