BACCALAUREAT
SESSION 2015

Coefficient : 4
Durée : 4 *h*

MATHEMATIQUES

SERIES F1-F2-F3-F4

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1

Soit P, le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = -3x^3 - 2x^2 + 7x - 2.$

1- *a*) Calculer $P(-2)$.
b) Déterminer une factorisation de $P(x)$ en produit de polynômes de degré 1.

2- justifier que : $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [\frac{1}{3}, 1]$

3- En déduire la résolution des inéquations suivantes :
$(I_1) : x \in \mathbb{R}, -3 \ln^3 x - 2 \ln^2 x + 7 \ln x - 2 \geq 0$
$(I_2) : x \in \mathbb{R}, -3 e^{2x} - 2 e^{x} - 2e^{-x} + 7 \geq 0$

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

1- Soit f ,la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :
$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
a) Déterminer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$.
b) En déduire que pour tout x élément de $[0 ; 1]$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.
c) Calculer la valeur de I.

2- *a*) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et de K

PROBLEME

Partie A

Soit φ,la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1- Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution α dans ℝ et que l'on a : $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.

3- En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur ℝ.

Partie B

Soit f, la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 4 cm)

1- Démontrer que $f'(x) = \dfrac{e^x\,\varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$
En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

2- Démontrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3- Soit (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
Donner une équation de (T) et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).

4- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

5- Tracer dans le même repère sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, les droites (T), (D) puis la courbe $(\mathscr{C})$.