IISTERE D'ETAT, MINISTERE DE FONCTION PUBLIQUE ET DE LA MODERNISATION DE L'ADMINISTRATION

DIRECTION GÉNÉRALE DE LA FONCTION PUBLIQUE

DIRECTION DES CONCOURS

RÉPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MATHEMATIQUES
Niv 1

2026

Sommaire

LEÇON 1 : CALCUL LITTERAL

I) Quotients

1) Egalités de deux quotients

Propriété :

$a; b; c$ *et* d sont des nombres tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$;

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut* à $ad = bc$

2) Opérations sur les quotients

Règles :

$a; b; c$ *et* d sont des nombres différents de 0 ;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple :

Calcule les quotients suivants :

$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{4}$; $B = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$; $C = \frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$

Réponses attendues

$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2\times4}{3\times4} + \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{23}{12}$

$B = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2\times5}{3\times4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$C = \frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

II) Calcul littéral

1) Puissance à exposant entier naturel

Notation :

a est un nombre différent de 0 ; n est un nombre entier naturel différent de 0.

L'inverse de a^n est noté a^{-n}.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{-n} \times a^n = 1$

Exemples :

$3^{-5} = \dfrac{1}{3^5}$; $a^{-3} \times a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1$

Propriété :

a et b sont des nombres différents de 0 ; m et n sont des nombres entiers relatifs ;
$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ $\quad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Exemple :
Ecris plus simplement les expressions suivantes :
$3^5 \times 4^5$; $6^5 \times 6^{-7}$; $(3^4)^3$; $\frac{4^6}{4^8}$; $2^{-3} \times 2^3$

Réponses :
$3^5 \times 4^5 = (3 \times 5)^5 = 759375$

$6^5 \times 6^{-7} = 6^{5-7} = 6^{-2}$

$(3^4)^3 = (3)^{4\times 3} = 3^{12}$

$\dfrac{4^6}{4^8} = 4^6 \times 4^{-8} = 4^{6-8} = 4^{-2}$

$2^{-3} \times 2^3 = 2^{-3+3} = 2^0 = 1$

2) Développement et réduction

a) Suppression de parenthèse

$a; b$ et c sont des nombres ; on a :
$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$
$a - (b + c) = a - b - c$

b) Développement d'un produit

$x; y$ et z sont des nombres ; on a :
$x(y + z) = xy + xz$

$x(y - z) = xy - xz$

Exemple 1 :

Réduis les expressions suivantes :

$A = x - (2x + 1)$; $B = x - (2x - 1)$; $C = x + (2x - 1)$

Réponses attendues

$A = x - (2x + 1)$	$B = x - (2x - 1)$	$C = x + 2x - 1$
$A = x - 2x - 1$	$B = x - 2x + 1$	$C = x + 2x - 1$
$A = -x - 1$	$B = -x + 1$	$C = 3x - 1$

Exemple 2 :

Développe les produits suivants :

$D = 3x(2 + x)$; $E = x(4x - 1)$; $F = 5x(3 + 2x^2 + x)$

Réponses attendues

$D = 3x(2 + x)$	$E = x(4x - 1)$	$F = 5x(3 + 2x^2 + x)$
$D = 6x + 3x^2$	$E = 4x^2 - x$	$F = 15x + 10x^3 + 5x^2$

c) Egalités remarquables

a et b sont des nombres ; on a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple

Développe et réduis les expressions littérales P ; Q et R.

$P = (3a + 1)^2$; $Q = (7 - a)^2$; $R = (12a + 3)(12a - 3)$

Réponses attendues

$P = (3a + 1)^2$	$Q = (7 - a)^2$
$P = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 1 + (1)^2$	$Q = 7^2 - 2 \times 7 \times a + a^2$
$P = 9a^2 + 6a + 1$	$Q = 49 - 14a + a^2$

$R = (12a + 3)(12a - 3)$

$R = (12a)^2 - 3^2$

$R = 144a^2 - 9$

d) Règles de priorité

- Dans une suite d'opérations, toute opération entre parenthèses est prioritaire.
- En l'absence de parenthèse :
  - Les puissances sont prioritaires par rapport à la multiplication et à la division ;
  - La multiplication et la division sont prioritaires par rapport à l'addition et sur la soustraction.

Exercice de fixation

1°) Développe et réduis l'expression A

$A = (2a - 6)(3 - 4a)$

2°) Calcule la valeur numérique de A pour $a =- 4$

3) Factorisation

Factoriser, c'est transformer une somme algébrique en un produit de facteurs.

a) Mettre en évidence un facteur commun

Factorisons les expressions littérales A ; B et C en mettant en évidence un facteur commun :

$A = 2x(3x + 1) - 17(3x + 1)$; $B = 3x(2x + 1) + 2x + 1$;

$C = x(x - 1) + 3(1 - x)$

Réponses attendues :

$A = 2x(3x + 1) - 17(3x + 1)$

$A = (3x + 1)(2x - 17)$

$B = 3x(2x + 1) + 2x + 1$

$B = 3x(2x + 1) + (2x + 1)$

$B = (2x + 1)(3x + 1)$

$C = x(x - 1) + 3(1 - x)$

$C = x(x - 1) - 3(x - 1)$

$C = (x - 1)(x - 3)$

b) Utiliser une égalité remarquable

Factorisons les expressions littérales A ; B et C en utilisant l'égalité remarquable.

$A = 9a^2 + 24a + 16$ $B = 64 - 16x + x^2$ $C = 25 - (3x + 7)^2$

Réponses attendues :

$A = 9a^2 + 24a + 16$

$A = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 4 + 4^2$

$A = (3a + 4)^2$

$B = 64 - 16x + x^2$

$B = 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2$

$B = (8 - x)^2$

$C = 25 - (3x + 7)^2$

$C = 5^2 - (3x + 7)^2$

$C = [5 - (3x + 7)][5 + (3x + 7)]$

$C = (5 - 3x - 7)(5 + 3x + 7)$

$C = (-2 - 3x)(12 + 3x)$

c) Utiliser les deux méthodes précédentes

Factorisons les expressions littérales A ; B et C en utilisant les deux méthodes précédentes.

$A = x^3 - x$

$B = 4x^2 - 9 + (x + 1)(2x - 3)$

$C = x^2 - 10x + 25 + 4x(5 - x)$

Réponses attendues :

$A = x^3 - x$

$A = x(x^2 - 1)$

$A = x(x - 1)(x + 1)$

$B = 4x^2 - 9 + (x + 1)(2x - 3)$

$B = (2x)^2 - 3^2 + (x + 1)(2x - 3)$

$B = (2x - 3)(2x + 3) + (x + 1)(2x - 3)$

$B = (2x - 3)[(2x + 3) + (x + 1)]$

$B = (2x + 3)(3x + 4)$

$C = x^2 - 10x + 25 + 4x(5 - x)$

$C = (x - 5)^2 + 4x(5 - x)$

$C = (x - 5)[(x - 5) - 4x]$

$C = (x - 5)(-3x - 5)$

Exercice de fixation

Factorise les expressions littérales ci-dessous :

$A = 2x + 8x^2$; $B = x^2 - 5x^3$;

$C = (3x + 1)(2x - 1) + 5x(3x + 1)$

Réponses attendues

$A = 2x + 8x^2 = 2x(1 + 4x)$

$C = (3x + 1)(2x - 1) + 5x(3x + 1)$

$C = (3x + 1)[(2x - 1) + 5x]$

$B = x^2 - 5x^3 = x^2(1 - 5x)$ $\quad\quad$ $C = (3x + 1)(7x - 1)$

4) Produit nul ; nombres de même carré

a) Produit nul

Propriétés :

- Un produit est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.

a et b sont des nombres : $ab = 0$ $\;$ *équivaut* à : $\;a = 0 \;\; ou \;\; b = 0$

- Un produit est différent de zéro lorsque tous les facteurs sont différents de zéro.

a et b sont des nombres : $ab \neq 0$ $\;$ *équivaut* à : $\;a \neq 0 \;\; et \;\; b \neq 0$

b) Nombre de même carré

Propriétés :

a et b sont des nombres : $a^2 = b^2$ $\;$ *équivaut* à : $\;a = b \;\; ou \;\; a = -b$

a et b sont des nombres positifs : $a^2 = b^2$ $\;$ *équivaut* à : $\;a = b$.

Exemple :

$x^2 = 4$ $\;$ *équivaut* à : $x = 2 \;\; ou \;\; x = -2$

Exercices de fixation :

1°) Dans chacun des suivants détermine les valeurs de x

$(2x - 1)(x - 6) = 0$

$(3 + 4x)(2x - 3) = 0$

2°) Factorise l'expression de A ; puis détermine les valeurs de x pour $A = 0$

$A = 4x^2 - 9 + (x + 1)(2x - 3)$

III) Exemples d'expressions littérales

1) Polynômes

Présentation :

- On considère l'expression littérale : $5x^2$

C'est un monôme en x ;

5 est le coefficient du monôme ;

2 est le degré du monôme

On rappelle que pour x différent de 0 ; $x^0 = 1$ $\quad$; $\quad 4x^0 = 4$

On convient de dire que tout nombre différent de 0 est un monôme.

- On considère l'expression littérale : $22x^9 - 76x^6 - 5$

C'est une somme algébrique de monômes.
Ses termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x.
$22x^9$ est le monôme de degré le plus élevé ; il a 9 pour degré.
On dit que : $22x^9 - 76x^6 - 5$ est un polynôme de degré 9.

2) Fractions rationnelles

a) Présentation

On considère l'expression littérale : $A = \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$
Cette expression s'appelle la fraction rationnelle.
$(x^3 + 5x^2)$ est le numérateur et $(x^2 - x)$ est le dénominateur .

b) Valeurs de la variable pour lesquelles la fraction rationnelle existe

Une valeur numérique d'une fraction rationnelle existe lorsque le dénominateur est différent de 0.

Exemple :

On donne la fraction rationnelle A définie par : $A = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$
Trouvons les valeurs de la variable pour lesquelles A existe.
A existe si et seulement si $x^2 - x \neq 0$
Résolvons : $x^2 - x \neq 0$
$x^2 - x \neq 0$
$x(x-1) \neq 0$
$x \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$
$x \neq 0$ et $x \neq 1$
A existe pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$

c) Simplification

Méthode :

Pour simplifier une fraction rationnelle, on procède comme suit :

- On factorise le numérateur et le dénominateur ;
- On détermine les valeurs de la variable pour lesquelles la fraction rationnelle existe
- On simplifie la fraction rationnelle pour chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur ;

- On écrit la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

Exemple :

On veut trouver une écriture plus simple de l'expression littérale : $A = \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$

On a : $A = \frac{x^2(x+5)}{x(x-1)}$

Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, on a : $A = \frac{x(x+5)}{(x-1)}$

Exercices

Exercice 1

L'expression A est telle que : $A = (x+2)(2x-1) - (3x-4)(x+2)$.

1. Développe, réduis et ordonne A suivant les puissances décroissantes de x.
2. Factorise A.
3. Calcule la valeur numérique de A pour les valeurs suivantes de x :
   -2 ; 0 ; 1 et 3.

Exercice 2

On donne la fraction rationnelle B telle que : $B = \frac{(x-4)(x+1)}{9-(x-1)^2}$

1. Justifie que : $9-(x-1)^2 =- (x+2)(x-4)$.
2. a. Détermine les valeurs de x pour lesquelles B existe.
   b. Lorsque B existe, justifie que $B = \frac{x+1}{-x-2}$
3. Calcule la valeur numérique de B pour $x =- 1$

LEÇON 2 : RACINE CARREE

I) Racine Carrée

1) Racine carrée d'un nombre positif

Définition :

On appelle racine carrée du nombre positif a, le nombre positif dont le carré est a.

On note $\sqrt{a}$ et on lit « racine carrée de a » et le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé radical.

Exemples :

$\sqrt{225} = 15 \quad car \quad 15^2 = 225$

$\sqrt{169} = 13 \quad car \quad 13^2 = 169$

Remarque :

- $\sqrt{0} = 0 \ et \sqrt{1} = 1$
- a étant un nombre positif ; $(\sqrt{a})^2 = a$
- La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas.
- $a \ et \ b$ sont des nombres positifs ; $\sqrt{a} = b$ *équivaut* à : $a = b^2$

Exercices d'applications

Calcule :

$\sqrt{36}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{9^2}$; $\sqrt{\dots} = 4$

Réponses attendues :

$\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{9^2} = 9$; $\sqrt{16} = 4$

2) Ensemble des nombres réels

$\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{4}$; $\sqrt{9}$ et $\sqrt{\frac{4}{49}}$ sont des nombres rationnels ; ces nombres s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$ (où $a \in \mathbb{Z} \ et \ b \in \mathbb{N}^*$)

$\pi \ \ et \ \sqrt{2}$ sont des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction, ce sont des nombres irrationnels.

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est l'ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

3) Valeur absolue d'un nombre réel

a) Définition

La valeur absolue d'un nombre réel est la distance à zéro de ce nombre.
La valeur absolue d'un nombre réel a se note $|a|$ et se lit « valeur absolue de a ».

Exemple : $|3| = 3$; $|-5| = 5$; $|-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

b) Propriété

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.
Soit a un nombre réel. $\sqrt{a^2} = |a|$.

II) Opérations et racines carrées

1) Sommes, différence et racines carrées

Propriété :

a et b étant des nombres réels positifs, on a :

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- Lorsque $a > b$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Exemple :

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

On a : $7 \neq 5$

Donc $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$.

2) Produits, quotients et racines carrées

Propriété 1 :

a et b étant des nombres réels positifs, on a :

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Exemple : $\sqrt{16} \times \sqrt{9} = \sqrt{16 \times 9}$

Propriété 2 :

a et b étant des nombres réels positifs tel que : $b \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple : $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\frac{144}{36}}$

3) Puissances et Racines carrées

Propriété :

a étant un nombre réel strictement positif et n un nombre entier relatif ; on a :

- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$;
- $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$

Exemple :

$\sqrt{3^{12}} = \sqrt{(3^6)^2} = 3^6$

$\sqrt{5^{15}} = \sqrt{5^{14+1}} = \sqrt{5^{14}} \times \sqrt{5} = 5^7\sqrt{5}$

III) Ecrire un quotient sans radical au dénominateur

a) Expressions conjuguées

Développe et réduis le nombre $a = (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$

$a = (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$

$a = (\sqrt{7})^2 - (2)^2 = 7 - 4 = 3$

Les expressions $\sqrt{7} + 2$ et $\sqrt{7} - 2$ sont des expressions conjuguées. Leur produit peut s'écrire sans radical.

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels positifs, on a :

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

b) Ecriture de quotients sans le symbole $\sqrt{\ }$ au dénominateur

Exemple 1 : $E = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exemple 2 :

$$F = \frac{2}{5\sqrt{5} - 4} = \frac{2(5\sqrt{5} + 4)}{(5\sqrt{5} - 4)(5\sqrt{5} + 4)} = \frac{10\sqrt{5} + 8}{(5\sqrt{5})^2 - (4)^2} = \frac{10\sqrt{5} + 8}{125 - 16}$$

$$= \frac{10\sqrt{5} + 8}{109}$$

LEÇON 3 : TRIANGLE RECTANGLE

I) Propriété de Pythagore

1) Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

ABC est un triangle rectangle en A ;

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Remarque :

La propriété de Pythagore permet de calculer la mesure de n'importe quel côté d'un triangle rectangle lorsqu'on connait celles des deux autres côtés.

Exercice de fixation :

ABC est un triangle rectangle en A tels que : $AB = 3 \quad et \quad AC = 4$

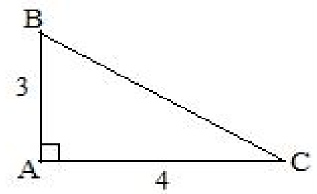
1°) Construis le triangle ABC.

2°) Comment appelle-t-on le côté le plus long de ce triangle ?

3°) Détermine la longueur de ce côté.

Réponses attendues :

1°)



2°) Le côté le plus long s'appelle l'hypoténuse.

3°) On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$

$BC^2 = 25$

$BC = \sqrt{25}$

$BC = 5$

2) Réciproque de la propriété de Pythagore

Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc ABC est un triangle rectangle en A.

Remarque :

La propriété réciproque de la propriété de Pythagore permet de :

- démontrer qu'un triangle dont on connait les mesures des trois côtés est un triangle rectangle.
- justifier la construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$ $\quad (a > 0)$.

Exercice de fixation :

ABC est un triangle tels que : $AB = 6 \ \ ; \ \ AC = 8 \quad et \quad BC = 10$

1°) Calcule le carré de chaque côté de ce triangle ;

2°) Justifie que ce triangle est rectangle

Réponses attendues :

1°) $AB^2 = 6^2 = 36$

$AC^2 = 8^2 = 64$

$BC^2 = 10^2 = 100$

2°) On sait que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés et donc par vérification, on a :

$36 + 64 = 100$

$6^2 + 8^2 = 10^2$

On constate que : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice :

Dans chacun des cas suivants, détermine la nature du triangle EFG.

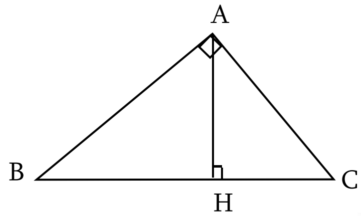
a/ $EF = \sqrt{75}\ ;\ EG = 5\sqrt{2}\ ;\ \ FG = 5$

b/ $EF = 4\ ;\ EG = 8\ \ ;\ \ FG = 7$

3) Propriété métrique déduite de l'aire

Propriété :

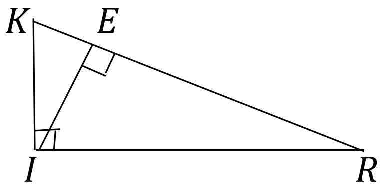
Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors : $AB \times AC = AH \times BC$



Exemple :

L'unité de longueur est le centimètre.

Le triangle KIR est rectangle en I et E est le pied de la hauteur issue de I.



On donne : $IK = 6$; $IR = 8$ et $KR = 10$. Calculons IE.

KIR est un triangle rectangle en I. D'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a :$KI \times IR = IE \times KR$

$$IE = \frac{KI \times IR}{KR} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

4) Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$ $(a > 0)$

Exemple :

Sachant que $3 = 4 - 1$ construisons un segment de longueur $\sqrt{3}$

$3 = 4 - 1$ d'où $4 = 3 + 1$

Considérons un triangle ABC tel que : $AB = 2$; $BC = \sqrt{3}$ et $CA = 1$

On a : $2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$ d'où $AB^2 = BC^2 + CA^2$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en C.

Méthode de construction

- On construit le segment $[AB]$.
- On construit le cercle (C_1) de diamètre $[AB]$.
- On construit le cercle (C_2) de centre A et de rayon 1.

(C_1) coupe (C_2) en deux points. On choisit un des points qui est le point C.

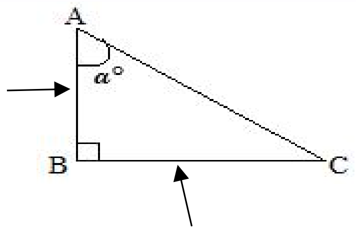
II) Cosinus et Sinus d'un angle aigu

1) Définitions :

Dans un triangle rectangle ;

- On appelle sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- On appelle cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

$côté\ adjacent$ à $l'angle\widehat{A}$



$côté\ opposé$ à $l'angle\widehat{A}$

$$sinus\ \widehat{BAC} = \frac{côté\ opposé\ à\ l'angle\widehat{A}}{hypoténuse} \qquad sin\ \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$$

$$cosinus\ \widehat{BAC} = \frac{côté\ adjacent\ à\ l'angle\widehat{A}}{hypoténuse} \qquad cos\ \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$$

Exercice de fixation :

ABC est un triangle rectangle en B tels que $AC = 6 \ \ et \ \ BC = 3$

1°) Détermine la longueur du côté BC.

2°) Calcule le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

Réponses attendues :

1°) ABC est un triangle rectangle en B, d'après la propriété de Pythagore on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff BC^2 = AC^2 - AB^2$

$BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27$

$BC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

2°) $sin\ \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2) Somme des carrés du cosinus et du sinus d'un angle.

Propriété

Soit $a^{°}$ la mesure d'un angle aigu. On a :

$0 \leq sin\ a^{°} \leq 1$

$0 \leq cos\ a^{°} \leq 1$

$sin^2 a^\circ + cos^2 a^\circ = 1$

3) Cosinus et sinus d'angles complémentaires

Propriété :

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

$$cos(90 - a)^\circ = sin\, a^\circ \qquad cos\,\widehat{C} = sin\,\widehat{A}$$

$$sin(90 - a)^\circ = cos\, a^\circ \qquad sin\,\widehat{A} = cos\,\widehat{C}$$

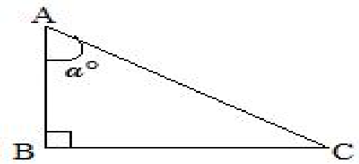
Exercice de fixation :

ABC est un triangle rectangle en B.

1°) Justifie que : $mes\widehat{A} + mes\widehat{C} = 90°$

2°) Que peut-on dire des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$?

3°) Compare : $sin\widehat{A}$ et $cos\widehat{C}$;



Réponses attendues :

1°) On sait que ABC est un triangle rectangle en B, donc $mes\widehat{B} = 90°$ et comme dans un triangle la somme des angles est de 180° ; alors on a :

$mes\widehat{A} + mes\widehat{C} = 180° - 90° = 90°$

2°) On peut dire que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

3°) $sin\widehat{A} = \frac{BC}{AC}$ et $cos\widehat{C} = \frac{BC}{AC}$

Donc $sin\widehat{A} = cos\widehat{C}$

4) Cosinus et sinus d'angles particuliers

$a°$	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

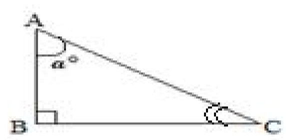
III) Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

1) Définition et propriété

Définition :

Dans un triangle rectangle; on appelle tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.

$$\tan a^\circ = tan\widehat{A} = \frac{Côté\ opp\ à\ \widehat{A}}{Côté\ Adj\ à\ \widehat{A}} \qquad tan\widehat{A} = \frac{BC}{AB}$$



Propriété :

La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.

$$tan\widehat{A} = \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$$

$$tan\widehat{A} = tan\ a° = \frac{sina°}{cosa°}$$

2) Tangentes d'angles complémentaires

Propriété :

Dans un triangle rectangle, les tangentes des deux angles complémentaires sont inverses de l'autre.

$$\tan a° \times \tan(90 - a)° = 1$$

$$\tan\widehat{A} \times \tan\widehat{C} = 1$$

Exercices

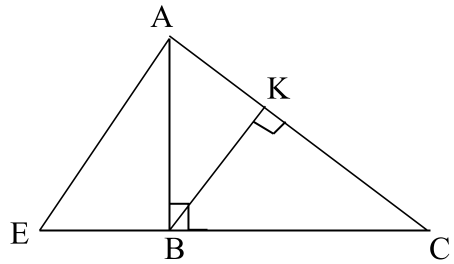
Exercice 1

Un pendule est constitué d'une bille suspendue à un fil inextensible, fixé en un point O. La longueur du fil est 1 m.
Le fil du pendule est initialement vertical.

a) Premier cas : on l'écarte de sa position initiale de 82 cm.
   Détermine la mesure arrondie en degré (à l'entier près) de l'angle obtenu entre le fil et la verticale
b) Deuxième cas : Une fois écarté, le fil fait un angle de 58° avec la verticale.
   Détermine la distance entre le pendule et la verticale.
   (arrondi à l'ordre 1) en centimètre.

Extrait de la table trigonométrique

Angles	54°	55°	56°	57°	58°	59°
Sinus	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
Cosinus	0,588	0,574	0,559	0,545	0,530	0,515
tangente	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,664



Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre,

- ABC est un triangle rectangle en B
- Le segment [BK] est la hauteur relative au côté [AC]
- AB = 4,8 AC = 8 EB = 3,6

1) Justifie que AE = 6 et BC = 6,4
2) Démontrer que le triangle AEC est rectangle en A
3) Calcule BK.

(Pour chaque question, on précisera la propriété utilisée)

Corrigé :

Exercice 1

a) *Ici, il s'agit de l'angle de sommet O. Le triangle étant rectangle en H, on a :*

$Sin\widehat{O} = \frac{82}{100} = 0{,}82.$

A partir de l'extrait de la table trigonométrique, on a la mesure arrondie en degré (à l'entier près) de l'angle obtenu entre le fil et la verticale qui est ***55°.***

b) *Considérons h comme cette distance. Le triangle étant rectangle en H, on a :* $Sin58° = \frac{h}{100}$ *donc* $h = 100 \times sin58° = 100 \times 0{,}848 = 84{,}8\ cm.$

Exercice 2

1) *En appliquant la propriété de Pythagore aux deux triangles ABC et AEB tous rectangle an B, on a :*

   $AE^2 = EB^2 + AB^2$

   $AE^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36.$

   AE = 6

   $AC^2 = AB^2 + BC^2.$

   $BC^2 = AC^2 - AB^2$

   $BC^2 = 64 - 23{,}04 = 40{,}96.$

   BC = 6,4

2) *AEC est un triangle dont les côtés mesurent : AC =8 ; AE = 6 et EC = 3,6 + 6,4 =10*

   On a : $\left.\begin{array}{r} AC^2 = 64 \\ AE^2 = 36 \\ EC^2 = 100 \end{array}\right\}$ *On constate que* $EC^2 = AE^2 + AC^2$. *D'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle AEC est rectangle en A.*

3) *En appliquant la propriété métrique déduite de l'aire au triangle ABC rectangle en B et dont [BK] est la hauteur issue de B, on a* $AC \times BK = BC \times BA$.

   $BK = \frac{BC\times BA}{AC} = \frac{6{,}4\times 4{,}8}{8} = \mathbf{3{,}84}.$

LEÇON 4 : PROPRIETES DE THALES DANS LE TRIANGLE

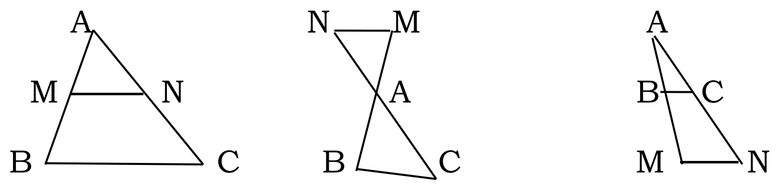
I – Propriétés de Thales dans le triangle

1°/ Propriété de Thales

a) Propriété :

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC),

si (MN)//(BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



Remarque :

La propriété de Thales est utilisée pour calculer les distances

b) application

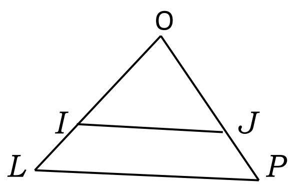
Exercice :

L'unité de longueur est le cm.

OLP est un triangle tel que OL=6cm et OP = 5cm. I est un point du segment [OL] tel que OI=4cm. La parallèle à (LP) passant par le point I coupe la droite (OP) au point J.

1- Justifie que $\frac{OJ}{OP} = \frac{2}{3}$
2- Calcule OJ.

Résolution :



1) *Dans le triangle OLP, on a :* $I \in [OL], J \in [OP]$ *et* $(IJ) // (LP)$

D'après la propriété de THALES, on a : $\frac{OI}{OL} = \frac{OJ}{OP}$ *or* $\frac{OI}{OL} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

donc $\frac{OJ}{OP} = \frac{2}{3}$

2) $\frac{OJ}{OP} = \frac{2}{3}$ *avec* $OP = 5$ *donc* $\frac{OJ}{5} = \frac{2}{3}$ *d'où* $OJ = \frac{5\times2}{3}$ $\quad OJ = \frac{10}{3}\,cm$

2°/ Réciproque de la propriété de Thalès

Propriété :

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) // (BC)

Remarque :

La réciproque de la propriété de Thales est utilisée pour montrer que deux droites sont parallèles.

Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre (cm). ABC est un triangle tel que AB=7,5 et AC=3. Les points M et N appartiennent respectivement aux demi-droites opposées à [AB) et [AC) et sont tels que $AM = 12{,}5$ et $AN = 5$.
Justifie que (MN) // (BC).

Corrigé :

On a: $\frac{AM}{AB} = \frac{12{,}5}{7{,}5} = \frac{5}{3}$. $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{3}$. Ainsi dans le triangle ABC, M∈(AB), N∈(AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C. De plus $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ D'après la réciproque de la propriété de Thales, on a : (MN) // (BC).

3°/ Conséquence de la propriété de Thales

Propriété :

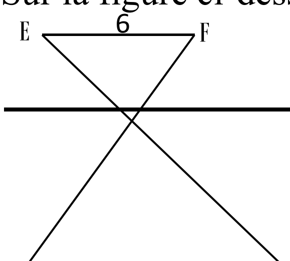
ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC).
Si (MN)//(BC) alors $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Remarque :

La conséquence de la propriété de Thales est utilisée pour calculer la longueur de l'un des segments dont les supports sont des droites parallèles.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, on a : AB $= x$ et (AB)//(EF). Calcule x.



3

K

7

A x B

Corrigé

ABK est un triangle. $E \in (KB)$; $F \in (KA)$ et $(EF) // (AB)$. D'après la conséquence de la propriété de THALES, on a :

$\frac{KE}{KB} = \frac{KF}{KA} = \frac{EF}{AB}$ *donc* $AB = \frac{KA \times EF}{KF}$,

$AB = \frac{7 \times 6}{3} = 14$ *d'où* $x = 14$.

II – Partage d'un segment

1°/ Quatrième proportionnelle

Détermination de la quatrième proportionnelle

x est la quatrième proportionnelle des nombres *a, b* et c pris dans cette ordre si et seulement si :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ *équivaut* à : $x = \frac{bc}{a}$

Exercice de fixation

Donnons la quatrième proportionnelle des nombres 3, 4 et 6 pris dans cet ordre.

Résolution :

Soit x cette quatrième proportionnelle on a :

$\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$ *équivaut* à : $x = \frac{6 \times 4}{3}$ *donc* $x = 8$

8 est la quatrième proportionnelle des nombres 3, 4 et 6 pris dans cet ordre.

2°/ Construction d'une quatrième proportionnelle

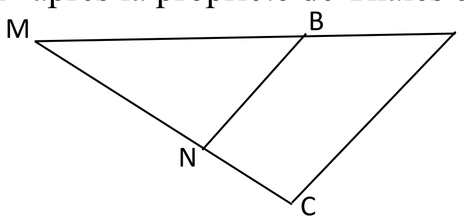
- Méthode

On donne trois segments de mesure *a, b* et *c*.

On veut construire la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c pris dans cet ordre, cela revient à construire un segment $[MN]$ tel que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$

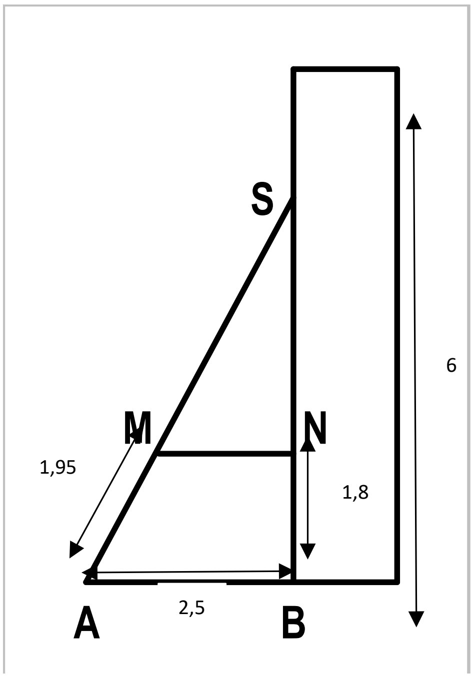
Pour cela :

- On trace deux demi – droites de même origine M
- Sur l'une des demi – droites, on marque A et B tel que :
  MB = b et MA = a
- Sur l'une des demi – droites, on marque c tel MC = c
- On trace la droite parallèle à (AC) qui passe par B. elle coupe la droite (MC) au point N
- D'après la propriété de Thales dans le triangle MAC, on a :



$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MN} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$$

Donc MN est la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c pris dans cet ordre.



Exercice

Pour faire face aux intempéries de la saison des pluies, SERY, directeur d'un collège fait appel à SOLO, un charpentier, pour consolider un bâtiment de son collège. SOLO, après observation et analyse décide de construire un contrefort en bois.

(Voir schémas ; les mesures sont exprimées en m).

Le montant [BS] est perpendiculaire au plan du sol. La traverse [MN] est parallèle au plan du sol.

Il veut connaître certaines dimensions du contre fort pour l'achat des bois.

1) Justifie que la longueur AS est égale à 6,5m.
2) Calcule les longueurs SM et SN.
3) Démontre que la traverse [MN] est bien parallèle au plan du sol.

LEÇON 5 : CALCUL NUMERIQUE

I – Les intervalles

1°/ Distance de deux nombres réels

On appelle distance des nombres réels a et b la valeur absolue de leur différence.
On écrit : $|a - b|$ ou $|b - a|$.

Exemples :

La distance des nombres réels 3 et – 6 est : $|-6-3| = |-9| = 9$.

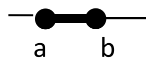
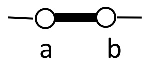
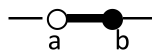
La distance des nombres réels $2\sqrt{5}$ et $4\sqrt{5}$ est :

$|2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}| = |-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}$

2°/ Lecture et représentation d'intervalles

a et b sont deux nombres réels tels a $< b$.

* Le symbole " $\leq$ " se lit " *plus petit ou égal*"
* Le symbole " $\geq$ " se lit " *plus grand ou égal*".
* Les symboles " ← " se lit "moins l'infini"
* Les symboles " → " se lit "plus l'infini"

Notation	Lecture	Ensemble des x tels que :	Représentation sur une droite graduée
[a ; b]	Intervalle fermé a, b	a$\leq x \leq b$	
]a ; b [	Intervalle ouvert a, b	a$< x < b$	
[a; b [	Intervalle fermé en a, ouvert en b	a$\leq x < b$	
]a ; b]	Intervalle ouvert en a, fermé en b	a$< x \leq b$	
]← ; b [	Intervalle moins l'infini, ouvert en b	$x < b$	
]← ; b	Intervalle moins l'infini, fermé en b	$x \leq b$	
[a ;→[	Intervalle fermé en a, plus l'infini	$x \geq a$	
]a ;→[	Intervalle ouvert en a, plus l'infini	$x > a$	

Remarque :

Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles [a, b] ;]a, b [; [a, b [et]a, b].

La distance $|a-b|$ des nombres a et b est appélée l'amplitude de chacun de ces intervalles ou l'amplitude de chacun des encadrements associés.

Les intervalles $]\leftarrow ; b[$; $]\leftarrow ; b]$; $[a ;\rightarrow[$; $]a ;\rightarrow[$ ont chacun une amplitude infinie.

3°/ Intersection – Réunion d'intervalles

- **Intersection d'ensembles**

Soit A et B deux ensembles.
On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B. On note A⋂B et on lit « A inter B ». En d'autres termes, $x \in A\cap B$ équivaut à $x \in A \text{ et } x \in B$.

- **Réunion d'ensembles**

Soit A et B deux ensembles.
On appelle réunion des ensembles A et B l'ensemble des éléments appartenant à A ou bien à B.
On note A⋃B et lit «A union B ». En d'autres termes $x \in A\cup B$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in B$.

- **Intersection ou réunion d'intervalles**

Exercice 1 :
Ecris sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants :

a) $[-4 ; -1]\cap[-2 ; 3]$
b) $[-5 ; 0]\cap[-3 ; 2[$
c) $[-2 ;\rightarrow[\cap]\leftarrow ; -\frac{3}{2}[$
d) $]-8; 12]\cup[0; 13]$
e) $[-4; -1] \cup [-2; 3]$
f) $[-3; \rightarrow[\cup[-5; 2]$

Corrigé :

a) $[-4 ; -1]\cap[-2 ; 3] = [-2 ; -1]$
b) $[-5 ; 0]\cap[-3 ; 2[= [-3 ; 0]$
c) $[-2 ;\rightarrow[\cap]\leftarrow ; -\frac{3}{2}[= [-2 ; -\frac{3}{2}[$
d) $]-8; 12]\cup[0; 13] =]-8; 13]$
e) $[-4; -1] \cup [-2; 3] = [-4; 3]$
f) $[-3; \rightarrow[\cup[-5; 2] = [-5 ;\rightarrow[$

Exercice 2 :

A est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < -\frac{3}{2}$

a) Ecris l'ensemble sous A forme d'intervalle.

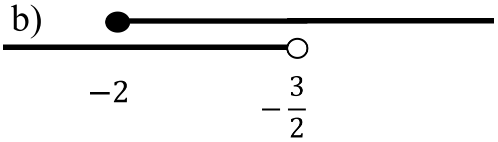
b) Représente graphiquement puis écris l'ensemble

$[-2\,;\rightarrow[\ \cap\ ]\leftarrow\,;-\frac{3}{2}[$

Corrigé :

a) $A =]\leftarrow\,;-\frac{3}{2}[$

b)



$[-2\,;\rightarrow[\ \cap\ ]\leftarrow\,;-\frac{3}{2}[\ = [-2\,;-\frac{3}{2}[$

Remarques :

- Les intervalles $]\leftarrow\,;-11]$ et $]-8\,;\rightarrow[$ n'ont aucun point commun. On dit qu'ils sont disjoints ou leur intersection est l'ensemble vide. On écrit :
  $]\leftarrow;-11[\cap]-8;\rightarrow[\ = \emptyset$ Ou bien : $]\leftarrow;-11[\cap]-8;\rightarrow[\ = \{\ \}$
- On a : $[8\,;10] \cap [7;8] = \{8\}$.
  L'ensemble $\{8\}$ qui contient un seul élément est appelé un singleton.

5°/ Comparaison de nombre réels

Règle 1 :

a et b sont deux nombres positifs. On a :

$a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$

$a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

En d'autres termes, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Exemple :

$3 < 3\sqrt{2}$ *équivaut à :* $9 < 18$.

Règle 2 :

a et b sont deux nombres négatifs, on a :

$a < b$ *équivaut à* $a^2 > b^2$
$a \leq b$ *équivaut à* $a^2 \geq b^2$

En d'autres termes, deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

Exemples :
- $-7 < -5$ équivaut à $49 > 25$
- $-1 > -\sqrt{3}$ équivaut à $1 < 3$.

Règle 3 :

a et *b* sont deux nombres positifs. On a :
$a < b$ *équivaut à* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
$a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
En d'autres termes, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre leurs racines carrées.

Exemples :
$2 < 3$ équivaut à $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
$25 > 16$ équivaut à $5 > 4$

Règle 4 :

a et *b* sont deux nombres différents de zéro et de même signe, on a : $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
$a \leq b$ *équivaut* à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

En d'autres termes, deux nombres différents de zéro et de même signe sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Exemples :
$6 < 7$ équivaut à $\frac{1}{6} > \frac{1}{7}$ $-\sqrt{3} > -\sqrt{10}$
équivaut à $-\frac{1}{\sqrt{3}} < -\frac{1}{\sqrt{10}}$ *équivaut à* $-\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{\sqrt{10}}{10}$

a) Méthodes de comparaison

Pour comparer deux nombres réels, on peut utiliser l'une des quatre méthodes suivantes :

- Méthode 1 :

On peut comparer leurs carrés ou leurs racines carrées.

<u>Exemple 1</u> :

Comparons $3\sqrt{2}$ et 4.

On a : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $4^2 = 16$

Comme $18 > 16$, donc $3\sqrt{2} > 4$.

<u>Exemple 2</u> :

Trouvons le signe de $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

On va comparer pour cela $5\sqrt{2}$ *et* $4\sqrt{3}$

On a : $(5\sqrt{2})^2 = 50$ et $(4\sqrt{3})^2 = 48$

Comme $50 > 48$ alors $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$

Donc $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} > 0$ c'est-à-dire $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ est un nombre positif.

- <u>Méthode 2</u> :

On peut étudier le signe de leur différence.

<u>Exemple</u> :

Comparons $2\sqrt{2} - 1$ *et* $3 - \sqrt{2}$.

On a : $(2\sqrt{2} - 1) - (3 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 4$

Or : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $4^2 = 16$

Comme $18 > 16$, par suite $3\sqrt{2} > 4$ alors $3\sqrt{2} - 4 > 0$

soit $(2\sqrt{2} - 1) - (3 - \sqrt{2}) > 0$

Donc $2\sqrt{2} - 1 > 3 - \sqrt{2}$

- <u>Méthode 3</u> :

On peut les placer dans des intervalles disjoints.

<u>Exemple</u> :

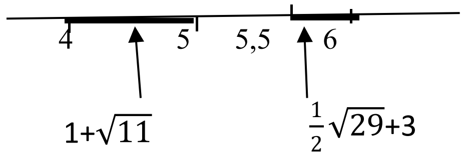
Comparons $\frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$ *et* $1 + \sqrt{11}$

On a : $5^2 < 29 < 6^2$ et $3^2 < 11 < 4^2$

$5 < \sqrt{29} < 6$ et $3 < \sqrt{11} < 4$

$\frac{5}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{29} < \frac{6}{2}$ *et* $3 + 1 < \sqrt{11} + 1 < 4 + 1$

$5,5 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3 < 6$ et $4 < \sqrt{11} + 1 < 5$



Donc $\sqrt{11} + 1 < \frac{1}{2}\sqrt{29} + 3$

- Méthode 4 :

On peut comparer leurs inverses.

Exemple :

Comparons $\frac{1}{2\sqrt{3}} et \frac{1}{3\sqrt{2}}$

On a : $(2\sqrt{3})^2 = 12 \ \ et \ (3\sqrt{2})^2 = 18$

Comme 12 < 18, alors $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.   Donc $\frac{1}{2\sqrt{3}} > \frac{1}{3\sqrt{2}}$..

Remarque :

On choisira selon le cas la méthode de comparaison qui convient.

6°/ Encadrements de nombres réels

a) Propriétés

P1 : Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

P2 : lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

P3 : lorsqu'on multiplie membre à des inégalités de même sens entre nombres négatifs, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraires.

b) Méthodes d'encadrements

- Méthode 1 :

Pour encadrer la différence a – b connaissant un encadrement de a et de b, on procède comme suit :

- On détermine un encadrement de (-b) de même sens que celui de a.
- On additionne membre à membre les nombres qui occupent la même position dans l'encadrement de a et dans celui de (-b) pour obtenir un encadrement de la somme de $a + (-b) = a - b$.

Exemple 1 :

Sachant que 2,236 < $\sqrt{5}$ < 2,237, encadrons 3 - $\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

On a 2,236 < $\sqrt{5}$ < 2,237

$(- 1)\times 2{,}236 > (-1) \times \sqrt{5} > (-1) \times 2{,}237$; $-2{,}237 < -\sqrt{5} < -2{,}236$

$3 - 2{,}237 < 3 - \sqrt{5} < 3 - 2{,}236$; $0{,}763 < 3 - \sqrt{5} < 0{,}764$

$0{,}76 < 3 - \sqrt{5} < 0{,}77$

Exemple 2 :

Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

Encadrons $3\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$ par deux nombres entiers consécutifs.

On a : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$3\times 1{,}414 < 3 \times \sqrt{2} < 3\times 1{,}415$

$4{,}242 < 3\sqrt{2} < 4{,}245$ (i)

On a : $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$-4 \times 2{,}236 > -4 \times \sqrt{5} > -4 \times 2{,}237$

$-8{,}948 < -4\sqrt{5} < -8{,}944$ (ii)

En additionnant membre à membre les inégalités (i) et (ii), on obtient :

$4{,}242 - 8{,}948 < 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} < 4{,}245 - 8{,}944$

$-4{,}706 < 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} < -4{,}699$

$-5 < 3\sqrt{2} - \mathbf{4}\sqrt{5} < -4$

N.B. : On ne soustrait jamais membre à membre des inégalités (même si elles sont de même sens).

- Méthode 2 :

Pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$ connaissant un encadrement de chacun des nombres positifs a et b, on procède comme suit :

- On détermine un encadrement de $\frac{1}{b}$ de même sens que celui de a.
- On multiplie membre à membre les nombres qui occupent la même position dans l'encadrement de a et dans celui de $\frac{1}{b}$ pour obtenir un encadrement $\frac{a}{b}$.

Exemple :

Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Donnons un encadrement de $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ par deux décimaux d'ordre 2 et de plus petite amplitude possible et préciser cette amplitude.

On a : $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ (i)

Et $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$2\times 1{,}414 < 2\times\sqrt{2} < 2\times1{,}415$

$2{,}828 < 2\sqrt{2} < 2{,}830$

$\frac{1}{2{,}828} > \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{2{,}830}$

$0{,}3535 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0{,}3536$ (ii)

En multipliant membre à membre les inégalités (i) et (ii), on obtient :

$1{,}732\times0{,}3535 < \sqrt{3}\times\frac{1}{2\sqrt{2}} < 1{,}733\times0{,}3536$

$0{,}612262 < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0{,}612788$

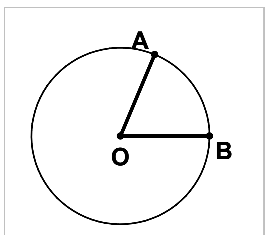
D'où $0{,}61 < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0{,}62$.

L'amplitude de cet encadrement : $0{,}62 - 0{,}61 = 0{,}01$.

N.B. : On ne divise jamais membre à membre des inégalités (même si elles sont de même sens).

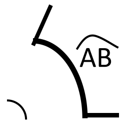
LEÇON 6 : ANGLES INSCRITS

1°/ Angle au centre d'un cercle



Définition :

Dans un cercle, on appelle angle au centre, tout angle dont le sommet est le centre du cercle.



$\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle $(\mathcal{C})$.

Remarque :

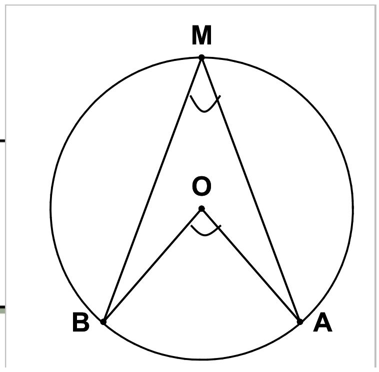
- L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
- L'arc $\overset{\smile}{AB}$ n'est pas intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$
- La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qu'il intercepte.

$$L = \frac{a° \times 2\pi R}{360°} \quad \text{où} \quad \begin{cases} L = longueur\ de\ l'arc\ intercepté \\ a° = mesure\ de\ l'angle\ au\ centre \\ R = rayon\ du\ cercle \end{cases}$$

2°/ Angle inscrit dans un cercle

a) Présentation – Vocabulaire

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O.
A, B et M sont trois points du cercle$(\mathcal{C})$. L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$.



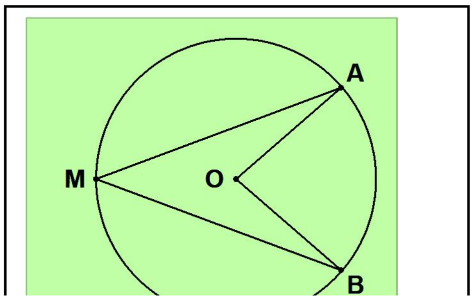
Remarque :

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent tous deux le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$. On dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

a) Relation entre la mesure d'un angle aigu inscrit et celle de l'angle au centre associé.

Propriété :

Un angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de son angle au centre associé.



$$\boxed{mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}}$$

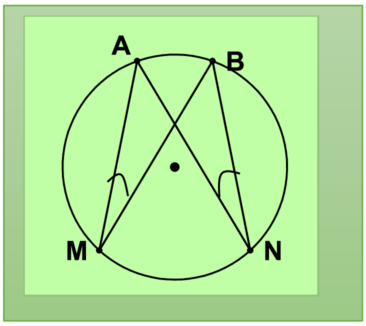
Propriété :

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$

$$\Downarrow$$

$$mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ANB}$$

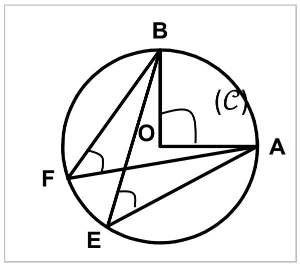


Exercice

Sur cette figure, $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O. A, B, E et F sont des points de $(\mathcal{C})$

On donne $mes\widehat{AOB} = 90°$

1) *Calcule* $mes\widehat{AEB}$
2) *Déduis la mesure de l'angle* $mes\widehat{AFB}$



Corrigé

1) *L'angle au centre* $\widehat{AOB}$ *et l'angle inscrit* $\widehat{AEB}$ *sont associés.*

   On a alors $mes\widehat{AEB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$. *Ainsi* $mes\widehat{AEB} = \frac{1}{2} \times 90 = 45.$

   $\boldsymbol{mes\widehat{AEB} = 45°}$

2) *Les angles* $\widehat{AEB}$ *et* $\widehat{AFB}$ *sont inscrits dans le même cercle et interceptent le même arc* $\widehat{AB}$. *Ils ont alors la même mesure. D'où* $\boldsymbol{mes\widehat{AFB} = 45°}$

LEÇON 7 : VECTEURS

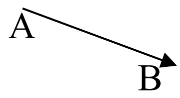
I – Rappels sur les vecteurs

1°/ Caractérisation d'un vecteur

Soient A et B deux points distincts du plan. Tout couple de points (A ; B) détermine un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ et on lit "$vecteur\ AB$". C'est le vecteur d'origine A et d'extrémité B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- une direction : celle de la droite (AB).
- un sens : celui de A vers B.
- une longueur (ou une norme) celle du segment [AB].



2°/ Vecteur nul - Vecteurs égaux - Vecteurs opposés

- Vecteur nul

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul. On le note $\overrightarrow{0}$.

- Vecteurs égaux

A, B, M et N sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{MN}$ sont égaux s'ils ont :

- La même direction
- Le même sens
- La même longueur.

On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

- Vecteurs opposés

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{BA}$ ont la même direction, la même longueur, mais ils sont de sens contraires. On dit qu'ils sont opposés et on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

3°/ Caractérisation vectorielle du parallélogramme et du milieu d'un segment

Propriété 1 :

A, B, C et D sont quatre points non alignés du plan.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Propriété 2 :

A, B et I sont trois points du plan.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ équivaut à I est le milieu du segment [AB].

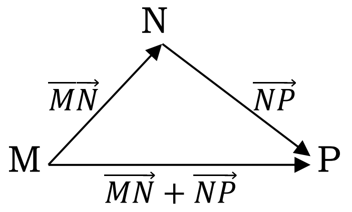
4°/ Somme de deux vecteurs

a) Egalité de Chasles

M, N et P sont des points du plan.

On appelle somme des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{NP}$ le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

On écrit : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (Relation de Chasles).



b) Méthode pour représenter la somme de deux vecteurs

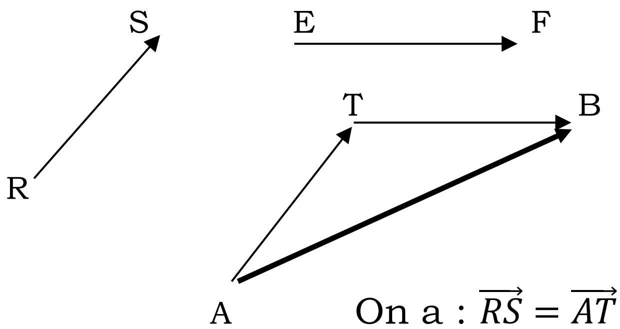
- Méthode :

Pour représenter la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, on peut procéder comme suit :

- On choisit un point M.
- On construit les points N et P tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CD}$
- On obtient alors le vecteur $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

Exemple :

Construisons la somme $\overrightarrow{AB}$ des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EF}$ ci-dessous.



On a : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AT}$ *et* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{TB}$

Donc $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AB}$

Remarque :

Il suffit souvent de laisser l'un des deux vecteurs, puis de construire un vecteur égal au second dont l'origine est l'extrémité du premier.

Autre caractérisation du milieu d'un segment :

I milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

II- Produit d'un vecteur par un nombre réel.

1°/ Définition :

On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :

- Les droites (MN) et (AB) ont la même direction.
- Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ ont : $\begin{cases} le\ même\ sens\ si\ k > 0 \\ des\ sens\ contraires\ si\ k < 0 \end{cases}$
- MN = $|k|$AB.

2°/ Propriétés :

A, B, C et D sont des points du plan x *et* y sont des nombres réels. On a :

- $x(y.\overrightarrow{AB}) = (x.y)\overrightarrow{AB}$
- $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB} = (x+y)\overrightarrow{AB}$
- $x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{CD} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$
- $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

Exercice :

1°/ A et B sont deux points du plan.

a) Construis le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

b) Calcule AM lorsque AB = 10.

2°/ A, B, C et D sont quatre points du plan.

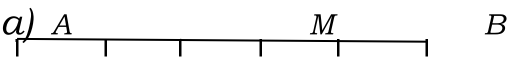
Simplifie les écritures suivantes :

$3\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$;

$-3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) + 2(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD})$

Corrigé :

1°/ a)



$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ *donc* $AM = \frac{3}{5}AB$

Si AB = 10 alors AM = $\frac{3}{5} \times 10$ *donc AM = 6.*

2°/ $\quad * \ 3\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \left(3+\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{17}{5}\overrightarrow{AB}$

$* \ \overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \left(1-\frac{4}{5}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

$* -3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) + 2\left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) = -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD}$

III- Vecteurs et configuration

1°/ Vecteurs de même direction

Propriété :

A, B, C et D sont quatre points du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction si et seulement s'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

2°/ Vecteurs colinéaires

- Définition :

On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

- Propriété :

A et B sont deux points du plan.
M $\in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice

1. On donne les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$
   Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. On donne $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{EF}$
   Justifier que les points E, P et F sont alignés.

Corrigé

1. *Exprimons $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$*
   $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ *or* $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$ *donc* $\overrightarrow{AB} = 2 \times \frac{4}{3}\overrightarrow{EF} \implies$
   $\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\overrightarrow{EF}$ *alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.*
2. *Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.*

Exprimons donc $\overrightarrow{EP}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

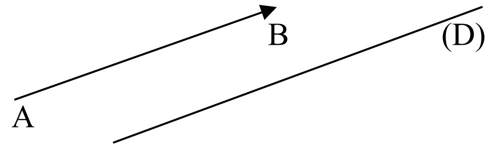
$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *or* $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{EF}$ *donc* $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2} \times 3\overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{EP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$

donc $\overrightarrow{EP}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *sont colinéaires alors* E, P et F sont alignés.

3°/ Vecteur directeur d'une droite

Définition :

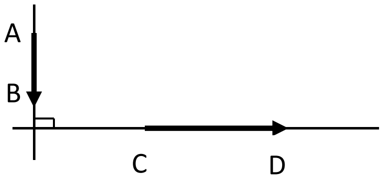
On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.



4°/ Vecteurs orthogonaux

Définition :

On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.



Sur la figure ci-contre les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. On écrit : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

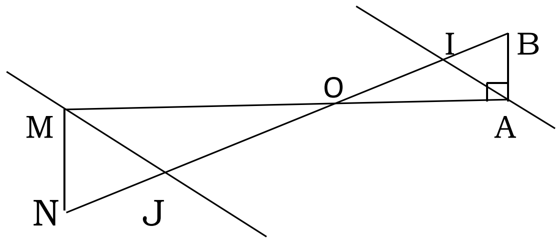
Exercice – BEPC Zone 2 – 2001

Sur la figure codée ci-dessous :

- OAB est un triangle rectangle en A
- I est le milieu du segment $[OB]$
- M et N sont les points tels que : $\overrightarrow{OM} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{ON} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{OB}$
- $OA = 3$ et $AB = 2$

1. a. Démontre que $\overrightarrow{MN} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$ (On pourra utiliser la décomposition $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$).
   b. Déduis-en la position des droites (MN) et (AB).

2. Justifie que $OM = \frac{9}{2}$
3. La parallèle à la droite (IA) passant par M coupe la droite (OB) en J.
   a. Démontre que $\frac{OJ}{OI} = \frac{3}{2}$
   b. Déduis-en que $\overrightarrow{OJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OI}$
4. a. Démontre que $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ON}$
   b. Déduis des questions 3.b et 4.a que le point J est le milieu du segment $[ON]$.



LEÇON 8 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ℝ

I) Equations du 1er degré dans ℝ

1) Rappels

Résous les équations suivantes ;

$x+5=9$; $3x=18$

Résolution

$x+5=9$

$x=9-5$

$x=4$

4 est la solution

$3x=18$

$x=\frac{18}{3}$

$x=6$

6 est la solution

2) Equations du type $ax+b=cx+d$

Définition :

$a; b; c$ *et* d sont des nombres donnés ; l'équation $ax+b=cx+d$ est appelée équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- L'équation $0x=0$ admet une solution ;
- L'équation $0x=b$ n'admet pas de solution.

Exemple :

Résous l'équation $6x-3=2x-2$

Résolution

$6x-3=2x-2$

$6x-2x=-2+3$

$4x=1$

$x=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ *est la seule solution.*

On dit que $\frac{1}{4}$ *est un singleton.*

Exercice

Résous les équations suivantes :

$(E_1): -3x-2=-5x+6$

$(E_2): x\sqrt{3}+1=x+3$

Résolution

$(E_1): -3x-2=-5x+6$

$(E_2): x\sqrt{3}+1=x+3$

$$-3x + 5x = 6 + 2 \qquad\qquad x\sqrt{3} - x = 3 - 1$$
$$2x = 8 \qquad\qquad x(\sqrt{3} - 1) = 2$$
$$x = \frac{8}{2} \qquad\qquad x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = \sqrt{3} + 1$$

4 est la solution de (E_1) *et* $\sqrt{3} + 1$ *est la solution de l'équation* (E_2)

3) Equations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$

Rappel :

a et b étant des nombres réels ;
$ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Exemple 1 :
Résous l'équation :
$(E) : (3x + 4)(-x - 7) = 0$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $(E) : (ax + b)(cx + d) = 0$, on résout séparément les équations.
$(E1) : (ax + b) = 0$ et $(E2) : (cx + d) = 0$
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de (E1) et (E2).

Résolution

(E) : $(3x + 4)(-x - 7) = 0$
$$(3x + 4) = 0 \quad ou \quad (-x - 7) = 0$$
$$3x = -4 \quad ou \quad -x = 7$$
$$x = \frac{-4}{3} \quad ou \quad x = -7$$

$\frac{-4}{3}$ *et* -7 *sont les seules solutions de (E).*

L'ensemble $\left\{-7 ; \frac{-4}{3}\right\}$ *se lit : la paire* $-7 ; \frac{-4}{3}$

Une paire est un ensemble qui contient exactement deux éléments.

Exemple 2 :
Résous l'équation :
(E) : $x^2 = 5$

Méthode

Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$; on peut procéder comme suit :

- Lorsque a est positif, on transforme cette équation pour la ramener à la forme : $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ et cette équation admet deux solutions ;
- Lorsque a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.
- Lorsque a est nulle c'est-à-dire $x^2 = 0$; la solution est unique et c'est le nombre 0.

Résolution

$(E) : x^2 = 5$

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$

$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$

$x - \sqrt{5} = 0 \quad ou \quad x + \sqrt{5} = 0$

$x = \sqrt{5} \quad ou \quad x = -\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$ *et* $-\sqrt{5}$ *sont les seules solutions de* (E).

L'ensemble des solutions de (E) *est* $\{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$

Exercice

Résous l'équation : $6x - 3x(2x - 1) = 0$

Résolution

$6x - 3x(2x - 1) = 0$

$2 \times 3x - 3x(2x - 1) = 0$

$3x[2 - (2x - 1)] = 0$

$3x(2 - 2x + 1) = 0$

$3x(3 - 2x) = 0$

$3x = 0 \quad ou \quad 3 - 2x = 0$

$x = 0 \quad ou \quad x = \frac{3}{2}$

0 *et* $\frac{3}{2}$ *sont les seules solutions de* (E).

L'ensemble des solutions de (E) *est* $\left\{0;\ \frac{3}{2}\right\}$

II) Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$

Rappels :

Ecris les inégalités suivantes formes d'intervalles :

$x \leq a$; $x < a$; $x \geq a$; $x > a$; $a < x \leq b$

Résolution

$x \leq a$ *équivaut* à $]\longleftarrow ; a]$; $x < a$ *équivaut* à $]\longleftarrow ; a[$

$x \geq a$ *équivaut* à $[a ; \longrightarrow[$; $x > a$ *équivaut* à $]a ; \longrightarrow[$

$a < x \leq b$ *équivaut* à $x \epsilon]a ; b]$

1) Inéquations du type $ax + b < cx + d$

Exemple :

Résous l'inéquation suivante :

$(I_1) : 8x - 5 < 3x - 10$

Ecris le résultat sous forme d'intervalles

Résolution

$(I_1) : 8x - 5 < 3x - 10$

$8x - 3x < -10 + 5$

$5x < -5$

$x < \frac{-5}{5}$

$x < -1$

$x < -1$ *équivaut* à $]\longleftarrow ; -1[$

L'ensemble des nombres plus petits que -1 est solution de l'inéquation (I_1).

Exercice

Résous les inéquations suivantes :

$(I_2) : 2x + 3 \leq -5x + 1$

$(I_3) : 8 - (x - 7) \geq 4 - 2x$

Résolution

$(I_2) : 2x + 3 \leq -5x + 1$

$2x + 5x \leq 1 - 3$

$7x \leq -2$

$x \leq \frac{-2}{7}$

$(I_3) : 8 - (x - 7) \geq 4 - 2x$

$8 - x + 7 \geq 4 - 2x$

$-x + 2x \geq 4 - 8 - 7$

$x \geq -11$

L'ensemble des nombres plus petits ou égaux à $\frac{-2}{7}$ est solution de l'inéquation (I_2).

L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à -11 est solution de l'inéquation (I_3)

2) Système d'inéquations dans $\mathbb{R}$

Rappels :

Ecris plus simplement les intervalles ci-dessous.

$[-2\,;\ 4[\, \cap\ [0\,;7]$

$]0\,;2] \cap\,]3\,;5\,[$

Résolution

$[-2\,;\ 4[\, \cap\ [0\,;7] = [0\,;4[$

$]0\,;2] \cap\,]3\,;5\,[\, = \emptyset$

Méthode :

Pour résoudre un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$; on peut procéder comme suit :

- On résout séparément chacune des inéquations ;
- On détermine l'intersection des deux intervalles des solutions trouvées ;

On écrit l'ensemble des solutions du système.

Exemple 1

On donne les inéquations $(I_1) : 2x - 3 < 0$ et $(I_2) : 4x + 5 \geq 0$

Trouve l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations.

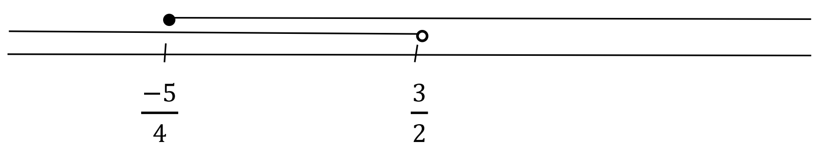
Résolution

Ecrivons ces deux inéquations sous forme de système.

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 & (I_1) \\ 4x + 5 \geq 0 & (I_2) \end{cases} \quad \textit{équivaut à} \quad \begin{cases} 2x < 3 \\ 4x \geq -5 \end{cases} \quad \textit{équivaut à} \quad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$S_1 = \left]\leftarrow\ ;\ \frac{3}{2}\right[\quad et \quad S_2 = \left[\frac{-5}{4}\ ;\ \rightarrow\right[$$

Représentons sur une droite graduée ces deux intervalles pour obtenir le résultat.



$$S = S_1 \cap S_2 = \left[\frac{-5}{4} \; ; \; \frac{3}{2}\right[$$

Exemple 2

Trouve l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations.

$$\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1 & (I_1) \\ 7x + 6 \leq 2x - 4 & (I_2) \end{cases}$$

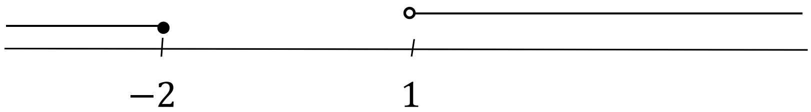
Résolution

$$\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1 & (I_1) \\ 7x + 6 \leq 2x - 4 & (I_2) \end{cases} \textit{ équivaut à } \begin{cases} 5x - 2x > 1 + 2 \\ 7x - 2x \leq - 4 - 6 \end{cases} \textit{ équivaut à }$$

$$\begin{cases} 3x > 3 \\ 5x \leq - 10 \end{cases} \textit{ équivaut à } \begin{cases} x > \frac{3}{3} \\ x \leq \frac{-10}{5} \end{cases} \textit{ équivaut à } \begin{cases} x > 1 \\ x \leq - 2 \end{cases}$$

$S_1 =]1 \; ; \; \rightarrow[\quad et \;\; S_2 =]\leftarrow \; ; \; -2]$

Représentons sur une droite graduée ces deux intervalles pour obtenir le résultat.



Les inéquations (I_1) et (I_2) n'ont aucune solution commune. Donc l'ensemble des solutions du système ne contient aucun élément. C'est l'ensemble vide.

$S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$

III) Problème du 1er degré dans $\mathbb{R}$

1) Problème conduisant à une équation

Une cabine téléphonique propose deux formules à ses clients qui désirent appeler l'extérieur de la Côte-d'Ivoire.

Formule 1 : la minute de communication coûte 750 francs. Le prix à payer est ensuite majoré de 500 francs.

Formule 2 : la minute de communication coûte 875 francs.

a) Pour chacune des formules, traduis par une expression littérale le prix à payer en fonction du temps de communication.

b) A partir de combien de minutes la formule 2 est-elle plus chère que la formule 1 ? justifie ta réponse.

Résolution

a) *Traduisons le prix à payer par une expression littérale.*

- *Choix de l'inconnue*

Je désigne par x le prix à payer pour la formule 1 pour un temps t et par x' le prix à payer pour la formule 2 pour un temps.

- *Mise en équation*

Formule 1 : $x = 750t + 500$

Formule 2 : $x' = 875t$

b) *Déterminons le temps à partir duquel la formule 2 est plus chère que la formule 1.*

Si $x' > x$ c'est-à-dire $875t > 750t + 500$

$$875t - 750t > 500$$
$$125t > 500$$
$$t > \frac{500}{125} \quad \Leftrightarrow \quad t > 4$$

La formule 2 est donc plus chère que la formule 1 à partir de la 5e minute.

Exercice :

Au cours du trimestre, Lise a obtenu quatre notes en mathématiques : 10 ; 13 ; 11 et 14. Quelle devrait être la cinquième note de Lise pour qu'elle obtienne une moyenne égale à 13 ?

Résolution

- *Choix de l'inconnue*

Je désigne par x la cinquième note de Lise.

- *Mise en équation*

$\frac{Somme\ des\ notes}{Total\ des\ notes} = Moyenne$ *équivaut à* $\frac{10+13+11+14+x}{5} = 13$

- *Résolution de l'équation*

$\frac{10+13+11+14+x}{5} = 13$ *équivaut à* $\frac{48+x}{5} = 13$

$48 + x = 13 \times 5$

$48 + x = 65$

$x = 65 - 48$

$x = 17$

La cinquième note de Elise pour qu'elle obtienne une moyenne égale à 13 devrait être : 17

2) Problème conduisant à une inéquation

Le lycée de Gagnoa se propose d'acheter en gros les manuels de Troisième CIAM.

La librairie de France et la librairie Villepastour situées à Divo, lui font les propositions suivantes :

- Proposition de la librairie de France : 2 700 F par manuel acheté, plus 5 200 F de frais pour l'expédition des manuels, ceci quel qu'en soit le nombre.
- Proposition de la librairie Villepastour : 2 600 F par manuel acheté, les frais d'acheminement étant à la charge de l'acheteur.

Par ailleurs, pour aller à Divo, l'intendant du lycée doit débourser la somme de 9 000 F pour frais divers (voyage, repas, etc …).
A partir de quel nombre de manuels la proposition de la librairie Villepastour est-elle plus avantageuse que celle de la librairie de France ?

<u>Résolution</u>

- *Choix de l'inconnue*

Je désigne par x le nombre de manuels achetés.

- *Mise en équation*

Prix de revient de x manuels avec la librairie de France :
$2\,700x + 5\,200$
Prix de revient de x manuels avec la librairie Villepastour : $2\,600x + 9\,000$
A partir de x livres, la proposition de la librairie Villepastour est plus avantageuse que celle de la librairie de France.
$2\,600x + 9\,000 < 2\,700x + 5\,200$

- *Résolution de l'inéquation*

$2\,600x + 9\,000 < 2\,700x + 5\,200$
$2\,600x - 2\,700x < 5\,200 - 9\,000$
$-100x < -3\,800$
$100x > 3\,800 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3\,800}{100} \quad \Leftrightarrow \quad x > 38$

La proposition de la librairie Villepastour est plus avantageuse que celle de la librairie de France pour plus de 38 *manuels.*

<u>Exercice</u> :
Francine va acheter des bouteilles de jus de fruits chez son boutiquier habituel. Pour un carton de 12 bouteilles, elle paiera moins de 1 440 F, et pour un carton de 24 bouteilles, elle paiera plus de 2 640 F.
Quels sont les prix possibles d'une bouteille de jus de fruits sachant que son prix est un nombre entier de francs.

<u>Résolution</u>

- *Choix de l'inconnue*

Je désigne par P le prix d'une bouteille de jus de fruits.

- *Mise en équation*

$12P < 1440 \quad et \quad 24P > 2640$

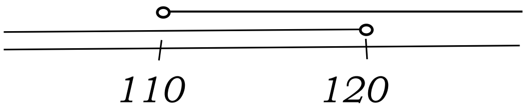
- *Résolution des inéquations*

$12P < 1440 \quad et \quad 24P > 2640$

$P < \frac{1440}{12} \quad et \quad P > \frac{2640}{24}$

$P < 120 \quad et \quad P > 110$

$S_1 =]\leftarrow\ ;\ 120[\quad et \quad S_2 =]110\ ;\ \rightarrow[$



$S = S_1 \cap S_2 =]110\ ;\ 120[$

Les prix possibles d'une bouteille de jus de fruits sont :

111 F; 112 F ; 113 F ; 114 F ; 115 F ; 116 F ; 117 F ; 118 F ; 119 F.

LEÇON 9 : COORDONNEES D'UN VECTEUR

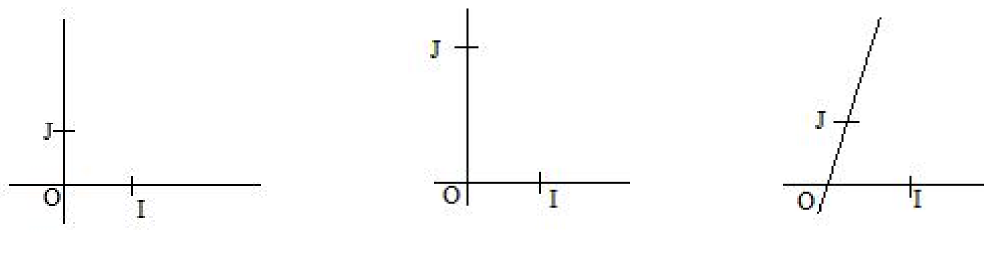
I) Coordonnées d'un vecteur

1) Repères

Présentation :

Un repère du plan est un triplet (O; I; J) de points distincts non alignés du plan.

- Il est orthogonal lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires ;
- Il est normé lorsque les distances OI et OJ sont égales ;
- Il est orthonormé lorsqu'il est orthogonal et normé.



Repère orthonormé Repère orthogonal Repère quelconque

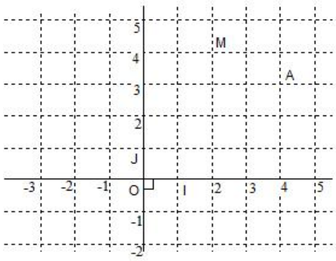
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$ $(OI) \perp (OJ)$ et $OI \neq OJ$

2) Couples de coordonnées d'un point

a) Couple de nombres réels

L'écriture $(x; y)$ désigne le couple de coordonnées des nombres réels x et y avec x le nombre sur l'abscisse et y le nombre sur l'ordonnée.
L'ensemble formé de tous les couples de nombres réels est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On lit $\mathbb{R}$ croix $\mathbb{R}$.

Exemple :



Le plan est muni du repère (O ; I ; J).
A est le point qui a pour abscisse 4 et pour ordonnée 3.
$(4; 3)$ est le couple de coordonnées du point A.
On note $\boldsymbol{A(4; 3)}$
M est le point qui a pour abscisse 2 et pour ordonnée 4.
$(2; 4)$ est le couple de coordonnées du point M. On note $\boldsymbol{M(2; 4)}$

b) Egalité de couples

Les couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont égaux équivaut à : $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple :
$(a; 5) = (8; b)$ équivaut à : $a = 8$ et $b = 5$

Remarque :

Les couples $(2; 3)$ et $(3; 2)$ ne sont pas égaux.

Exercice
Calcule x et y pour que les couples suivants soient égaux :

a) $(x + 1\,; -3)$ et $(-2\,; y - 5)$

b) $(-5\,;3y)$ et $(2x\,;4)$

c) $(3x-4\,;4y+1)$ et $(x+5\,;3-y)$

Résolution

a) $x+1=-2$ *et* $y-5=-3$

$x=-3$ *et* $y=2$

b) $2x=-5$ *et* $3y=4$

$x=\frac{-5}{2}$ *et* $y=\frac{4}{3}$

c) $3x-4=x+5$ et $4y+1=3-y$

$3x-x=5+4$ et $4y+y=3-1$

$2x=9$ et $5y=2$

$x=\frac{9}{2}$ et $y=\frac{2}{5}$

c) Couple de coordonnées d'un vecteur

Définition :

Le plan est muni du repère (O ; I ; J) A *et* B sont des points du plan. On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de nombres réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AB}=x.\overrightarrow{OI}+y.\overrightarrow{OJ}$

- Le nombre réel x est appelé abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le nombre réel y est appelé ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

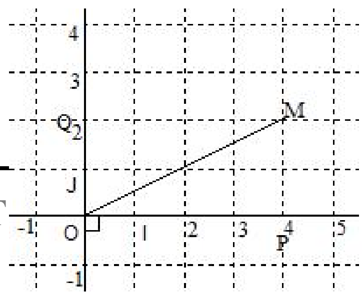
Notation :

L'écriture $\overrightarrow{AB}(x; y)$ se lit : « vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées x et y ».
On note aussi $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$.

Exemple :

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On donne le point $M(4; 2)$.

Démontrons que $\overrightarrow{OM}=4.\overrightarrow{OI}+2.\overrightarrow{OJ}$



P est le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ).
Q est le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).
On écrit alors :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ $\quad\left(or\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OQ}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ $\quad(or\ \overrightarrow{OP} = 4.\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OQ} = 2.\overrightarrow{OJ})$

$\overrightarrow{OM} = 4.\overrightarrow{OI} + 2.\overrightarrow{OJ}$

Le couple de coordonnées $(4; 2)$ du point M dans le repère (O; I; J) est appelé couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On note : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Remarques :

- Des vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont des couples de coordonnées égaux ;
- Le vecteur nul a pour couple de coordonnées $(0; 0)$.

Exercice

Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), on donne $A(2; -2)$ et $B(0; 4)$.

a) Quel est le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$?
b) Quel est le couple de coordonnées du point M tel que :
$\overrightarrow{OM} =- \overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$?

Résolution

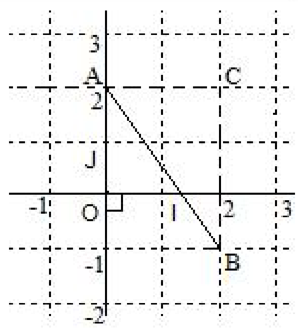
a) $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = 0.\overrightarrow{OI} + 4.\overrightarrow{OJ}$ donc $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OM} =- \overrightarrow{OI} + 3.\overrightarrow{OJ}$ donc $M\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

d) Représentation d'un vecteur

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On donne un point A.
On veut construire le point B tel qu'on ait $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
On sait que $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{OI} - 3.\overrightarrow{OJ}$
On marque un point C tel que $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{OI}$
et le point B tel que $\overrightarrow{CB} = -3.\overrightarrow{OJ}$



3) Coordonnées d'une somme de vecteur

Propriété :

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). $A; B; A'et\ B'$ sont des points du plan ;

$Si\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad et\quad \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\quad alors\quad (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Exemple :

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On donne les vecteurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Détermine le couple de coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$.

Résolution

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF})\begin{pmatrix} 3+1 \\ -4-2 \end{pmatrix}\quad équivaut\ à\quad (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF})\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Exercice

On donne $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calcule $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

Résolution

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\begin{pmatrix} 2+(-6) \\ 5+3 \end{pmatrix}\quad équivaut\ à\quad (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

4) Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre

Propriété :

Le plan est muni du repère. $A\ et\ B$ sont des points du plan ; k est un nombre réel.

$Si\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ alors\ k.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exercice

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On considère les vecteurs $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ tel que : $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON}$?

b) Quel est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OK}$ tel que : $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OM}$?

c) Démontre que : $\overrightarrow{OM} =-\frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$.

Résolution

a) $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON}$ or $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OC}\left(\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\times(-1)\\\frac{3}{2}\times(-6)\end{pmatrix}$ équivaut à : $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-9\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OM}$ or $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OK}\left(2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}2\times\frac{1}{2}\\2\times3\end{pmatrix}$ équivaut à : $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{OM} =-\frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$ or $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{OM}\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\times(-1)\\-\frac{1}{2}\times(-6)\end{pmatrix}$ équivaut à : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OM} =-\frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$

II) Vecteurs colinéaires ; Vecteurs orthogonaux

1) Vecteurs colinéaires

Propriété :

Le plan est muni d'un repère. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$

Exemples :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

  On a : $-3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

- $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

  On a : $1 \times \frac{1}{3} - 1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice

Le plan est muni d'un repère. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ont la même direction.

Résolution

Il s'agit de démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On a : $2\times 1-3\times\frac{2}{3}=2-\frac{6}{3}=2-2=0$

Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc ils ont la même direction.

2) Vecteurs orthogonaux

Propriété :

Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx'+yy'=0$.

Exemple :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

On a : $-2\times 3+5\times 1=-6+5=-1$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). On donne les points $A(-1;3)$ et $B(6;2)$.

Démontre que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Résolution

Il s'agit de démontrer que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OI}+3.\overrightarrow{OJ}$ *donc* $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = 6.\overrightarrow{OI} + 2.\overrightarrow{OJ}$ *donc* $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

On a : $-1 \times 6 + 3 \times 2 =- 6 + 6 = 0$

Alors $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont orthogonaux donc les droites* (OA) *et* (OB) *sont perpendiculaires.*

III) Calculs dans un repère

1) Calculs des coordonnées d'un vecteur

Propriété :

> Le plan est muni d'un repère. A et B sont deux points du plan ;
> *Si* $A(x_A;\ y_A)$ *et* $B(x_B;\ y_B)$ *alors* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

Exemple :

$B(1;2)$ et $B(-3;-3)$

Le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3-1\\-3-2\end{pmatrix}$ équivaut à : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$

Exercice

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On donne $A(-1;2)$; $B(3;5)$; $C(-3{,}5;-1{,}5)$ et $D(0{,}5;1{,}5)$.

a) Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

b) Quel est le couple de coordonnées de $-\overrightarrow{AB}$?

Résolution

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\5-2\end{pmatrix}$ *équivaut à :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0{,}5-(-3{,}5)\\1{,}5-(-1{,}5)\end{pmatrix}$ *équivaut à :* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont égaux.*

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ *donc* $-\overrightarrow{AB}\left(-1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)$ *équivaut à :* $-\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

2) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). K est le milieu du segment [AB].

$Si\ A(x_A;\ y_A)\ et\ B(x_B;\ y_B)\ alors\ \ K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Exemple :

$A(-1;3)$ et $B(6;2)$

Le couple de coordonnées du milieu du segment $[AB]$ est :

$K\left(\frac{-1+6}{2};\ \frac{3+2}{2}\right)$ équivaut à : $K\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$

Exercice

Le plan est muni du repère (O ; I ; J). On donne les points $A(-2;5)$ et $B(6;-5)$.

Quel est le couple de coordonnées du point C image du point A par la symétrie de centre B ?

Résolution

B est le milieu du segment $[AC]$ *donc* $AC = 2AB$ *équivaut à :*

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-5-5\end{pmatrix}$ *équivaut à :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-10\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ *équivaut à :* $\overrightarrow{AC}\left(2\begin{pmatrix}8\\-10\end{pmatrix}\right)$ *équivaut à :* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}16\\-20\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ *or* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}16\\-20\end{pmatrix}$

$Donc\ x_C - x_A = 16\quad et\quad y_C - y_A =- 20$

$x_C - (-2) = 16\quad et\quad y_C - 5 =- 20$

$x_C + 2 = 16\quad et\quad y_C - 5 =- 20$

$x_C = 16 - 2\quad et\quad y_C =- 20 + 5$

$x_C = 14\quad et\quad y_C =- 15$

le couple de coordonnées du point C est $C(14;-15)$.

3) Distance de deux points

Propriété

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

$Si\ A(x_A;\ y_A)\ et\ B(x_B;\ y_B)\ alors\ AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$

Exemple :

$A(-1; 2)$ et $B(\frac{-3}{2}; \frac{-1}{2})$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} + 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25+1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Exercice

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

On donne $A(-1; 3)$; $B(3; \sqrt{3})$; $C(2; -3)$ et $D(-2; -\sqrt{3})$.

a) Quel est le couple de coordonnées du milieu de chacun des segments $[AC]$ et $[BD]$?
b) Calcule les distances ACet BD.
c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Résolution

a) *le couple de coordonnées du milieu du segment* $[AC]$ *est :* $\left(\frac{x_A+x_C}{2};\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

$$\left(\frac{-1+2}{2};\ \frac{3+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{-1+2}{2};\ \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$$

le couple de coordonnées du milieu du segment $[BD]$ *est :*

$\left(\frac{x_B+x_D}{2};\ \frac{y_B+y_D}{2}\right)$

$$\left(\frac{3+(-2)}{2};\ \frac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2}\right) = \left(\frac{3-2}{2};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$$

b) $AC = \sqrt{(-3-3)^2 + \left(2-(-1)\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2}$

$$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

$$BD = \sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{12+25} = \sqrt{37}$$

c) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux et non pas les mêmes longueurs.

LEÇON 10 : EQUATION DE DROITE

1°/ Equation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

La relation $2x + y - 6 = 0$ est une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'inconnues $x\ et\ y$. Appelons (E) cette équation.

* Si on donne à x la valeur 1 et à y la valeur -3, alors (E) devient $2\times 1 + (-3) - 6 = 0$ qui est une égalité fausse. On dit que le couple (1 ; -3) n'est pas solution de (E) .

* Si on donne à x la valeur 0 et à y la valeur 6, alors (E) devient $2\times 0+6-6=0$ qui est une égalité vraie. On dit dans ce cas que le couple (0 ; 6) est une solution de (E).

2°/ Recherche de solution d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Pour trouver des solutions de l'équation (E) : $2x+y-6=0$, on peut :

- La transformer en écrivant par exemple $y\ en\ fonction\ de\ x$;
- Donner des valeurs arbitraires à x et trouver dans chaque cas la valeur de y correspondant.

Exemple :

(E) : $2x+y-6=0$ $équivaut$ à $y=-2x+6$

Pour $\mathrm{x}=1$, on obtient $\mathrm{y}=-2\times 1+6\ =\ 4.$

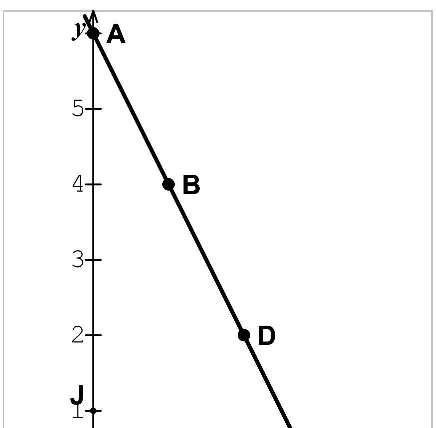
Ainsi le couple (1 ; 4) est une solution de (E).

3°/ Représentation graphique des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Considérons toujours l'équation (E) : $2x+y-6=0$ et écrivons dans un tableau de valeurs quelques couples de solutions.

Points / Coordonnées	A	B	C	D	E
x	0	1	4	2	3
y	6	4	- 2	2	0

Dans un repère (O, I, J), plaçons les points ayant pour coordonnées ces quelques couples de solutions.



On constate que tous ces points sont alignés.

Appelons (L) la droite passant par ces points.

- Chaque point de la droite (L) a pour couple de coordonnées une solution de l'équation (E).
- Réciproquement, tout couple solution de l'équation (E) est un couple de coordonnées d'un point de la droite (L).

4°/ Equation d'une droite

a) Propriété :

Dans le plan muni d'un repère :

- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$).
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ (a$\neq 0$ ou $b \neq 0$) représente l'équation d'une droite.

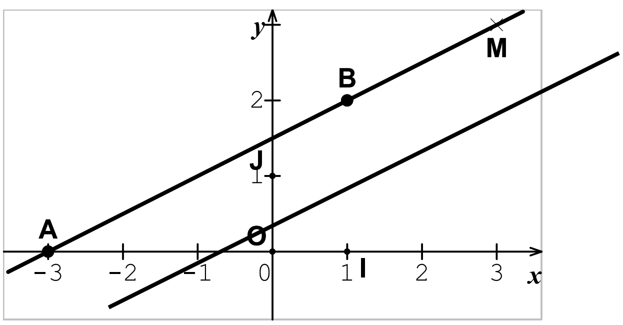
b) Recherche d'une équation de droite

- Droite passant par deux points donnés

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On donne les points A(-3; 0) et B(1; 2).

Ecrivons une équation de la droite *(AB)*



Soit $M(x, y)$ un point du plan. On sait que *M* appartient à la droite *(AB)* équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AM}\binom{x+3}{y}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$.

D'où $M \in$ *(AB)* $équivaut$ à $2(x + 3) - 4y = 0$

$$équivaut \text{ à } 2x + 6 - 4y = 0$$
$$équivaut \text{ à } 2x - 4y + 6 = 0$$
d'où l'équation $2x - 4y + 6 = 0$ est une équation de la droite *(AB)*.

Remarque :

On peut par simplification obtenir l'équation $x - 2y + 3 = 0$ qui est également une équation de la droite *(AB)*.

Exercice

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). on donne les points $A(3; 5)$ et $B(1; -2)$.
Recherche une équation de la droite (AB).

Résolution :

Soit $M(x; y) \in (AB)$ *alors* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ *sont colinéaires d'où leurs coordonnées vérifient la relation :* $xy' - x'y = 0$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -2-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

On a : $-2(y - 5) - (-7)(x - 3) = 0$

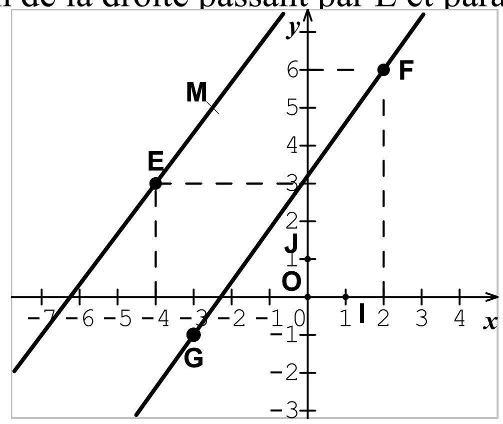
$$-2y + 10 + 7x - 21 = 0$$

$\boldsymbol{7x - 2y - 11 = 0}$ *est une équation de la droite* (AB).

- Droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points E(-4; 3) ; F(2; 6) et G(-3; -1)

Ecrivons une équation de la droite passant par E et parallèle à la droite (FG).



Soit M($x; y$) un point du plan. On sait que M appartient à la droite (D) équivaut à $\overrightarrow{EM}$ *et* $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{EM}\binom{x+4}{y-3}$ et $\overrightarrow{GF}\binom{5}{7}$ d'où M$(x, y)\in (D)$ *équivaut* à :

$7(x+4) - 5(y-3) = 0$ *équivaut* à $7x + 28 - 5y + 15 = 0$

équivaut à $7x - 5y + 43 = 0$

La droite (D) a donc pour équation : $7x - 5y + 43 = 0$.

<u>Exercice</u>

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). on donne les points $M(-1; 1)$; $N(-3; -2)$ et $P(2; 3)$. Rechercher une équation de la droite (D) parallèle à (MN) et passant par P.

<u>Résolution</u> :

Soit $A(x; y) \in (D)$ *alors* (MN) *et* (PA) *sont parallèles donc* $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{PA}$ *sont colinéaires d'où leurs coordonnées vérifient la relation :*

$xy' - x'y = 0$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3-(-1) \\ -2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$

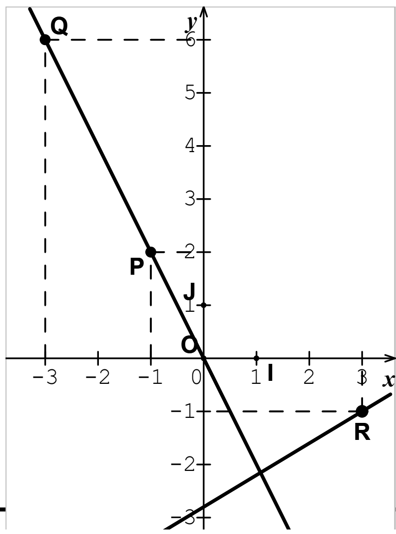
On a : $-2(y-3) - (-3)(x-2) = 0$

$-2y + 6 + 3x - 6 = 0$

$\mathbf{3x - 2y = 0}$ *est une équation de la droite* (D).

- <u>Droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée</u>

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points P(-1;2); Q(-3 ;6) et R(3 ;-1). Ecrivons une équation de la droite (Δ) passant par R et perpendiculaire à la droite (PQ).



Soit M$(x;y)$ un point du plan. On sait que M(x,y) appartient à la droite (Δ) $équivaut$ à $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ $sont$ $orthogonaux$. Or $\overrightarrow{RM}\binom{x-3}{y+1}$ et $\overrightarrow{PQ}\binom{-2}{4}$. D'où

M$(x,y) \in (\Delta)$

$équivaut$ à $-2(x-3)+4(y+1)=0$

$équivaut$ à $-2x+6+4y+4=0$

$équivaut$ à $-2x+4y+10=0$

$équivaut$ à $-x+2y+5=0$

La droite (Δ) admet donc pour équation $-x+2y+5=0$.

<u>Exercice</u>

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points $E(3;2)$; $F(-1;-4)$ et

$G(-2;1)$. Rechercher une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à (EF) et passant par G.

<u>Résolution</u> :

Soit $H(x;y) \in (\Delta)$ alors (GH) et (EF) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux d'où leurs coordonnées vérifient la relation : $xx'+yy'=0$

$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

On a : $-4(x+2)-6(y-1)=0$

$-4x-8-6y+6=0$

$-4x-6y-2=0$

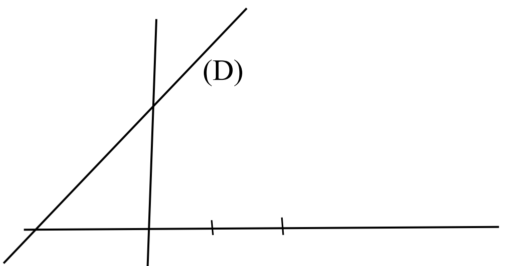
$\mathbf{2x+3y+1=0}$ *est une équation de la droite* (Δ).

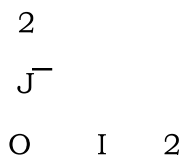
c) <u>Coefficient directeur d'une droite</u>

<u>Propriétés</u> :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

Toute droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=ax+b$. Le nombre a est appelé *<u>coefficient directeur</u>* de la droite (D) et le nombre b est *<u>ordonnée à l'origine</u>*.





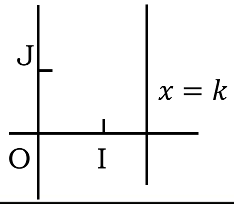
Remarque :

Si le coefficient directeur de la droite (D) est a, alors tout vecteur de coordonnées $\binom{1}{a}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Si $a = 0$ alors tout vecteur (D) est parallèle à l'axe des abscisses.

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$.

Elle n'a ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine.



Remarque :

Dans un repère orthonormé, lorsque le coefficient directeur d'une droite est positif, il est aussi appelé *pente de la droite*.

- Calcul du coefficient directeur d'une droite

Propriété :

Le plan est muni du repère (O, I, J)
(D) est une droite d'équation $y = ax + b$. Si $A(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$ appartiennent à (D) alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Justification :

$A(x_A; y_A) \in (D) \Longrightarrow y_A = ax_A + b \quad (E_1)$

$B(x_B; y_B) \in (D) \Longrightarrow y_B = ax_B + b \quad (E_2)$

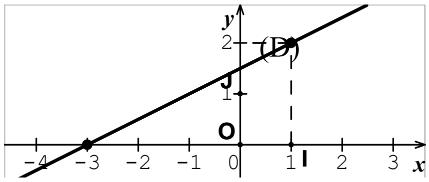
$(E_2) - (E_1) \Longrightarrow y_B - y_A = a(x_B - x_A)$

$d'où \;\; a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

c) Recherche de l'équation d'une droite à partir de son coefficient directeur

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Ecrivons une équation de la droite (D) passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3\ ;0)$.



(D) n'est pas parallèle à (OJ), elle admet donc une équation de la forme

$y = ax + b$.

Le coefficient directeur de (D) est $a = \frac{0-2}{-3-1} = \frac{1}{2}$.

(D) admet donc une équation de la forme $y = \frac{1}{2}x + b$.

Or A$(1;2) \in (D)$

donc $2 = \frac{1}{2} \times 1 + b$ *alors* $b = \frac{3}{2}$

Par conséquent une équation de la droite (D) est : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e) Position relative de deux droites

- Droites parallèles

Propriété :

Le plan est muni du repère (O, I, J). Les droites (D) et (D') ont pour coefficients directeurs respectifs a et a'.
On a : $(D)//(D')$ *équivaut* à $a = a'$

- Droites perpendiculaires

Propriété :

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Les droites (D) et (D') ont pour coefficients directeurs respectifs a et a'.
On a : $(D) \perp (D')$ *équivaut* à $a \times a' = -1$.

Exercice

Soit trois droites (D), (L) et (T) d'équations respectives :

$y = \frac{4}{5}x - 1\ ;\quad y = -\frac{5}{4}x + 2$ et $y = \frac{4}{5}x$.

Quelle est la position relative de ces trois droites ?

<u>Résolution</u> :
Les coefficients directeurs de (D) et (T) sont égaux donc (D) et (T) sont parallèles.
$\frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) =- 1$ *donc la droite (L) est perpendiculaire à (D) et (T).*

<u>LEÇON 11</u> : $\boxed{\text{STATISTIQUES}}$

<u>Introduction</u>

Comme l'algèbre ou la géométrie la statistique est une science qui représente une branche assez importante des mathématiques. Et les domaines où la collecte, l'analyse et l'interprétation de données sont essentiels pour une prise de décision objective relèvent du domaine de la statistique.
De nos jours, les méthodes statistiques sont employées régulièrement dans tous les domaines scientifiques comme l'administration, l'économie, l'ingénierie, la chimie, la biologie, la psychologie, l'éducation, la médecine … où elles y forment un ensemble d'outils extrêmement important.

I- <u>Vocabulaire statistique</u>

- Population :

L’ensemble des êtres ou des objets sur lesquels on fait l’étude statistique est appelé population.

- Individu (ou unité statistique) :

Chaque élément de la population est appelé un individu ou une unité statistique.

- Effectif total :

C’est le nombre total d’être ou d’objets qui constituent la population.

- Caractère :

L’étude statistique peut porter sur certaines propriétés des individus, propriétés qu’on appelle caractère statistique. (Ce qui est l’objet de l’étude).

- Modalités :

Ce sont les différentes réponses obtenues ou à obtenir lors d’une enquête statistique.

- Caractère quantitatif :

Lorsque les réponses obtenues ou à obtenir sont des nombres, on dit que le caractère est quantitatif.

- Caractère qualitatif :

Lorsque les réponses obtenues ou à obtenir ne sont pas des nombres, on dit que le caractère est qualitatif.

- Effectif d’une modalité :

L’effectif d’une modalité, appelé aussi effectif relatif, est le nombre de fois que cette modalité apparaît dans les réponses obtenues.

- Effectif cumulé d’une modalité (cas d’un caractère quantitatif) :

On considère une série statistique dont les modalités rangées par ordre croissant. On appelle effectif cumulé croissant (resp. décroissant) d’une modalité x la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (resp. supérieures ou égales) à x.

- Fréquence d'une modalité :

On appelle fréquence d'une modalité ou fréquence relative le quotient de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.
La fréquence peut s'exprimer sous diverses formes :
- une fraction dont le numérateur est l'effectif de la modalité et le dénominateur est l'effectif total ;
- un nombre décimal qui l'arrondi d'ordre 1 ; 2 ou 3 du quotient précédent ;
- un pourcentage qui est le produit de l'arrondi précédent par le nombre 100.

- Fréquence cumulée d'une modalité :

On appelle fréquence cumulé croissante (resp. décroissante) d'une modalité x le quotient de son effectif cumulé par l'effectif total de la série statistique.

Remarque 1 :

Dans le cas où les modalités sont trop nombreuses ou difficiles à préciser, une méthode d'étude consiste à regrouper les modalités voisines en classes (intervalles ayant souvent la même amplitude). On parle dans ce cas de classe modale au lieu de mode.

Remarque 2 :

Le mode (ou la classe modale), la moyenne et la médiane sont des caractéristiques dites de position.

II – Traitement des données

1) La moyenne

a. Définition

On appelle moyenne d'une série statistique, le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total.

b. Détermination de la moyenne d'une série regroupée en classe

(voir exemple 3c question 1 et 2)

2) Le mode

a- Définition

On appelle mode d'une série statistique toute modalité dont l'effectif est maximal.

b- Classe modale

On appelle classe modale d'une série statistique à modalités regroupées en classes toute classe qui a le plus grand effectif.

3) La médiane

a. Définition

Soit une série statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont rangées dans l'ordre croissant.
La médiane de cette série d'effectif total n est :
- Sa valeur centrale si n est impair
- La demi-somme de ses deux valeurs centrales si n est pair.

b. Méthode de détermination de la médiane

Pour déterminer la médiane d'une série statistique à partir des effectifs cumulés croissants :
- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants
- Si l'effectif total est impair de la forme $n = 2p + 1$, alors la médiane est la $(p+1)^{ième}$ valeur de la série. (c'est la valeur centrale)
- Si l'effectif total est pair de la forme $n = 2p$, alors la médiane est la demi – somme des $p^{ième}$ et $(p+1)^{ième}$ valeurs de la série. (c'est la demi – somme des deux valeurs centrales).

c. Méthode de détermination de la médiane d'une série regroupée en classe.

Faisons une interpolation linéaire.

Exemple.

Une enquête faite auprès de 240 élèves d'une école primaire portant sur l'âge de chaque élève a donné les résultats suivants :

Répartition des âges	$[3; 5[$	$[5; 7[$	$[7; 9[$	$[9; 11[$	$[11; 13[$	$[13; 15[$
Centre de classe						
Nombre d'élèves	40	32	40	53	52	23

i) Complète le tableau ci – dessus.
ii) Détermine l'âge moyen.
iii) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

iv) Détermine la classe médiane puis la médiane.

Solution

i)

Répartition des âges	$[3;5[$	$[5;7[$	$[7;9[$	$[9;11[$	$[11;13[$	$[13;15[$
Centre de classe	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
Nombre d'élèves	40	32	40	53	52	23

ii) Age moyen $= \frac{4\times40+6\times32+8\times40+10\times53+12\times52+14\times23}{240} = \frac{2148}{240} = 8.95.$

iii)

Répartition des âges	$[3;5[$	$[5;7[$	$[7;9[$	$[9;11[$	$[11;13[$	$[13;15[$
Nombre d'élèves	40	32	40	53	52	23
effectifs cumulés croissants.	**40**	**72**	**112**	**165**	**217**	**240**

iv) Classe médiane : Comme $\frac{n}{2} = 120$ et que la $120^{\text{ème}}$ valeurs appartiennent à la classe $[9;11[$ alors $\mathbf{[9;11[}$ est **la classe médiane**.

La médiane

Pour déterminer la médiane qu'on notera m_e, on associe aux extrémités de la classe modale les effectifs cumulés de la classe précédente et de la classe modale et à m_e on associe 120. On a ainsi le tableau suivant :

Répartition des âges	9	m_e	11
effectifs cumulés croissants	112	120	165

Donc $\frac{m_e-9}{120-112} = \frac{11-9}{165-112}$.

Par interpolation linéaire, on a $\mathbf{m_e = 9{,}3}$.

4) L'étendue

Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de cette série.

III – Représentation des diagrammes

Dans une étude statistique, le tableau des effectifs ou des fréquences peut être matérialisé, soit par un diagramme en bâton, soit par un diagramme à bande, soit par un diagramme circulaire, soit par diagramme semi-circulaire.

1/ Diagramme en bâtons :

Pour dessiner un diagramme en bâtons :

- On trace deux demi-droites de même origine et de supports souvent perpendiculaires qu'on gradue régulièrement.
- En ordonnée, on écrit les effectifs ou les fréquences, et en abscisse, on écrit les modalités.
- On trace pour chaque modalité un segment vertical de longueur proportionnelle à son effectif ou à sa fréquence.

Remarque :

En cas de regroupement en classe, les segments ou bâtons se tracent au centre des intervalles.

2/ Diagrammes à bandes :

Pour dessiner un diagramme à bandes :

- On trace deux demi-droites de même origine et de supports souvent perpendiculaires qu'on gradue régulièrement.
- En ordonnée, on écrit les effectifs ou les fréquences et en abscisse, on écrit les modalités.
- On trace pour chaque modalité une bande (un rectangle) de hauteur proportionnelle à son effectif ou à sa fréquence. Ses rectangles sont souvent de même largeur et souvent juxtaposés.

Remarque :

Dans le cas des diagrammes en bâtons ou à bandes, on peut aussi construire pour les effectifs cumulés ou pour les fréquences cumulées des diagrammes.

3/ Diagramme circulaire ou semi-circulaire

Pour dessiner un diagramme circulaire ou semi-circulaire :

- On trace un cercle ou un demi-cercle selon le cas.
- On calcule pour chaque modalité la mesure a° de l'angle au centre correspondant à son effectif $eff.$ ou à sa fréquence $\mathcal{F}$ à l'aide des formules suivantes :

- Cas des effectifs :

$$a° = \frac{eff.\times 360}{eff.total} \quad \text{(diagramme circulaire)}$$

$$a° = \frac{eff.\times 180}{eff.total} \quad \text{(diagramme sémi-circulaire)}$$

- Cas des fréquences

$$a° = \mathcal{F} \times 360 \ \textbf{ou} \ a° = \frac{\mathcal{F}(\%)\times 360}{100} \quad \text{(diagramme circulaire) ;}$$

$$a° = \mathcal{F} \times 180 \ \textbf{ou} \ a° = \frac{\mathcal{F}(\%)\times 180}{100} \quad \text{(diagramme sémi-circulaire).}$$

III – Etude de caractères

1/ Etude de caractères quantitatifs

Exercice :

Dans une classe de 3ème du Lycée Moderne d'Anyama, l'administration a relevé l'âge de chaque élève. Elle a obtenu les résultats suivants :

16 19 19 18 17 18 16 18 16 17 18 16 17 17 16 19 18 18

18 19 18 16 19 19 17 15 15 19 14

18 14 15 14 20 18 18 17 16 16 19 17 17

1) Quel est l'effectif total de cette classe ?
2) Quels sont la population et le caractère étudié ?
3) a- Dresser le tableau des effectifs, des effectifs cumulés, des fréquences en %, des fréquences cumulées (on rangera d'abord les âges dans un ordre croissant).

   b- Quel est le mode de cette série statistique ?

   c- Quel est la médiane de cette série statistique ?
4) Calculer la moyenne d'âge de cette classe.
5) Construis le diagramme en bâtons des effectifs.
6) Construis le diagramme cumulatif croissant des effectifs.

***Corrigé** :*

1/ L'effectif de cette classe est de 42 élèves.

2/

- *La population est l'ensemble des élèves d'une classe de 3ème du Lycée Moderne d'Anyama.*
- *Le caractère étudié est l'âge. Il est quantitatif.*

3/ a. *<u>Tableau</u>*

Modalités (âges)	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*Total*
Effectifs	*3*	*3*	*8*	*8*	*11*	*8*	*1*	*42*
Effectifs cumulés	*3*	*6*	*15*	*22*	*33*	*41*	*42*	
Fréquence en %	*07*	*07*	*21*	*17*	*26*	*19*	*03*	*100*
Fréquence cumulée	*07*	*14*	*35*	*52*	*78*	*97*	*100*	

b. Le mode de la série statistique est la modalité «18 ans» dont l'effectif est 11.

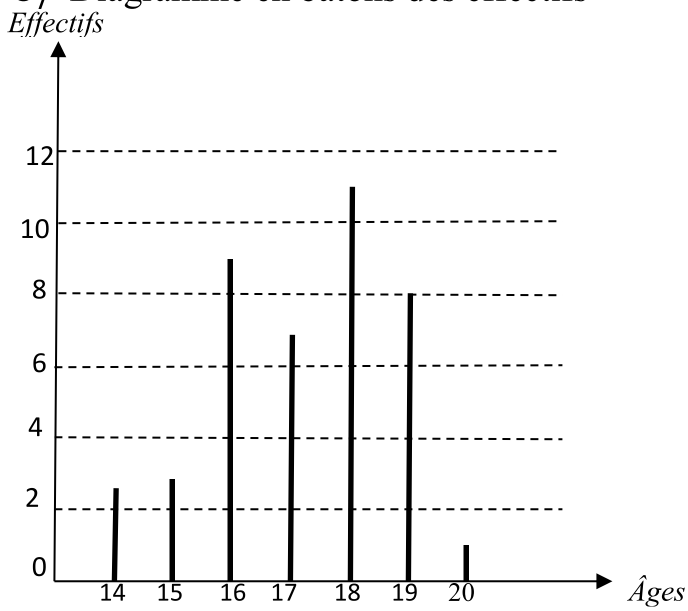
c. La médiane de cette série statistique est 17.

4/ moyenne d'âge M de la classe

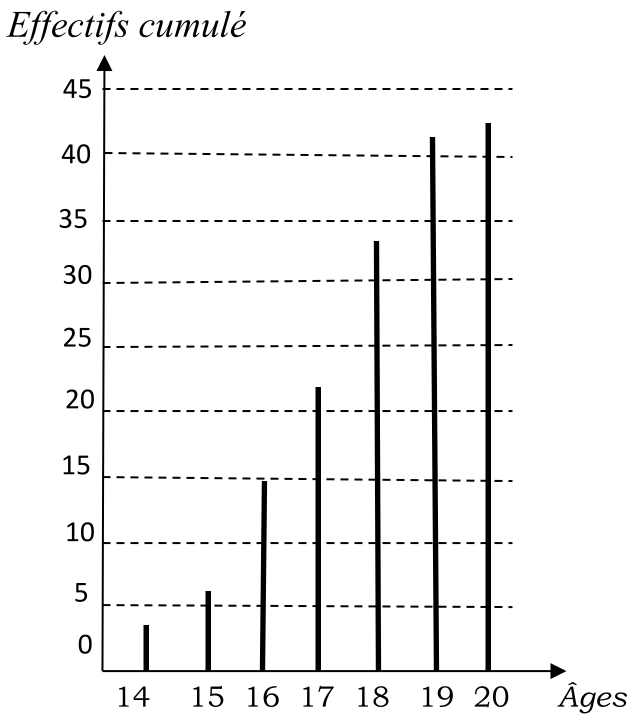
$$M = \frac{(14\times3)+(15\times3)+(16\times9)+(17\times7)+(18\times11)+(19\times8)+(20\times1)}{42}$$

M = 17,14. La moyenne de cette classe est d'environ 17 ans.

5/ Diagramme en bâtons des effectifs



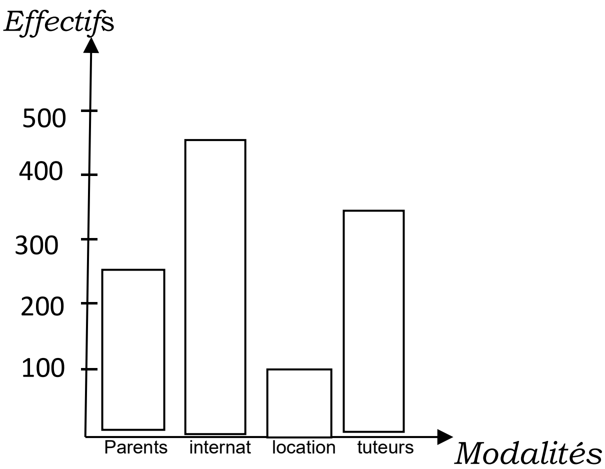
6/ Diagramme cumulatif croissant des effectifs



2/ Etude du caractère qualitatif

Exercice

Une enquête menée auprès des élèves d'un collège concernant leur mode d'habitation a permis d'établir le diagramme ci-dessous.



1- Quel est l'effectif total et le mode de cette série statistique ?
2- Reproduire et compléter le tableau ci-dessous
(Les fréquences non entières seront exprimées au 10^{-2} centimètre près)

Modalités	Chez des	A l'internat	En location	Chez des	Total

	parents			tuteurs	
Effectifs					
Fréquences					

Corrigé :

1- L'effectif total est : $250 + 450 + 100 + 350\ soit\ 1150$ *élèves.*

Le mode de cette série statistique est "internat" dont l'effectif est 450.

2-Tableau

Modalités	*Chez des parents*	*A l'internat*	*En location*	*Chez des tuteurs*	*Total*
Effectifs	*250*	*450*	*100*	*350*	*1150*
Fréquences	*0 ,22*	*0,39*	*0,09*	*0,30*	*1*

Exercices

Exercice 1

Dans une enquête menée sur la taille de 62 bébés nés à la maternité d'Anyama, la fréquence de la modalité 0,52m est 11,3%. Quel est le nombre de bébés qui mesurent 0,52m ?

Exercice 2

Lors d'un contrôle de maths, les élèves d'une classe de 3ème ont obtenu les notes suivantes :

8 9 14 8 12 9 7 12 9 13 9 11 12 7 9 8 11 8 8

15 8 10 14 8 13 7 13 8 14 10 8 15 8 11 8 9 7

12 11 9 9 13 12 7 9

12 14 9 8 7

Le professeur de maths organise les notes par classe d'amplitude 3.

a) Recopie puis complète le tableau suivant :

Modalités	[7 ;10[	[10 ;13[	[13 ;16[	Total
Effectifs				

b) Quelle est la classe modale de cette série statistique ?

c) Calculer le pourcentage d'élèves n'ayant pas obtenu la moyenne à ce contrôle.

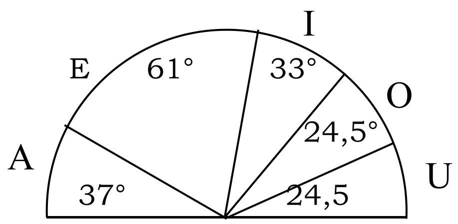
d) Construis le diagramme à bandes des effectifs.
(On prendra en ordonnées 1cm pour 4 élèves).

Exercice 3

Le Scrabble est un jeu de société consistant à former des mots sur la grille à l'aide de jetons portant une lettre chacun. Le diagramme semi-circulaire suivant représente la répartition des 44 jetons sur lesquels se trouvent les voyelles A, E, I, O et U.

1- Donner le tableau des effectifs.

2- Combien y a-t-il de jetons portant la lettre A ou E ?



Exercice 4

M. Patrice mène une enquête auprès des élèves de sa classe de 3ème pour déterminer la moyenne d'âge de ses élèves. Il dresse le tableau ci – dessous.

Âges	16	18	19	22	Total
Effectifs	20	50	10	5	

1. Détermine le mode cette série statistique.
2. Calcule la moyenne d'âge des élèves

Il désire poursuivre l'étude à l'aide des données du tableau. Pour cela M. Patrice veut :

3. Calculer les effectifs cumulés croissants
4. Déterminer la médiane de la série

5. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.

Corrigés des exercices

Exercice 1

On a : fréquence en %. $\mathcal{F} = \frac{effectif}{effectif\ total} \times 100.$

Ainsi, $effectif = \frac{fréquence \times effectif\ total}{100} = \frac{11{,}3\times62}{100} = 7$

Il y a donc 7 bébés qui mesurent 0,52 cm.

Exercice 2

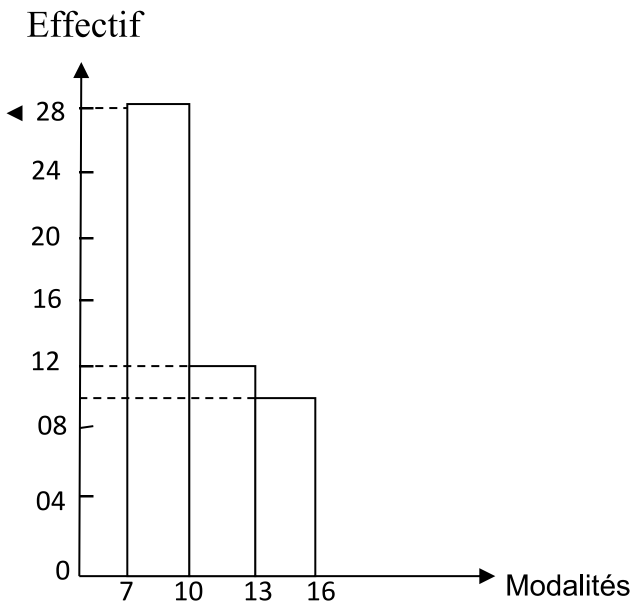
a)

Modalités	*[7 ;10[*	*[10 ;13[*	*[13 ;16[*	*Total*
Effectifs	*28*	*12*	*10*	*50*

b) *La classe modale de cette série est : [7 ;10[dont l'effectif est 28.*

c) *Le pourcentage d'élèves n'ayant pas obtenu la moyenne à ce contrôle est* $\frac{28\times100}{50}$ *=56%.*

d) diagramme à bandes.



Exercice 3

1- Effectif partiel.

Effectif partiel $= \frac{mesure\ d'angle\ au\ centre \times 44}{180}$.

Lettres	*A*	*E*	*I*	*O*	*U*	*Total*
Mesure d'angle au centre (°)	*37*	*61*	*33*	*24,5*	*24,5*	*180°*
Effectif	*9*	*15*	*8*	*6*	*6*	*44*

2- Le nombre de jetons portant la lettre A ou la lettre E correspond à la somme des effectifs partiels des modalités A et E. Soit $9 + 15 = 24$

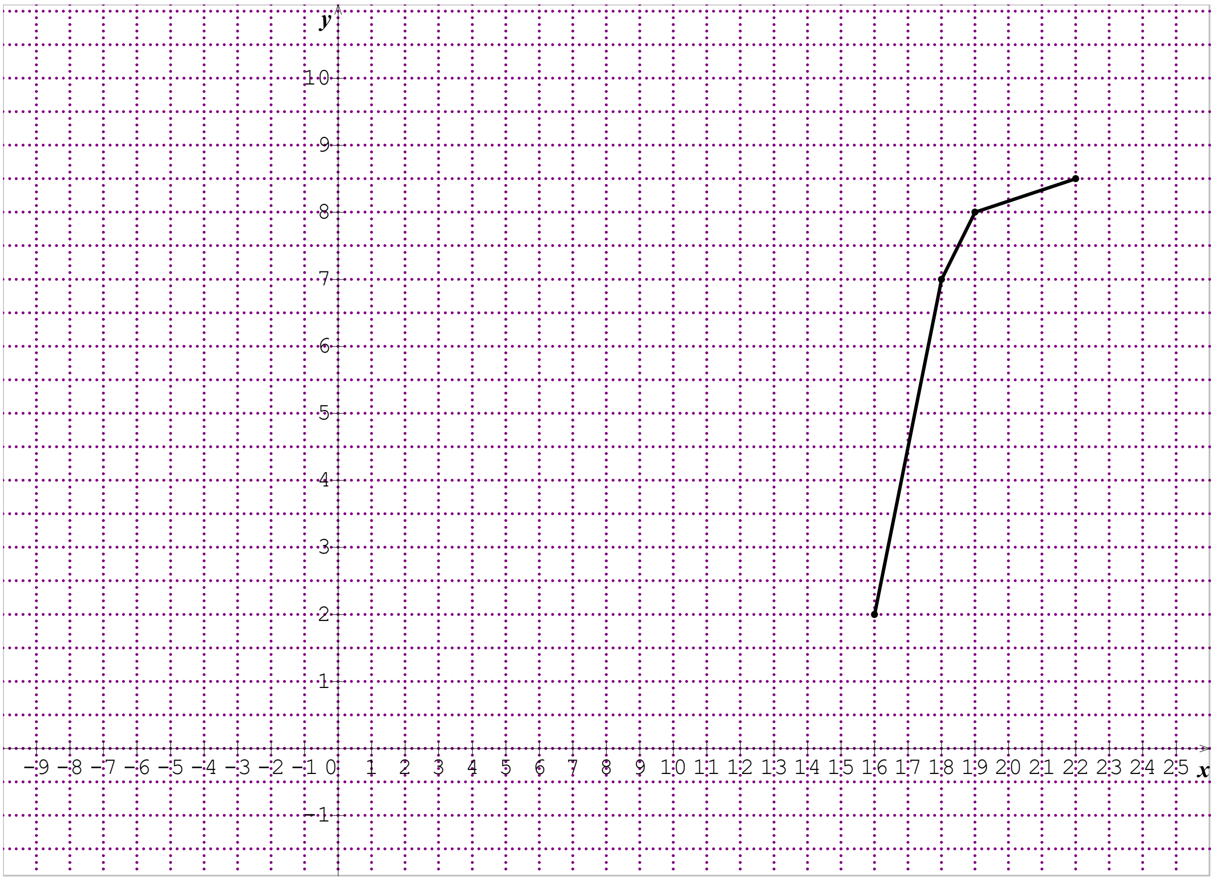
Exercice 4

1) *Le mode est 18.*
2) $M = \frac{16\times20+18\times50+19\times10+22\times5}{85} = \frac{1520}{85} = 17{,}88 \approx 17\ ans.$
3) *Tableau*

Âges	*16*	*18*	*19*	*22*	*Total*
Effectifs	*20*	*50*	*10*	*5*	*85*
Effectifs cumulés croissants	*20*	*70*	*80*	*85*	

4) *85* $= 2 \times 42 + 1$, *donc la médiane est la* $43^{è}$*valeur qui 18.*
   $\boldsymbol{M_e = 18}$**.**

5) *Echelle :* $\begin{cases} 1cm \rightarrow 2\ ans \\ 1cm \rightarrow 10\ effectifs\ cumulés \end{cases}$



LEÇON 12 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

I- Equations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1°/ Notion d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Présentation

a, b et *c* sont des nombres réels donnés. Une équation du premier degré à deux inconnues est une relation du type :
$ax + by + c = 0$ où x et y sont les deux inconnues.

- Ensemble des solutions

Résoudre l'équation $ax + by + c = 0$, c'est trouver l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ pour lesquels l'égalité $ax + by + c = 0$ est vraie.
Or nous avons vu en activités géométriques que cet ensemble est l'ensemble des coordonnées $(x; y)$ des points de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Une droite à une infinité de points ; donc l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est infini.

Exemple :
L'équation $3x - 2y + 4 = 0$ a pour solutions l'ensemble des couples vérifiant l'équation $3x - 2y + 4 = 0$. Quelques couples de solutions de cette équation sont : (0; 2) ; ($-\frac{4}{3}$; 0) ; (2; 5) ; (-2; -1).

2°/ Résolution graphique de systèmes de deux équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 \\ a' \neq 0 \text{ ou } b' \neq 0 \end{cases}$$

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x; y)$ qui vérifient à la fois les deux équations.
Pour résoudre graphiquement ce système d'équation, on procède comme suit :
Dans un même repère,
- On trace la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.
- On trace la droite (D') d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

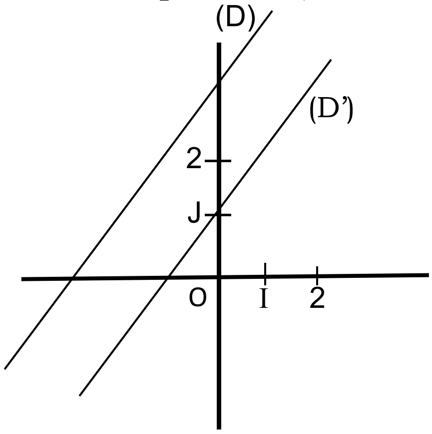
Trois cas de figure peuvent alors se présenter :

- 1er cas : Les droites sont sécantes au point M de coordonnées (s,t).

On conclut que le couple (s,t) est la solution unique du système

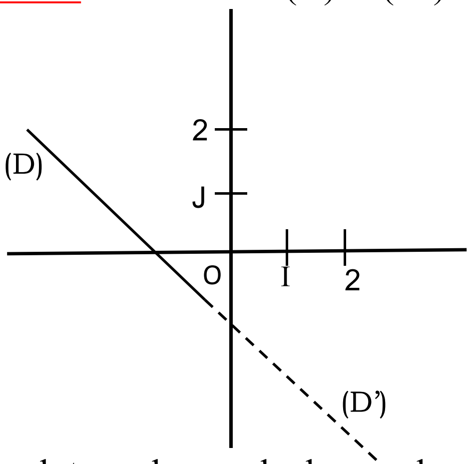
$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

- 2ème cas : Les droites (D) et (D') n'ont aucun point commun (elles sont strictement parallèles).



On conclut que le système n'a pas de solution et on écrit $\mathcal{S}_{(S)} = \emptyset$.

- 3ème cas : Les droites (D) et (D') sont confondues.



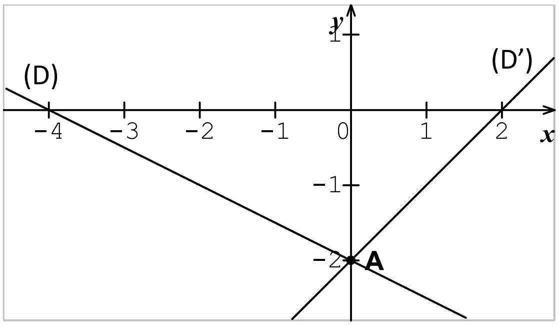
On conclut que le couple de coordonnées de chacune des deux droites est solution. Le système admet ainsi une infinité de solutions. On écrit :

$\mathcal{S}_{(S)} = \{(x;y)\ avec\ ax+by+c=0\}$

Exemple

Résolvons graphiquement le système d'équation suivant : (S) $\begin{cases} x+2y+4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

Pour cela, traçons dans un repère (O, I, J) la droite (D) d'équation $x+2y+4=0$ puis la droite (D') d'équation $x-y-2=0$.



	E	B
x	2	-4
y	-3	0

	C	D
x	1	2
y	-1	0

Les droites (D) et (D') sont sécantes au point A de coordonnées (0 ;-2).

Le système (S) $\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ admet donc pour solution unique le couple

(0 ; $-$ 2).

N.B. :

On pouvait prévoir à partir du système de départ que les droites (D) et (D') seraient sécantes car leurs coefficients directeurs respectifs $-\frac{1}{2}$ et 1 sont différents.

Remarque :

Les résultats donnés par simple lecture sur un dessin étant approximatifs, on demande souvent de les vérifier par le calcul. Donc on préféra, en général, déterminer la solution du système par le calcul. Pour cela, deux méthodes de calcul nous sont possibles : la substitution et la combinaison.

3°/ Résolution de système d'équations par substitution.

Méthode :

Elle consiste à exprimer l'une des deux inconnues en fonction de l'autre dans l'une des deux équations, puis à la remplacer par son expression en fonction de l'autre dans la deuxième équation afin d'obtenir dans cette dernière une seule inconnue.

Exemple :

Résolvons par substitution le système d'équation (S) :$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \ (1) \\ 4x - 5y + 2 = 0 \ (2) \end{cases}$

Le système (S) admet une solution unique car les coefficients directeurs correspondants aux droites d'équations (1) et (2) sont différents : $-\frac{2}{3} \neq \frac{4}{5}$

On

a :

$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ *équivaut* à : $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ 4x - 5\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$ *équivaut* à :

$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ 4x + \frac{10}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$ *équivaut* à : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \end{cases}$ *équivaut* à :

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

Ainsi le système $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ admet pour solution le couple $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

On écrit : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\}$.

<u>Exercice</u>

Vérifier par substitution que le système d'équation $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ admet pour solution le couple (2; 3).

4°/ <u>Résolution de système d'équations par</u> <u>combinaison</u>.

<u>Méthode</u> :

Elle consiste à multiplier chacune des deux équations par un nombre bien choisi de manière à obtenir par addition membre une équation ne contenant qu'une seule inconnue.

<u>Exercice 1</u>

Résolvons par combinaison le système d'équations $\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \ (1) \\ 2x - 3y + 8 = 0 \ (2) \end{cases}$

Ce système admet une solution unique car les coefficients directeurs $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ correspondant aux droites d'équations (1) et (2) sont différents.

- **Pour éliminer $\boldsymbol{x}$**, on multiplie chaque membre de l'équation (1) par -2 et chaque membre de l'équation (2) par 3. Le système devient alors
  $\begin{cases} -6x + 8y + 10 = 0 \\ \ \ 6x - 9y + 24 = 0 \end{cases}$
  En additionnant membre à membre les deux membres du nouveau système, on obtient : $-y + 34 = 0$ d'où $y = 34$.

- **Pour éliminer $\boldsymbol{y}$**, on multiplie chaque membre de l'équation (1) par -3 et chaque membre de l'équation (2) par 4. Le système devient alors
  $\begin{cases} -9x + 12y + 15 = 0 \\ 8x - 12y + 32 = 0 \end{cases}$ et en additionnant membre à membre les deux membres de ce nouveau système, on obtient $-x + 47 = 0$ d'où $x = 47$.
  Le système $\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$ admet pour solution le couple (47; 34).

<u>Exercice 2</u>

Résolvons par combinaison le système d'équation le système d'équations
$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \ \ (\times(-1)) \\ \ \ x - 2y + 4 = 0 \ \ (\times 2) \end{cases}$ $équivaut$ à :

$\begin{cases} -2x - y + 7 = 0 \\ 2x - 4y + 8 = 0 \end{cases}$

.

$0 - 5y + 15 = 0$

$5y = 15$

$\mathbf{y = 3}$

$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \ \ (\times 2) \\ x - 2y + 4 = 0 \ \ (\times 1) \end{cases}$ $équivaut$ à : $\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ \ \ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

$5x + 0 - 10 = 0$

soit $\boldsymbol{x = 2}$

La solution du système $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ est (2; 3).

<u>Remarque</u> :

Dès qu'on trouve la valeur de l'une des inconnues, on peut la remplacer dans l'une des deux équations pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

Exercice :

Vérifier par combinaison que le système d'équations : $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$

admet pour solution le couple $(-\frac{1}{2}; 0)$.

5°/ Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Propriété :

Le plan est muni d'un repère. (D) est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

La droite (D) partage le plan en trois parties :

- Deux demi-plans de frontière la droite (D).
- La droite (D) elle-même.

- Les couples de coordonnées des points d'un demi-plan vérifient l'inéquation : $ax + by + c < 0$.
- Les couples de coordonnées des points de (D) vérifient l'équation : $ax + by + c = 0$.
- Les couples de coordonnées des points de l'autre demi-plan vérifient l'inéquation : $ax + by + c > 0$.

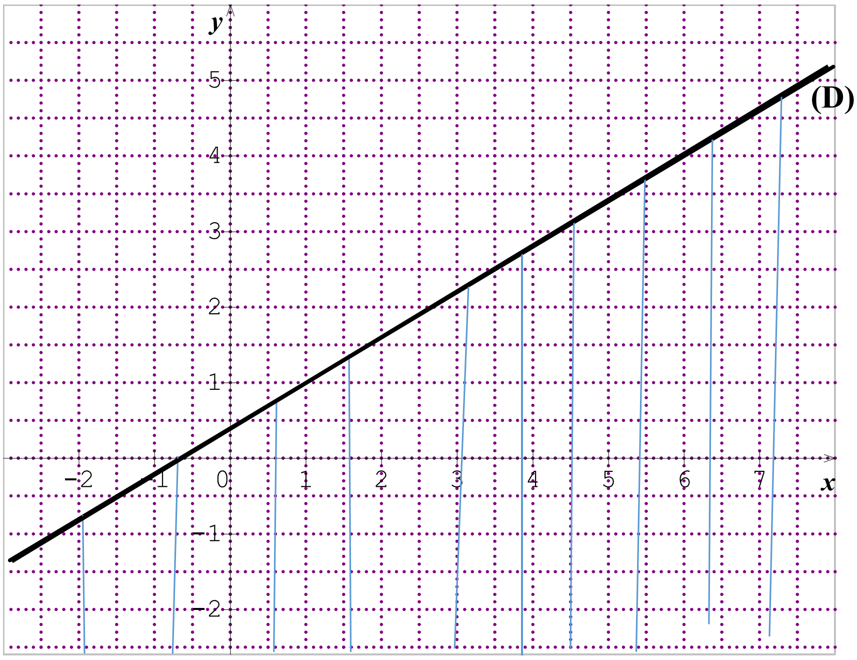
Exemple :

Représentons graphiquement les solutions de l'inéquation (I) :

$3x - 5y + 2 > 0$.

Le plan est muni du repère (O, I, J). Traçons la droite (D) d'équation

$3x - 5y + 2 = 0$.



On détermine la valeur numérique de l'expression $3x - 5y + 2$ pour le couple (1 ; 2) (*coordonnées du point A*) par exemple. On obtient le nombre -5 qui est négatif.
On conclut que le demi-plan (P_2) de frontière (D) ne contenant pas le point A représente l'ensemble des solutions de (I).

Remarque :

> Dans le cas d'un système de deux inéquations, l'ensemble des solutions est représenté graphiquement par la partie hachurée deux fois.

Exercice

Représente graphiquement les solutions du système (I) : $\begin{cases} 3x - 7y - 5 > 0 \\ 12x + 5y - 3 < 0 \end{cases}$

6°/ Problème du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Démarche à suivre :

> Pour résoudre un problème du 1er degré à deux inconnues, il faut souvent procéder comme suit :
> - Lire attentivement l'énoncé puis, recenser ce que l'on connait (les données) et ce que l'on cherche (les inconnues)
> - Désigner éventuellement par des lettres les inconnues,
> - Traduire par des équations ou inéquations les données du problème,

- Résoudre le système d'équations ou inéquations obtenu puis répondre à la question posée après avoir vérifié que les nombres sont effectivement les solutions du problème posé.

Exercices

Exercice 1

Trouve le couple d'entiers naturels (a, b) tels que les couples de réels $(-1; 3)$ et (2 ;-3) soient solutions de l'équation (E) : $ax + by - 1 = 0$.

Corrigé :

Le couple $(-1; 3)$ vérifie l'équation (E) équivaut à $-a + 3b - 1 = 0$.

Le couple (2 ;-3) vérifie l'équation (E) équivaut à $2a - 3b - 1 = 0$.

On obtient donc le système d'équations $\begin{cases} -a + 3b - 1 = 0 \\ 2a - 3b - 1 = 0 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne : $a = 2$ et $b = 1$.

Le couple d'entier naturels cherché est donc (2;1).

Exercice 2 :

La petite économie de M^lle^ D'Avila DJEDJI est constituée de pièces de 50f et de pièces de 100f qui représente un total de 26 pièces pour un montant de 1650f. Quels sont le nombre de pièces de 50f et le nombre de pièces de 100f ?

Corrigé

Soit x le nombre de pièces de 50f et y le nombre de pièces de 100f.

Le nombre total de pièces est : $x + y = 26$ (1).

Le montant de l'économie de D'Avila est $50x + 100y = 1650$ (2).

La résolution de ce système donne $x = 19$ et $y = 7$.

Conclusion : D'Avila a 19 pièces de 50f et 7 pièces de 100f.

Exercice 3 :

Avant de partir au marché, Bintou possède 1200f de plus que sa camarade Akissi. Au marché, elles dépensent chacune 3600f. Bintou possède alors deux fois plus d'argent qu'Akissi.

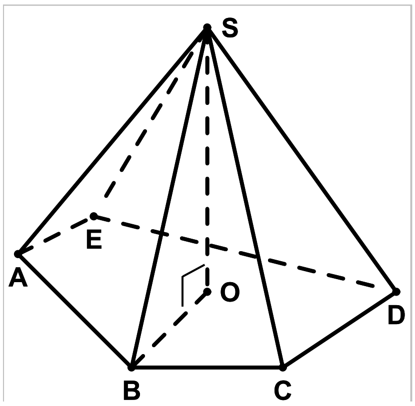
Quelle somme d'argent disposait chacune d'elle avant d'aller au marché ?

LEÇON 13 : PYRAMIDES ET CÔNES

I – Pyramide

1°/ Présentation et vocabulaire

Le solide SABCDE représenté ci-contre est une pyramide de base le polygone ABCDE et de sommet S. Les triangles SAB ; SBC ; SCD ; SDE et SEA sont les faces latérales de cette pyramide. La droite (SO) est la hauteur de cette pyramide. Les segments [SA] ; [SB] ; [SC] ; [SD] ; [SE], ainsi que les côtés de la base sont appelés les arêtes de la pyramide.



Remarque :

Dans une pyramide à base triangulaire, chaque face latérale peut être considérée comme base de cette pyramide et chaque point peut être considéré comme le sommet de cette pyramide.

2°/ Hauteur d'une pyramide

a. Définition :

On appelle hauteur d'une pyramide la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

b. Remarque :

Sur la figure ci-dessus, la hauteur de la pyramide SABCDE est la droite (SO).

3°/ Pyramide régulière

a. Rappel :

Un polygone régulier est un polygone inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur.

b. Pyramide régulière

Définition :

On dit qu'une pyramide est régulière lorsque :

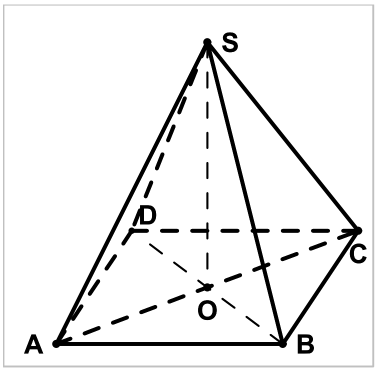
- Sa base est polygone régulier.
- Ses faces latérales sont des triangles isocèles.

Propriété :

Dans une pyramide régulière, la hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.

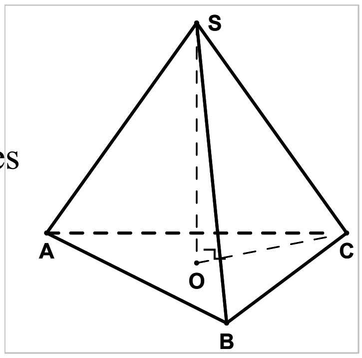
c. Exemples de pyramides régulières

Exemple 1 : Pyramide à base carré



SABCD est une pyramide dont la base est le carré ABCD de centre O.
On a : SA = SB = SC = SD.
La droite (SO) est la hauteur de cette pyramide. Elle est donc perpendiculaire aux droites (AC) et (BD).
Les faces latérales SAB ; SBC ; SCD et SDA sont des triangles isocèles superposables.

Exemple 2 : Pyramide à base triangle équilatéral.



SABC est une pyramide régulière dont la base est le triangle équilatéral ABC. Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (SO) est la hauteur de cette pyramide. Les faces latérales SAB ; SAC et SBC sont des triangles isocèles superposables. Les droites (OA) ; (OB) et (OC) sont toutes perpendiculaires à la droite (SO).

4°/ Volume et aire latérale d'une pyramide :

a. Volume

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h \quad avec \quad \begin{cases} \mathcal{V} = volume\ de\ la\ pyramide \\ \mathcal{B} = aire\ de\ la\ base\ de\ de\ la\ pyramide \\ h = hauteur\ de\ la\ pyramide \end{cases}$$

b. Aire laterale

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P} \times a}{2} \quad avec \quad \begin{cases} \mathcal{A} = aire\ latérale\ de\ la\ pyramide \\ \mathcal{P} = périmètre\ de\ la\ base\ de\ la\ pyramide \\ a = apothème\ (hauteur\ d'une\ face\ latérale\ de\ la\ pyramide) \end{cases}$$

Remarque :

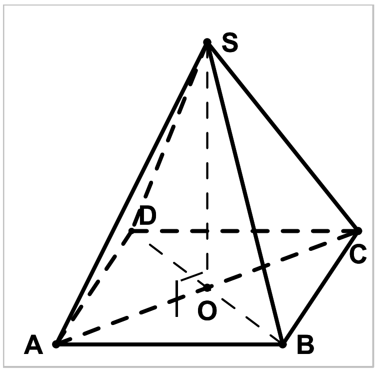
L'aire $\mathcal{A}_p$ d'une pyramide fermée à la base est égale à la somme de l'aire latérale $\mathcal{A}$ et l'aire de la base $\mathcal{B}$ de la pyramide. Soit $\mathcal{A}_p = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Exercice :

SABCD est une pyramide régulière de base le carré ABCD et de centre O et de côté 4 cm.

a) Vérifie que AO = $2\sqrt{2}$
b) Sachant que la hauteur SO = 8 cm, calcule SA.
c) Calcule l'aire latérale $\mathcal{A}$ de cette pyramide.
d) Calcule le volume $\mathcal{V}$ de cette pyramide.

Solution :



a) *ABO est un triangle rectangle en O. D'après la propriété de Pythagore, on a :* $AB^2 = AO^2 + OB^2 = AO^2 + AO^2$

d'où : $AB^2 = 2AO^2 = 16$.

$AO^2 = 8$ *Donc* $AO = 2\sqrt{2}$.

b) *SOA est un triangle rectangle en O.*

D'après la propriété de Pythagore,

on a : $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 8^2 + (2\sqrt{2})^2$.

D'où $SA^2 = 72$ *donc* $SA = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

c) *On a :* $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}\times a}{2}$ *avec* $\mathcal{P} = 4\times 4$ *cm=16 cm.*

Cherchons a

Soit I milieu de [BC]. Le triangle SIB est rectangle en I car la médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi hauteur.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $SB^2 = a^2 + BI^2$.

Donc $a^2 = SB^2 - (\frac{AB}{2})^2 = 72 - 4$.

$a^2 = 68$ *donc* $a = 2\sqrt{17}$.

On obtient alors $\mathcal{A} = \frac{16\times 2\sqrt{17}}{2} = 16\sqrt{17}$ *cm²*.

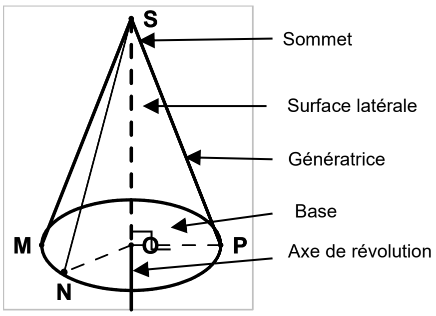
$$d)\ \mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\times SO \ avec \begin{cases} \mathcal{B} = 4\times 4 = 16cm^2 \\ SO = 8cm \end{cases}$$

$$donc\ \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 16 \times 8 \Longrightarrow \mathcal{V} = \frac{128}{3}\ cm^2$$

II- Cônes de revolution

1°/ Présentation-Vocabulaire :

Un cône de révolution est un cône obtenu en faisant tourner autour de son axe de symétrie un triangle rectangle isocèle.



Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution dont le sommet est S et dont la base est le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon [OP]. La droite (SO) est la hauteur de ce cône. Les segments [SM] ; [SN] ; [SP] sont des génératrices de ce cône.

2°/ Hauteur d'un cône de révolution.

a. Définition :

On appelle hauteur d'un cône, la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

b. Propriété :

La base d'un cône de révolution est un cercle. Son axe de symétrie est la hauteur de ce cône.

3°/ Volume et aire latérale d'un cône de révolution.

a. Volume

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{V} = volume\ du\ cône \\ \mathcal{B} = aire\ du\ cercle\ de\ base\ du\ cône \\ h = hauteur\ du\ cône \end{cases}$$

b. Aire latérale

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P} \times a}{2} \qquad avec \quad \begin{cases} \mathcal{A} = aire\ latérale\ du\ cône \\ \mathcal{P} = périmètre\ du\ cercle \\ a = génératrice \end{cases}$$

Remarque :

L'aire $\mathcal{A}_c$ du cône est égale à la somme de l'aire latérale $\mathcal{A}$ et de l'aire $\mathcal{B}$ du cercle de base. Soit $\mathcal{A}_c = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

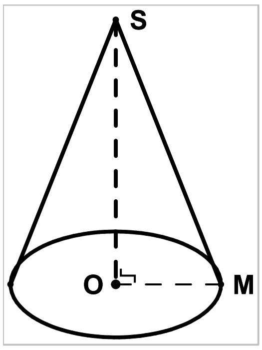
Exercice :

L'unité de longueur est le cm.

Un cône de révolution a pour base un cercle de centre O, de rayon 3 et a pour hauteur 4.

Calcule sa génératrice, son aire latérale et son volume.

Solution : Représentons ce cône par la figure ci-contre.



- *Calculons sa génératrice.*

  Le segment [SM] est une génératrice de ce cône. Le triangle SOM est rectangle en O avec SO = 4 et OM = 3.

  D'après la propriété de Pythagore, on a :

  $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 4^2 + 3^2 = 25.$ *Donc* $\boldsymbol{SM = 5}$

- *Calculons l'aire latérale $\mathcal{A}$ de ce cône.*

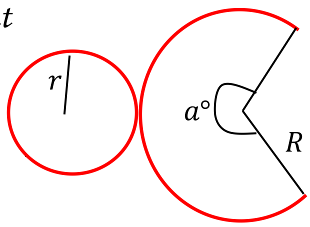
  $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}\times SM}{2} = \frac{2\pi\times3\times5}{2}$ *donc* $\boldsymbol{\mathcal{A} = 15\pi\ cm^2}$

- *Calculons le volume de ce cône.*

  $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B}\times SO}{3}$ *avec* $\begin{cases}\mathcal{B} = 3^2\times\pi \\ SO = 4\end{cases}$ $\mathcal{V} = \frac{9\pi\times4}{3}$. *Donc* $\boldsymbol{\mathcal{V} = 12\pi\ cm^3}$

4°/ Relation entre rayon de la base, angle de développement et génératrice d'un cône

R *: génératrice ,* ***r****: rayon de la base et* ***a°****: angle de développement*



Désignons par $\mathcal{P}$ le périmètre cercle et par $\mathcal{L}$ la longueur de l'arc de rayon R.

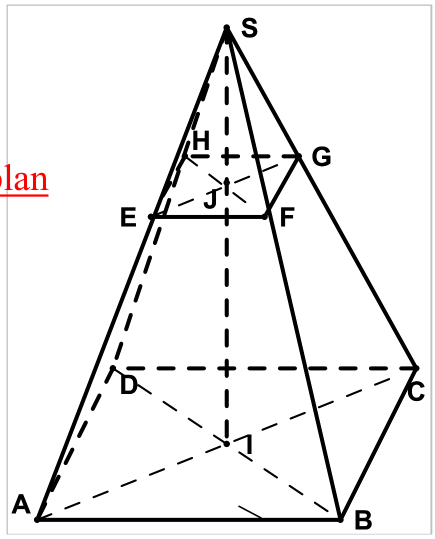
$\mathcal{P} = 2\pi r$ implique que $\mathcal{P} = 360° \times r$ et $\mathcal{L} = a° \times R$.

$\mathcal{P} = \mathcal{L}$ équivaut à $\boldsymbol{360° \times r = a° \times R}$.

Donc $\boxed{\boldsymbol{r = \frac{a\times R}{360}}}$

III – SECTIONS PLANES

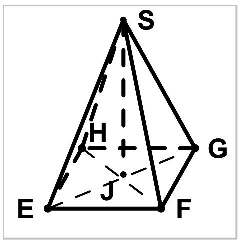
1°/ Section d'une pyramide régulière par un plan



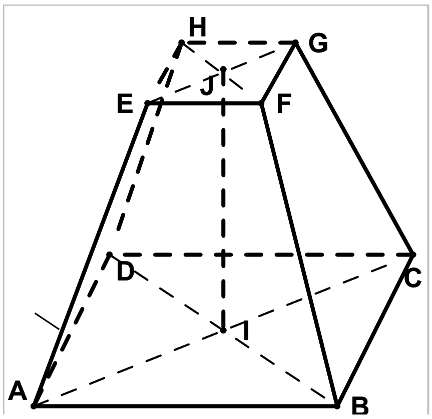
a) Présentation-Vocabulaire

Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière à base carrée. E est un point de [SA]. Le plan (P) passant par E et parallèle au plan (ABC) de la base coupe (SB) en F ; (SC) en G et (SD) en H.

L'intersection du plan (P) et de la surface latérale de cette pyramide est un carré. C'est la section de la pyramide SABCD par le plan (P). On obtient alors une petite pyramide SEFGH et un tronc de pyramide ABCDEFGH.



Petite pyramide



Tronc de pyramide

b) Propriétés

Propriété 1 :

La section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base est un polygone régulier de même nature que cette base.

Propriété 2 :

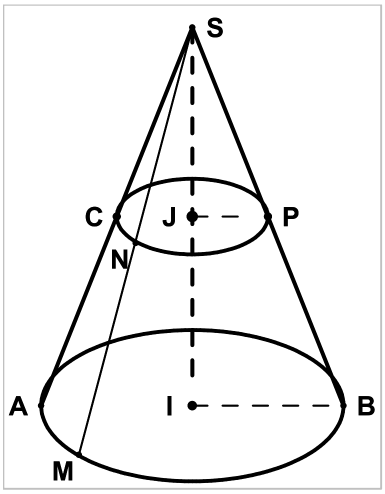
Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base, on obtient une réduction de cette pyramide. Si l'échelle de réduction est égale au nombre réel k ; alors on a :

$$\frac{\text{côté de la pyramide réduite}}{\text{côté de la pyyrmide initiale}} = k \quad \text{ou} \quad \frac{\text{aire de la pyramide réduite}}{\text{aire de la pyramide initiale}} = k^2$$

ou $$\frac{\text{volume de la pyramide réduite}}{\text{volume de la pyramide initiale.}} = k^3$$

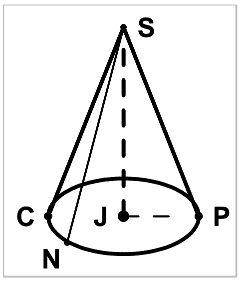
2°/ Section d'un cône de révolution par un plan

a) Présentation-Vocabulaire

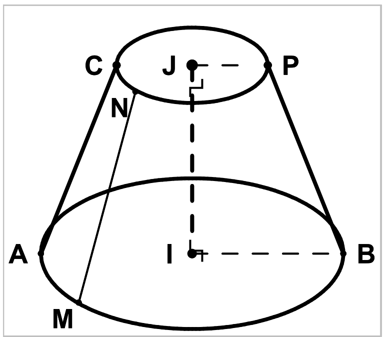


On considère un cône de révolution de sommet S, de base le disque de centre I et de diamètre [AB]. C est un point de la génératrice [SA]. Le plan (P) passant par C et parallèle au plan de la base du cône coupe la génératrice [SM] en N.

L'intersection de la surface latérale du cône et du plan (P) est un cercle. C'est la section du cône par le plan (P). On obtient alors un petit cône de révolution et un tronc de ce cône.



Petit cône



Tronc de cône

b) Propriétés :

Propriété 1 :

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan sa base est un cercle.

Propriété 2 :

Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cône de révolution. Si l'échelle de réduction est égale au nombre réel k,

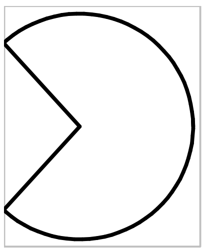
on a : $\frac{\text{côté du cône réduit}}{\text{côté du cône initial}} = k$ ou $\frac{\text{aire du cône réduit}}{\text{aire du cône initial}} = k^2$

ou $\frac{\text{volume du cône réduit}}{\text{volume du cône initial}} = k^3$

Exercices

Exercice 1

La figure ci-contre représente le patron de la surface

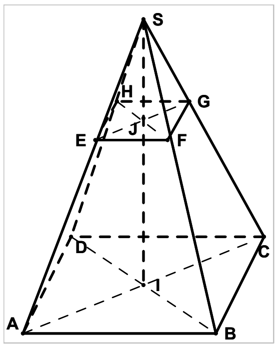


latérale d'un cône de révolution découpé dans un rayon de 5 cm.

1) Calcule le rayon, la hauteur et le volume de ce cône.
2) Quelle est l'aire latérale de ce cône ? ($\pi \approx 3{,}14$)

Exercice 2

SABCD est une pyramide régulière de base le carré ABCD, de sommet S et de hauteur [SI].

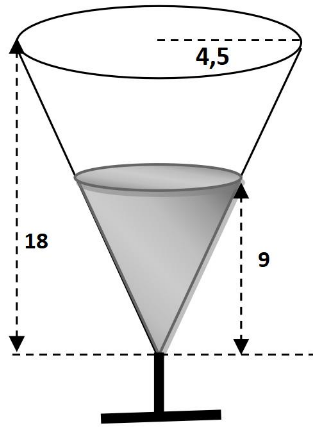


AB = $6\sqrt{2}$ et SI =8.

1) Calcule le volume de cette pyramide.
2) On réalise une section parallèle au plan de la base telle que : $SE = \frac{3}{4}SA$
   a. Calcule EF
   b. Calcule l'aire du carré EFGH.
   c. Calcule le volume de la pyramide SEFGH.

Exercice 3

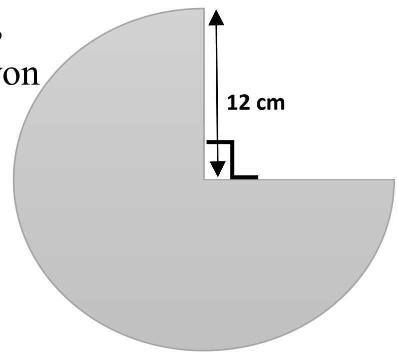
La partie supérieure du verre représenté ci-contre a la forme d'un cône de hauteur 18 et dont la base a pour rayon 4,5.



1) Justifie que le volume du verre est $381{,}51 cm^3$. ($\pi \approx 3{,}14$)
2) On remplit ce verre jusqu'à son bord avec du lait. Puis, après avoir bu, René constate que la hauteur du liquide restant est 9 cm.
   a. Calcule le volume de lait restant.
   b. Calcule le volume de lait bu par René.

Exercice 4

Pour fabriquer un chapeau qui a la forme d'un cône de révolution, on découpe le patron de ce chapeau dans un disque en tissu de rayon 12cm. (Voir figure).

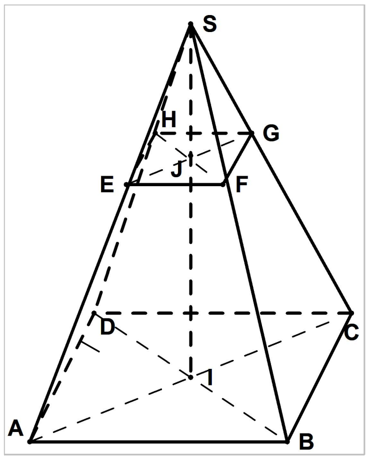


1. Démontre que la base du chapeau a un rayon de 9cm.
2. Calcule :
   a. La hauteur du chapeau
   b. Le volume du chapeau
   c. L'aire du tissu utilisé pour la fabrication de ce chapeau.
   $\pi = 3{,}1$

Exercice 5

(Unité le centimètre)

SABCD est une pyramide régulière de hauteur la droite (SH).
La section de la pyramide SABCD par un plan parallèle au plan de la base nous donne la pyramide réduite SEFGH et le tronc de la pyramide ABCDEFGH.
On donne : SA = 5 ; AB = 2 ; EF = 0,25 et $\pi = 3$.

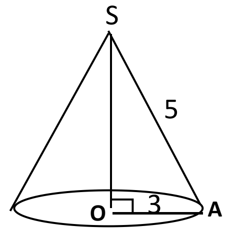


1. a) Calcule la hauteur SI.
   b) Détermine l'apothème a de la pyramide.
2. a) Justifie que le coefficient de réduction $k = \frac{1}{8}$.
   b) Calcule l'aire $\mathcal{A}$ de la pyramide SABCD.
   c) En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ de la pyramide réduite SEFGH.
   d) Calcule l'aire $\mathcal{A}_T$ du tronc de pyramide.
3. a) Calcule le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide SABCD.
   b) Calcule le volume $\mathcal{V}'$ de la pyramide réduite SEFGH.

Corrigés

Exercice 1

1)



- *Le rayon r est : 360×r = R×216*
  (R : rayon du disque et r rayon de la base du cône)
  $r = \frac{R\times216}{360} = \frac{5\times216}{360} = 3.$ ***r = 3 cm***
- *La hauteur h = SO :*
  En considérant le triangle SOA rectangle O.
  D'après la propriété de Pythagore, on a
  $SA^2 = SO^2 + OA^2$ $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 25 - 9$
  $SO^2 = 16$ $SO = 4$
  Donc ***h = SO = 4 cm***
- *Le volume $\mathcal{V}$ est :*
  $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ avec $\mathcal{B} = \pi r^2$ $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$
  $\mathcal{V} = \frac{3.14\times9\times4}{3} = 37{,}68\ cm^3$

2)

Aire latérale $\mathcal{A}$ *est:* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{P}a$

(périmètre de la base et a génératrice qui est 5)

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}2\pi r \times a = \frac{2\times 3.14\times 3\times 5}{2} = 47{,}1\ cm^2.$

<u>Exercice 2</u>

1) $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ *avec* $\mathcal{B} = c \times c$ *et* $h = SI.$ $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times h$

$\mathcal{V} = \frac{(6\sqrt{2})^2 \times 8}{3} = 192\ cm^3.$

2) a) l'égalité $SE = \frac{3}{4}SA$ *implique l'échelle de réduction est* $\frac{3}{4}$

donc $\frac{EF}{AB} = \frac{3}{4}.$ *D'où* $EF = \frac{3}{4} \times AB.$

Par conséquent $EF = \frac{3}{4} \times 6\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$ $\boldsymbol{EF = \frac{9}{2}\sqrt{2}.}$

b) L'aire $\mathcal{A}$ *du carré EFGH est :* $\mathcal{A} = EF \times EF = \left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{81}{2}$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = 40{,}5\ cm^3.}$

c) Calcul du volume $\mathcal{V}_{SEFGH}$.

On sait que : $\frac{\mathcal{V}_{SEFGH}}{\mathcal{V}} = k^3.$

Donc $\mathcal{V}_{SEFGH} = \mathcal{V} \times k^3.$

$\mathcal{V}_{SEFGH} = 192 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 192 \times \frac{27}{64}.$ $\boldsymbol{\mathcal{V}_{SEFGH} = 81\ cm^3}$

<u>Exercice 3</u>

1) $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ *avec* $\mathcal{B} = \pi r^2$

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 4{,}5^2 \times 18 = 381{,}51$ $\boldsymbol{\mathcal{V} = 381{,}51\ cm^3}$

2) a) Désignons par $\begin{cases} \mathcal{V}: le\ volume\ total\ de\ lait \\ \mathcal{V}_b: le\ volume\ de\ lait\ bu \\ \mathcal{V}_r: le\ volume\ de\ lait\ restant \end{cases}$

On a $\frac{\mathcal{V}_r}{\mathcal{V}} = k^3$. Ici $k = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

Soit $\mathcal{V}_r = \mathcal{V} \times k^3$ Donc $\mathcal{V}_r = 381{,}51 \times \frac{1}{8} = 47{,}69\ cm^3$

$\boldsymbol{\mathcal{V}_r = 47,69\ cm^3}$.

b)Calcule du volume $\mathcal{V}_b$ de lait bu.

$\mathcal{V}_b = \mathcal{V} - \mathcal{V}_r$

$\mathcal{V}_b = 381{,}51 - 47{,}69$

$\boldsymbol{\mathcal{V}_b = 333,82\ cm^3}$

<u>*Exercice 4*</u>

1) *Dans la représentation ci – dessus, considérons r le rayon de la base recherchée. L'angle de développement est 270°. Ainsi on a* : $\frac{r}{R} = \frac{a}{360}$ *avec* $R = 12$ $a = 270°$.

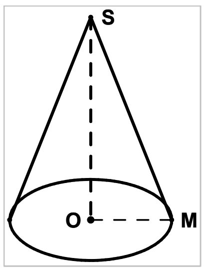
$r = \frac{a \times R}{360} = \frac{270 \times 12}{360} = 9$

2) *Dans la réalisation du cône, R dévient la génératrice et r le rayon de la base.*

a) *En appliquant la propriété de Pythagore au triangle SOM rectangle en O,*

a : $SM^2 = OM^2 + SO^2$. $SO^2 = SM^2 - OM^2 = 144 - 8$

Ainsi $h = SO = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.



b) $\mathcal{V} = \frac{Bh}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{3,;1 \times 81 \times 3\sqrt{7}}{3} = 664{,}35\ cm^3$

c) $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}a}{2}$. *Ici* $a = R$ *égale la génératrice.*

$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}a}{2} = \frac{2 \times \pi \times r \times R}{2} = \frac{2 \times 3{,}1 \times 9 \times 12}{2} = 334{,}8\ cm^2$

<u>*Exercice 5*</u>

1. *a) Pour calculer SI, calculons d'abord AI. AI est la moitié de la diagonale AC. SABCD étant une pyramide régulière, ABCDE est un carré de côté 2. Appliquons la propriété de Pythagore au triangle ABC rectangle en B.* $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4 + 4 = 8$. $AC = 2\sqrt{2}$. *D'où* $AI = \sqrt{2}$.

Appliquons la propriété de Pythagore au triangle SAI rectangle en I.

$SA^2 = AI^2 + SI^2$.

$SI^2 = SA^2 - AI^2 = 25 - 2 = 23$. $SI = \sqrt{23}$

b. L'apothème est la hauteur d'une face latérale. Considérons le point H milieu du segment [AB]. Le triangle SAB étant isocèle, (SH) est une hauteur. Appliquons la propriété de Pythagore au triangle SAH rectangle en H. $SA^2 = AH^2 + SH^2$.

$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 25 - 1 = 24$. $SH = a = 2\sqrt{6}$

2) *a. Le coefficient* $k = \frac{EF}{AB} = \frac{0,5}{2} = \frac{0,5}{4\times 0,5} = \frac{1}{4}$.

b. $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}a}{2} = \frac{4\times AB\times a}{2} = \frac{4\times 2\times 2\sqrt{6}}{2} = 8\sqrt{6}\ cm^2$

c. $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2$. $\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 8\sqrt{6} = \frac{8\times\sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ cm^2$

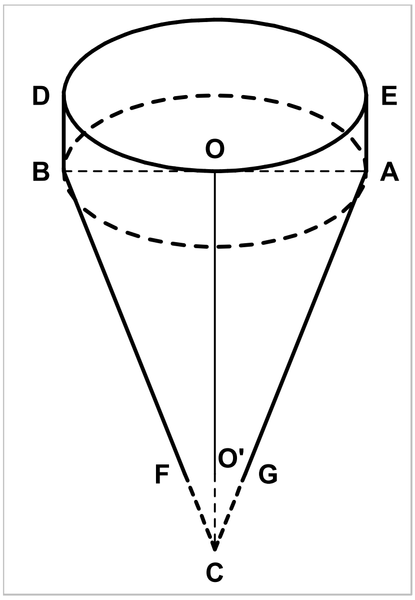
d. $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} - \mathcal{A}' = 8\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{15\sqrt{6}}{2}$.

3) *a.* $\mathcal{V} = \frac{Bh}{3} = \frac{AB\times AB\times SI}{3} = \frac{2\times 2\times\sqrt{23}}{3} = \frac{4\sqrt{23}}{3} = 6{,}39 cm^3$.

b. $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3$. $\mathcal{V}' = k^3 \times \mathcal{V} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{4\sqrt{23}}{3} = \frac{4\times\sqrt{23}}{64} = \frac{\sqrt{23}}{16} = 0{,}299\ cm^3$

Exercices non corrigés

Exercice 1



Un pluviomètre a la forme d'un cône de révolution dont on a coupé la pointe et surmonté d'un cylindre. L'objectif est de calculer la contenance de ce pluviomètre.

AC = 20 cm; AG = 15 cm; AB = 10 cm; AE = 4 cm;
O milieu de [AB] et O' milieu de [FG].

1/ Calculer la contenance du cône de révolution ABC en cm^3 sous la forme $k\pi$.

2/ Calculer la contenance du cône de révolution FGC en cm^3 sous la forme $k\pi$.

3/ Calculer la contenance du cylindre en cm^3 sous la forme $k\pi$.

4/ Calculer la contenance totale en cm^3 sous la forme $k\pi$ puis donner sa valeur exacte en dm^3 au centième près.

5/ Peut-on verser dans ce pluviomètre 1 l d'eau ?

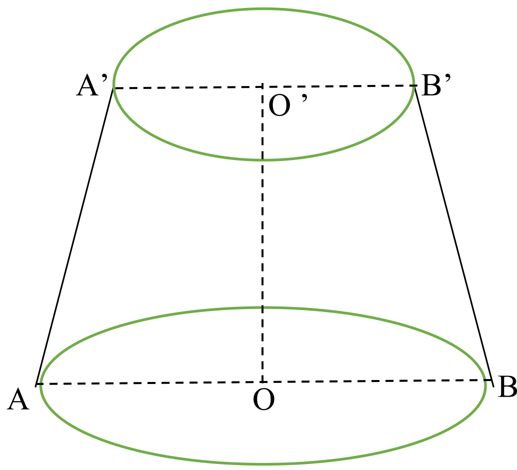
Exercice 2

(Unité le centimètre)

La figure ci – contre est le tronc d'un cône de révolution qui a été obtenu par la section d'un cône de révolution de sommet S par le plan parallèle à sa base et passant par le point O'.

On donne: A'B' = 30 ; AB = 40 et OO' = 25.

1) Détermine la hauteur SO de ce cône.
2) Calcule le volume V du cône SAB.
3) Calcule le volume V_t du tronc de cône.



LEÇON 14 : APPLICATIONS AFFINES

I – Application affine

1- Définition

a et b sont deux nombres réels donnés.

On appelle application affine de coefficient a et de terme constant b l'application numérique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.

On dit que f est l'application définie par $f(x) = ax + b$.

On écrit : $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto ax+b \end{array}$

$f(x)$ est l'image de x par f ou encore que x est l'antécédent de $f(x)$ par l'application f.

2- Représentation graphique

a) Définition

Le plan est muni du repère (O, I, J).

A et B sont deux sous-ensembles de nombres réels, f est une application de A dans B.

On appelle représentation graphique de l'application f l'ensemble des points du plan de couples de coordonnées$(x; y)$, où x est un élément de A et $y = f(x) \in$ B.

b) Propriété

Le plan est muni du repère (O, I, J). a et b sont des nombres réels donnés.

La représentation graphique de l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$ est la droite (D) d'équation $y = ax + b$

Remarque :

k étant un nombre réel, Tout point M de (D) d'abscisse k pour coordonnées $(k; f(k))$

3- Sens de variation

a) Généralité

D'une façon générale, une application numérique est dite :

- Croissante lorsque deux nombres réels sont rangés dans le même ordre que leurs images : (c'est-à-dire : $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$)
- Décroissantes lorsque deux nombres sont rangés dans l'ordre contraire de leurs images : (c'est-à-dire : $x_1 < x_2\ et\ f(x_1) > f(x_2)$)
- Constante lorsque tous les nombres ont la même image : (c'est-à-dire : $x_1 \neq x_2\ et\ f(x_1) = f(x_2)$)

b) Cas particulier de l'application affine

$f(x) = ax + b$, alors :

- f est croissante lorsque $a > 0$.
- f est décroissante lorsque $a < 0$.
- f est constante lorsque $a = 0$

4- Signe d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$

$f(x) = 0$ $\ équivaut$ à : $ax + b = 0$ $\ équivaut$ à : $x = -\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$signe\ de\ (-a)$	0	$signe\ de\ a$	

II- Application linéaire

1) Définition

Une application linéaire est une application affine dont le terme constant est nul. Elle est donc de la forme $f(x) = ax$.

2) Propriété des applications linéaires

Soit f une application linéaire définie par $f(x) = ax$.

Pour tous nombres réels u, v et k nous avons :

$f(u + v) = f(u) + f(v)$

$f(k \times u) = k \times f(u)$.

Exercices

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, précise celles qui sont affines.

$f(x) = 2x^2 + 5x - 2$; $g(x) = -\frac{3}{2}x + 3$; $h(x) = x^3 - x + 1$;

$l(x) = 5x$ et $m(x) = 3$.

Exercice 2

Soit f, l'application affine définie par $f(x) = 2x + 1$.

1) Détermine deux points appartenant à la droite (D), représentation graphique de f.
2) K$(a, 9)$ et M$(-3, b)$ sont deux points de (D). Calcule a et b
3) Calcule l'image de – 4 par f.
4) Calcule l'antécédent de 5 par f.

Exercice 3

f et g sont deux applications affines telles que:

$f(1) = 10$ et $f(-2) = 1$; $g(2) = 8$ et $g(-4) = -10$.

Détermine f et g.

Exercice 4

Précise le sens de variation des applications suivantes :

$f(x) = -2x + 4$; $g(x) = \frac{1}{4}x - 6$ et $h(x) =- 1$

Exercice 5

g est une application affine telle que $g(5) = 3$ et $g(2) = 0$

1) Précise le sens de variation de g.
2) Compare $g(-1)$ et $g(2)$.

Exercice 6.

g est une application linéaire telle que $g(4) = 2$.

Sans calculer le coefficient de g, calcule $g(2)$; $g(8)$ et $g(10)$.

Corrigés

Exercice 1 :

Les applications affines sont celles de la forme : $ax + b$.

Ce sont donc : $g(x)$ *(où* $a =-\frac{3}{2}$ *et* $b = 3$*)* ; $l(x)$ *(où* $a = 5$ *et* $b = 0$*) et*

$m(x)$ *=3 (où* $a = 0$ *et* $b = 3$*)*

Exercice 2 :

Soit f, l'application affine définie par f(x*)* $= 2x + 1$.

1) *Soit A et B deux points d'abscisses respectives – 2 et 3 éléments de la droite (D).*

   On a : A(-2 *; f(*-2*)) et B(*3 *; f(*3*)). A(*-2 *;*-3*) et B(*3 *; 7) sont deux points de (D).*
2) *Si K(a, 9) ∈ (D) alors f(a) = 9. C'est dire* $2a + 1 = 9$.

   La résolution donne $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{4}$.

   De même M(-3, *b) ∈ (D) alors b = f(*-3*).*

   C'est dire : b $= 2 \times (-3) + 1$. $\boldsymbol{b = -5}$.

3) *L'images de – 4 par f est f*(-4)*. L'images de – 4 par f est donc* $2 \times (-4) + 1 = -\mathbf{7}$**.** *L'antécédent de 5 par f est le nombre* x *tel que f(*x*)* $= 5$ *ou* $2x + 1 = 5$*. La résolution donne* $x = 2$*. L'antécédent de 5 est 2.*

Exercice 3

Déterminons f

f est de la forme f(x)= $ax + b$*. Déterminer f revient à trouver* a *et b.*

f(1) = 10 et f(−2) = 1 impliquent que : $a + b = 10$ *et* $-2a + b = 1$*. a et b sont solutions du système* $\begin{cases} a + b = 10 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne : a = 3 et b = 7.

Donc ***f(x)***$= \mathbf{3x + 7}$

Déterminons g *(Utilisons une autre méthode)*

g est de la forme $g(x) = ax + b$*. En considérant la droite (D) d'équation y =* $ax + b$ *comme représentation graphique de* g*,* a *est le coefficient directeur de (D) et vaut :* $\frac{g(2) - g(-4)}{2-(-4)} = \frac{8+10}{2+4} = \frac{18}{6} = 3$. *g(2) = 8 implique* $3 \times 2 + b = 8$.

C'est-à-dire $b = 8 - 6 = 2$*. a = 3 et b = 2.*

Donc $\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{3x + 2}$.

Exercice 4

f(x) = $-2x + 4$*,* $a = -2 < 0$ *donc f est décroissante.*

$g(x) = \frac{1}{4}x - 6$*,* $a = \frac{1}{4} > 0$ *donc g est croissante.*

h(x*)* $= -1$*,* $a = 0$ *donc h est constante.*

Exercice 5

1) *Variation de g.*
   $g(5) = 3$ *et* $g(2) = 0$*. On a 5 > 3 et* $g(5) > g(2)$*. 5 et 3 sont rangés dans le même ordre que leurs images donc* g *est une application croissante.*
2) -1 *et 2 étant rangés dans le même ordre que leurs images on a :* $\boldsymbol{g(-1) < g(2)}$.

Exercice 6

g est une application affine telle que $g(4) = 2$.

$g(2) = g(4 \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times g(4) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

$g(8) = g(2 \times 4) = 2 \times g(4) = 2 \times 2 = 4$.

$g(10) = g(2 + 8) = g(2) + g(8) = 1 + 4 = 5$.

Exercices non corrigés

Exercice 1

Trouver la fonction affine f telle que $f(1) = 2 \ et \ f(3) = -4$.

Exercice 2

Représenter graphiquement la fonction affine f définie sur par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & si\ x < -2 \\ f(x) = -3 & si - 2 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -x - 1 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Exercice 3

$f \ et \ g$ sont deux fonctions affines telles que : $f(x) = x\sqrt{2} - 2$ et $g(x) = -2x + \sqrt{2}$

1) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x et donner le résultat dans un tableau de signes
2) Résoudre algébriquement l'inéquation $g(x) \leq 0$
3) Résoudre algébriquement l'inéquation $g(x) \leq 0$
4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$

QUELQUES SUJETS DE SYNTHESE

Sujet 1

EXERCICE 1

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous une seule affirmation est vraie. Ecris sur ta copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'obtenir l'affirmation vraie. Par exemple **3-A**.

		A	B	C
1	L'amplitude de l'intervalle $]-2;3[$ est	1	3	5
2	La forme factorisée de $4x^2-9$ est :	$(4x-3)(4x+3)$	$(2x-3)(2x+3)$	$(2x-3)^2$
3	Le nombre $\lvert 2-\sqrt{5}\rvert$ est égal à	$\sqrt{5}-2$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$
4	Le nombre $\sqrt{\frac{75}{50}}$ est égal à	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

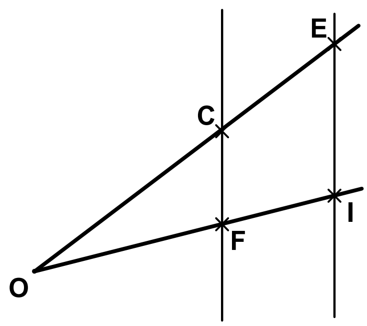
EXERCICE 2

Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si elle est fausse. Par exemple, pour l'affirmation 3, la réponse est : 3-VRAI.

1- Si ABC est un triangle rectangle en C, alors $AB^2+BC^2=AC^2$.
2- Dans un cercle (C), un angle aigu inscrit a pour mesure le double de la mesure de l'angle au centre associé.
3- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\sin^2 B+\cos^2 B=1$.
4- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

EXERCICE 3

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles, on donne :
OC = 15 , OF = 6 , CE = 10 , FI = 4 et CF = 2.



1- Justifie que les droites (CF) et (EI) sont parallèles.

2- Montre que $EI=\frac{10}{3}$.

EXERCICE 4

On donne $A = 2\sqrt{2} - 3$, $B = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$ et $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

1- a) Compare $2\sqrt{2}$ et 3.

b) Montre que A est un nombre négatif.

2- Justifie que $A^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

3- a) Montre que $B = 3 - 2\sqrt{2}$.

b) Donne un encadrement de B par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

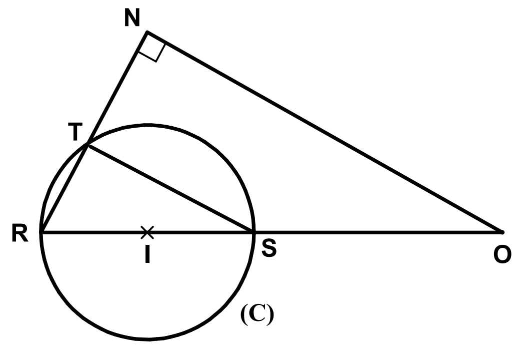
EXERCICE 5

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles :

- (C) est un cercle de centre I et de diamètre [RS] ;
- T est un point du cercle (C) et O est un point de la demi-droite [RS) ;
- (ON) est la perpendiculaire à (RT) en N .

On donne RS = 7 , RT = 3 et RO = 21.



1- Justifie que RST est un triangle rectangle en T.

2- Montre que $TS = 2\sqrt{10}$.

3- a) Vérifie que $\cos(\mathrm{TRS}) = 0,428$.

b) Donne un encadrement de $\cos(\mathrm{TRS})$. Déduis-en un encadrement de $mes(\mathrm{TRS})$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.

4- a) Démontre que les droites (TS) et (ON) sont parallèles.

b) Calcule ON.

Extrait de la table trigonométrique

a°	64	65	66	67
sin a°	0,899	0,906	0,914	0,921
cos a°	0,438	0,423	0,407	0,391

EXERCICE 6

Monsieur Kouassi, professeur de Mathématiques à la retraite, est un éleveur de porcins et de bovins. Pour la fabrication de sa provende, il a besoin de huit sacs de maïs. Il contact un fournisseur qui lui dit de payer $P = \dfrac{69x^2 - 209x + 6}{x^2 - 9}$ (en milliers de francs CFA) où x désigne le nombre de sacs de maïs.

Monsieur Kouassi affirme que son budget de 51 000 francs CFA est suffisant pour l'achat des huit sacs.

Son fils Koffi, élève en classe de troisième, en parle à ses camarades et ensemble ils décident de justifier l'affirmation de monsieur Kouassi.

1- Montre que $69x^2 - 209x + 6 = (x-3)(69x-2)$.

2- a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles P admet une valeur numérique.

b) Pour $x \neq -3$ et $x \neq 3$, montre que $\mathrm{P} = \dfrac{69x-2}{x+3}$.

3- a) Calcule la valeur numérique de P pour $x = 8$.
b) Justifie l'affirmation de monsieur Kouassi.

Sujet 2

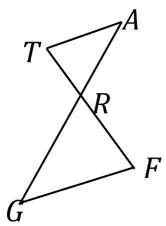
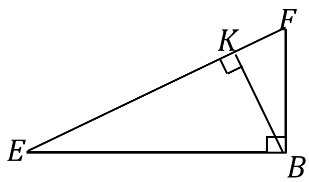
EXERCICE 1

Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est correcte. Indique la lettre de la bonne réponse sur ta copie. Tu noteras par exemple $5 - a$

	PROPOSITIONS	Réponses proposées		
		a	b	c
1	$\sqrt{5} + \sqrt{5}$ est égal à	5	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{5}$
2	$7^4 \times 7^2$est égal à	7^8	7^2	7^6
3	$(u-1)^2$ est égal à	$u^2 - 1^2$	$(u-1)(u-1)$	$(u-1)(u+1)$

EXERCICE 2

Recopie chaque numéro du tableau puis écris vrai si l'affirmation est vraie et faux si elle est fausse. Tu noteras par exemple : 4 − vrai

	AFFIRMATIONS
1	Si $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BS}$, alors le vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BS}$ ont le même sens.
2	 Dans le triangle RGF, $A \in (GR)$, $T \in (FR)$ et $(AT)//(GF)$, d'après la propriété de Thalès, $\frac{AR}{AG} = \frac{TR}{TP}$
3	 BEF est un triangle rectangle en B, K est le pied de la hauteur issue de B. D'après la propriété métrique déduite de l'aire, $EB \times BF = BK \times EF$

EXERCICE 3

On donne $A = \left|2\sqrt{3} - 4\right|$.

1) Compare $2\sqrt{3}$ et 4.

2) Justifie que $2\sqrt{3} - 4$ est négatif.

3) Déduis-en une écriture de A sans la valeur absolue.

EXERCICE 4

EFG est un triangle rectangle en G tel que $\sin\widehat{E} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1) Justifie que $cos\widehat{E} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) Justifie que $tan\widehat{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

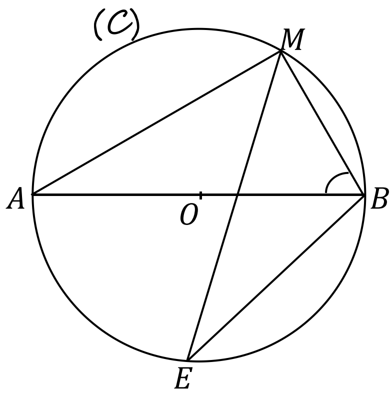
3) On pose $sin\widehat{E} = 0{,}577$.

   Donne l'encadrement de la mesure de $\widehat{E}$ par deux mesures consécutives.

EXTRAIT DE LA TABLE TROGONOMETRIQUE

$a°$	33°	34°	35°	36°	37°
$sin\ a°$	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602

EXERCICE 5



L'unité de longueur est le cm.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, A , B , M et E sont des points du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 8$ et $mes\widehat{MBA} = 60°$.

On donne $sin30° = cos60° = \frac{1}{2}$ et $sin60° = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1 - a) Justifie que le triangle AMB est rectangle en M.

   b) Justifie que $MB = 4$.

   c) Calcule AM.

2) Démontre que $mes\widehat{MAB} = 30°$.

3) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{MEB}$.

EXERCICE 6

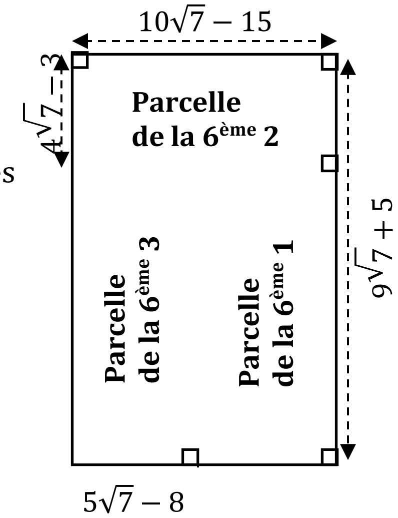
Le collège municipal de AHUA créé nouvellement est à sa première promotion et comporte trois classes de sixième : $6^{ème}$ 1 , $6^{ème}$ 2 et $6^{ème}$ 3.

Le club environnement de ce lycée dispose d'un jardin de forme rectangulaire. Ce jardin est réparti en trois parcelles attribuées à chacune des classes comme l'indique la figure ci-contre.

Une étude approfondie a permis d'avoir les dimensions mentionnées sur la figure. Le chef de la $6^{ème}$ 3 dont l'effectif est le plus petit sait que sa classe aura la plus petite part mais estime qu'il sera satisfait si la parcelle de leur classe atteint les 120 m^2, vu leur projet.

Il te sollicite pour le calcul de l'aire de sa parcelle.

1) Justifie que la longueur L de la parcelle de la classe de $6^{ème}$ 3



est $(5\sqrt{7}+8)$ (en mètres).

2) Calcule l'aire A de la parcelle de la classe de 6ème 3.
(Aire d'un rectangle = longueur × largeur)

3) Le chef de classe de la 6ème 3 sera-t-il satisfait ? Justifie ta réponse.