

MATHS/ Tle

SUJET DE LA SEANCE 2 (LIMITES ET CONTINUITÉ) : CORRIGE

Exercice 1

1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{(x-3)^3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{(x-3)^3}$

On recherche : $\lim_{x \rightarrow 3} (x-4) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^3 = 0$. On a la forme « $\left(\frac{\text{réel non nul}}{0} \right)$ »

On transforme le quotient en produit de la façon suivante : $\frac{x-4}{(x-3)^3} = (x-4) \times \frac{1}{(x-3)^3}$

Comme $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \end{cases}$ (limites de référence)

Alors on rédige :

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-4) \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-4) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \end{cases}$

et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-4) \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-4) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \end{cases}$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2-\sqrt{x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow 4} (2-\sqrt{x}) = 0$.

On cherche ensuite à déterminer le signe de $(2-\sqrt{x})$ pour les valeurs de x supérieures à 4 et proches de 4.

On a : $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} > 2$. Par conséquent $(2-\sqrt{x}) < 0$.

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = -\infty$ car $(2-\sqrt{x}) < 0$ pour $x > 4$.

Exercice 2

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x} - 3x$

On recherche : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$. On a « $+\infty -\infty$ » on ne peut conclure.

La forme « $+\infty -\infty$ » est appelée forme indéterminée.

Comment lever la forme indéterminée « $+\infty -\infty$ » ?

Pour lever la forme indéterminée « $+\infty -\infty$ » on peut procéder comme suit :

1^{er} cas

Lorsque $\lim f(x)$ donne « $+\infty -\infty$ », on peut utiliser la factorisation.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} \right)} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 3x \right) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| \times \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \times \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 3 \right) = -\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 3 \right) = -2 \end{cases}$

D'où, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x} - 3x) = -\infty$

2^{ème} cas

Lorsque $\lim f(x)$ donne « $+\infty - \infty$ », on peut utiliser l'expression conjuguée.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+3) - (x^2+2)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+2} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}) = 0}$$

3^{ème} cas

Lorsque $\lim f(x)$ donne « $+\infty - \infty$ », on peut utiliser l'expression conjuguée et la factorisation.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3 + \sqrt{x^2+3x+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+3 + \sqrt{x^2+3x+1})(x+3 - \sqrt{x^2+3x+1})}{x+3 - \sqrt{x^2+3x+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+3)^2 - (x^2+3x+1)}{x+3 - \sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8}{x+3 - \sqrt{x^2+3x+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3 - \sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3 - |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3 + x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{8}{x})}{x(1+\frac{3}{x} + \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+\frac{8}{x})}{(1+\frac{3}{x} + \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{3}{2}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{8}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3 + \sqrt{x^2+3x+1}) = \frac{3}{2}}$$

Exercice 3

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -2$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ alors la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -1} 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} 2x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C_f)

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f)

Exercice 4

1. Pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) - y = \frac{1+x}{x^2+2}$

On a d'une part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

et d'autre part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc (Δ) est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. pour étudier la position relative de (C_f) et (Δ) , nous étudier le signe de la différence $f(x) - y$.

Pour tout x de \mathbb{R} , $(x^2 + 2) > 0$. Donc $f(x) - y$ a même signe que $(1 + x)$.

Dressons un tableau de signe de $(1 + x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
$(1 + x)$		$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) - y < 0$. Donc (C_f) est au dessous de (Δ) sur $]-\infty; -1[$

$\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) - y > 0$. Donc (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-1; +\infty[$

$x = -1, f(x) = y$. Donc (C_f) coupe (Δ) au point $A(-1; 4)$.

Exercice 5

1. On a d'une part $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Et d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x+2}} = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty \end{cases}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.

2. On a d'une part $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

Et d'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.