MATHS/ Tle

SUJET DE LA SEANCE 3 (Limites et continuité d'une fonction) : CORRIGE

Exercice 1

$\lim_{x\to 2_>} f(x) = \lim_{x\to 2_>} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2_>} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2_>} \frac{x+2-4}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2_>} \frac{x-2}{(x-2(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2_>} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 2_<} f(x) = \lim_{x\to 2_<} (\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}2^2 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

On a : $\lim_{x\to 2_>} f(x) = \lim_{x\to 2_<} f(x) = f(2) = \frac{1}{4}$. Alors f est continue en 2.

Exercice 2

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$ et $f(0) = a$

Alors $a = -1$

b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)} =$

$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = a$ Alors $a = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

L'ensemble de définition de f est $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$. On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ $(cette\ limite\ présente\ une\ forme\ d'indétermination \frac{0}{0})$

$\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3x^2+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3x^2-3}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} == \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} == \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2) Ona : $\begin{cases} 1 \notin D_f \\ \lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} f(x) = \frac{3}{2} \end{cases}$ Donc f admet un prolongement par continuité en x_0=1. Soit g la fonction numérique définie par: $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ \ x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ g ainsi définie est le prolongement par continuité de f en x_0=1

Exercice 4

a) Il faut procéder par identification ou par la division Euclidienne : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1} = \frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$:

Par identification: $\frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1} = \frac{x^2-3x+3}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 3 \end{cases}$ soit $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$

Donc $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to +\infty}[f(x) - (ax+b)] = \lim_{x\to +\infty}[f(x) - (x-2)]$ $\lim_{x\to +\infty}\left[x - 2 + \frac{1}{x-1} - (x-2)\right] = \lim_{x\to +\infty}(\frac{1}{x-1}) = 0$

$\lim_{x\to +\infty}[f(x) - (x-2)] = 0$. Alors la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote « oblique » à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

c) Cela revient à étudier le signe de $f(x) - (x-2)$

$f(x) - (x-2) = \frac{1}{x-1}$. Alors le signe de $f(x) - (x-2)$ dépend du signe de $\frac{1}{x-1}$.

$\forall\ x \in]-\infty; 1[$, $f(x) - (x-2) < 0$: la courbe $(\mathcal{C})$est en dessous de $(\mathcal{D})$

$\forall\ x \in]1; +\infty[$, $f(x) - (x-2) > 0$: la courbe $(\mathcal{C})$est au dessus de $(\mathcal{D})$

Exercice 5

$\boldsymbol{a)}$ $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}=\frac{25^{\frac{1}{3}}}{5}=\frac{(5^2)^{\frac{1}{3}}}{5}=\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5}=5^{(\frac{2}{3}-1)}=5^{-\frac{1}{3}}$

$\boldsymbol{b)}$ $\frac{4\times\sqrt[3]{4}\times2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{4\times4^{\frac{1}{3}}\times2\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=\frac{8\times(2^2)^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^3\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{(3+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}=2^4$

$\boldsymbol{c)}$ $\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}=\frac{2^{\frac{1}{5}}\times8^{\frac{1}{2}}}{(128^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{1}{5}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}}{128^{\frac{1}{10}}}=\frac{2^{\frac{1}{5}}\times2^{\frac{3}{2}}}{(2^7)^{\frac{1}{10}}}=\frac{2^{(\frac{1}{5}+\frac{3}{2})}}{2^{\frac{7}{10}}}=\frac{2^{\frac{17}{10}}}{2^{\frac{7}{10}}}=2^{(\frac{17}{10}-\frac{7}{10})}=2^{\frac{10}{10}}=2$

$\boldsymbol{d)}$ $\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{1875}+\sqrt[4]{243}=\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{3\times5^4}+\sqrt[4]{3^5}=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+(3\times5^4)^{\frac{1}{4}}+(3^5)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}\times(5^4)^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{5}{4}}=$
$3^{\frac{1}{4}}+5\times3^{\frac{1}{4}}+3^{1+\frac{1}{4}}=6\times3^{\frac{1}{4}}+3\times3^{\frac{1}{4}}=9\times3^{\frac{1}{4}}=3^2\times3^{\frac{1}{4}}=3^{2+\frac{1}{4}}=3^{\frac{9}{4}}$