

**MATHEMATIQUES / Tle**

**SUJET DE LA SEANCE 1 (LIMITES ET CONTINUITE) : corrigé**

**Exercice 1**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + x^3 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 2}{x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

**Exercice 2**

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

On recherche :  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 2) = 0$ . On a «  $\frac{0}{0}$  » on ne peut conclure

**La forme «  $\frac{0}{0}$  » est appelée forme indéterminée.**

**Comment lever la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$  ?**

Pour lever la forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  », on peut procéder comme suit :

**1<sup>er</sup> cas**

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  donne «  $\frac{0}{0}$  », on peut mettre  $(x - a)$  en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+1} = 3 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 \end{cases}$$

donc 
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = 3$

### 2<sup>ème</sup> cas

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  donne «  $\frac{0}{0}$  », on peut utiliser l'expression conjuguée si éventuellement la fonction  $f$  contient une « racine carrée ».

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4} \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} + 2) = 4 \end{cases}$$

donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{1}{4}}$

3<sup>ème</sup> cas : Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  donne «  $\frac{0}{0}$  », on peut utiliser la définition du nombre dérivé ; donc la

forme  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$  où  $g(x)$  sera identifiée. Dans ce cas précis, si  $g$  est dérivable en  $a$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a).$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} \text{ avec } g(x) = \sin x$$

Comme  $g$  est dérivable en  $\pi$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi) = \cos \pi = -1$$

donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = -1}$

**Rappel :** l'expression  $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$  est appelée **taux de variation de la fonction  $g$  en  $a$ .**