300 exercices d'arithmétique des entiers relatifs

PREFACE :

Cher lecteur,

Il me fait plaisir de vous présenter ce document d'exercices d'arithmétique avec solutions, conçu pour vous aider à renforcer et à développer vos compétences en arithmétique. Que vous soyez un étudiant en mathématiques, un enseignant ou simplement quelqu'un qui cherche à améliorer sa compréhension des concepts mathématiques de base, ce livre est fait pour vous.

L'arithmétique des entiers est la branche des mathématiques qui traite des opérations fondamentales sur les entiers telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Bien que ces opérations puissent sembler simples, elles posent souvent des défis aux étudiants, en particulier lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes plus complexes.

Les exercices présentés sont variés et couvrent un large éventail de sujets, allant des opérations de base à la résolution d'équations plus complexes. Chaque exercice est suivi d'une solution plus ou moins détaillée pour vous aider à comprendre la méthode de résolution utilisée et à vérifier votre propre travail.

Mon objectif principal en vous proposant ce document est de vous aider à développer une approche solide et confiante envers les problèmes d'arithmétique. Je crois fermement que la pratique régulière est la clé de la réussite en mathématiques, et ce document vous offre l'occasion de vous exercer de manière efficace et ciblée.

Je vous encourage à faire ces exercices de manière régulière, à votre rythme. N'hésitez pas à prendre le temps de comprendre les concepts sous-jacents. L'arithmétique est une compétence essentielle qui vous accompagnera tout au long de votre vie, que ce soit dans les domaines académiques ou professionnels.

En conclusion, je vous souhaite beaucoup de succès dans votre parcours d'apprentissage de l'arithmétique. Que ce document vous guide et vous inspire dans votre quête de maîtrise des mathématiques.
Cordialement,

L'auteur : Mr. EL. LAABIYAD

Juin 2024

Rappels et compléments :

Théorème d'Euclide :

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. Si $a=bq+r$ avec $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ alors $a\wedge b=b\wedge r$

en particulier si $a=bq+r$ est la division Euclidienne de a par b alors $a\wedge b=b\wedge r$

Application :

L'algorithme d'Euclide :

Si $a=bq_1+r_1$ et $b=r_1q_2+r_2$ et $r_1=r_2q_3+r_3$ $\dots\dots r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n$ et ainsi de suite jusqu'au dernier reste non nul r_n alors $a\wedge b=r_n$

Théorème de Bézout :

Soit a *et* b deux entiers reletifs.

a *et* b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=1$

($(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ est appellé couple des coéfficients de Bézout associé au couple (a,b))

Remarque sur les couples des coéfficients de Bézout :

Soient a *et* b *deux entiers premiers entre eux.*

d'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que :* $au+bv=1$

soit $u=bq+r$ *avec* $0\le r<b$ *la division Euclidienne de* u *par* b

alors $ar+b(v+aq)=1$ *de plus* $v+aq=v+a\left[\dfrac{u}{b}\right]\le v+\dfrac{au}{b}=\dfrac{au+bv}{b}=\dfrac{1}{b}$

si $b>1$ *alors* $\dfrac{1}{b}<1$ *soit que* $\dfrac{1}{b}\le 0$ *et donc* $v+aq\le 0$ *par suite il existe* $(r,r')\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $ar-br'=1$

(avec $r'=-(v+aq)$ *)*

si $b<-1$ *alors* $-b>1$ *et on se ramène au premier cas en remplaçant* v *par* $(-v)$ *et* b *par* $(-b)$

ainsi donc il existe toujours un couple d'entiers positifs $(r,r')\in\mathbb{N}^2$ *tel que :* $ar=1\pm br'$

Théorème de Gauss :Soient a ,b *et* c trois entiers reletif.

- Si $a\,|\,bc$ et $a\wedge b=1$ alors $a\,|\,c$ (Première version)
- Si $a\,|\,c$ et $b\,|\,c$ et $a\wedge b=1$ alors $ab\,|\,c$ (Deuxième version)

Remarque : la condition $a\wedge b=1$ *est nécessaire car* $6\,|\,18$ *et* $9\,|\,18$ *mais* $54=9\times 6$ *ne divise pas* 18

Compléments :

Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) *:* $ax+by=c$ (où $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$ sont des entiers donnés)

- *Remarquons que si* $d=a\wedge b$ *ne divise pas* c *alors l'équation n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}^2$

et si $d\,|\,c$ *alors il existe* $(a',b',c')\in\mathbb{Z}^3$ *tel que* $a=da'$, $b=db'$ *et* $c=dc'$ *avec* $a'\wedge b'=1$

et l'équation se ramène à la forme $a'x+b'y=c'$ *avec* a' *et* b' *premiers entre eux.*

Supposons donc que $a\wedge b=1$ *et soit* $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ *une solution particulière de* (E) $(*)$

Condition nécessaire : pour toute solution $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ *de* (E) *on a* $ax+by=ax_0+by_0$ *soit que*
$a(x-x_0)=-b(y-y_0)$ *et donc* $a\,|\,b(y-y_0)$ *et* $b\,|\,a(x-x_0)$
et d'après le théorème de Gauss $a\,|\,y-y_0$ *et* $b\,|\,x-x_0$ *et par suite il existe* $(k,k')\in\mathbb{Z}^2$ *tels que*
$x=x_0+kb$ *et* $y=y_0+k'a$
Condition suffisante : Le couple $(x_0+kb,y_0+k'a)\in\mathbb{Z}^2$ *est solution de* (E) *si* $a(x-x_0)=-b(y-y_0)$
soit que $k'=-k$
En conclusion l'ensemble des solutions de (E) *est* $\{(x_0+kb,y_0-ka)/\,k\in\mathbb{Z}\}$ *avec* (x_0,y_0) *une solution particulière de* (E)
Remarque$(*)$ *: puisque* a *et* b *sont premiers entre eux alors l'algorithme d'Euclide appliqué au couple* (a,b) *nous donne le couple de Bézout* $(u_0,v_0)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $au_0+bv_0=1$ *soit que* $acu_0+bcv_0=c$
et donc $(cu_0,cv_0)\in\mathbb{Z}^2$ *est une solution particulière de* (E) *§*

Théorème : Si n un entier naturel strictement supérieur à 1 alors son plus petit diviseur $d>1$ est un nombre premier et $d\le\sqrt{n}$
application :(Critère de primalité d'Herasthosène)
Pour montrer qu'un entier naturel n est premier il suffit de montrer qu'il n'est divisible par aucun des nombres premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$

En effet , supposons que d *n'est pas premier alors il admet un diviseur* $1<d'<d$
puisque $d'\,|\,d$ *et que* $d\,|\,n$ *alors* $d'\,|\,n$ *ce qui est faux car* d *est par définition le plus petit diviseur de* n
comme $d\,|\,n$ *alors il existe un entier* $k>1$ *tel que* $n=kd$ *et* $k\ge d$ *car* d *est par définition le plus petit diviseur de* n *et donc* $n=dk\ge d^2$ *et par suite* $d\le\sqrt{n}$
application : on vérifie par le calcul direct qu'aucun des nombre premiers p *tel que* $p\le\sqrt{137}<12$
(qui sont : $2,3,5,7$ *et* 11*) ne divise* 137 *et par suite* 137 *est un nombre premier.*

Le Théorème fondamental : Tout entier non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $\varepsilon\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{r_i}$ où $\varepsilon=\pm1$, les r_i sont des entiers naturels et les p_i sont des nombres premiers. Cette écriture est dite la décomposition de n en produit de facteurs premiers ou la décomposition primaire de n

Conséquences : Si $a=\prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\alpha_i}$ et $b=\prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\alpha_i}$ sont deux entiers donnés sous la forme de leur décompositions primaires respectives alors :

- Tout diviseur de a s'écrit sous la forme $d=\prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\gamma_i}$ avec $(\forall i\in\{1,2,..,n\})$ $0\le\gamma_i\le\alpha_i$
- Le nombre de diviseurs de a est : $¢(a)=\prod_{i=1}^{i=n}(\sim_i+1)$

- $a \wedge b = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\gamma_i}$ avec $(\forall i \in \{1,2,....,n\})$; $\gamma_i = inf(\alpha_i, \beta_i)$
- $a \vee b = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\gamma_i}$ avec $(\forall i \in \{1,2,....,n\})$; $\gamma_i = sup(\alpha_i, \beta_i)$

Le petit Théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier alors pour tout entier n on a :
(i) $n^p \equiv n \ [p]$
(ii) si en plus $n \wedge p = 1$ alors $n^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

Théorème de Wilson : Soit p un entier supérieur ou égal à 2
p est premier si et seulement si $(p-1)! + 1 \equiv 0 \ [p]$

Théorème de Fermat : Pour $n \geq 3$ l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

Remarque : Pour $n = 2$

Soit $d \in \mathbb{Z}$ on a $(\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$; $(m^2 + dn^2)^2 - d(2mn)^2 = (m^2 - dn^2)^2$

donc l'équation $x^2 - dy^2 = z^2$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}^{*3}$

En particulier si $d = -1$ on a : l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ dite de Pythagore, admet une infinité de solutions en entiers qui sont de la forme : $\left(\delta(u^2 - v^2), 2\delta uv, \delta(u^2 + v^2)\right)$ ou $\left(2\delta uv, \delta(u^2 - v^2), \delta(u^2 + v^2)\right)$ où δ est un entier naturel et $u \, et \, v$ deux entiers premiers entre eux.

Théorème des restes chinois :
Soient $p \ et \ q$ deux entiers naturels strictement positifs et $a \ et \ b$ deux entiers donnés.

Si $p \wedge q = 1$ alors $(\exists c \in \mathbb{Z})$ tel que le système : $\begin{cases} x \equiv a & [p] \\ x \equiv b & [q] \end{cases}$ est équivalent à l'équation $x \equiv c \ [pq]$

<u>Remarque</u> : Ce résultat se généralise à plusieurs entiers stictement positifs $p_1, p_2, ..., p_k$ qui sont deux à deux premiers entre eux.

En effet : * *Si* $p \ et \ q$ *sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe* $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que*

$up + vq = 1$ *et donc* $up \equiv 1 \ [q]$ *et* $vq \equiv 1 \ [p]$ *par suite*

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv avq & [p] \\ x \equiv bup & [q] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = avq + np \\ x \equiv bup + mq \end{cases} \quad avec \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2$$

on déduit alors que $avq + np = bup + mq$ *ou encore que* $(av - m)q = (bv - n)p$

puisque $p \wedge q = 1$ *, d'après le théorème de Gauss,* $p \mid av - m$ *et* $q \mid bu - n$ *et donc il existe* $\lambda \in \mathbb{Z}$ *tel que* $(av - m)q = \lambda pq = (bu - n)p$ *et donc* $x = avq + bup + \lambda pq$ *avec* $\lambda \in \mathbb{Z}$

ou encore que $x \equiv avq + bup \quad [pq]$

et réciproquement on vérifie que les entiers $x \equiv avq + bup \quad [pq]$ *sont bien solutions de* (S)

Ainsi dond ce système admet une solution unique modulo pq

* *Si* p *et* q *ne sont pas premiers entre eux, soit* $d = p \wedge q > 1$ *alors* $(S) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv a & [d] \\ x \equiv b & [d] \end{cases}$

- si $a \neq b \; [d]$ *alors de* $\begin{cases} x \equiv a & [d] \\ x \equiv b & [d] \end{cases}$ *on déduit que* $\begin{cases} d \mid x - a \\ d \mid x - b \end{cases}$ *donc* $d \mid b - a$ *ce qui est absurde*

- si $a \equiv b \quad [d]$ *(en particulier si* $a = b$ *) alors de* $\begin{cases} x \equiv a & [d] \\ x \equiv b & [d] \end{cases}$ *on déduit que* $x \equiv a \quad [d]$

et donc $x = a + kd$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*. Si on pose* $p = dp'$ *et* $q = dq'$ *avec* $p' \wedge q' = 1$ *alors*

$(S) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv a & [d] \\ x \equiv a & [p'] \\ x \equiv a & [q'] \end{cases}$ *donc* $x - a$ *est divisible par* d *,* p' *et* q' *qui sont premiers entre eux*

dans leur ensemble puisque $p' \wedge q' = 1$ *et par suite* $dp'q' \mid x - a$ *soit que* $x \equiv a \quad [dp'q']$

et réciproquement on vérifie que les entiers $x \equiv a \quad [dp'q']$ *sont bien solutions du système* (S)

Complément *: D'une façon génétale, si* $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ *sont des entiers naturels deux à deux premiers entre eux et* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ *des entiers donnés alorsil existe un entier* a *tel que :*

le système $\begin{cases} x \equiv a_1 & [n_1] \\ \quad . & \\ \quad . & \\ x \equiv a_k & [n_k] \end{cases}$ *soit équivalent à l'équation :* $x \equiv a \quad \left[\prod_{i=1}^{i=k} n_i \right]$

Compléments :

Fonction indicatrice d'Euler

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a :

- Le nombre d'éléments de $\{0, 1, \ldots\ldots, (n-1)\}$ qui sont premiers avec n est appellé l'indicateur d'Euler de n et est noté par $\varphi(n)$

- $\varphi(n)$ est donné par la formule : $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{i=k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ dans le cas où la décomposition de n en produit de facteurs premiers est : $n = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i}$

- Si n est premier alors son indicateur d'Euler est : $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 1$

- Si $n \geq 2$ et $m \geq 2$ alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
- φ est appelleé la fonction indicatrice d'Euler.

Théorème d'Euler : Pour tout entier a et pour tout $n \geq 2$, si $a \wedge n = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; [n]$
(c'est une généralisation du petit théorème de Fermat)

Théorème de Dirichlet : Si $a \; et \; b$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, la suite de terme général $an + b$ ($n \in \mathbb{N}$) contient une infinité de nombres premiers.

Postulat de Bertrand : Pour tout entier naturel $n \geq 2$ il existe un nombre premier p tel que $n \leq p < 2n$

Notations, symboles et abréviations :

$E(x) \; ou \; [x]$: la partie entière du reél x

$a \mid b$: a divise b

$a \wedge b$: Le plus grand commun diviseur de $a \; et \; b$

$a \vee b$: Le plus petit commun diviseur de $a \; et \; b$

T.B : Théorème de Bézout

T.W : Théorèmede Wilson

T.R.C : Théorème des restes chinois

P.T.F : Le petit théorème de Fermat

EXO α : exercice numéro α

$\mathbb{Q}$: désigne l'ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{Z}$: désigne l'ensemble des nombres entiers (relatifs)

$\mathbb{N}$: désigne l'ensemble des nombres entiers positifs (naturels)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: désigne l'ensemble des classes d'équivalence modulo n ($n \geq 2$)

I.S : signifie indications de solutions

Remarques :
(i) Le produit de deux entiers consécutifs est toujours divisible par 2
(ii) Le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6
(iii) Le produit de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 30

En effet: Soit n un entier relatif .

(i) On a : $n \equiv 0$ ou 1 $[2]$ donc $n(n+1) \equiv 0 \quad [2]$ ainsi donc le produit de deux entiers consécutifs est toujours divisible par 2

(ii) On a : $n \equiv 0$ ou 1ou 2 $[3]$ donc $(n-1)n(n+1) \equiv 0 \quad [3]$ ainsi donc le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3 , et puisque $n(n+1) \equiv 0 \quad [2]$ et $(n-1) \equiv 0 \quad [2]$ et que $2 \wedge 3 = 1$ alors $(n-1)n(n+1) \equiv 0 \quad [6]$ et donc le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6

(iii) On a : $n \equiv 0$ ou 1ou 2 ou 3 ou 4 $[5]$ donc $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 0 \quad [5]$ ainsi donc le produit de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 5, de plus le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6 et puisque $5 \wedge 6 = 1$ alors $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 0 \quad [30]$

plus encore, si n est pair alors $(n-2)$ et $(n+2)$ sont pairs et donc leur produit est divisible par $2^3 = 8$ et donc $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 0 \quad [8 \times 5 = 40]$ car 8 et 5 sont premiers entre eux.

EXO1- Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{Z})$, $(\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2)$; $x^2 - y^2 = a^3$

I.S : *Pour avoir $x^2 - y^2 = a^3$ il suffit d'avoir $(x-y)(x+y) = a^3$*

donc il suffit donc d'avoir $\begin{cases} x - y = a \\ x + y = a^2 \end{cases}$

donc il suffit donc d'avoir $\begin{cases} 2x = a(a+1) \\ 2y = a(a-1) \end{cases}$

Et puisque le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair, alors il suffit de prendre
$x = \dfrac{a(a+1)}{2}$ *et* $y = \dfrac{a(a-1)}{2}$ *ce qui répond à notre question……*

EXO2 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) ; $y^2 = x^3 - 3x + 2$

I.S : Si $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ est une solution de l'équation (E) alors $y^2 = (x-1)^2(x+2)$

- on remarque que $(1,0)$et$(-2,0)$ sont des solution particulière.

- on suppose que $x \neq 1$ et on pose $t = \dfrac{y}{x-1}$ alos l'équation (E) devient $t^2 = x + 2$

et si x est entier alors t est aussi un entier

les solutions de (E) sont donc les couples $\left(t^2 - 2, t(t^2 - 3)\right)$ lorsque t décrit $\mathbb{Z}$

EXO3 : Montrer que l'équation $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=120$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$

I.S : *On vérifie d'abord que :*

$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=(x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

Les quatre facteurs de ce produit sont de même parité.

Si les Quatre facteurs sont impairs, alors leur produit est aussi impair

Si les Quatre facteurs sont pairs, alors leur produit est divisible par 2^4

Or 120 *n'est ni impair, ni divisible par* 16 *et donc l'équation ne peut admettre de solution dans* $\mathbb{Z}^3$

EXO4 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (E) : $2x+3y+5z=1$

I.S : *Si* $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ *est une solution de* (E), *on remarque que nécessairement* $3y+5z$ *doit être impair*

Et puisque $3y+5z=2(y+2z)+y+z$ *alors* $y+z$ *est impair*

Si y *est pair alors* z *est impair. On pose donc* $y=2Y$ *et* $z=2Z+1$ *avec* $(Y,Z)\in\mathbb{Z}^2$ *quelconque.*

Et donc $(E) \iff 2x+6Y+10Z=-4$ *ce qui donne* $x=-2-3Y-5Z$

Et donc les triplets $(-2-3Y-5Z,2Y,2Z+1)$ *avec* $(Y,Z)\in\mathbb{Z}^2$ *sont solutions de* (E)

Si y est impair alors z est pair. On pose donc $y=2Y+1$ et $z=2Z$ avec $(Y,Z)\in\mathbb{Z}^2$ quelconque.

Et donc $(E) \iff 2x+6Y+10Z=-2$ *ce qui donne* $x=-1-3Y-5Z$

Et donc les triplets $(-1-3Y-5Z,2Y+1,2Z)$ *avec* $(Y,Z)\in\mathbb{Z}^2$ *sont solutions de* (E)

Réciproquement on vérifie que les triplets $(-2-3Y-5Z,2Y,2Z+1)$ *et* $(-1-3Y-5Z,2Y+1,2Z)$ *avec* $(Y,Z)\in\mathbb{Z}^2$ *quelconque ,sont bien des solutions de l'équation* (E)

EXO5 : Soit n un entier naturel.

Montrer que si $4n+2$ n'est pas le carré d'un entier alors $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

I.S : - remarquons qu'on a toujours : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$

car $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n}$ *et* $\left(\sqrt{4n+2}\right)=4n+2=2(2n+1)$

on donc ça se ramène à comparer $2\sqrt{n^2+n}$ *et* $2n+1$ *ce qui est évident si on enlève au carré.*

Supposons qu'il existe entier k *tel que :* $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k\leq\sqrt{4n+2}$

alors $2n+1+2\sqrt{n^2+n}<k^2\leq 4n+2$ *donc* $4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}<k^2\leq 4n+2$

soit que $4n+1<k^2\leq 4n+2$ *or* $4n+1$ *et* $4n+2$ *sont deux entiers consécutifs et* k *est entier donc nécessairement* $k^2=4n+2$ *ce qui est absurde car* $4n+2$ *n'est pas le carré d'un entier.*

Ainsi il n'existe aucun entier k *tel que* $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k\leq\sqrt{4n+2}$

et par suite les deux réels $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ *et* $\sqrt{4n+2}$ *ont la même partie entière.*

EXO6 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ le système d'équations (S) : $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+2y-2z=1 \end{cases}$

I.S : *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ *une solution de* (S) *si elle existe.*

La deuxième équation du système montre que x *est impaire et donc d'après la première équation,* z *est aussi impair. Posons* $x=2X+1$ *et* $z=2Z+1$

Dans ce cas (S) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} X-y+Z=-1 \\ X+y-2Z=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} X-y+Z=-1 \\ y=3X+1 \\ Z=4X+1 \end{cases}$ *avec* X *un entier quelconque.*

Réciproquement on vérifie que $(2X+1,3X+1,4X+1)$ *avec* $X\in\mathbb{Z}$ *, sont solutions du système* (S)

EXO7 : Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Montrer que a^4+12a^2+4 n'est pas le carré d'un entier (un carré parfait).

I.S : *On a* $a^4+12a^2+4=(a^2+6)^2-32<(a^2+6)^2$

Et $a^4+12a^2+4>(a^2+5)^2 \Leftrightarrow 2a^2>21 \Leftrightarrow a\geq 4$

Ainsi pour $a\geq 4$ *on a* $(a^2+5)^2<a^4+12a^2+4<(a^2+6)^2$ *et donc* a^4+12a^2+4 *ne peut pas être le carré d'un entier car il est strictement compris entre deux carrés consécutifs.*

Et pour $a=1,2$ *ou* 3 *on vérifie que* a^4+12a^2+4 *n'est pas un carré parfait.*

EXO8 : Montrer que l'équation (E) ; $3x^2-7y^2+1=0$ admet une infinité de solution dans $\mathbb{N}^2$

I.S : On remarque que : $3(55a+84b)^2-7(36a+55b)^2=3a^2-7b^2$

ainsi donc si $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *est une solution de l'équation* (E) *, alors* $(55x+84y,36x+55y)$ *est aussi solution de* (E)

Et puisque le couple $(3,2)$ *est une solution évidente, on déduit à partir d'elle une infinité de solution de cette équation.*

EXO9 : Résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation (E) : $14x+15y+16z=247$

I.S : *Si* $(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$ *est une solution de* (E) *alors* y *est impair.*

Posons $y=2Y+1$ *avec* $Y\in\mathbb{N}$ *, on aura donc* $(E)\Leftrightarrow 14x+30Y+16z=232$ *donc* $z\equiv -Y+4\ [7]$

Posons $z=-Y+4+7k$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *et* $-Y+4+7k\in\mathbb{N}$

donc $(E) \Rightarrow 7x+15Y+8(-Y+4+7k)=116$ *soit que* $7x+7Y+56k=84$

puisque $x\in\mathbb{N}$ *et* $Y\in\mathbb{N}$ *alors* $k=0$ *ou* $k=1$

si $k=0$ *, on aura* $z=-Y+4$ *et donc* $0\leq Y\leq 4$ *car* $z\in\mathbb{N}$ *et aussi* $x=-Y+12$

donc les solutions possibles (E) *dans ce ces sont les triplets* $(-Y+12,2Y+1,-Y+4)$ *avec* $0\leq Y\leq 4$

ce qui donne les triplets $(12,1,4)$, $(11,3,3)$, $(10,5,2)$, $(9,7,2)$ *et* $(8,9,0)$ *comme solutions possibles*

Si $k=1$ *, on aura* $z=-Y+11$ *et* $x=-Y+4$ *et donc aussi* $0\leq Y\leq 4$

donc les solutions possibles (E) *dans ce ces sont les triplets* $(-Y+4, 2Y+1, -Y+11)$ *avec* $0 \le Y \le 4$

ce qui donne les triplets $(4,1,11)$, $(3,3,10)$, $(2,5,9)$, $(1,7,8)$ *et* $(0,9,7)$ *comme solutions possibles*

Pour compléter la résolution de l'équation il reste à vérifier si ces triplets sont solutions ou non de cette équation.

EXO10 : Déterminer tous les entiers naturels non nuls x, y, z qui vérifient : $xyz \mid xy+yz+zx-1$

I.S : Soit x, y, z *des entiers naturels non nuls qui vérifient* $xyz \mid xy+yz+zx-1$

donc il existe $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $xy+yz+zx-1 = kxyz$ *ou encore* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = k+\frac{1}{xyz}$ (1) *et par suite* $k \le 2$

On suppose que $x \le y \le z$

- *Si* $k=0$ *alors* $(1) \Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z} = \frac{1}{yz}$ *ce qui est impossible car* $1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z} > 1$ *et* $\frac{1}{yz} < 1$
- *Si* $k=1$ *alors* $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1+\frac{1}{xyz}$ (2)
- *Si* $x \ge 3$ *alors* $\frac{1}{xyz}+1 \ge \frac{1}{27}+1 > 1$ *et* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le 1$ *ce qui est impossible et donc* $x \le 2$
- *Si* $x=1$ *alors* $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{yz} \Leftrightarrow y+z=1$ *ce qui est impossible*
- *Si* $x=2$ *alors* $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{yz}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow (y-2)(z-2)=3$ *ce qui donne*

$y=3$ *et* $z=5$ *car* $x \le y \le z$

- *Si* $k=2$ *alors* $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2+\frac{1}{xyz}$ (3)
- *Le triplet* $(1;1;z)$ *vérifie* (3) *pour tout* $z \in \mathbb{N}^*$
- *Si* $x=1$ *et* $y>1$ *alors* $(3) \Leftrightarrow (y-1)(z-1)=0$ *ce qui est impossible car* $1<y\le z$
- *Si* $x=2$ *alors* $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{3}{2}$ *et* $\frac{1}{2yz}+2>2$ *ce qui est impossible d'avoir l'égalité* (3)

Réciproquement on vérifie que les solutions du problème sont les triplets :

$(2;3;5), (2;5;3), (3;5;2), (5;2;3), (5;3;2), (1;1;z), (1;z;1)$ *et* $(z;1;1)$ *avec* $z \in \mathbb{N}^*$

EXO11 : n *et* d sont deux entiers naturels non nul tels que : $d \mid 2n^2$

Montrer que le nombre n^2+d n'est pas le carré d'un entier.

I.S : *Posons* $2n^2 = kd$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$

Si n^2+d *est le carré d'un entier alors* $k^2(n^2+d)$ *est aussi le carré d'un entier.*

Or $k^2(n^2+d) = k^2n^2+k^2d = k^2n^2+2n^2k = n^2k(k+2)$

donc $n^2k(k+2)$ *est le carré d'un entier et donc* $k(k+2)$ *est aussi le carré d'un entier ce qui est absurde car* $k^2 < k(k+2) < (k+1)^2$ *(compris stictement entre les deux carrés d'entiers consécutifs)*

EXO12 : Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier n^2+2 ne peut pas être le carré d'un entier.

I.S : *On a pour* $n=0$ *, l'entier* 2 *n'est pas le carré d'un entier*

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(n^2)^2 < n^2(n^2+2) < n^4+2n^2+1 = (n^2+1)^2$ *donc si* n^2+2 *est le carré d'un entier alors* $n^2(n^2+2)$ *l'est aussi ce qui est absurde car il est compris strictement entre deux carré d'entiers consécutifs.*

EXO13 : Trouver tous les entiers relatifs x pour lesquels l'entier $1+x+x^2+x^3+x^4$ est un carré

I.S : Remarquons que pour tout entier $x \neq 0$ *, on a :* $\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2 < 1+x+x^2+x^3+x^4 < \left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$

- si x *est pair alors* $x^2+\frac{x}{2}$ *et* $x^2+\frac{x}{2}+1$ *sont deux entiers consécutifs et puisque il n'existe aucun carré strictement compris entre deux carrés d'entiers consécutifs alors* $1+x+x^2+x^3+x^4$ *ne peut pas être le carré d'un entier.*

si x *est impair , le seul entier compris entre* $x^2+\frac{x}{2}$ *et* $x^2+\frac{x}{2}+1$ *est* $x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

ainsi pour que $1+x+x^2+x^3+x^4$ *soit le carré d'un entier il est nécessaire d'avoir :*

$1+x+x^2+x^3+x^4 = \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$ *soit que* $x^2-2x-3=0$ *et donc* $x=-1$ *ou* $x=3$

Finalement les entiers solutions du problème sont : 0 , -1 *et* 3

EXO14 : Soient a,b *et* c trois entiers impairs.

Montrer que l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{Q}$

I.S : *Si* $x=\frac{p}{q}$ *avec* $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *et* $p \wedge q = 1$ *est une solution de* (E) *, alors* $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$

et donc $ap^2+bpq+cq^2=0$

Si p *est pair , alors* cq^2 *est pair, ce qui est absurde car* c *et* q *sont impairs.*

Si p *est impair, alors* ap^2 *est impair et* q *ne peut pas être pair sinon* $bpq+cq^2$ *serait pair et donc* $ap^2+bpq+cq^2$ *serait impair ce qui est faux. Ainsi donc* q *est impair et par suite* ap^2, bpq *et* cq^2 *sont impairs ce qui est absurde aussi.*

En conclusion l'équation (E) *n'admet pas de solution dans l'ensemble des rationnels* $\mathbb{Q}$

EXO15 : Trouver tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant : $m<n$ *et* $m^n=n^m$

I.S : *Pour* $m=0$ *ou* $m=1$ *on ne trouve aucune valeur de* n

Supposons donc $m\geq 2$. *On a* $m^n=n^m \Leftrightarrow \dfrac{ln(m)}{m}=\dfrac{ln(n)}{n}$

L'application $f : x\mapsto f(x)=\dfrac{ln\,x}{x}$ *est strictement croissante sur l'intervalle* $]0;e]$ *et strictement décroissante sur l'intervalle* $[e;+\infty[$ *donc* $m<n$ *et* $f(m)=f(n)$ *nécessite que* $m<e<n$ *et par suite* $m=2$ ($f(2)=\dfrac{ln\,2}{2}=\dfrac{ln\,4}{4}=f(4)$) *et par suite* $n=4$

En conclusion $(2,4)$ *est le seul couple d'entiers qui vérifie ces hypothèses.*

EXO16: Soient a *et* n deux entiers naturels non nuls donnés.

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $x^n-y^n=a$

I.S : *Pour* $n=1$, $(E) \Leftrightarrow x-y=a \Leftrightarrow x=y+a$ *et donc l'ensemble des solutions de cette équation est* $S=\{(y,y+a)\ /\ y\in\mathbb{N}\}$

Pour n *impair, on a :* $x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+......xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=a$

si $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *est solution de* (E) *alors nécessairement* $x-y\geq 1$ *et* $x^{n-1}+y^{n-1}\leq a$

donc $x-y\geq 1$ *et* $x\leq \sqrt[n-1]{a}$ *et* $y\leq \sqrt[n-1]{a}$

Le nombre de valeurs possibles du couple (x,y) *est donc fini et le problème est résolu.*

Pour n *pair, posons* $n=2k$. *On a donc* $(E) \Leftrightarrow x^n-y^n=\left(x^k-y^k\right)\left(x^k+y^k\right)=a$

si $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *est solution de* (E) *alors* $x^k-y^k\geq 1$ *et* $x^k+y^k\leq a$

donc $x^k-y^k\geq 1$ *et* $x\leq\sqrt[k]{a}$ *et* $y\leq\sqrt[k]{a}$

Le nombre de valeurs possibles du couple (x,y) *est donc fini et le problème est résolu.*

Il ne reste qu'à vérifier parmi ces valeurs possibles celles qui vérifient l'équation (E)

Application : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ *l'équation* (E) ; $x^4-y^4=5$

Si $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *est solution de* (E) *alors* $x-y\geq 1$, $x\leq\sqrt{5}$ *et* $y\leq\sqrt{5}$

soit que : $x-y\geq 1$, $x\leq 2$ *et* $y\leq 2$ *et donc les valeurs possibles du couple* (x,y) *sont :*

$(1;0)$, $(2;0)$ *et* $(2;1)$ *mais aucun de ces valeurs ne vérifie l'équation* (E) *et par suite elle n'admet pas de solution dans* $\mathbb{N}^2$

EXO17 : Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) ; $3^x - 2^y = 1$

I.S : remarquons que $(x, y) = (1,1)$ *est une solution*

supposons que $y \geq 2$

On a : $(E) \Leftrightarrow 2^y = 3^x - 1$ *et donc* $3^x \equiv 1 \; [4]$ *car* $y \geq 2$ *par suite* x *est pair*

posons $x = 2x'$ *alors* $(E) \Leftrightarrow 2^y = (3^{x'} - 1)(3^{x'} + 1)$

donc $3^{x'} - 1$ *et* $3^{x'} + 1$ *sont des puissances de* 2 *de plus leur difference est* 2 *donc ils valent* 2 *ou* 4

puisque $3^{x'} + 1 > 3^{x'} - 1$ *alors* $3^{x'} + 1 = 4$ *et* $3^{x'} - 1 = 2$ *soit que* $x' = 1$ *et donc* $x = 2$ *et par suite* $y = 3$

En conclusion : $(1,1)$ *et* $(2,3)$ *sont les seules solutions.*

EXO18 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$

I.S : Posons $t = x + 3$ *, l'équation* (E) *est alors équivalente à l'équation* (F) ; $2t(t^2 + 3t + 21) = 0$

or l'équation (F) *admet dans* $\mathbb{R}$ *une seule solution qui est* $t = 0$ *donc l'équation* (E) *admet dans* $\mathbb{Z}$ *une seule solution* $x = -3$

EXO19 : Etant donné un polynôme $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ...a_n$ à coefficients entiers.

On suppose qu'il existe quatre entiers distincts a, b, c et d tels que :

$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$

Montrer qu'il n'existe aucun entier k tel que $f(k) = 13$

I.S : *Posons* $g(x) = f(x) - 5$ *donc le polynôme* $g(x)$ *admet quatre racines distincts* a, b, c *et* d *et par suite* $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)h(x)$ *avec* $h(x)$ *un polynôme de degré* $n-4$

S'il existe un entier k *tel que* $f(k) = 13$ *alors* $g(k) = (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)h(k) = 8$ *avec* $k-a$, $k-b$, $k-c$ *et* $k-d$ *sont distincts par hypothèse ce qui est impossible car* 8 *ne peut pas être écrit comme le produit de quatre facteurs distincts.*

EXO20 : Soit a, b et n trois entiers naturels tels que : $a \geq 3$, $b \geq 2$ et $n \geq 1$

On note q le quotient dans la division euclidienne de $a-1$ par b

Montrer que le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} est q

I.S : *On a :* $a - 1 = bq + r$ *avec* $0 \leq r < b$ *, soit que* $0 \leq r + 1 \leq b$

de plus $ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n$ *donc* $ab^n - 1 = b^{n+1}q + (r+1)b^n - 1$

or $(r+1)b^n - 1 < (r+1)b^n \leq b^{n+1}$ *donc* $ab^n - 1 = b^{n+1}q + (r+1)b^n - 1$ *est bien la division Euclidienne de* $ab^n - 1$ par b^{n+1} et donc *le quotient de la division euclidienne de* $ab^n - 1$ *par* b^{n+1} *est* q

EXO21 : Soient m et n deux entiers naturels strictement positifs tels que : $n \geq m$

Montrer que le nombre de multiple de m inférieurs à n est $\left[\dfrac{n}{m}\right]$

I.S : *Dans la division euclidienne de* n *par* m : $n = mq + r$ *avec* $0 \leq r < m$,

on a $mq \leq n = mq + r < m(q+1)$ *, donc les multiples de* m *inférieurs ou égal à* n *sont :*

$m, 2m, \ldots\ldots, qm$ *. Leur nombre est donc* q *qui est le quotient de* n *par* m *et* $q \leq \dfrac{n}{m} < q+1$

ce qui signifie par définition de la partie entière que : $\left[\dfrac{n}{m}\right] = q$

EXO22 : Soient a et b deux entiers naturels et soient q le quotient et r le reste dans la division

Euclidienne de $a^2 + b^2$ par $a+b$

Trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $q^2 + r = 1977$

I.S : *On a* $a^2 + b^2 = q(a+b) + r$ *avec* $0 \leq r < a+b$ *et* $q^2 + r = 1977$

donc $q^2 \leq 1977 = q^2 + r < q^2 + a + b$ *et* $a^2 + b^2 < (q+1)(a+b)$ *car* $r < a+b$

puisque $2ab \leq a^2 + b^2$ *alors* $2ab < (q+1)(a+b)$ *, donc* $(a+b)^2 < 2(q+1)(a+b)$

et par suite $a+b < 2q+2$ *ou encore* $a+b \leq 2q+1$

ainsi donc $q^2 \leq 1977 < q^2 + 2q + 1 = (q+1)^2$ *et donc* $q = 44$ *et* $r = 1977 - q^2 = 41$

donc $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$ *soit que* $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009 = 15^2 + 28^2$ *ce qui donne :*

$$\begin{cases} |a-22| = 15 \\ |b-22| = 28 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} |a-22| = 28 \\ |b-22| = 15 \end{cases}$$

finalement les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *solutions sont :* $(50;37), (37;50), (50;7)$ *et* $(7;50)$

EXO23 : Trouver tous les entiers strictement positifs a, b *et* c tels que la division euclidienne du produit de deux quelconque d'entre eux par le troisième donne un reste égal à 1

I.S : *Soit* $(a;b;c) \in \mathbb{N}^{*3}$ *une solution du problème. On peut toujours supposer que* $1 < a < b < c$

On sait qu'il existe trois entiers α, β *et* λ *tels que* $ab = \alpha c + 1$, $bc = \beta a + 1$ *et* $ca = \lambda b + 1$

On a : $\alpha\beta\lambda abc = (ab-1)(bc-1)(ca-1)$ *donc* $abc(\alpha\beta\lambda - abc + a + b + c) = ab + bc + ca - 1$

et donc $abc < ab + bc + ca < 3bc$ *et par suite* $a < 3$ *, soit que* $a = 2$

on déduit alors que $bc < 2b + 2c < 4c$ *et donc que* $b < 4$ *soit que* $b = 3$

enfin $6c < 6 + 5c$ *, donc* $c < 6$ *et par suite* $c = 4$ *ou* $c = 5$

Les triplets possibles sont donc $(2;3;4)$ *et* $(2;3;5)$

Réciproquement , le triplet $(2;3;4)$ *ne vérifie pas les hypothèses puisque* $2 \times 4 = 2 \times 3 + 2$

donc la seule solution du problème est le triplet $(2;3;5)$

EXO24 : Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\forall a \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad f(a,a) = a \quad (1) \\ (\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \quad ; \quad f(a,b) = f(b,a) \quad (2) \\ (\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \quad ; \quad si\ a < b\ alors\ f(a,b) = f(a,b-a) \quad (3) \end{cases}$$

I.S : *On considère la division euclidienne de* b *par* a : $b = aq + r$ *avec* $0 \le r < a$

d'après (3) , $f(a,b) = f(a,aq+r) = f(a,a(q-1)+r)$

en appliquant le même procédé plusieurs fois, on obtient $f(a,b) = f(a,r)$

or d'après (2) , $f(a,b) = f(r,a) = f(r,r_1)$ *où* r_1 *est le reste de la division euclidienne de* a *par* r

et ainsi de suite par application de l'algorithme d'Euclide, si r_n *désigne le dernier reste non nul alors*

d'après (1) , $f(a,b) = f(r_n,r_n) = r_n$ *et donc* $f(a,b) = a \wedge b$

ainsi donc il existe une seule application qui vérifie les hypothèse à savoir l'application f *définie*

sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par : $(\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \quad ; \quad f(a,b) = a \wedge b$

EXO25 : Soit $n \in \mathbb{Z}$ *et* $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\dfrac{n}{ab}\right] = \left[\dfrac{\left[\frac{n}{a}\right]}{b}\right]$

I.S : Considérons la division euclidienne de n *par* a : $n = aq + r$ *avec* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \le r < a$

puis la division euclidienne de q *par* b : $q = bq' + r'$ *avec* $q' \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \le r' < b$

on a donc $n = abq' + ar' + r$ *et* $0 \le ar' + r \le a(b-1) + a - 1 = ab - 1 < ab$

donc q' *est le quotient de la division euclidienne de* n *par* ab

de plus $\begin{cases} \dfrac{n}{a} = q + \dfrac{r}{a} \\ \dfrac{n}{ab} = q' + \dfrac{ar'+r}{ab} \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} q = \left[\dfrac{n}{a}\right] \\ q' = \left[\dfrac{n}{ab}\right] \end{cases}$

or $q' = \left[\dfrac{q}{b}\right] = \left[\dfrac{\left[\frac{n}{a}\right]}{b}\right]$ *donc* $\left[\dfrac{n}{ab}\right] = \left[\dfrac{\left[\frac{n}{a}\right]}{b}\right]$

EXO26 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $3x^2 + xy - 11 = 0$

I.S : *Si* $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *est une solution de l'équation, alors* $x(3x + y) = 11$

donc x *est un diviseur de* 11 *, par suite :* $x = -1, 1, -11$ *ou* 11

ensuite pour chaque valeur de x *, on détermine une valeur de* y *qui lui correspond.*

Les couples solutions possibles sont $(-1;-8), (1;8), (-11;32)$ *et* $(11;-32)$

Réciproquement on vérifie que ces couples sont tous solutions de cette équation.

EXO27 : Déterminer tous les entiers naturels n tes que $n+1$ divise n^2+1

I.S : Si $n+1|n^2+1$ *alors* $n+1|n^2+1+2n-2n+2-2$ *donc* $n+1|(n+1)^2-2(n+1)+2$

et par suite $n+1|2$ *ce qui donne* $n=0$ *ou* $n=1$

réciproquement on vérifie que pour $n=0$ *on a bien* $1|1$ *et pour* $n=1$ *on a bien* $2|2$

donc les valeurs de n *sont :* 0 *et* 1

EXO28 : Soient x *et* y deux entiers.

Montrer que $2x+3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x+4y$ est divisible par 7

I.S : Supposons que 7 *divise* $2x+3y$ *alors il divise* $6(2x+3y)-7(x+2y)=5x+4y$

Réciproquement, si 7 *divise* $5x+4y$ *alors il divise* $6(5x+4y)-7(4x+3y)=2x+3y$

EXO29 : Soit x un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier supérieur ou égal à 1

Montrer que si $k\,|\,x^2-x$ alors $k\,|\,x^n-x$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2

I.S : *Supposons que* $k\,|\,x^2-x$ *et procédons par récurrence sur* $n\geq 2$

Pour $n=2$ *la relation est vraie*

Montrons que pour tout entier n *supérieur ou égal à* 2*, si la relation est vraie jusqu'à l'ordre* n *, alors elle est vraie pour l'ordre* $n+1$

En effet , on a $x^{n+1}-x=x\left(x^n-x\right)+x^2-x$ *donc si* $k\,|\,x^2-x$ *et* $k\,|\,x^n-x$ *, alors* $k\,|\,x^{n+1}-x$

Donc d'après le principe de récurrence, $(\forall n\geq 2)$ *;* $k\,|\,x^n-x$

EXO30 : Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{Z})$ *;* $6\,|\,5n^3+n$

I.S : *Première méthode*

- Procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$

Posons $f(n)=5n^3+n$

** on a :* $6\,|\,f(0)$ *et* $6\,|\,f(1)$

** Montrons que pour tout entier supérieur ou égal à* 2 *, si* $6\,|\,f(n)$ *alors* $6\,|\,f(n+1)$

En effet, on a $f(n+1)=5n^3+n+15n(n+1)+6$ *,* $2\,|\,n(n+1)$ *et* $3|15$ *donc si* $6\,|\,f(n)=5n^3+n$ *alors* $6=2\times 3|15n(n+1)$ *et donc* $6\,|\,f(n+1)$

D'après le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $6\,|\,5n^3+n$

- Pour $n<0$ *, on a* $5n^3+n=-\left(5(-n)^3+(-n)\right)$ *et* $-n>0$

puisque $6\,|\,f(-n)$ *alors* $6\,|\,f(n)$ *et donc* $(\forall n\in\mathbb{Z})$ *;* $6\,|\,5n^3+n$

Deuxième méthode- Utilisation de la congruence modulo 6

On a : $5n^3+n\equiv -n^3+n\quad[6]$ *donc* $5n^3+n\equiv -(n-1)n(n+1)\quad[6]$

or dans un produit de trois termes consécutifs, l'un au moins des termes est divisible par 2 *et l'un au moins est divisible par* 3 *et puisque* 2 *et* 3 *sont premiers entre eux (premiers) alors ce produit est divisible par* $2\times 3=6$ *et donc* $5n^3+n\equiv 0\quad [6]$

EXO31 : Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 3804\,|\,(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

I.S : *On a :* $3804=6\times 634$ *et* $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ *donc* $6\,|\,n^3-n$ *(produit de trois termes consécutifs) de plus :*

$$5^{8n+4}+3^{4n+2}=\left(5^4\right)^{2n+1}+\left(3^2\right)^{2n+1}=\left(5^4+3^2\right)\left(\left(5^4\right)^{2n}-\left(5^4\right)^{2n-1}\times\left(3^2\right)+....+\left(3^2\right)^{2n}\right)$$
$$=634\times\left(\left(5^4\right)^{2n}-\left(5^4\right)^{2n-1}\times\left(3^2\right)+....+\left(3^2\right)^{2n}\right)$$

Donc $634\,|\,5^{8n+4}+3^{4n+2}$ *et par suite* $3804=6\times 634\,|\,(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ *car si* $a\,|\,b$ *et* $c\,|\,d$ *alors* $ac\,|\,bd$

Rappel : $a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(a^{2k}-a^{2k-1}\cdot b+......-a\cdot b^{2k-1}+b^{2k}\right)$

EXO32 : Soit n un entier. Montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ *et* $\dfrac{15n+2}{4}$ ne peuvent être simultanément des entiers.

I.S : *Si* $\dfrac{21n-3}{4}$ *et* $\dfrac{15n+2}{4}$ *sont tous les deux des entiers alors* $4\,|\,21n-3$ *et* $4\,|\,15n+2$ *donc* $4\,|\,5(21n-3)-7(15n+2)=-29$ *ce qui est absurde et par suite ils ne peuvent être simultanément des entiers.*

Rappel : Si $a\,|\,b$ *et* $a\,|\,c$ *alors* $a\,|\,bu+cv$ *quel que soit le couple* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$

EXO33 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n=16n^2+8n+6(1-5^n)$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le terme u_n est divisible par 64

I.S : Procédons par récurrence sur n

On a : $u_0=u_1=0$ *et* $u_2=-64$ *c'est bien vérifié*

Montrons que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ *, si* $64\,|\,u_n$ *alors* $64\,|\,u_{n+1}$

En effet, on a $u_{n+1}-5u_n=-64n^2$ *et donc si* $64\,|\,u_n$ *alors* $64\,|\,5u_n-64n^2$ *et donc* $64\,|\,u_{n+1}$

donc d'après le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 64\,|\,u_n$

EXO34 : Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a, b, c, d tels que le polynôme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ vérifie : $f(19)=1$ *et* $f(62)=2$

I.S : Supposons que de tels entiers existent , on aura alors :

$$1=f(62)-f(19)=a\left(62^3-19^3\right)+b\left(62^2-19^2\right)+c(62-19)\ \textit{donc}\ 1=(62-19)\times A$$

donc avec $A\in\mathbb{Z}$ *ce qui est absurde car* 43 *n'est pas un diviseur de* 1

EXO35 : Déterminer tous les entiers naturels n tes que $3^{n-1}+5^{n-1}$ divise $3^{n-1}+5^{n-1}$

I.S : On remarque que $3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)<3^n+5^n<5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$ *donc* $3<\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}<5$ *et par suite si*

$3^{n-1}+5^{n-1}$ divise $3^{n-1}+5^{n-1}$ alors $\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}$ *est un entier et il ne peut être égal qu'à* 4

soit que $3^n+5^n=4\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$ *et donc la seule solution possible est* $n=1$

EXO36 : Montrer que parmi quatre entiers consécutifs, l'un au moins n'est pas le carré d'un entier.

I.S : Si on considère quatre entiers consécutifs, nécessairement l'un est de la forme $4k$ *, un deuxième est de la forme* $4k+1$ *, un troisième de la forme* $4k+2$ *et un quatrième de la forme* $4k+3$

Celui qui est de la forme $4k+2$ *est divisible par* 2 *et non divisible par* $2^2=4$ *,(sinon il sera de la forme* $4k$ *) et donc il ne peut être le carré d'un entier.*

EXO37 : Trouver tous les entiers strictement positifs m *et* n tels que : $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{mn^2}=\dfrac{3}{4}$ *(*)*

I.S : L'égalité (*) se ramène à $n\left(4n+4M-3mn\right)=4$ *et donc* $n\,|\,4$ *et par suite les valeurs possibles de* n *sont :* $1,\ 2$ *et* 4

$n=1$ *ou* $n=4$ *ne donne aucune valeur entière de* m

Par contre si on prend $n=2$ *on trouve* $m=3$ *et donc la seule valeur possible du couple* (m,n) *est* $(3,2)$

EXO38 : Montrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$

I.S : On a $2^{70}+3^{70}=4^{35}+9^{35}=13\times\left(\sum_{k=0}^{k=34}(-1)^k\times4^{34-k}\times9^k\right)$

EXO39 : Déterminer tous les couples d'entiers satisfaisants l'équation $6x^2-3xy-13x+5y=-11$

I.S : Si le couple $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ *est solution de cette équation alors* $y=2x-1+\dfrac{6}{3x-5}$ *et donc* $3x-5$ *divise nécessairement* 6*, ainsi* $3x-5$ *est égal à :* $\pm1,$ *ou* $\pm2,$ *ou* ±3 *ou* ±6 *et* $x>0$

Les valeurs possibles de x *sont donc :* $x=1$ *ou* $x=2$

réciproquement si $x=1$ *on trouve* $y=-2$ *et si* $x=2$ *on trouve* $y=9$

donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{(1;-2),(2;9)\right\}$

EXO40 : Soit n un entier naturel

Montrer que si 2^n-1 est premier alors n est premier (nombres de Mersenne)

I.S : On procède par contraposé.

Supposons que n *n'est pas premier donc* $n=pk$ *avec* $p>1$ *et* $k>1$

et donc $2^n-1=\left(2^k\right)^p-1=\left(2^k-1\right)\left(\left(2^k\right)^{p-1}+\left(2^k\right)^{p-2}+......+1\right)$

puisque $1 < 2^k - 1 < \left(2^k\right)^{p-1} + \left(2^k\right)^{p-2} + ...+1$ *alors* $2^n - 1$ *est un entier composé.*

EXO41 : Déterminer tous les triplets (x,y,z) d'entiers naturels strictement positifs tels que :

$$x \mid y+z \;\; et \;\; y \mid z+x \;\; et \;\; z \mid x+y$$

I.S : Soit (x,y,z) *une solution du problème et on suppose que* $1 \le x \le y \le z$ *(puisque ils jouent le même rôle) on a donc* $\begin{cases} x \mid y+z \\ y \mid z+x \\ z \mid x+y \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} z \le x+y \le 2z \\ z \mid x+y \end{cases}$ *et par suite* $x+y=z$ *ou* $x+y=2z$

Si $x+y=2z$ *, de* $\begin{cases} x \mid y+z \\ y \mid z+x \end{cases}$ *on déduit que* $x=y=z$

Si $x+y=z$ *, puisque* $x \mid y+z$ *alors* $x \mid 2y+x$ *et donc* $x \mid 2y$

et puisque $y \mid z+x$ *alors* $y \mid x$ *ou* $y \mid 2x$ *et par suite* $x=y$ *ou* $y=2x$

et donc $z=2x$ *ou* $z=3x$

donc $(x,y,z)=(x,x,x)$ *ou* $(x,x,2x)$ *ou* $(x,2x,3x)$ *avec* $x \in \mathbb{N}^*$

il reste donc à intervertir l'ordre des éléments des triplets pour obtenir toutes les solutions du problème.

EXO42 : Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z}) \;\; ; \;\; 120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

I.S : On remarque que : $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

Puisque cinq entiers consécutifs peuvent être écrits sous la forme : $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3$ *et* $5k+4$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *, alors* $n^5 - 5n^3 + 4n = 5k \times (5k+1) \times (5k+2) \times (5k+3) \times (5k+4)$

Parmi ces cinq entiers l'un au moins est divisible par 3 *(puisque le produit de trois entiers consécutifs est divisible par* 3 *) donc* $3 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

et l'un au moins est divisible par 5 *(puisque le produit de cinq entiers consécutifs est divisible par* 5 *)*
donc $5 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

et comme 3 *et* 5 *sont premiers entre eux, alors* $3 \times 5 = 15 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

maintenant :

Si $(n-2)$ *est pair, alors* n *et* $(n+2)$ *sont aussi pairs et donc* $2^3 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

et par suite donc $15 \times 8 = 120 \mid n^4 - 5n^3 + 4n$ *(puisque* 15 *et* 8 *sont premiers entre eux)*

Si $(n-2)$ *est impair, alors* $(n-1)$ *et* $(n+1)$ *sont pairs et l'un des cinq entiers consécutifs est un multiple de* $2^2 = 4$ *(du type* $4k$ *) et donc on a toujours* $2^3 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

et par suite $3 \times 5 \times 2^3 = 120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

EXO43 : Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ ;\ \ 169\,|\,3^{3n+3}-26n-27$

I.S : Procédons par récurrence sur n *et posons* $u_n=3^{3n+3}-26n-27$

On a $u_0=0$ *et* $169\,|\,0$

Soit $n\in\mathbb{N}$ *et supposons que* $169\,|\,u_n$

on a $u_{n+1}-u_n=26\left(3^{3n+3}-1\right)=26\left(\left(3^3\right)^{n+1}-1\right)=\left(26\right)^2\left(27^n+27^{n-1}+....1\right)=169q$ *avec* $q\in\mathbb{N}$

donc $169\,|\,u_{n+1}-u_n$ *et puisque par hypothèse de récurrence,* $169\,|\,u_n$ *alors* $169\,|\,u_{n+1}$

donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ ;\ \ 169\,|\,3^{3n+3}-26n-27$

EXO44 : Soient a *et* b deux entiers relatifs tels que : $4a^2-9b^2=432$

Montrer que : $3\,|\,a$ *et* $2\,|\,b$

I.S : On remarque que : $4a^2-9b^2=3^3\times 2^4$

donc puisque $9\,|\,4a^2-9b^2$ *donc* $9\,|\,4a^2$ *et puisque* 4 *et* 9 *sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss,* $9=3^2\,|\,a^2$ *et donc* $3\,|\,a$

et de la même manière on montre que $2^2\,|\,b^2$ *et donc que* $2\,|\,b$

EXO45 : Soit n un entier naturel non nul et $d(n)$ le nombre de ses diviseurs positifs.

Montrer que $d(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait

I.S : Si $n=\prod_{i=1}^{i=N}p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de n alors $d(n)=\prod_{i=1}^{i=N}\left(\alpha_i+1\right)$

ainsi donc $d(n)$ est impair si et seulement si tous les termes $\left(\alpha_i+1\right)$ sont impairs ce qui signifie que tous les α_i sont pairs donc $n=\prod_{i=1}^{i=N}p_i^{2\beta_i}=\left(\prod_{i=1}^{i=N}p_i^{\beta_i}\right)^2$ est bien un carré.

EXO46 : Montrer que si 2^n+1 est un nombre premier alors n est une puissance de 2

I.S : Procèdons par contraposé.

Supposons que n *n'est pas une puissance de* 2 *et soit* p *un nombre premier impair (* $p\neq 2$ *) qui divise* n *il existe donc un entier* k *tel que* $n=pk$ *et donc :*

$$2^n+1=\left(2^k\right)^p+1=\left(2^k+1\right)\left(2^{k(p-1)}-2^{k(p-2)}+......+1\right)$$

puisque $1<2^k+1<2^n+1$ *donc* $2^k+1\,|\,2^n+1$ *et par suite* 2^n+1 *n'est pas premier.*

EXO47 : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P(x)$ à coefficients entiers tels que :

$P(1)=2$ et $P(3)=5$

I.S : Supposons que le polynôme $P(x)$ *existe et posons* $G(x)=P(x)-2$ *on a alors* $G(2)=0$ *et donc il existe un polynôme* $Q(x)$ *à coefficients entiers tel que* $P(x)=(x-2)Q(x)$

on aura d'une part $G(3)=P(3)-2=3$ *et d'autre part* $G(3)=(3-1)Q(3)$

ainsi donc $3=2Q(3)$ *et* $Q(3)$ *est un entier ce qui est absurde car* 2 *ne divise pas* 3

donc $P(x)$ *n'existe pas.*

EXO48 : Montrer que $11|2^{123}+3^{121}$

I.*S : On a* $2^5\equiv -1\quad[11]$ *donc* $2^{10}\equiv 1\quad[11]$ *de même* $3^5\equiv -1\quad[11]$ *donc* $3^{10}\equiv 1\quad[11]$

et par suite $2^{120}\equiv 1\quad[11]$ *et* $3^{120}\equiv 1\quad[11]$ *ainsi donc* $2^{123}+3^{121}\equiv 8+3\equiv 0\quad[11]$

Remarque : Puisque 11 *est un nombre premier et que* $2\wedge 11=3\wedge 11=1$ *alors d'après le petit théorème de Fermat* $2^{10}\equiv 1\quad[11]$ *et* $3^{10}\equiv 1\quad[11]$

EXO49 : Montrer que $(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ 7\,|\,n(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)$

I.S : On a $(\forall a\in\mathbb{Z})\ ;\ a^2\equiv 0;1;2$ *ou* $4\quad[7]$ *donc*

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ n^2,(n^2-1),(4n^2-1)$ *ou* $(9n^2-1)\equiv 0\quad[7]$

car les entiers $n^2,(n^2-1),(4n^2-1)$ *et* $(9n^2-1)$ *sont deux à deux distincts modulo* 7

et par suite $(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ 7\,|\,n(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)$

EXO50 : Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 9\,|\,2^{2n}+15n-1$

I.S : Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=2^{2n}+15n-1$ *et procédons par récurrence sur* n

On a $9\,|\,u_1=18$

Montrons que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ *, si* $9\,|\,u_n$ *alors* $9\,|\,u_{n+1}$

En effet , on a $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_{n+1}-u_n=3(2^{2n}+5)$ *et* $2^{2n}+5\equiv 0\quad[3]$ *(car* $2^2\equiv 1\quad[3]$ *)*

donc $3^2=9\,|\,u_{n+1}-u_n$ *et par suite* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_{n+1}\equiv u_n\quad[9]$

donc si $9\,|\,u_n$ *alors* $9\,|\,u_{n+1}$

donc d'après le principe de récurrence $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ 9\,|\,u_n$

EXO51 : Montrer qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut jamais être la somme de trois carrés parfaits.

I.S : D'après le tableau suivant (les carrés modulo 8)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

on voit que $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^2 \equiv 0$, 1 *ou* 4 $[8]$ *et donc*

$(\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3)$; $a^2+b^2+c^2 \equiv 0$,1 ,2 ,3 ,4 ,5 *ou* 6 $[8]$

et donc ne peut jamais être congru à 7 *modulo* 8

EXO52 : Montrer que $(\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2)$; $30 \mid mn(m^4-n^4)$

I.S : Il est évident que $2 \mid mn(m-n)$ *car si* m *et* n *sont impairs alors* $m-n$ *est pair.*

puisque $(\forall x \in \mathbb{Z})$; $x^2 \equiv 0$ *ou* 1 $[3]$ *donc* $3 \mid mn(m^2-n^2)$

enfin si 5 *ne divise ni* m *ni* n *(* $m \wedge 5 = n \wedge 5 = 1$*) alors d'après le théorème de Fermat*

$m^4 \equiv 1$ $[5]$ *et* $n^4 \equiv 1$ $[5]$ *et donc* $m^4-n^4 \equiv 0$ $[5]$ *et par suite on a toujours* $5 \mid mn(m^4-n^4)$

et puisque $mn(m^4-n^4) = mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$ *et que* $2, 3$ *et* 5 *sont premiers entre eux deux à deux alors* $2 \times 3 \times 5 = 30 \mid mn(m^4-n^4)$

EXO53 : Montrer que pour tout triplet $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, si $9 \mid a^3+b^3+c^3$ alors $3 \mid abc$

I.S : Procédons par contraposé.

On a $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^2 \equiv 0;1$ *ou* 8 $[9]$ *et* $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^3 \equiv 0$ $[9]$ $\Leftrightarrow$ $n \equiv 0$ $[3]$

si 3 *ne divise pas* abc *(ne divise ni* a *ni* b *ni* c *) alors :*

$$a^3 \equiv 1 \text{ ou } 8 \ [9] \quad \text{et} \quad b^3 \equiv 1 \text{ ou } 8 \ [9] \quad \text{et} \quad c^3 \equiv 1 \text{ ou } 8 \ [9]$$

et donc dans ce cas, $a^3+b^3+c^3$ *ne peut pas être congru à* 0 *modulo* 9 *c'est-à-dire qu'il n'est pas divisible par* 9

EXO54 : Montrer que l'équation (E) : $x^2-2y^2+8z=3$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$

I.S : Si $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ *est une solution de l'équation* (E) *alors :*

. $x^2 = 3+2y^2-8z$ *est impair donc* x *est impair.*

. *Si* y *est pair alors* y^2 *est divisible par* 4 *et donc* $x^2 \equiv 3$ $[8]$ *ce qui est absurde car le carré d'un entier impair est congru à* 1 *modulo* 8 *et par suite* y *est impair.*

. *Posons* $y = 2k+1$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *alors on aura* $x^2 = 3-8z+8k^2+8k+2$ *et donc* $x^2 \equiv 5$ $[8]$ *ce qui est absurde aussi car* $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^2 \equiv 0, 1$ *ou* 4 $[8]$

en conclusion, l'équation (E) *ne peut admettre de solution dans* $\mathbb{Z}^3$

EXO55 : Déterminer les entiers naturels n tels que : $1163 | 8n+9$

I.S : Soit n un entier naturel tel que $1163 | 8n+9$

On a donc $(\exists k \in \mathbb{N})$; $8n+9=1163k$ soit que $3k \equiv 1 \quad [8]$ et donc $k \equiv 3 \quad [8]$ (on pourra utiliser le tableau de multiplication par 3 modulo 8 ou appliquer l'algorithme d'Euclide au couple $(8;3)$)

ainsi donc $(\exists k' \in \mathbb{N})$; $k=3+3k'$ et donc $8n+9=1163(3+3k')$

soit que $n=435+1163k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$ ou encore $n \equiv 435 \quad [1163]$

Réciproquement on vérifie que si $n \equiv 435 \quad [1163]$ alors $8n+9 \equiv 3489 \equiv 1163 \times 3 \equiv 0 \quad [1163]$

Les entiers cherchés sont ceux qui s'écrivent sous la forme $n=435+1163k$ avec $k \in \mathbb{N}$

EXO56 : Soient m et n deux entiers naturels.

Montrer que m^3+n^3+4 ne peut pas être le cube d'un entier naturel.

I.S : On vérifie que $(\forall a \in \mathbb{Z})$; $a^3 \equiv 0$ ou 1 ou $8 \quad [9]$

donc $(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2)$; $m^3+n^3+4 \equiv 2, 3, 4, 5$ ou $6 \quad [9]$ et par suite m^3+n^3+4 ne peut pas être congru ni à 0 ni à 1 ni à 8 modulo 9 et donc il ne peut pas être le cube d'un entier.

EXO57 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 3 \quad [12] \\ x \equiv 5 \quad [9] \end{cases}$

I.S : - remarquer que 12 et 9 ne sont pas premiers entre eux.

- Si x est une solution du système (S) alors d'après la première équation, x est divisible par 3 et donc d'après la deuxième équation 5 est divisible par 3 , ce qui est absurde.

Le système (S) n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{Z}$

EXO58 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S) ; $\begin{cases} 3x+2y \equiv 1 \quad [5] \\ 2x+4y \equiv 3 \quad [5] \end{cases}$

I.S : On a $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 4 \quad [5] \\ 2x+4y \equiv 3 \quad [5] \end{cases}$ (En sommant les deux membres du système)

donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 4 \quad [5] \\ x \equiv 1 \quad [5] \end{cases}$ (En substituant la valeur de y dans le deuxième membre)

donc l'ensemble des solutions du système (S) est $\{(1+5k, 4+5k') / (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}$

EXO59 : Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $u_n = 2^n - 3 \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ qui sont des multiples de 5

I.S : On a $2^3 \equiv 3 \ [5]$ *et* $2^4 \equiv 1 \ [5]$ *il suffit donc de prendre* $n = 4k+3 \ \left(k \in \mathbb{N}\right)$

EXO60 : Déterminer les chiffres x et y $\left(0 \le x, y \le 9\right)$ sachant que l'entier $\overline{11x1y}^{10}$ est divisible par 28

I.S : On a par hypothèse $10^4 + 10^3 + x \times 10^2 + 10 + y \equiv 0 \ [28]$ *, donc* y *est pair et* $16x + y + 6 \equiv 0 \ [28]$

- si $x = 0$ *alors* $28 \mid y+6$ *ce qui est impossible car* $y + 6 \le 15 \quad \left(0 \le y \le 9\right)$

- si $x = 1$ *alors* $28 \mid y+22$ *donc* $y = 6$

- si $x = 2$ *alors* $28 \mid y+10$ *ce qui est impossible car* $y+10 \le 19$

- si $x = 3$ *alors* $28 \mid y+26$ *donc* $y = 2$

et ainsi de suite jusqu'à $x = 9$

En conclusion on trouve que les seuls couples qui vérifient cette équation sont $\left(1;6\right)$ *et* $\left(2;3\right)$

EXO61 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \ [5]$

I.S : On a $x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \ [5] \iff \left(x-1\right)^2 \equiv 3 \ [5]$ *(la forme canonique)*

or $\left(\forall n \in \mathbb{Z}\right)$ *;* $n^2 \equiv 0$ *ou* $1 \ [5]$ *donc* 3 *n'est pas le carré d'un élément de* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(on dit que* 3 *n'est pas un résidu quadratique modulo* 5 *)*

et par suite l'équation $x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \ [5]$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}$

EXO62 : Montrer que $\left(\forall \left(a,b\right) \in \mathbb{Z}^2\right) \ ; \ 7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 7 \mid a \ \text{ et } \ 7 \mid b$

I.S : Procédons par contraposé et supposons que 7 *ne divise pas* a

Puisque $a^2 \equiv 1$ *ou* 2 *ou* $4 \ [7]$ *et* $b^2 \equiv 0$ *ou* 1 *ou* 2 *ou* $4 \ [7]$ *alors*

$a^2 + b^2 \equiv 1$ *ou* 2 *ou* 3 *ou* 4 *ou* 5 *ou* $6 \ [7]$ *et donc* 7 *ne divise pas* $a^2 + b^2$

donc si 7 *ne divise pas* a *ou* 7 *ne divise pas* b *alors* 7 *ne divise pas* $a^2 + b^2$

EXO63 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $\left(E\right) \ ; \ x^2 + y^2 = 7z^2$

I.S : - remarquons $\left(0,0,0\right)$ *est une solution triviale de* $\left(E\right)$

Si $\left(x,y,z\right) \in \mathbb{Z}^3$ *est une solution de* $\left(E\right)$ *différente de* $\left(0,0,0\right)$ *alors* $\left(E\right) \ ; \ x^2 + y^2 = 7z^2$

donc $7 \mid x^2 + y^2$ *et donc* $7 \mid x$ *et* $7 \mid y$ *on déduit alors que* $7^2 \mid x^2 + y^2$ *et donc* $7 \mid z^2$ *soit que* $7 \mid z$

et ainsi de suite on peut ramener l'équation $\left(E\right)$ *à la forme :* $x^2 + y^2 = 7z^2$ *avec* 7 *premier avec* x *et avec* y

dans ce cas on a $x^2 + y^2 \equiv 0 \ [7]$ *et donc* $\left(xy'\right)^2 \equiv 6 \ [7]$ *avec* y' *est le syétrique de* y *modulo* 7

chose qui est impossible car 6 *n'est pas un carré modulo* 7

(on dit que 6 *n'est pas un résidu quadratique modulo* 7 *)*

En conclusion l'équation (E) *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}^3$ *autre que* $(0,0,0)$

EXO64 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier positif n tel que : $7 \mid 2^n + 1$

I.S : On a $2^3 \equiv 1 \; [7]$

donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}$; $2^{3k} \equiv 1 \; [7]$, $2^{3k+1} \equiv 2 \; [7]$ *et* $2^{3k+2} \equiv 4 \; [7]$

puisque tout entier naturel n *s'écrit sous l'une des trois formes :* $n = 3k$, $n = 3k+1$ *ou* $n = 3k+2$

alors pour tout entier naturel n, $2^n + 1 \equiv 2$, 3 *ou* $5 \; [7]$ *et donc* 7 *ne divise pas* $2^n + 1$

EXO65 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier n tel que $n^3 + 7$ soit un carré parfait.

I.S : Supposons qu'il existe un entier n *et un entier* a *tel que* $n^3 + 7 = a^2$

Si n *est pair , on a d'une part* a *est impair (car* $n^3 + 7$ *est impair) donc* $a^2 \equiv 1 \; [8]$

et d'autre part $n^3 + 7 \equiv 7 \; [8]$ *car* $n^3 \equiv 0 \; [8]$ *ce qui est absurde.*

Si n *est impair , on a d'une part* a *est pair (car* $n^3 + 7$ *est pair) donc* $a^2 \equiv 0$ *ou* $1 \; [3]$

et d'autre part $n^3 + 7 \equiv 2 \; [3]$ *car* $n^3 \equiv 1 \; [3]$ *ce qui est encore absurde.*

EXO66 : Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que : $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ soit un multiple de 5

I.S : On a $2^4 \equiv 1 \; [5]$ *donc* $(\forall k \in \mathbb{N})$; $2^{4k} \equiv 1 \; [5]$

puisque tout entier n *s'écrit sous l'une des formes suivantes :* $4k$, $4k+1$, $4k+2$ *ou* $4k+3$ *alors :*

si $n = 4k$ *alors* $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 1 \; [5]$

si $n = 4k+1$ *alors* $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{8k+1=3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 0 \; [5]$

si $n = 4k+2$ *alors* $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 0 \; [5]$

si $n = 4k+3$ *alors* $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 3 \; [5]$

donc $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ *soit un multiple de* 5 *lorsque* $n \equiv 1 \; [5]$ *ou* $n \equiv 2 \; [5]$

EXO67 : Déterminer tous les entiers naturels a tels que $10 \mid a^{10} + 1$

I.S : Soit r le reste de la division euclidienne de a par 10 : $a = 10q + r$ et $0 \le r < 10$

on a $a^{10} + 1 \equiv r^{10} + 1 \; [10]$ donc $10 \mid a^{10} + 1$ si et seulement si $10 \mid r^{10} + 1$

or pour $0 \le r \le 9$ les seuls valeurs qui vérifient $10 \mid r^{10} + 1$ sont $r = 3$ *et* $r = 7$

et par suite les entiers naturels a qui vérifient $10 \mid a^{10} + 1$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $3 + 10k$ ou la forme $7 + 10k$ $(k \in \mathbb{N})$

EXO68 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2-2x+2=0$

I.S : On a $(E) \Leftrightarrow x^2-2x+2\equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0$

5 *étant un nombre premier, donc* $(E) \Leftrightarrow x+1=0$ *ou* $x+2=0 \Leftrightarrow x=4$ *ou* $x=3$

et par suite dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *l'ensemble des solution de l'équation* (E) *est* $\{3;4\}$

Rappel : si p *est premier alors* $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times\right)$ *est un corps et donc n'admet pas de diviseur de* 0

EXO69 : Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ tel que $ad-bc=1$

Montrer que $\left(\forall (m,n)\in\mathbb{Z}^2\right)$; $(am+bn)\wedge(cm+dn)=m\wedge n$

I.S : - tout diviseur commun à m *et* n *est un diviseur commun à* $am+bn$ *et* $cm+dn$

- Soit δ *un diviseur commun à* $am+bn$ *et* $cm+dn$

on a $m=d(am+bn)-b(cm+dn)$ *et* $n=c(am+bn)-a(cm+dn)$

donc δ *est aussi un diviseur commun à* m *et* n *et par suite le plus grand diviseur commun à* $am+bn$ *et* $cm+dn$ *est le plus grand diviseur commun à* m *et* n

EXO70 : Montrer que $(\forall n\in\mathbb{Z})$; $(21n+4)\wedge(14n+3)=1$

I.S : Tout diviseur commun à $21n+4$ *et* $14n+3$ *divise aussi* $3(14n+3)-2(21n+4)=1$

et donc égal à ± 1 *, par conséquent le plus grand diviseur commun est* 1

EXO71 : Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $(n^3+2n)\wedge(n^4+3n^2+1)=1$

I.S : Par application de l'algorithme d'Euclide au couple $(n^4+3n^2+1;n^3+2n)$ *on obtient :*

$n^4+3n^2+1=n(n^3+2n)+n^2+1$ *et* $n^3+2n=n(n^2+1)+n$ *puis* $n^2+1=n\times n+1$

donc $(n^3+2n)\wedge(n^4+3n^2+1)=(n^3+2n)\wedge(n^2+1)=(n^2+1)\wedge n=n\wedge 1=1$

ou encore que le dernier reste non nul est 1

EXO72 : Montrer que pour tout entiers a *et* b on a : $(a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$

I.S : Posons $\delta=a\wedge b$ *, il existe alors deux entiers* A *et* B *tels que* $a=\delta A$ *et* $b=\delta B$ *et* $A\wedge B=1$

et par suite $(a^2+b^2)\wedge ab=\left(\delta^2(A^2+B^2)\right)\wedge(\delta^2 AB)=\delta^2\left((A^2+B^2)\wedge AB\right)$

Si p *est un diviseur commun à* A *et* B *alors* $p\mid A(A^2+B^2)-B(AB)=A^3$

donc $p\mid A$ *et puisque* $p\mid A^2+B^2$ *alors* $p\mid B^2$ *et donc* $p\mid B$

or $A\wedge B=1$ *donc* $p=1$ *et par suite* $(a^2+b^2)\wedge ab=\delta^2$ *(car* $(A^2+B^2)\wedge AB=1$*)*

EXO73 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants : $(I) : \begin{cases} x+y=56 \\ x \vee y=105 \end{cases}$, $(II) : \begin{cases} x \wedge y = x-y \\ x \vee y=72 \end{cases}$

$(III) : \begin{cases} (2x+y)(5x+2y)=1620 \\ xy=3(x \vee y) \end{cases}$

*I.S : * On suppose que* $x \leq y$ *. On a* $x|105$ *et* $2x \leq 56$ *donc* $x|105$ *et* $x \leq 28$

et par suite $x=21$ *et* $y=35$

les couples solutions du système (I) *sont donc* $(21;35)$ *et* $(35;21)$

** Soit* $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ *un couple solution du système* (II) *si il existe.*

posons $d = x \wedge y$ *il existe donc* $(X,Y) \in \mathbb{N}^2$ *tel que :* $x=dX$, $y=dY$ *et* $X \wedge Y=1$

donc $\begin{cases} X-Y=1 \\ dXY=72 \end{cases}$ *ou encore* $\begin{cases} X=Y+1 \\ dY(Y+1)=72 \end{cases}$ *et par suite* Y *et* $Y+1$ *sont des diviseurs de* 72

ainsi donc les valeurs possibles de Y *sont :* 1 , 2 , 3 *et* 8 *et les valeurs possibles de* X *sont :*
2 , 3 , 4 *et* 9

Réciproquement le tableau suivant permet trouver les correspondances et donc les couples solutions :

X	*2*	*3*	*4*	*9*
Y	*1*	*2*	*3*	*8*
d	*36*	*12*	*6*	*1*

les couples solutions du système sont donc : $(72;36)$, $(36;21)$, $(24;18)$ *et* $(9;8)$

** On a* $xy=3(x \vee y)$ *donc* $x \wedge y=3$

et par suite il existe donc $(X,Y) \in \mathbb{N}^2$ *tel que :* $x=3X$, $y=3Y$ *et* $X \wedge Y=1$

et donc $(III) \Leftrightarrow \begin{cases} (2X+Y)(5X+2Y)=180 \\ X \wedge Y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=180 \\ u \wedge v=1 \end{cases}$ *avec* $u=2X+Y$ *et* $v=5X+2Y$

puisque $180=2^2 \times 3^2 \times 5$ *et que* $u \geq 3$ *et* $v \geq 7$ *alors* $(u,v)=(9;20)$ *et donc* $(x,y)=(6;15)$

EXO74 : Montrer que $(2^a-1) \wedge (2^b-1) = 2^{a \wedge b}-1$ pour tout couple (a,b) d'entiers naturels.

I.S : *posons* $d=a \wedge b$ *et* $\delta=(2^a-1) \wedge (2^b-1)$

on a d'une part il existe deux entiers a' *et* b' *tels que* $a=da'$ *et* $b=db'$

donc $2^a-1=2^{da'}-1=(2^d-1) \cdot A$ $(A \in \mathbb{Z})$ *et donc* $2^d-1|2^a-1$

de la même manière on montre que $2^d-1|2^b-1$ *donc* $2^d-1|\delta$

et d'autre part il existe deux entiers u *et* v *tels que* $d=au+bv$ *et deux entiers* A *et* B *tels que*
$2^a-1=\delta A$ *et* $2^b-1=\delta B$ *et donc* $2^d=2^{au+bv}=(2^a)^u \cdot (2^b)^v=(1+\delta A)^u \cdot (1+\delta B)^v=1+\delta C$ *(avec* C *un entier) soit que* $2^d-1=\delta C$ *et donc* $\delta|2^d-1$ *et par suite* $\delta=d$

EXO75 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 429x \equiv 1\quad [700]$

I.S : Par application de l'algorithme d'Euclide au couple $(700;429)$ *on déduit que* 700 *et* 429 *sont premiers entre eux et qu'on a l'identité* $700\times19+429\times(-31)=1$ *et donc* $429\times(-31)\equiv1\quad[700]$

et par suite $(E)\ \Leftrightarrow\ (-31)\times429x\equiv(-31)\quad[700]$ *ou encore* $x\equiv669\quad[700]$

l'ensemble des solutions de (E) *est donc :* $\{669+700k\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

EXO76 : Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad;\quad (n+1)\,|\,C_{2n}^{n}$

I.S : On a $(n+1)C_{2n}^{n+1}=(n+1)\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n)!}=n\dfrac{(2n)!}{(2n-n)!(n)!}=nC_{2n}^{n}$

donc $(n+1)\,|\,nC_{2n}^{n}$ *et puisque* n *et* $(n+1)$ *sont premiers entre eux, alors* $(n+1)\,|\,C_{2n}^{n}$

EXO77 : Trouver tous les entiers naturels n tels que $65\,|\,4n^2+1$

I.S : On a $65\,|\,4n^2+1\ \Leftrightarrow\ 5\,|\,4n^2+1$ *et* $13\,|\,4n^2+1$

or $5\,|\,4n^2+1\ \Leftrightarrow\ 4n^2\equiv4\quad[5]\ \Leftrightarrow\ n^2\equiv1\quad[5]\ \Leftrightarrow\ n\equiv1\quad[5]$ *ou* $n\equiv4\quad[5]$

de même $13\,|\,4n^2+1\ \Leftrightarrow\ 4n^2\equiv12\quad[13]\ \Leftrightarrow\ n^2\equiv3\quad[13]\ \Leftrightarrow\ n\equiv4\quad[13]$

ainsi donc $65\,|\,4n^2+1$ *entraine que* $\begin{cases} n\equiv4 & [5]\\ n\equiv4 & [13]\end{cases}$ *ou* $\begin{cases} n\equiv1 & [5]\\ n\equiv4 & [13]\end{cases}$

le premier système nous donne $n\equiv4\quad[65]$ *car* $5\wedge13=1$

pour le deuxième système, l'algorithme d'Euclide appliqué au couple $(13;5)$ *nous donne l'égalité* $13\times2+(-5)\times5=1$ *et donc* $n\equiv1\times2\times13+4\times(-5)\times5\quad[65]$ *c'est-à-dire* $n\equiv56\quad[65]$

En conclusion $n\equiv4\quad[65]$ *ou* $n\equiv56\quad[65]$

EXO78 : Déterminer suivant les valeurs de $k\in\mathbb{Z}$ le pgcd de $(2k-1)$ *et* $(9k+4)$

I.S : On a $9k+4=4(2k-1)+k+8$ *et* $2k-1=2(k+8)-17$

donc d'après le théorème d'Euclide, $(2k-1)\wedge(9k+4)=(2k-1)\wedge(k+8)=(k+8)\wedge17$

ainsi donc le pgcd de $9k+4$ *et* $2k-1$ *est un diviseur de* 17 *et donc égal à* 1 *ou* 17

si $17\,|\,k+8$ *c'est-à-dire* $k\equiv9\quad[17]$ *alors* $(2k-1)\wedge(9k+4)=17$

si non $(2k-1)\wedge(9k+4)=1$

EXO79 : Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ tel que $a\wedge b=c\wedge d=1$

Montrer que : $(ac)\wedge(bd)=(a\wedge d)(b\wedge c)$

I.S : Posons $\alpha=a\wedge d$ *et* $\beta=b\wedge c$

On a alors $a=\sim A$, $d=\sim D$, $b=\quad B$ *et* $c=\beta C$ *avec* $A\wedge D=B\wedge C=1$

donc $(ac)\wedge(bd)=\alpha\beta\left[(AC)\wedge(BD)\right]$

Soit p *est un diviseur premier commun à* AC *et* BD

Si p *divise* A *alors* p *ne divise pas* B *car* $a\wedge b=1$ *et puisque* p *divise* BD *alors* p *divise* D *et donc nécessairement* $p=1$ *car* $A\wedge D=1$ *et par suite* $AC\wedge BD=1$ *ce qu'il fallait démontrer.*

EXO80 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on définit les entiers a_n et b_n par : $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$

Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

I.S *: On a pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ *et* $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$

donc $a_n^2-2b_n^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\times\left(1-\sqrt{2}\right)^n=(-1)^n$ *et par suite d'après le théorème de Bézout* $a_n\wedge b_n=1$

EXO81 : Soit n *et* d deux entiers naturels non nuls.

Montrer que si : $d\mid n$ et $nd+1\mid n^2+d^2$ alors $n=d^3$

I.S : - On pose : $n=dq$ *où* q *est un entier naturel non nul.*

On a par hypothèse $nd+1\mid n^2+d^2$ *donc* $d^2q+1\mid d^2\left(q^2+1\right)$

et puisque $\left(d^2q+1\right)-d^2q=1$ *alors d'après le théorème de Bézout,* d^2 *et* d^2q+1 *sont premier entre eux.*

et donc d'après le théorème de Gauss, $d^2q+1\mid q^2+1$

- On a : $q^2+1=d^2q+1-q\left(d^2-q\right)$ *donc* $q\dfrac{d^2-q}{d^2q+1}=1-\dfrac{q^2+1}{d^2q+1}$ *qui est un entier naturel*

puisque $d^2q+1\mid q^2+1$ *; or* $0<\dfrac{d^2}{d^2q+1}<1$ *et* $0<\dfrac{q}{d^2q+1}<1$ *donc* $-1<\dfrac{d^2-q}{d^2q+1}<1$ *et puisque c'est un entier alors* $\dfrac{d^2-q}{d^2q+1}=0$ *soit que* $q=d^2$ *et par suite* $n=d^3$

EXO82 : Quel est le reste de la division euclidienne de 2792^{217} par 5 ?

I.S : On a $2792\equiv 2\ [5]$ *donc* $2792^{217}\equiv 2^{217}\ [5]$

d'après le petit théorème de Fermat , puisque 5 *est un nombre premier et qu'il ne divise pas* 2 *(ou encore que* $2\wedge 5=1$ *) on a :* $2^4\equiv 1\ [5]$ *et puisque* $217\equiv 1\ [4]$ *(ou que* $217=4\times 54+1$*)*

alors $2^{217}\equiv 2\ [5]$ *et donc* $2792^{217}\equiv 2\ [5]$ *ce qui veut dire que* $(\exists q\in\mathbb{N})$ *;* $2792^{217}=5q+2$

par conséquent, le reste de la division euclidienne de 2792^{217} *par* 5 *est* 2

EXO83 : Déterminer tous les entiers premiers p tel que $p\mid 2^p+1$

I.S : - si $p=2$ *alors* $2^p+1=5$ *et* 2 *ne divise pas* 5 *et si* $p=3$ *alors* $2^p+1=9$ *et* $3\mid 9$

Pour $p>3$ *, d'après le petit théorème de Fermat* $p\mid 2^p-2$ *donc si* $p\mid 2^p+1$

alors $p\mid\left(2^p+1\right)-\left(2^p-2\right)=3$ *ce qui est impossible*

En conclusion seul $p=3$ *vérifie cette propriété.*

EXO84 : Soient p *et* q deux entiers premiers distincts.

Montrer que : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1 \quad [pq]$

I.S : Puisque p *et* q *sont premiers distincts donc d'après le petit théorème de Fermat*
$p^{q-1}\equiv 1 \ [q]$ *et* $q^{p-1}\equiv 1 \ [p]$ *de plus* $q^{p-1}\equiv 0 \ [q]$ *et* $p^{q-1}\equiv 0 \ [p]$ *donc* $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1 \ [q]$ *et* $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1 \ [p]$, *par suite* $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1 \ [pq]$ *puisque* $p\wedge q=1$

EXO85 : Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times 23^{44}$ par 7

I.S : 7 *est un nombre premier qui ne divise ni* 19 *ni* 23 *donc d'après le petit théorème de Fermat,*
$19^{6}\equiv 1 \ [7]$ *et* $23^{6}\equiv 1 \ [7]$ *donc* $19^{54}\equiv 1 \ [7]$ *et* $23^{42}\equiv 1 \ [7]$ *, par suite* $19^{54}\times 23^{42}\equiv 1 \ [7]$
et donc $19^{54}\times 23^{42}=19^{52}\times 23^{41}\times 19^{2}\times 23\equiv 1 \ [7]$ *or* $19^{2}\times 23=8303\equiv 1 \ [7]$ *donc* $19^{52}\times 23^{44}\equiv 1 \ [7]$

En conclusion le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times 23^{44}$ *par* 7 *est* 1

EXO86 : Etude d'un contre-exemple de la réciproque du petit théorème de Fermat.

Pour $n=1729$, montrer que pour tout entier a , si $a\wedge n=1$ alors $a^{n-1}\equiv 1 \ [n]$

I.S : - Remarquons que $1729=7\times 13\times 17$ *donc* n *n'est pas premier.*
- Puisque $a\wedge n=1$ *alors* $a\wedge 7=1$, $a\wedge 13=1$ *et* $a\wedge 17=1$ *donc d'après le petit théorème de Fermat*
$a^{6}\equiv 1 \ [7]$, $a^{12}\equiv 1 \ [13]$ *et* $a^{16}\equiv 1 \ [17]$ *, par suite* $a^{48}\equiv 1 \ [7]$, $a^{48}\equiv 1 \ [13]$ *et* $a^{48}\equiv 1 \ [17]$
(48 étant le plus petit commun multiple de 6 , 12, et 16) et donc $a^{48}\equiv 1 \ [7\times 13\times 17]$ *car 7, 13 et 17 sont premiers entre eux deux à deux.*
et puisque $n-1=1728=48\times 36$ *alors* $a^{n-1}\equiv 1 \ [1729]$
ainsi donc on a pour tout entier a *, si* $a\wedge n=1$ *alors* $a^{n-1}\equiv 1 \ [n]$ *mais* n *n'est pas premier ce qui montre que la réciproque du petit théorème de Fermat n'est pas vraie.*

EXO87 : Montrer que l'équation (E) ; $x^2+20x+74\equiv 0 \ [169]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

I.S : Supposons que l'équation (E) *admet une solution* $x\in\mathbb{Z}$
donc $x^2+20x+74\equiv 0 \ [169]$ *on en déduit que* $x^2+20x+74\equiv 0 \ [13]$ *car* $169=13^2$
donc $x^2-6x+9\equiv 0 \ [13]$ *ou encore que* $(x-3)^2\equiv 0 \ [13]$
puisque 13 *est un nombre premier alors* $(x-3)\equiv 0 \ [13]$ *soit que il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* $x=3+13k$
ainsi donc on aura $169\,|\,(3+13k)^2+20(3+13k)+74$ *donc* $169\,|\,169^2+2\cdot 169k+143$
soit que $169\,|\,143$ *ce qui est absurde.*
En conclusion l'équation (E) *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}$

EXO88 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $N = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, N n'st pas un carré parfait.

I.S : On a $N = 5(n^2 + 4n + 6)$ *donc* $5 \mid N$

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $N = 5(n_0^2 + 4n_0 + 6)$ *soit un carré parfait*

puisque $5 \mid N$ *alors nécessairement* $5^2 \mid N$ *donc* $5 \mid n_0^2 + 4n_0 + 6$ *soit que* $n_0^2 + 4n_0 + 6 \equiv 0 \quad [5]$

ou encore que $n_0^2 - n_0 + 1 \equiv 0 \quad [5]$ *ce qui est absurde car* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n^2 - n + 1 \equiv 1, 2\, ou\, 3 \quad [5]$

EXO89 : Soit n un entier supérieur ou égal à 3

Montrer que les $(n-1)$ entiers consécutifs $n! + k$ avec $(2 \le k \le n)$ ne sont pas premiers.

I.S : On remarque que pour $(2 \le k \le n)$, *on a :* $k \mid n!$ *donc* $k \mid n! + k$

donc les entiers $n! + k$ *sont composés.*

EXO90 : Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ on a :

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ et (ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

I.S : Soient $a = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\alpha_i}$, $b = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\beta_i}$ *et* $c = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\lambda_i}$ *les décompositions en facteurs premiers respectives de* $a, b\, et\, c$ *(les* α_i , β_i *et* λ_i *étant des entiers naturels éventuellement nuls)*

(i) On a $b \vee c = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{sup(\beta_i, \lambda_i)}$ *donc* $a \wedge (b \vee c) = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{inf(\alpha_i, sup(\beta_i, \lambda_i))} = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{sup(inf(\alpha_i, \beta_i); inf(\alpha_i, \lambda_i))}$

et par suite $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *car* $inf\left(\alpha_i ; sup(\beta_i, \lambda_i)\right) = sup(inf(\alpha_i, \beta_i); inf(\alpha_i, \lambda_i))$

(ii) On effectue le même raisonnement avec : $sup\left(\alpha_i ; inf(\beta_i, \lambda_i)\right) = inf(sup(\alpha_i, \beta_i); sup(\alpha_i, \lambda_i))$

EXO91 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^2 + x + 4 = 0$

I.S : On a : $x^2 + x + 4 \equiv 0 \quad [17] \Leftrightarrow x^2 + 18x + 4 \equiv 0 \quad [17] \Leftrightarrow (x+9)^2 - 9 \equiv 0 \quad [17]$

donc $(E) \Leftrightarrow (x+6)(x+12) \equiv 0 \quad [17]$ *et puisque* 17 *est un nombre premier,*

alors $(E) \Leftrightarrow x + 6 \equiv 0 \quad [17]$ *ou* $x + 12 \equiv 0 \quad [17]$ *et par suite*

$(E) \Leftrightarrow x \equiv 11 \quad [17]$ *ou* $x \equiv 5 \quad [17]$

En conclusion : l'ensemble des solutions est : $\{5, 11\}$

EXO92 : Montrer que pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$ il existe un entier $y \in \mathbb{Z}$ et un nombre premier p tel que

$x^2 + x + 1 = yp$

I.S : - si $x^2 + x + 1$ est premier alors on prend $y = 1$ et $p = x^2 + x + 1$

- si $x^2 + x + 1$ n'est pas premier alors il existe au moins un nombre premier p qui le divise et donc il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 + x + 1 = yp$

EXO93 : Montrer que le nombre $\overline{10101}^b$ écrit dans la base b ($b \geq 2$) est un nombre composé.

I.S : On a $\overline{10101}^b = 1 + b^2 + b^4 = \left(b^2+1\right)^2 - b^2 = \left(b^2+b+1\right)\left(b^2-b+1\right)$

donc c'est un nombre composé car $b^2 + b + 1 \geq b^2 - b + 1 \geq 2$

EXO94 : Soit $a = 160398576$

(i) Déterminer le nombre de diviseurs entiers naturels de a

(ii) Calculer la somme $\sigma(a)$ de ces diviseurs.

I.S : (i) la décomposition en facteurs premiers de a est : $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13^5$

les diviseurs positifs de a sont donc les entiers naturels qui s'écrivent sous de la forme :

$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 13^\lambda$ *avec* $0 \leq \alpha \leq 4$, $0 \leq \beta \leq 3$ *et* $0 \leq \lambda \leq 5$

il y'a donc autant de diviseurs de a que d'éléments de l'ensemble

$K = \{0;1;2;3;4\} \times \{0;1;2;3\} \times \{0;1;2;3;4;5\}$ *donc le nombre de diviseurs de a est :* $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$

(ii) On a : $\sigma(a) = \sum_{(\alpha,\beta,\lambda)\in K} 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 13^\lambda = \left(\sum_{0\leq\alpha\leq 4} 2^\alpha\right)\left(\sum_{0\leq\beta\leq 3} 3^\beta\right)\left(\sum_{0\leq\lambda\leq 5} 13^\lambda\right) = \frac{2^5-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{13^6-1}{13-1}$

EXO95 : Soit p un nombre premier. (Le petit théorème de Fermat)

(i) Montrer que pour tout entier $k \in \{1;2;..........;p-1\}$ on a : $p \mid C_p^k$

(ii) En déduire que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on a : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad [p]$

(iii) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^p \equiv n \quad [p]$

(iv) En déduire que si p ne divise pas n alors $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

I.S : (i) Pour tout $k \in \{1;2;..........;p-1\}$ on a : $C_p^k = \frac{p}{k}\cdot\frac{(p-1)!}{(k-1)!\cdot(p-k)!}$ *donc* $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$

donc $p \mid kC_p^k$ et puisque $k \wedge p = 1$ d'après le théorème de Gauss, $p \mid C_p^k$

(ii) On a : $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{k=p-1} C_p^k a^{p-k} b^k$

et puisque p divise les C_p^k pour $k \in \{1;2;..........;p-1\}$ alors $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad [p]$

(iii) Pour $p = 2$ le résultat est vrai et supposons que p est premier impair.

**Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$*

- pour $n = 0$ la proposition est vraie

- Supposons que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre n

on a alors $(n+1)^p \equiv n^p + 1^p \quad [p]$ *d'après (ii)*

et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $(n+1)^p \equiv n+1 \ [p]$

donc d'après le principe de récurrence (r) *:* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad n^p \equiv n \quad [p]$

** Pour* n *un entier strictement négatif, on a d'après* (r) *,* $\quad (-n)^p \equiv -n \quad [p]$ *car* $-n \in \mathbb{N}$

et donc $-n^p \equiv -n \quad [p]$ *car* p *est impair et donc* $n^p \equiv n \quad [p]$

En conclusion : $\quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \ ; \ n^p \equiv n \quad [p]$

(iv) Si p *ne divise pas* n *alors* $n \wedge p = 1$ *et d'après le théorème de Bézout,*

$(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) \quad ; \quad un + vp = 1$ *soit que* $(\exists u \in \mathbb{Z}) \ ; \ un \equiv 1 \quad [p]$

(n *est inversible dans le groupe* $\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right)^*, \times \right)$ *)*

puisque $n^p \equiv n \quad [p]$ *alors* $u \cdot n \cdot n^{p-1} \equiv u \cdot n \quad [p]$ *soit que* $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *et on retrouve ici le petit théorème de Fermat.*

EXO96 : Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ ; \ n^7 \equiv n \quad [42]$

I.S : On remarque que $\quad 42 = 7 \times 3 \times 2$

D'après le petit théorème de Fermat, on a : $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ ; \ n^7 \equiv n \quad [7] \quad , \ n^3 \equiv n \quad [3]$ *et* $n^2 \equiv n \quad [2]$

de plus $n^7 = (n^3)^2 \times n \equiv n \quad [3]$ *et* $n^7 = (n^2)^3 \times n \equiv n \quad [2]$

ainsi donc $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ ; \ n^7 \equiv n \quad [7] \ , \ n^7 \equiv n \quad [3]$ *et* $n^7 \equiv n \quad [2]$ *et puisque* $2, 3$ *et* 7 *sont premiers entre eux deux à deux (tous premiers distincts) alors* $n^7 \equiv n \quad [42]$

EXO97: Montrer que l'équation $(E) \ ; \ 4xy - x - y = z^2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

I.S : Si $(x,y,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *est solution de l'équation* (E) *alors* $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$

et puisque $4x - 1 \geq 3$ *et que* $4x - 1 \equiv 3 \quad [4]$ *alors il admet un diviseur premier* p *de la forme* $4k+3$

ainsi donc $(2z)^2 \equiv -1 \quad [p]$ *et par suite* $(2z)^{p-1} = \left((2z)^2 \right)^{2k+1} \equiv -1 \quad [p]$

or p *ne divise pas* $(2z)$ *donc d'après le P.T.F* $\quad (2z)^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *ce qui est absurde.*

EXO98 : Montrer que $24 \mid p^2 - 1$ pour tout entier p premier supérieur ou égal à 5

I.S : D'après le théorème de Fermat on a : $p^2 \equiv 1 \quad [3]$ *car* $p \geq 5 \ , \ 3 \wedge p = 1$ *et* 3 *est premier.*

p *étant impair donc* $p^2 \equiv 1 \quad [8]$ *et par suite* $3 \mid p^2 - 1$ *et* $8 \mid p^2 - 1$

donc d'après le théorème de Gauss puisque $3 \wedge 8 = 1$ *, on a :* $3 \cdot 8 = 24 \mid p^2 - 1$

EXO99 : Montrer que les entiers suivants sont composés : (i) $(n\in\mathbb{Z})$; n^4-20n^2+4

(ii) $(n\geq 2)$; n^4+4^n (iii) $(a\geq 2 \text{ et } b\geq 2)$; a^4+4b^4

I.S : (i) On a : $n^4-20n^2+4=\left(n^2-4n-2\right)\left(n^2+4n-2\right)$ *de plus* $n^2+4n-2=\left(n+2\right)^2-6$ *et*

$n^2-4n-2=\left(n-2\right)^2-6$ *ne peuvent être égaux ni à* 1 *ni* -1

(ii) Si n *est pair alors* $4|n^4+4^n$

Si n *est impair , posons* $n=2k+1$ *avec* $k\geq 1$ *et donc*

$n^4+4^n=\left(n^2-2^{k+1}n+2^n\right)\left(n^2+2^{k+1}n+2^n\right)$ *, si* n^4+4^n *est premier alors* $n^2+2^{k+1}n+2^n=n^4+4^n$

et $n^2-2^{k+1}n+2^n$ *=1 car* $n^2-2^{k+1}n+2^n<n^2+2^{k+1}n+2^n$

et donc $\left(n^2+2^{k+1}n+2^n\right)+\left(n^2-2^{k+1}n+2^n\right)=n^4+4^n+1$ *soit que* $n^4-2n^2+1=2^{n+1}-4^n$

on aura alors $\left(n^2-1\right)^2=n^4-2n^2+1=2^{n+1}-4^n=2^{n+1}\left(1-2^{n-1}\right)<0$ *ce qui est absurde.*

(iii) On a $a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2\right)^2-4a^2b^2=\left(\left(a+b\right)^2+b^2\right)\left(\left(a-b\right)^2+b^2\right)$

de plus $\left(a+b\right)^2+b^2\geq\left(a-b\right)^2+b^2\geq b^2\geq 4$ *et donc* a^4+4b^4 *est un entier composé.*

EXO100 : Montrer que : $20801|20^{15}-1$

I.S : - Remarquer que $20801=11\times 31\times 61$ *et que* $11,31$ *et* 61 *sont des nombres premiers.*

- On a : $2^5\equiv -1\ [11]$ *et* $10^5\equiv(-1)^5\equiv -1\ [11]$ *donc* $20^5\equiv 1\ [11]$ *et par suite* $20^{15}\equiv 1\ [11]$

de même on a $20\equiv -11\ [31]$ *donc* $20^2\equiv 121\equiv -3\ [31]$ *et donc*

et par suite $20^{15}\equiv 2^5\equiv 1\ [31]$

enfin nous avons $3^4\equiv 20\ [61]$ *et d'après le P.T.F* $3^{60}\equiv 1\ [61]$ *donc* $20^{15}\equiv\left(3^4\right)^{15}\equiv 1\ [61]$

ainsi donc $11|20^{15}-1$, $31|20^{15}-1$ *et* $61|20^{15}-1$ *et puisque* $11,31$ *et* 61 *sont premiers distincts donc premiers entre eux deux à deux alors d'après le T.G* $11\cdot 31\cdot 61|20^{15}-1$

EXO101 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (E) ; $5x+3y+15z=2$

I.S : En fixant $z\in\mathbb{Z}$ *on se ramène à l'équation* (F) ; $5x+3y=2-15z$

puisque les entiers 3 *et* 5 *sont premiers entre eux et que* $(-1,2)$ *est une solution particulière de l'équation* $5x+3y=1$ *alors* $(-2+15z,4-30z)$ *est une solution particulière de* (F)

et par suite la solution générale de (F) *est* $(-2+15z+3k,4-30z-5k)$ *avec* k *variant dans* $\mathbb{Z}$

et donc la solution générale de l'équation (E) *est* $(-2+15z+3k,4-30z-5k,z)$ *avec* (z,k) *variant dans* $\mathbb{Z}^2$

EXO102 : On considère la suite d'entiers $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0=1, \quad a_1=2$

et la relation de récurrence $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) \quad ; \quad a_{n+2}=\left(n+3\right)a_{n+1}-\left(n+2\right)a_n$

(i) Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) \quad ; \quad a_n=\sum_{k=0}^{k=n} k\,!$

(ii) Déterminer tous les entiers n pour lesquels le terme entier a_n est un multiple de 11

I.S : (i) Pour tout entier naturel n *, posons* $b_n=a_{n+1}-a_n$

on a alors $b_{n+1}=\left(n+2\right)b_n$ *et donc* $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) \quad ; \quad b_n=\left(n+1\right)!$

or : $a_n-a_0=\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{k+1}-a_k=\sum_{k=0}^{k=n-1} b_k=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(k+1\right)!=\sum_{k=1}^{k=n} k\,!$ *et donc* *puisque* $a_0=1=0!$

(ii) Il est évident que : $\left(\forall k\geq 11\right) \quad ; \quad 11\,|\,k\,!$

ensuite on vérifie que $a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7$ *et* a_9 *ne sont pas des multiples de* 11 *mais que*

$11\,|\,a_4$ *et* $11\,|\,a_8$

de plus $9!+10!=9!\times 11$ *donc* $11\,|\,a_{10}$ *et par suite :* $11\,|\,a_n$ *pour* $n=4, \ n=8$ *et* $n\geq 10$

EXO103 : Soient m, n *et* a des entiers positifs tels que : $a>1$ *et* $m\leq n$

Montrer que si $a^m+1\,|\,a^n+1$ alors $m\,|\,n$

I.S : On remarque que : $a^n+1=a^{n-m}\left(a^m+1\right)-\left(a^{n-m}-1\right)$ *donc si* $a^m+1\,|\,a^n+1$ *alors* $a^m+1\,|\,a^{n-m}-1$

Soit $n=mq+r$ *avec* $0\leq r<m$ *la division euclidienne de* n *par* m

En appliquant la remarque successivement, on trouve que si $a^m+1\,|\,a^n+1$ *alors* $a^m+1\,|\,a^r+\left(-1\right)^q$

or $0\leq a^r+\left(-1\right)^q<a^m+1$ *(puisque* $0\leq r<m$*)* *donc nécessairement* $r=0$ *et donc* $m\,|\,n$

EXO104 : Pour n *et* k deux entiers positifs, on pose : $F\left(n,k\right)=\sum_{r=1}^{r=n} r^{2k-1}$

Montrer que $F\left(n,1\right)\,|\,F\left(n,k\right)$

I.S : On a $2F\left(n,1\right)=n\left(n+1\right)$ *et*

$$2F\left(n,k\right)=\sum_{r=1}^{r=n}\left[r^{2k-1}+\left(n+1-r\right)^{2k-1}\right]=\sum_{r=1}^{r=n}\left[r^{2k-1}-\left(r-n-1\right)^{2k-1}\right]=\sum_{r=1}^{r=n}\left(r-\left(r-n-1\right)\right)\left[.....\right]=\left(n+1\right)A$$

où A *est un entier.*

or on peut aussi écrire $2F\left(n,k\right)=2n^{2k-1}+\sum_{r=1}^{r=n-1}\left[r^{2k-1}-\left(r-n\right)^{2k-1}\right]=2n^{2k-1}+\sum_{r=1}^{r=n-1}\left[n\left(.........\right)\right]=nB$

où B *est un entier donc* $\begin{cases} n\,|\,2F\left(n,k\right) \\ \left(n+1\right)\,|\,2F\left(n,k\right) \end{cases}$ *et puisque* $n\wedge\left(n+1\right)=1$ *, alors* $n\left(n+1\right)\,|\,2F\left(n,k\right)$ *et donc*

$2F\left(n,1\right)\,|\,2F\left(n,k\right)$ *et par suite* $F\left(n,1\right)\,|\,F\left(n,k\right)$

EXO105 : Déterminer les entiers naturels ayant éxactement 16 diviseurs : $1 = d_1 < d_2 < .... < d_{16} = n$ et tel que $d_6 = 18$

I.S : Puisque n est un multiple de 18 alors sa décomposition en produit de facteurs premiers sera de la forme $n = 2^{\alpha} 3^{\beta} \prod_{i=1}^{i=N} p_i^{\lambda_i}$ avec $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$, $\lambda_i \geq 0$ et les entiers premiers $p_i \geq 5$

18 admet six diviseurs qui sont : $1, 2, 3, 6, 9$ *et* 18 et puisque tout diviseur de 18 est un diviseur de n et que $d_6 = 18$ alors $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$ *et* $d_6 = 18$

en particulier 4 ne divise pas n et donc $\alpha = 1$

Le nombre de diviseurs positifs de n étant 16 donc $2(\beta + 1) \prod_{i=1}^{i=N} (\lambda_i + 1) = 16$ soit que

$(\beta + 1) \prod_{i=1}^{i=N} (\lambda_i + 1) = 8$ et puisque $\beta + 1 \geq 3$ donc les seules possibilités sont $(\beta + 1 = 4 \text{ , } i = 1 \textit{ et } \lambda_1 + 1 = 2)$ ou $(\beta + 1 = 8 \text{ , } i = 1 \textit{ et } \lambda_1 + 1 = 1)$ soit que $(\beta = 3 \text{ , } i = 1 \textit{ et } \lambda_1 = 1)$ et donc $n = 2 \cdot 3^2 \cdot p$ avec p un nombre premier et $p \geq 19$ ou $(\beta = 7 \text{ , } i = 1 \textit{ et } \lambda_1 = 0)$ et donc $n = 2 \cdot 3^7$

EXO106 : L'entier positif $\overline{xyxyxy}$ à six chiffres écrit dans la base décimale est égal à cinq fois le produit de trois entiers impairs consécutifs. Déterminer ces trois entiers impairs.

I.S : Supposons que les trois entiers impairs consécutifs sont $(n-2), n$ *et* $(n+2)$

donc $\overline{xyxyxy} = 5n(n^2 - 4) = x10^5 + y10^4 + x10^3 + y10^2 + x10 + y = 37 \times 39 \times (5 \times 14x + 7y)$

donc $5 \mid 37 \times 39 \times (5 \times 14x + 7y)$ *et puisque* 5 *est premier avec* 37 *et avec* 39 *alors* 5 *est premier avec* 37×39 *et donc d'après le théorème de Gauss,* $5 \mid 5 \times 14x + 7y$ *et donc* $5 \mid 7y$ *et toujours d'après le théorème de Gauss (puisque* 5 *et* 7 *sont premiers entre eux) ,* $5 \mid y$ *soit que* $y = 5$ *puisque* $0 \leq y \leq 9$

en remplaçant dans l'écriture du début y *par sa valeur, on trouve* $(n-2)n(n+2) = 37 \times 39 \times (14x + 7)$

donc nécessairement $14x + 7 = 35$ *ou* $14x + 7 = 41$

l'équation $14x + 7 = 35$ *donne* $x = 2$ *tandis que* $14x + 7 = 35$ *ne donne aucune solution entière.*

Les trois entiers impairs et consécutifs sont donc : $35, 37$ *et* 39

EXO107 : Pour tout entier relatif n et tout entier $p > 1$ on pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^{k=n} k^p$

Montrer que si p est impair alors $n^2 \mid S_p(n)$

I.S : On a $n^p = S_p(n) - S_p(n-1)$

donc $S_p(0) - S_p(-1) = 0$, $S_p(-1) - S_p(-2) = (-1)^p$, $S_p(-2) - S_p(-3) = (-2)^p$ *,……..*

$S_p(-n) - S_p(-n-1) = (-n)^p$

soit que $-S_p(-n-1) = 0 + (-1)^p + (-2)^p + ... + (-n)^p = (-1)^p S_p(n)$ *puisque* p *est impair*

et donc $-S_p(-n) = (-1)^p S_p(n-1)$ *, soit que* $(-1)^{p+1} S_p(-n) = S_p(n-1) = S_p(n) - n^p$

soit que $S_p(n)+(-1)^p S_p(-n)=n^p$ *et donc* $S_p(n)-S_p(-n)=n^p$

ainsi donc n^p *est la seule puissance d'exposant impair dans* $S_p(n)$ *et toutes les autres puissances ont des exposants pairs. Donc* $n^2 \mid S_p(n)$ *puisque* $p>2$

EXO108 : Trouver tous les couples d'entiers positifs (x,y) qui vérifient : $7^x-3\times 2^y=1$

I.S : On remarque que les deux couples $(1;1)$ *et* $(2;4)$ *sont solutions du problème*

et que si $x>2$ *alors* $y>4$

Soit (x,y) *une solution du problème telle que* $x>2$ *et* $y>4$

on a $7^x-3\times 2^y=1 \Leftrightarrow 7^x-1=6\times 2^{y-1} \Leftrightarrow \dfrac{7^x-1}{7-1}=2^{y-1} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{k=x-1} 7^k=2^{y-1}$

ce qui donne $7^{x-2}(7+1)+7^{x-4}(7+1)+.........+(7+1)=2^{y-1}$

soit que $(7+1)\left(7^{x-2}+7^{x-4}+......+1\right)=2^{y-1}$ *et donc* $7^{x-2}+7^{x-4}+......+1=2^{y-4}$ $(*)$

Les deux membres de l'égalité $(*)$ *sont pairs, donc* $\dfrac{x}{2}$ *qui est le nombre de termes de la somme à gauche est pair et par suite* x *est divisible par* $2^2=4$

ainsi donc $(*) \Leftrightarrow \left(7^2+1\right)\left(7^{x-4}+7^{x-8}+.......+1\right)=2^{y-4}$

et par suite $7^2+1=50 \mid 2^{y-4}$ *ce qui est absurde car* 50 *n'est pas une puissance de* 2

En conclusion seules les deux couples $(1;1)$ *et* $(2;4)$ *vérifient l'égalité.*

EXO109 : Montrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2, le nombre complexe $z=\dfrac{2-i}{2+i}$ ne peut pas être racine n^{iemme} de 1

I.S : On remarque que $|z|=1$ *et supposons qu'il existe un entier* n *supérieur ou égal à* 2 *tel que :* $z^n=1$

On a donc $(2-i)^n=(2+i)^n=(2-i+2i)^n=\sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k}$

ainsi donc : $(2i)^n=(2-i)(a+ib)$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

ce qui implique en passant au carré du module que : $2^{2n}=5\left(a^2+b^2\right)$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

donc $5 \mid 2^{2n}$ *ce qui est absurde.*

EXO110 : Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul a possède la propriété P_n

si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $d_1, d_2,.........,d_k$ de $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{cases} \text{- les entiers naturels } d_1, d_2,.........et\ d_k \text{ sont distincts deux à deux.} \\ -\ a = \sum_{i=1}^{i=k} d_i \\ -\ (\forall i \in \{1,2,......,k\}) \quad ; \quad d_i \mid n! \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$, si $a < n!$ alors a possède la propriété P_n

I.S : Procédons par récurrence sur n

- On a $1! = 1$ *et* 1 *possède la propriété* P_1

- Supposons que jusqu'à l'ordre n *, si* $a < n!$ *alors* a *possède la propriété* P_n

et soit $a \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $a < (n+1)!$

Dans la division euclidienne de a *par* $(n+1)$ *on a :* $a = (n+1)q + r$ *avec* $q \le n!$ *et* $0 \le r < n+1$

par hypothèse de la récurrence, q *possède la propriété* P_n *, donc il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *et des entiers*

$d_1, d_2,.........,d_k$ *de* $\mathbb{N}^*$ *tels que :*

les entiers naturels $d_1, d_2,.........et\ d_k$ *sont distincts deux à deux ,* $a = \sum_{i=1}^{i=k} d_i$ *et*

$(\forall i \in \{1,2,......,k\}) \quad ; \quad d_i \mid n!$

de plus on a $a = (n+1)d_1 + (n+1)d_2 + ... + (n+1)d_k + r = d'_1 + d'_2 + ... + d'_k + d'_{k+1}$

avec $d'_i = (n+1)d_i$ *pour tout* $i \in \{1,2,.....,k\}$ *et* $d'_{k+1} = r$

et puisque pour tout $i \in \{1,2,.....,k\}$, $d'_i \mid (n+1)!$ *car* $d_i \mid n!$ *et* $d'_i = (n+1)d_i$ *et que* $d'_{k+1} = r \mid (n+1)!$

car $0 \le r < n+1$ *alors* a *possède la propriété* P_{n+1}

D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ *, si* $a < n!$ *alors* a *possède la propriété* P_n

EXO111 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) \quad ; \quad y^2 = x^3 + 16$

I.S : Si $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ *est une solution de l'équation* (E) *alors* $(y-4)(y+4) = x^3$

- si y *est impair alors* $(y-4)$ *et* $(y+4)$ *sont impairs et donc premiers entre eux*

En effet : si d *est un diviseur positif commun à* $(y-4)$ *et* $(y+4)$ *alors* $d \mid (y+4) - (y-4) = 8$ *donc*

$d = 1,2,4$ *ou* 8 *et puisque* $(y-4)$ *et* $(y+4)$ *sont impairs alors* $d = 1$

et donc $(y-4)$ *et* $(y+4)$ *sont des puissances cubiques : il existe un couple* (α,β) *d'entiers tel que*

$y = 4 + \alpha^3$ *et* $y = -4 + \beta^3$ *soit que* $\alpha^3 + \beta^3 = 8 = 2^3$

ce qui est impossible car l'équation $x^n + y^n = z^n$ *n'admet pas de solution en entiers non nuls pour* $n \ge 3$

- si y *est pair alors* x *est aussi pair. Posons* $y = 2y'$ *et* $x = 2x'$

l'équation (E) *devient :* $(y'-2)(y'+2) = 2x'^3$ *donc* $(y'-2)(y'+2) \equiv 0$ *ou* $2 \ [4]$

car $(\forall n\in\mathbb{Z})$; $n^2\equiv 0$ *ou* $1\quad[4]$ *soit que* $(y'+2)^2\equiv 0$ *ou* $2\quad[4]$ *car* $-2\equiv 2\quad[4]$ *et donc forcement* $(y'+2)^2\equiv 0\quad[4]$ *soit que* $4\,|\,(y'+2)^2$ *donc* $2\,|\,y'+2$ *et par suite* y' *est pair et donc* x' *aussi*

posons $y'=2\alpha$ *et* $x'=2\beta$ (α *et* β *des entiers) alors l'équation* (E) *devient* $(\alpha-1)(\alpha+1)=4\beta^3$

donc $(\alpha-1)$ *et* $(\alpha+1)$ *sont pairs soit que* α *est impair.*

posons encore $\alpha=2a+1$ *(a un entier) alors on aura :* $a(a+1)=\beta^3$

or a *et* $(a+1)$ *sont premiers entre eux donc* a *et* $(a+1)$ *sont des cubes ce qui n'est possible que si* $a=-1$ *ou* $a=0$ *et donc* $\beta=0$ *et donc* $(x,y)=(0,4)$ *ou* $(0,-4)$

(si $a=b^3$ *et* $a+1=c^3$ *alors* $c^3=1^3+b^3$ *donc* $(b,c)=(0,1)$ *ou* $(b,c)=(-1,0)$*)*

réciproquement on vérifie que les couples $(0,4)$ *et* $(0,-4)$ *sont bien solutions de* (E)

EXO112 : Montrer que le système (S) : $\begin{cases}x^2+6y^2=z^2\\6x^2+y^2=t^2\end{cases}$ ne peut admettre de solution dans $\mathbb{Z}^4$ autre que $(0;0;0;0)$

I.S : Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}^4$ *une solution du système* (S)

On peut toujours supposer que les entiers x, y, z *et* t *sont premiers entre eux deux à deux sauf peut-être* z *et* t

- Si x *est pair alors* z^2 *est pair et donc* z *est pair, ce qui est impossible car* $x\wedge z=1$

- Si x *est impair alors* z^2 *est impair et donc* z *est impair et par suite* $z^2-x^2=(z-x)(z+x)$ *est divisible par* 4 *(car* $z-x$ *et* $z+x$ *sont pairs) donc* $4\,|\,6y^2$ *et par suite* y^2 *est pair et donc* t^2 *puis que* t *sont pairs*

ce qui est impossible car $y\wedge t=1$

- Si $x=0$ *et* $y\neq 0$ *alors* $6y^2=z^2$ *donc* z^2 *est pair et par suite* $4\,|\,z^2$ *et donc* y *est pair*

Posons $y=2^k\times u$ *avec* u *un entier impair, on obtient donc* $z^2=2^{2k+1}\times 3\times u^2$ *ce qui est impossible car* u *est impair et donc* $2^{2k+1}\times 3\times u^2$ *ne peut pas être le carré d'un entier.*

De la même façon on montre que l'on ne peut pas avoir $x\neq 0$ *et* $y=0$

donc $x=y=0$ *et par suite* $z=t=0$

Réciproquement on vérifie que $(0;0;0;0)$ *est une solution du système.*

EXO113 : Montrer que si n est un entier pair strictement supérieur à 4 alors 2^n-1 est le produit d'au moins trois entiers tous strictement supérieurs à 1

I.S : Posons $n=2k$ *avec* $k>2$

On a $2^n-1=(2^k+1)(2^k-1)$ *et* $2^k+1>2^k-1>3$

or 2^k-1, 2^k *et* 2^k+1 *sont trois entiers consécutifs donc l'un au moins est divisible par* 3

comme 2^k *n'est pas divisible par* 3 *alors* $3\,|\,2^k-1$ *ou* $3\,|\,2^k+1$

- *Si* $3|2^k-1$ *alors* $2^k-1=3q$ *avec* q *un entier strictement supérieur à* 1 *et donc* $2^n-1=3q\left(2^k+1\right)$

- *Si* $3|2^k+1$ *alors* $2^k+1=3q'$ *avec* q' *un entier strictement supérieur à* 1 *et donc* $2^n-1=3q'\left(2^k-1\right)$

ce qui répond à notre question.

EXO114 : Soient a, b *et* c trois entiers naturels tels que a pair et b impair. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel x tel que : $2^n \mid ax^2+bx+c$

I.S : Procédons par récurrence sur n *et posons* $P(x)=ax^2+bx+c$

- *Pour* $n=0$ *c'est évident*

- *Supposons que cette propriété est vraie jusqu'à l'ordre* $n>0$ *et soit* x_n *l'entier naturel tel que* $2^n \mid P(x_n)$

si $2^{n+1} \mid P(x_n)$ *on prend* $x_{n+1}=x_n$ *si non on a* $P(x_n)=2^n\times d$ *où* d *est un entier impair*

on a alors $P(x)-P(x_n)=(x-x_n)\left(a(x+x_n)+b\right)$ *et* $a(x+x_n)+b$ *est impair*

posons $x_{n+1}=x_n+2^n\times e$ *avec* e *un entier naturel impair, on a alors :*

$P(x_{n+1})=2^n\left[d+e\times\left(a(x+x_n)+b\right)\right]=2^{n+1}\times A$ *car* d *,* e *et* $a(x+x_n)+b$ *sont impairs et donc* $2^{n+1} \mid P(x_{n+1})$ *et par suite d'après le principe de récurrence,* $(\forall n\in\mathbb{N})$, $(\exists x_n\in\mathbb{N})$; $2^n \mid P(x_n)$

EXO115 : Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{70^{71}}$ par 13 ?

I.S : D'après le théorème de Fermat $2^{12}\equiv 1\ [13]$ *(car* 13 *est un nombre premier et qui ne divise pas* 2 *)*

donc si r *est le reste de la division euclidienne de* 70^{71} *par* 12 *alors* $2^{70^{71}}\equiv 2^{12q+r}\equiv\left(2^{12}\right)^q\times 2^r\equiv 2^r\ [13]$

Remarquons que $2^2\equiv 4\ [12]$, $2^{2^2}\equiv 4\ [12]$, $2^{2^3}\equiv 4\ [12]$ …….

on montre par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $2^{2^n}\equiv 4\ [12]$ *(car :* $2^{2^{n+1}}=\left(2^{2^n}\right)^2\equiv 4^2\equiv 4\ [12]$ *)*

de plus $70\equiv -2\ [12]$ *et* $71=1+2+2^2+2^6$ *donc* $70^{71}\equiv(-2)^{71}\equiv -2\times 2^2\times 2^{2^2}\times 2^{2^6}\ [12]$

et donc $70^{71}\equiv -2\times 4\times 4\times 4\equiv -8\equiv 4\ [12]$ *et ainsi donc* $r=4$

et par suite $2^{70^{71}}\equiv 2^4\equiv 3\ [13]$ *donc le reste demandé est* 3

EXO116 : Trouver le chiffre de l'unité dans l'écriture décimale du nombre 7^{7^7} .

I.S : Le dernier chiffre de 7^{7^7} *dans l'écriture décimale est son reste dans la division euclidienne par* 10

On a : $7\equiv -3\ [10]$ *et* $7^2\equiv -1\ [10]$ *et* $7^4\equiv 1\ [10]$ *et donc* $(\forall k\in\mathbb{N})$; $7^{4k}\equiv 1\ [10]$

Cherchons ensuite le reste de la division euclidienne de 7^7 *par* 4

on a $7\equiv -1\ [4]$ *et donc* $7^7\equiv -1\equiv 3\ [4]$ *et par suite* $(\exists k\in\mathbb{N})$; $7^7=3+4k$

donc $7^{7^7}=7^{3+4k}\equiv 7^3\equiv 3\ [10]$ *, le dernier chiffre est donc* 3

EXO117 : Montrer que l'équation $(E)\ :\ x^3+11^3=y^3$ n'admet pas de solution en entiers naturels.

*I.S : * D'après le théorème de Fermat l'équation $x^n+y^n=z^n$ n'admet pas de solution en entiers non nuls pour $n\geq 3$ et donc si le couple $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ est solution de l'équation (E) alors le triplet $(x,11,y)\in\mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation $x^3+y^3=z^3$ ce qui est absurde.*

** On a $(E)\ \Leftrightarrow\ y^3-x^3=11^3\ \Leftrightarrow (y-x)(y^2+yx+x^2)=11^3$*

- Si $y-x=1$ et $y^2+yx+x^2=11^3$ alors $y=x+1$ et donc $x^2-3x-120=0$ ce qui est absurde car cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

- Si $y-x=11$ et $y^2+yx+x^2=11^2$ alors $y^2+x^2<11^2$ donc $y<11$ ce qui est absurde car $y=x+11\geq 11$

- Si $y-x=11^2$ et $y^2+yx+x^2=11$ alors $y^2+x^2<11$ et donc $y\leq 3$ ce qui est absurde car $y=x+11^2\geq 121$

En conclusion, l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Rappel *: pour $n\geq 3$ l'équation $x^n+y^n=z^n$ n'admet pas de solution dans en entiers non nuls.*

EXO118 : Montrer que le système $(S)\ :\ \begin{cases} x^2+5y^2=z^2 \\ 5x^2+y^2=t^2 \end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^4$ autre que $(0;0;0;0)$

I.S : Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{N}^4$ une solution du système (S) .

** On peut toujours supposer que $x\wedge y=1$*

on a alors $x^2+5y^2=z^2$ et $5x^2+y^2=t^2$ donc $6x^2+6y^2=z^2+t^2$ et donc $3\mid z^2+t^2$

or $(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ n^2\equiv 0$ ou $1\ [3]$ donc nécessairement $z\equiv 0\ [3]$ et $t\equiv 0\ [3]$

et par suite $\left(\exists(z',t')\in\mathbb{N}^2\right)\ ;\ z=3z'$ et $t=3t'$ et donc $6x^2+6y^2=9\left(z'^2+t'^2\right)$ et ainsi $3\mid x$ et $3\mid y$ ce qui est absurde car x et y sont premiers entre eux.

** Sans utiliser l'hypothèse que x et y sont premiers entre eux.*

Puisque $6x^2+6y^2=9\left(z'^2+t'^2\right)$ alors $2\left(x^2+y^2\right)=3\left(z'^2+t'^2\right)$, or $2\wedge 3=1$ d'après le théorème de Gauss $3\mid x^2+y^2$ et donc $3\mid x$ et $3\mid y$ et par suite $\left(\exists(x',y')\in\mathbb{N}^2\right)\ ;\ x=3x'$ et $y=3y'$

on aura donc $6\left(x'^2+y'^2\right)=z'^2+t'^2$ et donc $3\mid z'^2+t'^2$ soit que $3\mid z'$ et $3\mid t'$ donc $\left(\exists(z'',t'')\in\mathbb{N}^2\right)\ ;\ z'=3z''$ et $t'=3t''$ et ainsi on construit des suites : $x>x'>x''>....$; $y>y'>y''>....$; $z>z'>z''>....$ et $t>t'>t''>.....$ qui sont des suites d'entiers naturels strictement décroissantes , ce qui est absurde d'après le principe de la descente infini d'Euclide.

Rappel : Le principe de la descente infinie

Il n'existe pas de suite **infinie** d'entiers naturels qui soit **strictement** décroissante.

EXO119 : Soit p un entier impair.

Montrer que s'il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $p=m^2+n^2$ alors $p\equiv 1\ [4]$

I.S : Puisque p est impair alors m et n sont nécessairement de parité différentes. Et donc on aura :
$(m\equiv 0\ [2]\ \text{ et }\ n\equiv 1\ [2])$ *ou* $(m\equiv 1\ [2]\ \text{ et }\ n\equiv 0\ [2])$ *, soit que* $(m^2\equiv 0\ [4]\ \text{ et }\ n^2\equiv 1\ [4])$ *ou* $(m^2\equiv 1\ [4]\ \text{ et }\ n^2\equiv 0\ [4])$ *et par suite* $p=m^2+n^2\equiv 1\ [4]$

EXO120 : Soit n un entier naturel. Montrer que si $16n+15=x_1^4+x_2^4+.....+x_k^4$ alors $k\geq 15$

I.S : On rappelle que $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ n^4\equiv 0$ *ou* $1\ [16]$

Puisque $16n+15\equiv 15\ [16]$ *alors nécessairement au moins* 15 *des* $x_i\ (1\leq i\leq k)$ *doivent vérifier* $x_i^4\equiv 1\ [16]$ *ce qui nécessite que* k *soit supérieur ou égal à* 15

EXO121 : Montrer que l'entier $\overline{a_n a_{n-1}......a_1 a_0}^{12}$ (écrit dans le système de numérotation de base 12) est divisible par 8 si et seulement si $\overline{a_1 a_0}^{12}$ est divisible par 8

I.S : Remarquer que $12^k\equiv 0\ [8]$ *pour tout* $k\geq 2$ *donc :*

$\overline{a_n a_{n-1}......a_1 a_0}^{12}\equiv 0\ [8]\ \Leftrightarrow\ a_n\times 12^n+a_{n-1}\times 12^{n-1}......+a_1\times 12+a_0\equiv 0\ [8]\ \Leftrightarrow\ \overline{a_1 a_0}^{12}\equiv 0\ [8]$

EXO122 : Soient a ,b *et* c trois entiers impairs.

Montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas le carré d'un entier.

I.S : on a $(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ n^2\equiv 0,1$ *ou* $4\ [8]$ *(Les seuls résidus quadratiques modulo* 8 *sont* $0,1$ *et* 4*)*
de plus $n^2\equiv 1\ [8]$ *si et seulement si* n *est impair .*

On a $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

puisque a ,b *et* c *sont impairs alors* $a+b+c$ *est impair*

et donc $(a+b+c)^2\equiv 1\ [8]$ *et* $a^2\equiv b^2\equiv c^2\equiv 1\ [8]$ *, par suite* $3+2(ab+bc+ca)\equiv 1\ [8]$

ainsi donc $2(ab+bc+ca)\equiv 6\ [8]$ *ce qui donne* $ab+bc+ca\equiv 3$ *ou* $7\ [8]$

donc $ab+bc+ca$ *ne peut pas être le carré d'un entier.*
On dit que $ab+bc+ca$ *n'est pas un résidu quadratique modulo* 8

EXO123 : Montrer que l'équation $x^2+y^2=3z^2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^3$ autre que $(0;0;0)$

I.S : Soit $(x,y,z)\in\mathbb{N}^{*3}$ *une solution de cette équation.*

On suppose que l'entier x *soit le plus petit possible (la valeur minimale de* x*)*
on a $x^2+y^2=3z^2$ *donc* $3|x^2+y^2$ *et donc* $3|x$ *et* $3|y$ *ainsi* $(\exists(x',y')\in\mathbb{N}^2)\ ;\ x=3x'$ *et* $y=3y'$
donc $3(x'^2+y'^2)=z^2$ *et par suite* $(\exists z'\in\mathbb{N})\ ;\ z=3z'$ *et enfin on aura :* $x'^2+y'^2=3z'^2$ *avec* $x'<x$ *ce qui est contraire à l'hypothèse que* x *est minimale.*

Remarque : On pourra aussi utiliser le principe de la descente infinie en construisant une suite d'entiers naturels $x > x' > x'' > ....$ *infinie et strictement décroissante.*

EXO124 : Démontrer que $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \quad ; \quad a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = d = 0$

I.S : Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$ *vérifiant* $(*)$ $\quad a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$ *et on suppose que* a *est non nul et de valeur minimale.*

on a $(*) \;\Leftrightarrow\; 2a^2 + 10b^2 = 4c^2 + 4cd + d^2 + 5d^2 \;\Rightarrow\; 2a^2 \equiv (2c+d)^2 \;[5]$

or $(\forall n \in \mathbb{Z}) \;;\; n^2 \equiv 0 \,,1 \text{ ou } 4 \;[5]$ *donc* $\begin{cases} 2a^2 \equiv 0 \,,\, 2 \text{ ou } 3 \;[5] \\ (2c+d)^2 \equiv 0,1 \text{ ou } 4 \;[5] \end{cases}$ *et par suite* $\begin{cases} 2a^2 \equiv 0 \;[5] \\ (2c+d)^2 \equiv 0 \;[5] \end{cases}$

donc $\begin{cases} a \equiv 0 \;[5] \\ 2c+d \equiv 0 \;[5] \end{cases}$ *et ainsi* $\exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; a = 5k$ *et* $2c + d = 5l$

et donc on aura $10k^2 + 2b^2 = 5l^2 + d^2$ *ce qui donne encore* $2b^2 \equiv d^2 \;[5]$ *donc* $b \equiv d \equiv 0 \;[5]$ *et par suite* $c \equiv 0 \;[5]$

ainsi donc si $\quad a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$ *alors* $a = 5a'$, $b = 5b'$, $c = 5c'$ *et* $d = 5d'$ *avec* $(a',b',c',d') \in \mathbb{N}^4$ *et vérifiant* $\quad a'^2 + 5b'^2 - 2c'^2 - 2c'd' - 3d'^2 = 0$

ce qui est absurde car $a' < a$ *et* a *admet la valeur minimale.*

donc la seule possibilité qui reste est que $a = b = c = d = 0$

EXO125 : Soient a et b deux entiers naturels.

(i) Montrer que l'implication $\left(13 | a^2 + b^2 \Rightarrow 13 | a \text{ et } 13 | b\right)$ est fausse.

(ii) Montrer que si $13 | a^4 + b^4$ alors $13 | a$ et $13 | b$

(iii) On suppose que $15a + 16b = c^2$ et $16a - 15b = d^2$ avec $(c,d) \in \mathbb{N}^2$

Déterminer les valeurs minimales de c et d

I.S : (i) On a $\quad 13 | 6^2 + 9^2$ *mais* 13 *ne divise ni* 6 *ni* 9 *«et*

(ii) On a pour tout entier $n \in \mathbb{Z} \;;\; n^4 \equiv 0 \,,1,3 \text{ ou } 9 \;[13]$ *et* $\left(n^4 \equiv 0 \;[13] \;\Leftrightarrow\; n \equiv 0 \;[13]\right)$

il est évident que si $13 | a$ *et* $13 | b$ *alors* $13 | a^4 + b^4$*, réciproquement si* 13 *ne divise pas* a *(ou* b*) alors* $a^4 + b^4$ *ne peut pas être congru à* 0 *modulo* 13 *ce qui veut dire que* 13 *ne divise pas* $a^4 + b^4$

(iii) On a $c^4 + d^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 13 \times 37 (a^2 + b^2)$ *donc* 13 *et* 37 *divisent* $c^4 + d^4$ *et donc* 13 *divisent* c *et divise* d *aussi*

on montre de la même manière que 37 *divisent* c *et divise* d *aussi*

et puisque 13 *et* 37 *sont premiers entre eux, alors* $13 \times 37 = 481$ *divise* c *et divise* d *aussi*

si on prend $c = d = 481$ *, on trouve que* $a = 481 \times 31$ *et* $b = 481$ *vérifient les hypothèses et donc la valeur minimale commune de ces deux carrés est* $(481)^2$

EXO126 : Montrer que l'équation $x^3-3xy^2+y^3=2891$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

I.S : Soit $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *une solution de cette équation si elle existe.*

puisque $x^3+y^3\equiv -1\ [3]$ *alors :*

$(x\equiv -1\ [3]$ *et* $y\equiv 0\ [3])$ *ou* $(x\equiv 0\ [3]$ *et* $y\equiv -1\ [3])$ *ou* $(x\equiv 1\ [3]$ *et* $y\equiv 1\ [3])$

Si $(x\equiv -1\ [3]$ *et* $y\equiv 0\ [3])$ *alors* $(\exists(m,n)\in\mathbb{N})^2$; $x=-1+3m$ *et* $y=3n$

donc $(-1+3m)^3-3(-1+3m)(3n)^2+(3n)^3=9\times 321+2$ *ce qui est absurde car* $9\times 321+2\equiv 2\ [9]$

et $(-1+3m)^3-3(-1+3m)(3n)^2+(3n)^3\equiv -1\ [9]$

et ainsi de suite on fait de même pour les deux autres cas.

Donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$

En conclusion, n^3+7 *ne peut pas être un carré parfait.*

EXO127 : On dispose d'un certain nombre n $(100<n<200)$ de livres.

Qu'on les répartit par groupe de 20 ou par groupe de 25, il reste toujours 7 livres.

Déterminer le nombre n de ces livres.

I.S : Par hypothèse on a : $n\equiv 7\ [20]$ *et* $n\equiv 7\ [25]$ soit que $20=2^2\cdot 5\,|\,n-7$ *et* $25=5^2\,|\,n-7$

donc $20\vee 25=2^2\cdot 5^2=100\,|\,n-7$ et par suite $n=7+100k$ $(k\in\mathbb{N})$

puisque $100<n<200$ alors $n=107$

EXO128 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x\equiv 2\ [7] \\ x\equiv 1\ [8] \\ x\equiv 3\ [9] \end{cases}$

I.S : Condition nécessaire

Soit x *une solution du système (si elle existe)*

on a $x\equiv 2\ [7]$ *donc* $(\exists a\in\mathbb{Z})$; $x=2+7a$

puisque $x\equiv 1\ [8]$ *alors* $2+7a\equiv 1\ [8]$ *soit que* $7a\equiv 7\ [8]$; 7 *et* 8 *étant premiers entre eux donc*

$a\equiv 1\ [8]$ *et donc* $(\exists b\in\mathbb{Z})$; $a=1+7b$ *par suite* $(\exists b\in\mathbb{Z})$; $x=9+7\times 8b$

puisque encore $x\equiv 3\ [9]$ *alors* $9+56b\equiv 3\ [9]$ *soit que* $56b\equiv 3\ [9]$; 56 *et* 9 *étant premiers entre eux et l'algorithme d'Euclide nous donne :* $56\times(-4)+9\times 25=1$, *donc* $b\equiv(-4)\times 3\ [9]$ *soit que*

$b\equiv 6\ [9]$ *et donc* $(\exists c\in\mathbb{Z})$; $b=6+9c$ *par suite*

Condition suffisante : Si $x=345+7\times 8\times 9c$ *avec* $c\in\mathbb{Z}$ *alors on a bien*

$x\equiv 2\ [7]$ *et* $x\equiv 1\ [8]$ *et* $x\equiv 3\ [9]$ *c'est-à-dire que* x *est solution du système.*

L'ensemble des solutions du système est donc formé des entiers congru à 345 *modulo* $504=7\times 8\times 9$

Remarque : cette méthode de résolution du système des restes chinois n'est valable que parce-que $7, 8$ *et* 9 *sont premiers entre eux deux à deux.*

EXO129 : Trouver tous les entiers vérifiant simultanément $3x-10\in 7\mathbb{Z}$, $11x-8\in 17\mathbb{Z}$ et $x-1\in 5\mathbb{Z}$

I.S : Soit $x\in\mathbb{Z}$ *vérifiant simultanément* $3x-10\in 7\mathbb{Z}$, $11x-8\in 17\mathbb{Z}$ *et* $x-1\in 5\mathbb{Z}$

alors x *est solution du système* (S) *:* $\begin{cases} 3x-10\equiv 0 & [7] \\ 11x-8\equiv 0 & [17] \\ 16x-1\equiv 0 & [5] \end{cases}$ *on a :* $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 1 & [7] \\ 11x\equiv 8 & [17] \\ x\equiv 1 & [5] \end{cases}$ *et en*

remarquant que : $2\times 17-3\times 11=1$ *(ou puisque* 11 *et* 17 *sont premiers entre eux puis on applique l'algorithme d'Euclide au couple* $(11;17)$*) alors* $(-3)\times 11\equiv 1 \quad [17]$ *et donc* $x\equiv 10 \quad [17]$ *et par suite* x

est solution du système (S') *:* $\begin{cases} x\equiv 1 & [7] \\ x\equiv 10 & [17] \\ x\equiv 1 & [5] \end{cases}$

Résolution du système (S') *:* 5 , 7 *et* 17 *sont deux à deux premiers entre eux donc le système* (S') *admet une solution dans* $\mathbb{Z}$ *modulo* $5\times 7\times 17=595$

On a $x\equiv 1 \quad [7]$ *donc* $(\exists a\in\mathbb{Z})$ *;* $x=1+7a$

puisque on a aussi $x\equiv 1 \quad [5]$ *alors* $1+7a\equiv 1 \quad [5]$ *ce qui donne* $a\equiv 0 \quad [5]$ *et donc* $(\exists b\in\mathbb{Z})$ *;* $a=5b$

donc $(\exists b\in\mathbb{Z})$ *;* $x=1+7\times 5b$

et puisque on a aussi $x\equiv 10 \quad [17]$ *alors* $1+35b\equiv 10 \quad [17]$ *ce qui donne* $b\equiv 9 \quad [17]$ *et donc*

$(\exists c\in\mathbb{Z})$ *;* $b=17c$ *et par suite* $(\exists c\in\mathbb{Z})$ *;* $x=316+7\times 5\times 17c$ *ou encore que* $x\equiv 316 \quad [595]$

Réciproquement, les entiers de la forme vérifies bien simultanément les trois congruences :
$3x-10\in 7\mathbb{Z}$, $11x-8\in 17\mathbb{Z}$ *et* $x-1\in 5\mathbb{Z}$

Remarque : on pourra d'abord résoudre le système $\begin{cases} x\equiv 1 & [5] \\ x\equiv 1 & [7] \end{cases}$ *ce qui donne* $x\equiv 1 \quad [35]$ *ensuite*

résoudre le système $\begin{cases} x\equiv 1 & [35] \\ x\equiv 10 & [17] \end{cases}$ *ce qui donne le résultat final.*

EXO130 : Montrer que l'équation $6x^2+5x+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$ mais qu'elle admet des solutions modulo n pour tout entier $n\geq 2$

I.S : On a : $6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$ *donc l'équation* $6x^2+5x+1=0$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}$

Soit n *un entier supérieur ou égal à* 2 *et posons* $n=2^{\sim}\cdot m$ *avec* $\sim$ *un entier positif* m *un entier impair*

puisque $2^{\sim}\wedge m=1$ *alors il existe un entier positif* x *tel que* $3x\equiv -1 \quad \left[2^{\sim}\right]$ *et* $2x\equiv -1 \quad [m]$

et donc $n=2^{\sim}\cdot m \mid (3x+1)(2x+1)$ *et par suite l'équation* $6x^2+5x+1\equiv 0 \quad [n]$ *admet une solution.*

EXO131 : Soit n un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe une suite de n entiers consécutifs telle que aucun de ses termes n'est une puissance (strictement supérieur à 1) d'un entier.

I.S : Considèrons $p_1, p_2, ..., p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts.

le système $x \equiv p_i - i + 1 \quad \left[p_i^2 \right]$ pour $i = 1, 2, ..., n$ d'après le théorème des restes chinois, admet une solution modulo $\prod_{i=1}^{i=n} p_i^2$ de plus les entiers $x + i - 1$ pour $i = 1, 2, ..., n$ sont consécutifs et pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $x + i - 1 = p_i^2 \cdot k_i + p_i$ donc divisible par p_i mais n'est pas divisible par p_i^2

EXO132 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que si $x \wedge y = 1$ et $x^2 + y^2 = z^4$ alors 7 divise xy

I.S : Posons $t = z^2$, on a donc $x^2 + y^2 = t^2$ et donc (Equation de Pythagore) il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$m \wedge n = 1$, $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ *et* $t = m^2 + n^2 = z^2$

Si 7 ne divise pas y alors 7 ne divise ni m ni n

or pour tout $u \in \mathbb{N}$, si u n'est pas un multiple de 7 alors $u^2 \equiv 1$, 2 ou $4 \quad [7]$

donc $m^2 \equiv 1$, 2 ou $4 \quad [7]$, $n^2 \equiv 1$, 2 ou $4 \quad [7]$ et puisque $m \wedge n = 1$ et

$m^2 + n^2 = z^2 \equiv 0$, 1 , 2 ou $4 \quad [7]$ alors nécessairement $m^2 \equiv n^2 \quad [7]$ soit que $x = m^2 - n^2 \equiv 0 \quad [7]$

donc 7 divise x et par suite 7 divise toujours xy

EXO133 : On dit qu'un entier naturel N possède la propriété (P) s'il a la même écriture, dans la base décimale, vu de droite ou de gauche. exemple : 131 , 2552..

Montrer que si N s'écrit avec un nombre pair de chiffres et possède la propriété (P) alors N est divisible par 11

I.S : Posons $N = n_k n_{k-1} .... n_1 n_0$ son écriture dans la base décimale (les chiffres $n_i \in \{0;1;......;9\}$)

et $\sigma(N) = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + + + + + + (-1)^k n_k$

on a $N = n_0 + 10n_1 + 10^2 n_2 + + + + + + 10^k n_k = n_0 + (11n_1 - n_1) + (9 \times 11n_2 + n_2) + (11 \times 91n_3 - n_3) + ...$

donc $N = \sigma(N) + 11 \times (n_1 + 9n_2 + 91n_3 + + ...)$ *et par suite* $N \equiv \sigma(N) \quad [11]$

or N s'écrit avec un nombre pair de chiffres et possède la propriété (P) donc $\sigma(N) = 0$ et donc

$N \equiv 0 \quad [11]$ *c'est-à-dire que 11 divise N*

EXO134 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (les nombres de Fermat)

Montrer F_n divise $2^{F_n} - 2$

I.S : On a $F_n \equiv 0 \quad [F_n]$ *donc* $2^{2^n} \equiv -1 \quad [F_n]$

or $2^{F_n} = 2\left(2^{2^{2^n}}\right) = 2\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n}-n}$ *et puisque* $2^{2^n - n}$ *est un nombre pair alors* $2^{F_n} \equiv 2 \quad [F_n]$

ce qu'il fallait démontrer

EXO135 : Soit p un entier supérieur ou égal à 2 (Théorème de Wilson)

Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$

En effet : Si p *est premier alors les entiers* $1, 2, ..., p-1$ *sont premiers avec* p *donc ils sont tous inversibles dans le groupe* $\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*, \times\right)$

(d'après le théorème de Bézout $\forall i \in \{1;2;....;p-1\}$, $\exists j \in \{1;2;....;p-1\}$; $i \times j \equiv 1 \quad [p]$ *)*

remarquons aussi que si p *est premier alors :*

Ainsi donc $(p-1)! = 1\times 2\times 3\times ....\times (p-1) \equiv 1\times (p-1) \quad [p]$ *car tous les autres éléments* $2, 3, ..., (p-2)$ *s'éliminent entre eux et par suite* $(p-1)! \equiv -1 \quad [p]$

Réciproquement procédons par contraposé: Si $p = ab$ *est non premier (avec* $a \geq 2$ *et* $b \geq 2$ *) alors* $a \mid (p-1)!$ *et* $b \mid (p-1)!$ *car* $a < p-1$ *et* $b < p-1$ *et donc* $ab \mid (p-1)!$ *soit que* $(p-1)! \equiv 0 \quad [p]$ *et donc* $(p-1)!$ *ne peut pas être aussi congru aussi à* (-1) *modulo* p *si non on aura* $0 \equiv -1 \ [p]$ *ou encore que* $p \mid 1$ *ce qui est absurde.*

ainsi donc si p *est non premier alors* $(p-1)!+1 \neq 0 \quad [p]$ *et par suite si* $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$ *alors* p *est premier.*

EXO136 : Pour tout entier naturel $p \geq 1$, on pose $\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k} = \frac{a_p}{b_p}$ avec $a_p \wedge b_p = 1$

Montrer que si p est un nombre premier impair alors a_{p-1} est un multiple de p

I.S : Rappels :

-Si p *est premier alors* $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^* = \{1;2;......;p-1\}$ *muni de la multiplication est un groupe Abélien et* $(\forall k \in \{1;2;....;p-1\})$; k *est inversible et son inverse* k^{-1} *est dans* $\{1;2;....;p-1\}$

soit que $\sum_{k=1}^{k=p-1} k^{-1} = \sum_{k=1}^{k=p-1} k$

Posons $S_p = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{p!}{k}$, S_p *est un entier car les indices* k *sont tous inférieur à* p

donc $\frac{a_{p-1}}{b_{p-1}} = \frac{S_{p-1}}{(p-1)!}$ *ce qui entraine que* $a_{p-1}(p-1)! = b_{p-1}S_{p-1}$

donc d'après le théorème de Wilson, $-a_{p-1} \equiv b_{p-1}S_{p-1} \quad [p]$

de plus on posons $S_{p-1} = \sum_{k=1}^{k=p-1} \sigma_k$ *avec* $\sigma_k = \frac{(p-1)!}{k}$ *, on a* $(p-1)! = k\sigma_k$ *donc* $(-k)\sigma_k \equiv 1 \quad [p]$

et par suite $(-k)$ *est l'inverse de* σ_k *dans le groupe* $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$ *muni de la multiplication et par suite*

$S_{p-1} = \sum_{k=1}^{k=p-1} \sigma_k = -\sum_{k=1}^{k=p-1} k$

comme p *est impair alors* $\sum_{k=1}^{k=p-1} k = p\frac{p-1}{2}$ *et donc* $S_{p-1} \equiv 0 \quad [p]$ *et par suite* $a_{p-1} \equiv 0 \quad [p]$

EXO137 : Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 3^k \mid 2^{3^k} + 1$

I.S : On procède par récurrence sur k

pour $k = 1$ *, on a* $3 \mid 9$

Supposons que $3^k \mid 2^{3^k} + 1$ *jusqu'à l'ordre* k *(hypothèse de récurrence)*

on a $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ *donc* $2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(2^{2\times 3^k} - 2^{3^k} + 1\right)$

or $2^{2\times 3^k} - 2^{3^k} + 1 = 4^{3^k} + 2 - \left(2^{3^k} + 1\right)$ *et* $3^k \mid 2^{3^k} + 1$ *et* $4^{3^k} \equiv 1 \quad [3]$ *donc* $3 \mid 2^{2\times 3^k} - 2^{3^k} + 1$

ainsi donc on a $3^k \mid 2^{3^k} + 1$ *et* $3 \mid 2^{2\times 3^k} - 2^{3^k} + 1$ *donc* $3^{k+1} \mid \left(2^{3^k} + 1\right)\left(2^{2\times 3^k} - 2^{3^k} + 1\right) = 2^{3^{k+1}} + 1$

et donc d'après le principe de récurrence , $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 3^k \mid 2^{3^k} + 1$

EX138 : Déterminer tous les entiers naturels n tels que $3 \mid n2^n + 1$

I.S : - C.N : Soit n *un entier naturel vérifiant :* $3 \mid n \cdot 2^n + 1$ *soit que* $n \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \quad [3]$

* *si* $n \equiv 0 \quad [3]$ *on aura* $1 \equiv 0 \quad [3]$ *ce qui est faux*

* *si* $n \equiv 1 \quad [3]$ *on aura* $2^n + 1 \equiv 0 \quad [3]$ *soit que* $2^n \equiv 2 \quad [3]$ *ou encore* $2^{n-1} \equiv 1 \quad [3]$

or $2^2 \equiv 1 \quad [3]$ *donc* $2 \mid (n-1)$ *ou encore que* $n \equiv 1 \quad [2]$

puisque $n \equiv 1 \quad [3]$ *et* $n \equiv 1 \quad [2]$ *et que* $2 \wedge 3 = 1$ *alors* $n \equiv 1 \quad [6]$

* *si* $n \equiv 2 \quad [3]$ *on aura* $2^{n+1} + 1 \equiv 0 \quad [3]$ *soit que* $2^n \equiv 1 \quad [3]$

or $2^2 \equiv 1 \quad [3]$ *donc* $2 \mid n$ *ou encore que* $n \equiv 0 \quad [2]$

puisque $n \equiv 2 \quad [3]$ *et* $n \equiv 0 \quad [2]$ *et que* $2 \wedge 3 = 1$ *alors d'après le théorème des restes chinois,*

$n \equiv 2 \quad [6]$

- C.S : On vérifie directement que pour $n = 1 + 6k \ (k \in \mathbb{N})$ *ou* $n = 2 + 6k \ (k \in \mathbb{N})$ *on a bien*

$3 \mid n \cdot 2^n + 1$

En conclusion les solutions du problème sont les entiers : $1+6k$ *et* $2+6k$ $\left(avec\ \ k\in\mathbb{N}\right)$

EXO139 : Déterminer le chiffre x dans la base décimale tel que le nombre $506390^{128}+561x$ soit divisible par 7

I.S : On a $506390\equiv 3\ \ [7]$ *et* $3^6\equiv 1\ \ [7]$ *donc* $\left(\forall k\in\mathbb{N}\right)$; $3^{6k}\equiv 1\ \ [7]$

de plus $128\equiv 2\ \ [6]$ *donc* $506390^{128}\equiv 3^{128}\ \ [7]$ *et* $3^{128}\equiv 3^2\equiv 2\ \ [7]$ *donc* $506390^{128}\equiv 2\ \ [7]$

Par hypothèse $0\le x\le 9$ *et* $506390^{128}+561x\equiv 0\ \ [7]$ *donc* $2+5\times 10^3+6\times 10^2+10+x\equiv 0\ \ [7]$

ce qui donne $x\equiv 2\ \ [7]$ *(car* $10\equiv 3\ \ [7]$ *)*

ainsi donc on a : $0\le x\le 9$ *et* $x\equiv 2\ \ [7]$, *par suite* $x=2$ *ou* $x=9$

EXO140 : Soit b un entier strictement supérieur à 7 et N un entier naturel dont la représentation dans la base b est $\overline{777}^{b}$ Trouver la plus petite valeur de b pour laquelle N est une puissance quatrième d'un entier.

I.S : S'il existe $a\in\mathbb{N}$ *tel que* $N=a^4$ *alors* $7b^2+7b+7=a^4$ *donc* a^4 *est impair et par suite* a *est impair.*
(En effet $7b^2+7b+7=7b\left(b+1\right)+7$ *et* $b\left(b+1\right)$ *est un nombre pair)*

puisque a *est nécessairement impair alors* $7b^2+7b+7\equiv 1\ \ [8]$ *(car* $a^4\equiv 1\ \ [8]$ *si* a *est impair)*

et donc $7b^2+7b+6\equiv 0\ \ [8]$ *ou encore que* $7b^2+7b+14\equiv 0\ \ [8]$ *c'est-à-dire* $7\left(b^2+b+2\right)\equiv 0\ \ [8]$

et puisque 7 *et* 8 *sont premiers entre eux alors* $b^2+b+2\equiv 0\ \ [8]$ *soit que* $b\left(b+1\right)\equiv 6\ \ [8]$

et donc $b\equiv 2\ \ [8]$ *ou* $b\equiv 5\ \ [8]$ *soit que* $b=2+8k$ *ou* $b=5+8k$ *avec* $k\in\mathbb{N}^*$

Réciproquement cherchons parmi les entiers $b=2+8k$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *celui qui répond à notre question*
si $k=1$ *alors* $b=10$ *mais l'entier* 777 *n'est même pas un carré parfait.*

si $k=2$ *alors* $b=18$ *et* $\overline{777}^{18}=2401=7^4$
ensuite cherchons parmi les entiers $b=5+8k$ *avec* $k\in\mathbb{N}^*$ *celui qui répond à notre question*
si $k=1$ *alors* $b=13$ *mais l'entier* $\overline{777}^{13}=1281$ *n'est même pas un carré parfait.*
Donc $b=18$ *est la valeur qui correspond à la question.*

EXO141 : Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $\sum_{k=0}^{k=n} C_{2n+1}^{2k+1}\times 2^{3k}$ n'est pas divisible par 5

I.S : On a $\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{2}2^3+C_{2n+1}^{4}2^6+.......C_{2n+1}^{2n}2^{3n}+2^{\frac{3}{2}}\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}2^3+C_{2n+1}^{5}2^6+.......C_{2n+1}^{2n+1}2^{3n}\right)=A+2^{\frac{3}{2}}B$

et $\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)^{2n+1}=-A+2^{\frac{3}{2}}B$ *donc* $\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)^{2n+1}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)^{2n+1}=2^3B^2-A^2$ *soit que* $7^{2n+1}=8B^2-A^2$

or $7\equiv 2\ \ [5]$ *et* $7^2\equiv -1\ \ [5]$ *donc* $7^{2n+1}\equiv\left(-1\right)^n\times 2\ \ [5]$ *et par suite* $3B^2-A^2\equiv\left(-1\right)^n\times 2\ \ [5]$
si $5\,|\,B$ *alors* $A^2\equiv 2$ *ou* $3\ \ [5]$ *ce qui est absurde.*

EXO142 : Montrer que si n est un entier strictement supérieur à 2 alors $\frac{1}{3}\left(2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1\right)$ est un entier qui est divisible par 7

I.S : On a $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{2^n} \equiv 1 \quad [3]$ *donc* $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1 \equiv 0 \quad [3]$ *car* $2^2 \equiv 1 \quad [3]$

et par suite $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ *est divisible par* 3

* *si* n *est pair, on a* $2^n \equiv 1 \quad [3]$ *donc* $2^n = 1+3k$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$

et donc $2^{2^n} = 2^{1+3k} = 2\times\left(2^3\right)^k \equiv 2 \quad [7]$ *et* $2^{2^{n+1}} = \left(2^{2^n}\right)^2 \equiv 4 \quad [7]$

donc $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1 \equiv 0 \quad [7]$ *soit que* $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ *est divisible par* 7

puisque 3 *et* 7 *sont premiers entre eux, alors* $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ *est divisible par* $3\times 7 = 21$ *et donc*

$\frac{1}{3}\left(2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1\right)$ *est un entier divisible par* 7

EXO143 : Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel y_k tel que $2^k \mid y_k^2+7$

I.S : Procédons par récurrence sur k

Pour $k=1$, 2 *ou* 3 *on prend* $y_k = 1$

supposons que jusqu'à l'ordre k $(k \geq 3)$ *, il existe un entier* y_k *tel que* $2^k \mid y_k^2+7$

soit que il existe un entier x_k *tel que* $y_k^2+7 = 2^k x_k$

donc si $x_k = 2z_k$ *alors* $y_k^2+7 = 2^{k+1}z_k$ *et si* $x_k = 2z_k+1$ *alors* $y_k^2+7 = 2^{k+1}z_k + 2^k$

dans le premier cas, on prend $y_{k+1} = y_k$

dans le deuxième cas, on pose $y_{k+1}^2 = \left(y_k - 2^{k-1}\right)^2 = y_k^2 - 2^k y_k + 2^{2k-2} \equiv y_k^2 - 2^k y_k \quad \left[2^{k+1}\right]$

or si $k \geq 3$ *et puisque* y_k *est nécessairement impair, alors* $y_k \equiv 1 \quad \left[2^{k+1}\right]$ *et donc* $y_{k+1}^2 \equiv y_k^2 - 2^k \quad \left[2^{k+1}\right]$

soit que $y_{k+1}^2 \equiv y_k^2 \equiv -7 \quad \left[2^{k+1}\right]$ *c'est-à-dire que* $2^{k+1} \mid y_{k+1}^2+7$

et d'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ *, il existe un entier naturel* y_k *tel que* $2^k \mid y_k^2+7$

EXO144 : Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que $\left(a^2-ab+b^2\right)\wedge(a+b)$ est égal à 1 *ou* 3

I.S : Soit p *un diviseur commun à* a^2-ab+b^2 *et* $a+b$

puisque $(a+b)^2 - \left(a^2-ab+b^2\right) = 3ab$ *alors* $p \mid 3ab$ *donc* $p \mid 3(a+b)\wedge 3ab = 3\left((a+b)\wedge ab\right) = 3$

car $(a+b)\wedge ab = 1$ *si* $a\wedge b = 1$ *et donc* $\left(a^2-ab+b^2\right)\wedge(a+b) = 1$ *ou* 3

En effet tout diviseur commun à $a+b$ *et* ab *est un diviseur de* $a(a+b)-ab = a^2$ *et de* $b(a+b)-ab = b^2$ *donc c'est un diviseur commun à* a *et* b

EXO145 : Trouver le plus petit entier naturel qui peut s'écrire comme somme de 9 entiers naturels consécutifs et comme somme de 10 entiers naturels consécutifs et comme somme de 11 entiers naturels consécutifs.

I.S : Soit N l'entier cherché. On a alors $N=9(a+4)$ et $N=5(2b+9)$ et $N=11(c+5)$ avec a , b et c des entiers naturels.

donc N est le plus petit multiple commun de 5 , 9 et 11 et donc $N=495$

EXO146 : Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers et de degré n .

Soient a , p et q des entiers tels que $P(a)\neq 0$, $p\wedge q=1$ et $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$

Montrer que $(p-aq)\mid P(a)$

I.S : On a $P(x)-P(a)=(x-a)G(x)$ avec $G(x)$ un polynôme à coefficients entiers et de degré $n-1$

donc $\left(\frac{p}{q}-a\right)G\left(\frac{p}{q}\right)=-P(a)$

le degré de $G(x)$ étant $n-1$ donc $q^{n-1}G\left(\frac{p}{q}\right)$ est un entier et $(p-aq)q^{n-1}G\left(\frac{p}{q}\right)=-q^nP(a)$

et par suite $(p-aq)\mid q^nP(a)$

or $p\wedge q=1$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $a\in\mathbb{N}$ on a $(p-aq)\wedge q^n=1$ et par suite d'après le théorème de Gauss on déduit que $(p-aq)\mid P(a)$

EXO147 : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers naturels telles que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $a_n^2-2b_n^2=1$

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\wedge b_n=+\infty$

I.S : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(a_n-1)(a_n+1)=2b_n^2$

Si $d_n=(a_n-1)\wedge(a_n+1)$ alors $d_n=2$ et donc l'un des deux termes (a_n-1) et (a_n+1) est divisible par 2 et non divisible par 4 si non on aura $d_n\geq 4$

Supposons que (a_n-1) est divisible par 2 et non divisible par 4 alors $\sqrt{\frac{a_n-1}{2}}$ est un entier qui divise b_n puisque $\left(\frac{a_n-1}{2}\right)(a_n+1)=b_n^2$ et donc $a_n\wedge b_n\geq\sqrt{\frac{a_n-1}{2}}$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{a_n-1}{2}}=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\wedge b_n=+\infty$

EXO148 : Soit $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.......+a_{n-1}x+a_n$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que toutes les racines rationnelles de $P(x)$ sont des entiers relatifs.

I .S : Soient p *et* q *deux entiers premiers entre eux tels que* $\frac{p}{q}$ *soit une racine de* $P(x)$

donc $P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+.......+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+a_n=0$

$$\Rightarrow p^n+a_1qp^{n-1}+a_2q^2p^{n-2}+.......+a_{n-1}q^{n-1}p+a_nq^n=0$$

donc $q\mid p^n$ *et par suite* $q\mid p$ *et donc* $q=1$ *car* p *et* q *sont deux entiers premiers entre eux.*

EXO149 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ le système (S) : $\begin{cases}2x+5y-11z=1\\ x-12y+7z=2\end{cases}$

I.S : Soit $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ *une solution du système* (S) *si elle existe.*

de $\begin{cases}2x+5y-11z=1\\ x-12y+7z=2\end{cases}$ *on déduit que* $-29y+25z=3$ *et donc en passant modulo* 29 , $25z\equiv 3\ [29]$

puisque $25\wedge 29=1$ *alors* 25 *est inversible dans* $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$

en appliquant l'algorithme d'Euclide au couple $(29;25)$ *on trouve que* $25\times 7+29\times(-6)=1$ *et donc* 7 *est l'inverse de* 25 *dans* $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ *(car :* $25\times 7\equiv 1\ [29]$ *)*

ainsi donc $25z\equiv 3\ [29]$ *entraine que* $z\equiv 3\times 7\ [29]$ *ou encore que* $z\equiv 21\ [29]$

soit que $z=21+29k$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

de $\begin{cases}2x+5y-11z=1\\ x-12y+7z=2\end{cases}$ *en déduit aussi que* $\begin{cases}2x+5y=1+11(21+29k)\\ x-12y=2-7(21+29k)\end{cases}$ *et donc que* $\begin{cases}x=71+97k\\ y=18+25k\end{cases}$

réciproquement, on vérifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ *, le triplet* $(71+97k;18+25k;21+29k)$ *est bien solution du système* (S) *et par suite les solutions du système sont* $(71+97k;18+25k;21+29k)$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

EXO150 : Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$.

Montrer que si a,b,c et d sont premiers entre eux deux à deux, alors $ab+bc+cd$ et abc sont premiers entre eux.

I.S *: 1ére méthode : On a* $a\wedge b=a\wedge c=1$ *donc* $a\wedge(bc)=1$ *et par suite* $a\wedge((ab+ca)+bc)=1$

de même, on a $b\wedge((ab+bc)+ac)=1$ *et* $c\wedge((cb+ca)+ab)=1$ *et donc* $abc\wedge(ab+bc+ca)=1$

2eme méthode : Soit p *un diviseur premier commun à* $ab+bc+cd$ *et* abc

Si par exemple p *divise* a *alors* p *divise* $ab+ac$ *et puisque* p *divise* $ab+bc+cd$ *alors il divise aussi* bc *et puisque* $b\wedge c=1$ *alors* p *divise* b *ou* p *divise* c *et par suite* $p=1$ *car* $a\wedge b=a\wedge c=1$

EXO151 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = 2^n + 3^n + 5^n$

Déterminer le plus grand diviseur commun à u_n, u_{n+1} et u_{n+2}

I.S *: Soit δ_n un diviseur commun à u_n, u_{n+1} et u_{n+2}*

O remarque que : $5u_n - u_{n+1} = 3.2^n + 2.3^n$ et par suite $(5u_{n+1} - u_{n+2}) - (5u_n - u_{n+1}) = 2.3^n$

et $3.(5u_n - u_{n+1}) - (5u_{n+1} - u_{n+2}) = 3.2^n$ donc δ_n divise $2.3 = 6$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \equiv 2^{n+1} \ [3]$ donc 3 ne divise pas u_n puisque 3 ne divise pas 2^{n+1} et donc d'après le théorème de Gauss δ_n divise 2 et donc le plus grand diviseur commun à u_n, u_{n+1} et u_{n+2} est 2

EXO152 : Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que a impair et $a \geq 3$

Montrer que $(2^a - 1) \wedge (2^b + 1) = 1$

I.S *: Posons $\delta = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$ donc il existe deux entiers A et B premiers entre eux tels que :*

$2^a - 1 = \delta A$ *et* $2^b + 1 = \delta B$

On alors $2^{ab} = (\delta A + 1)^b \equiv 1 \ [\delta]$ et $2^{ab} = (\delta B - 1)^a \equiv -1 \ [\delta]$ (puisque a est impair) et donc

$1 \equiv -1 \ [\delta]$ *donc δ divise 2*

donc $\delta = 1$ ou $\delta = 2$ or $2^a - 1$ et $2^b + 1$ sont des entiers impaires donc $\delta = 1$

EXO153 : Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux tel que : $q > p > 1$

Montrer qu'ils existent deux entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$ tel que : $q^m = 1 + np$

I.S *: Pour tout $i \geq 1$, on pose k_i le reste de la division euclidienne de q^i par p ce qui veut dire que $q^i \equiv k_i \ [p]$ avec $0 \leq k_i \leq p - 1$*

en particulier, les entiers $k_1, k_2, , \ , k_{p+1} \in \{0;1;.......;p-1\}$ et donc d'après le principe du berger il existe un couple d'entiers (i,j) tel que : $1 \leq i < j \leq p+1$ et $k_i = k_j$

donc $q^j \equiv q^i \ [p]$ et par suite $q^i\left(q^{(j-i)} - 1\right) \equiv 0 \ [p]$

puisque $p \wedge q = 1$ alors $p \wedge q^i = 1$ et donc d'après le théorème de Gauss $q^{(j-i)} - 1 \equiv 0 \ [p]$

ce qui veut dire qu'il existe deux entiers $m = j - i$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $q^m = 1 + np$

EXO154 : Soient x et y deux entiers naturels tels que xy divise $x^2 + y^2 - x$

Montrer que x est un carré parfait (le carré d'un entier).

I.S : Posons $d = x \wedge y$

il existent donc deux entiers premiers entre eux x' et y' tels que $x = dx'$ et $y = dy'$

puisque xy divise $x^2 + y^2 - x$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 + y^2 - x = kxy$, et puisque d^2 divise xy et $x^2 + y^2$ alors d^2 divise aussi $x = x^2 + y^2 - kxy = dx'$ et donc d divise x' et par suite il existe un entier x''

tel que $x' = dx''$

de $x^2 + y^2 - x = kxy$ *on déduit que* $d^2x''^2 + y'^2 - x'' = kdx''y'$ *et donc* x'' *divise* y'^2 *et puisque* x'' *divise aussi* x' *et que* $x' \wedge y' = 1$ *alors* $x'' = 1$ *donc* $x' = d$ *et donc* $x = d^2$ *C.Q.F.D*

EXO155 : Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que pour tout entier naturel n, si $n > ab$ alors il existe deux entiers naturels x et y tels que $n = ax + by$

I.S : - D'après le théorème de Bézout, il existe toujours un couple d'entiers <u>*relatifs*</u> (x, y) *tel que :*
$n = ax + by$

- Si $n = ax + by$ *alors nécessairement* b *divise* $n - ax$

Considérons donc les entiers naturels $n_1 = n - a$, $n_2 = n - 2a$, $n_3 = n - 3a$,.........., $n_b = n - ba$

soit $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_b$ *les restes respectifs dans la division euclidienne des* n_i *par* b

si $r_i = r_j$ *alors* $n - ia = n_i = bq_i + r_i$ *et* $n - ja = n_j = bq_j + r_i$ *et donc* $(i - j)a = b(q_j - q_i)$ *soit que* b *divise* $(i - j)a$ *et puisque* $a \wedge b = 1$ *alors d'après le théorème de Gauss,* b *divise* $(i - j)$

or $1 \le i < b$ *et* $1 \le j < b$ *donc* $|i - j| \le b - 1 < b$ *et par suite* $i - j = 0$

en conclusion on a : $r_i = r_j \Leftrightarrow i = j$

Ainsi donc les entiers naturels $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_b$ *sont deux à deux disjoints et au nombre de* b

comme l'ensemble des restes dans la division euclidienne par b *est* $\{0;1;\ldots\ldots;b-1\}$ *alors nécessairement il existe* $i \in \{1;2;\ldots..;b\}$ *tel que* $r_i = 0$ *et donc* $n - ia = bq_i$ *c.-à-d. que* $n = xa + yb$ *avec* $x = i \in \mathbb{N}$ *et*
$y = q_i \in \mathbb{N}$

EXO156 : Soient a *et* b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que le PGCD de $a+b$ et $a^2 + b^2$ ne peut être que 1 *ou* 2

I.S : Soit p *le plus petit diviseur commun à* $a+b$ *et* $a^2 + b^2$ *(il est premierou égal à* 1 *)*

on a $p \mid a^2 + b^2$ *et* $p \mid (a+b)^2$ *puisque* $p \mid a + b$ *) donc* $p \mid 2ab$ *et par suite* $p \mid 2$ *ou* $p \mid ab$

Si $p \mid 2$ *alors* $p = 1$ *ou* $p = 2$

Si $p \mid ab$ *puisque* $p \mid a + b$ *alors* $p \mid ab + b^2$ *et donc* $p \mid b^2$ *soit que* $p \mid b$ *puisque* p *est premier*

et de la même manière on montre aussi que $p \mid a$ *et donc* $p = 1$ *car* $a \wedge b = 1$

en conclusion $p = 1$

EXO157 : Soient k, p *et* m trois entiers naturels tels que : $k \le p \le m$ Montrer que : $(1 + k \times m!) \wedge (1 + p \times m!) = 1$

I.S : Soit d *un diviseur premier commun à* $1 + k \times m!$ *et* $1 + p \times m!$

alors $d \mid p(1 + k \times m!) - k(1 + p \times m!) = p - k$ *or* $p - k \le m$ *donc* $d \mid m!$

puisque $d\,|\,1+k\times m!$ *alors* $d\,|\,1=(1+k\times m!)-k\times m!$ *donc* $d=1$

EXO158 : Soient a *et* b deux entiers. Montrer qu'au moins un terme de la suite $(an+b)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas un carré parfait (le carré d'un entier).

I.S : Soit p *un nombre premier strictement supérieur à* $a+b$

on a $a\wedge p=1$ *donc* $a\wedge p^2=1$ *et par suite d'après le théorème de Bézout, l'équation* $ax-p^2y=1$ *admet au moins une solution* $(x,y)\in\mathbb{N}^2$

Si on pose $n=(p-b)x$ *alors* $an+b=p^2y(p-b)+p$ *donc* $p\,|\,an+b$ *mais* p^2 *ne divise pas* $an+b$ *et par suite il ne peut être un carré parfait.*

EXO159 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $x^5-x^3-x^2+1=y^2$

I.S : Remarquons que les couples $(-1;0),(1;0),(0;-1)$ *et* $(0;1)$ *sont solutions de* (E)

Supposons que le couple d'entiers $(x;y)$ *soit solution de* (E) *avec* $x\notin\{-1;0;1\}$

On a $(E)\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)=y^2$ *ainsi* $(x-1)^2$ *divise* y^2 *et donc*

$$(x+1)(x^2+x+1)=\left(\frac{y}{x-1}\right)^2$$

donc $(x+1)(x^2+x+1)$ *est le carré d'un entier. Or* $x\wedge(x+1)=1$ *donc* $(x+1)\wedge(x^2+x+1)=1$ *et donc* $(x+1)$ *et* (x^2+x+1) *sont des carré d'entiers.*

Or pour tout $x\in\mathbb{Z}$ *, on a* x^2+x+1 *est un nombre impair et* $x^2+x+1\equiv 3,5$ *ou* $7\ [8]$ *ce qui est absurde car le carré d'un entier impair est congru à* 1 *modulo* 8 *et par suite les seules solutions de l'équation* (E) *sont les couples* $(-1;0),(1;0),(0;-1)$ *et* $(0;1)$

EXO160 : Soient a *et* m deux entiers strictement supérieurs à 1 et soit q_m le quotient dans la division euclidienne de a^m par $(a-1)$

Montrer que : $q_m\wedge(a-1)=m\wedge(a-1)$

I.S : On a $a^m=(a-1)\left(\sum_{k=0}^{k=m-1}a^k\right)+1$ *donc* $q_m=\sum_{k=0}^{k=m-1}a^k$ *(et le reste est* 1 *)*

de même pour tout $k\in\{1;.......m-1\}$ *on a* $a^k=(a-1)\left(\sum_{j=0}^{j=k-1}a^j\right)+1$

si on note $S_k=\sum_{j=0}^{j=k-1}a^j$ *alors* $a^k=(a-1)S_k+1$ *et donc* $q_m=(a-1)\left(\sum_{k=0}^{k=m-1}S_k\right)+m$ *et par suite d'après le théorème d'Euclide on a :* $q_m\wedge(a-1)=(a-1)\wedge m$

EXO161 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$

Déterminer le PGDC de S_n *et* S_{n+1}

I.S : On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $S_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

si n *est pair :* $n = 2p$ *alors* $S_{2p} = p^2(2p+1)^2$ *et* $S_{2p+1} = (2p+1)^2(p+1)^2$ *donc*

$S_{2p} \wedge S_{2p+1} = (2p+1)^2\left(p^2 \wedge (p+1)^2\right) = (2p+1)^2$ *car* $p \wedge (p+1) = 1$

si n *est impair :* $n = 2p+1$ *alors* $S_{2p+1} = (p+1)^2(2p+1)^2$ *et* $S_{2p+2} = (2p+3)^2(p+1)^2$ *donc*

$S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} = (p+1)^2\left((2p+1)^2 \wedge (2p+3)^2\right) = (p+1)^2$ *car* $(2p+1)\wedge(2p+3) = 1$

EXO162 : Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ soit le carré d'un entier.

I.S : Supposons que $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ *avec* $a \in \mathbb{N}^*$

on a $2^n = a^2 - 2^8(2^3+1) = a^2 - (48)^2 = (a-48)(a+48)$ *donc il existe* $(u,v) \in \mathbb{N}^{*2}$ *tel que :*

$v > u$, $u + v = n$, $a - 48 = 2^u$ *et* $a + 48 = 2^v$

de plus $2^v - 2^u = 2^u\left(2^{v-u} - 1\right) = 2 \times 48 = 3 \times 2^5$ *donc nécessairement on doit avoir :* $2^u = 2^5$ *et* $2^{v-u} - 1 = 3$

par suite $(u,v) = (5;7)$

Réciproquement on vérifie que $2^8 + 2^{11} + 2^{12}$ *est le carré d'un entier.*

EXO163 : Montrer que pour tout entier $n > 6$, il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a > 1$ *et* $b > 1$, tel que :

$a \wedge b = 1$ et $n = a + b$

I.S : Si n *est pair alors* $n = 2 + (n-2)$ *et* $2 \wedge (n-2) = 1$ *car* $n-2$ *est impair*

Si n *est pair.*

si $n = 4k$ *alors* $n = (2k+1) + (2k-1)$ *de plus* $2k+1 > 2k-1 > 1$ *et* $(2k-1)$ *et* $(2k+1)$ *sont deux entiers impaires consécutifs donc ils sont premiers entre eux.*

si $n = 4k+2$ *alors* $n = (2k-1) + (2k+3)$ *de plus* $2k+3 > 2k-1 > 1$*(car* $k > 1$*)*

si d *est un diviseur commun à* $(2k-1)$ *et* $(2k+3)$ *alors* d *divise* 4 *et puisque* $(2k-1)$ *et* $(2k+3)$ *sont impaires alors* $d = 1$ *donc* $(2k-1)$ *et* $(2k+3)$ *sont premiers entre eux.*

EXO164 : On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0=0$, $u_1=1$ *et* $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ (dite suite de Fibonacci)

1-(i) Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}-\{0;1\}\right)$; $u_nu_{n-2}-u_{n-1}^2=\left(-1\right)^{n-1}$

(ii) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n *et* u_{n+1} sont premiers entre eux.

2-(i) Vérifier que pour tout entier $p\geq 2$ et pour tout entier $q\geq 0$; $u_pu_{q+1}+u_{p-1}u_q=u_{p-1}u_{q+2}+u_{p-2}u_{q+1}$

(ii) En déduire que pour tout entier $q\geq 0$ et pour tout entier $p>q$; $u_p=u_{p-q}u_{q+1}+u_{p-q-1}u_q$

3-(i) Montrer que pour tout couple d'entiers naturel non nul $\left(m,n\right)$; si $n\mid m$ alors $u_n\mid u_m$

(ii) En déduire que pour tout couple d'entiers naturel non nul $\left(m,n\right)$; $u_n\wedge u_m=u_{n\wedge m}$

4- Trouver une suite infinie extraite de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont premiers entre eux deux à deux.

I.S : 1-(i) On remarque que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}-\{0;1\}\right)$; $u_nu_{n-2}-u_{n-1}^2=-\left(u_{n-1}u_{n-3}-u_{n-2}^2\right)$

(ii) il suffit d'appliquer le théorème de Bézout à $u_nu_{n-2}+u_{n-1}\left(-u_{n-1}\right)=\left(-1\right)^{n-1}$

2-(i) simple vérification

(ii) si $p>q$ *alors* $u_p=u_pu_1+u_{p-1}u_0=u_{p-1}u_2+u_{p-2}u_1=\ldots\ldots.$

3-(i) Supposons que $n\mid m$ *et posons* $q=\dfrac{m}{n}$ *puis procédons par récurrence sur* q

- $q=1$ *on aura* $m=n$ *et donc* $u_n=u_m$

- *supposons que jusqu'à l'ordre* q *, si* $q=\dfrac{m}{n}$ *alors* $u_n\mid u_m$

si $\dfrac{m}{n}=q+1$ *alors* $\dfrac{m-n}{n}=q$ *et donc* $u_n\mid u_{m-n}$ *or* $u_m=u_{m-n}u_{n+1}+u_{m-n-1}u_n$

donc si $u_n\mid u_{m-n}$ *alors* $u_n\mid u_m$

et donc d'après le principe de récurrence : pour tout couple d'entiers naturel non nul $\left(m,n\right)$;

si $n\mid m$ *alors* $u_n\mid u_m$

(ii) Considérons la division euclidienne de m *par* n : $m=nq+r$ *avec* $0\leq r<n$

On a $u_m=u_{nq+r}=u_{nq}u_{r+1}+u_{nq-1}u_r$ *et si* d *est un diviseur commun à* u_n *et* u_m *alors* d *est un diviseur commun à* u_{nq} *et* u_m *car* $u_n\mid u_{nq}$ *donc* $d\mid u_{nq-1}u_r$ *et puisque* $u_{nq}\wedge u_{nq-1}=u_{nq\wedge(nq-1)}=u_1=1$ *alors d'après le théorème de Gauss,* $d\mid u_r$

ainsi donc tout diviseur commun à u_m *et* u_n *est diviseur commun à* u_n *et* u_r

Par suite $u_m\wedge u_n=u_n\wedge u_r$ *et par application de cet algorithme jusqu'au dernier reste non nul on obtient que* $u_n\wedge u_m=u_{n\wedge m}$

4- On prendra pour suite extraite la suite $\left(u_{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $F_n=2^{2^n}+1$ *(les nombres de Fermat)*

EXO165: Résoudre dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ l'équation : (E) ; $x^3-3x^2+2x=0$

I.S :On a : $x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ *donc* $(E) \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)\equiv 0 \quad [9]$ *et par suite* x *est un diviseur de* 0 *dans l'anneau* $\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,+,\times\right)$ *et donc* x *et* 9 *ne sont pas premiers entre eux.*

Les entiers de $\{0;1;.......;8\}$ *qui ne sont pas premiers avec* 9 *sont :* 0 , 3 *et* 6

et pour chacune de ces valeurs on vérifie si on a $9\,|\,x(x-1)(x-2)$

EXO166 : Trouver tous les entiers $0\leq n\leq m$ tels que : $\begin{cases} m\wedge n=m-n \\ m\vee n=300 \end{cases}$

I.S : Posons $\delta=m\wedge n$ *donc il existe un couple d'entiers premiers entre eux* (m',n') *tel que :*

$m=\delta m'$ *et* $n=\delta n'$ *et donc* $\begin{cases} \delta=m-n=\delta(m'-n') \\ (\delta m')\vee(\delta n')=\delta(m'\vee n')=\delta m'n'=300 \end{cases}$ *et par suite* $\begin{cases} m'=n'+1 \\ \delta n'(n'+1)=300 \end{cases}$

il ne reste qu'à déterminer les diviseurs de $300=2^2.3.5^2$ *puis déterminer les valeurs de* n' *en tenant compte que* $m'=n'+1$ *doit aussi être un diviseur de* 300 *ensuite déduire pour chacune de ces valeurs* δ, n *et* m

EXO167 : Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ on pose $F_n=2^{2^n}+1$ (les nombres de Fermat)

Montrer que les entiers F_n sont premiers entre eux deux à deux.

I.S : Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ *, on a :* $F_{n+k}-2=\left(2^{2^n}\right)^{2^k}-1=\left(2^{2^n}-1\right)q$ *donc* $F_n\,|\,F_{n+k}-2$ *de plus* F_n *et* F_{n+k} *sont impairs et donc tout diviseur commun à* F_n *et* F_{n+k} *doit être impair et doit diviser* 2 *donc nécessairement doit être égal à* 1

EXO168 : Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que $a\wedge b=1$ et $2\,|\,ab$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, les entiers $a^{2^n}+b^{2^n}$ sont premiers enter eux deux à deux.

I.S : Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A_n=a^{2^n}$, *et* $u_n=A_n+B_n$

On a pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $u_{n+k}=A_n^{2^k}+B_n^{2^k}$ *et si* $d=u_n\wedge u_{n+k}$ *alors* $\begin{cases} u_n\,|\,A_n^2-B_n^2 \\ A_n^2-B_n^2\,|\,u_{n+k}-2B_n^{2^k} \end{cases}$

donc $d\,|\,2B_n^{2^k}$ *or* d *est impair donc d'après le théorème de Gauss,* $d\,|\,B_n^{2^k}$

et de la même façon on montre que $d\,|\,A_n^{2^k}$ *donc* $d\,|\,a$ *et* $d\,|\,b$ *et par suite* $d=1$ *car* $a\wedge b=1$

EXO169 : Déterminer tous les entiers naturels non nuls tels que : $n\cdot 2^{n-1}+1$ soit un carré parfait.

I.S : Pour $n=1,2,3$ *et* 4 *ce n'est pas vrais*

Pour $n=5$ *, on a :* $5\cdot 2^4+1=9^2$ *donc c'est vrais*

Pour $n>5$ *, on démontre par récurrence que* $2^{n-3}>n+1$

Supposons qu'il existe un entier naturel m *tel que* $n\cdot 2^{n-1}+1=m^2$

- m *est nécessairement impair car* m^2 *est impair*

posons $m=2k+1$ *donc* $n\cdot 2^{n-3}=k(k+1)$ *et puisque* $k\wedge(k+1)=1$ *alors :*

$2^{n-3}\mid k$ *ou bien* $2^{n-3}\mid k+1$ *et donc* $k+1\geq 2^{n-3}>n+1$ *et par suite* $k>n$

ainsi donc on aura $k(k+1)\geq k\cdot 2^{n-3}>n\cdot 2^{n-3}=k(k+1)$ *ce qui est absurde*

et donc pour $n>5$ *, l'entier* $n\cdot 2^{n-1}+1$ *ne peut être un carré parfait.*

En conclusion $n=5$ *est la seule valeur pour laquelle* $n\cdot 2^{n-1}+1$ *est le carré d'un entier.*

EXO170 : Soit n un entier impair.

Montrer que si d est un diviseur de n^2+2 alors $d\equiv 1\ [8]$ ou $d\equiv 3\ [8]$

I.S : n *étant impair donc* $n^2\equiv 1\ [8]$ *et* $n^2\equiv 1$ *ou* $9\ [16]$

et par suite $n^2+2\equiv 3\ [8]$ *(*)* *et* $n^2+2\equiv 3$ *ou* $11\ [16]$ *(**)*

Si $d\mid n^2+2$ *alors* $d\equiv 1$ *ou* 3 *ou* 5 *ou* $7\ [8]$ *et* $d\equiv 1$ *ou* 3 *ou* 9 *ou* $11\ [16]$

or $d\equiv 1\ [8]$ *équivaut à* $d\equiv 1$ *ou* $9\ [16]$

et $d\equiv 3\ [8]$ *équivaut à* $d\equiv 3$ *ou* $11\ [16]$

et $d\equiv 5\ [8]$ *équivaut à* $d\equiv 5$ *ou* $13\ [16]$ *impossible d'avoir (*) et (**)*

et $d\equiv 7\ [8]$ *équivaut à* $d\equiv 7$ *ou* $15\ [16]$ *impossible d'avoir (*) et (**)*

En conclusion $d\equiv 1\ [8]$ *ou* $d\equiv 3\ [8]$

EXO171 : Soit k un entier supérieur à 2

Montrer que l'équation $n(n+1)(n+2)=m^k$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

I.S : Remarquer d'abord que deux entiers consécutifs ne peuvent jamais être simultanément des puissances $k-ieme$ *d'entiers. En effet, si* $n=a^k$ *et* $n+1=b^k$ *alors*

$1=(n+1)-n=b^k-a^k\geq(a+1)^k-a^k\geq ka>1$

- Si n *est impair alors sont deux à deux premiers entre eux et dans ce cas si* $n(n+1)(n+2)=a^k$ *alors*

$n=a_1^k$ *,* $n+1=a_2^k$ *et* $n+2=a_3^k$ *ce qui est absurde d'après la remarque précédente.*

- Si n *est pair alors* $n\wedge(n+2)=2$ *et dans ce cas, si* $n(n+1)(n+2)=a^k$ *alors il existe* $(p,q,r)\in\mathbb{N}^3$

tel que : $\left(n=2p^k\ ,\ n+1=q^k\ \text{ et }\ n+2=2^{k-1}r^k\right)$ *ou* $\left(n=2^{k-1}p^k\ ,\ n+1=q^k\ \text{ et }\ n+2=2r^k\right)$

mais alors on aura $(n+1)^2=\left(q^2\right)^k$ *et* $n(n+2)=(2pr)^k$ *ce qui est impossible d'après la remarque précédente car* $n(n+2)$ *et* $(n+1)^2$ *sont deux entiers consécutifs.*

En conclusion, l'entier $n(n+1)(n+2)$ *ne peut jamais être une puissance* $k-ieme$ $(k\geq 2)$

EXO172 : Montrer qu'il n'est pas possible que la somme des carrés de 13 entiers consécutifs soit un carré parfait.

I.S : Considérons les 13 entiers consécutifs : $n-6, n-5, ..., n-1, n, n+1, ..., n+5, n+6$

et posons $N = (n-6)^2 + (n-5)^2 + ... + n^2 + ... + (n+5)^2 + (n+6)^2 = 13(n^2+14)$

Supposons que $N = a^2$ *avec* $a \in \mathbb{N}$ *alors* $a^2 = 13(n^2+14)$ *et donc* $a^2 - 13^2 = 13(n^2+1)$ *soit que*

si $(a+13 = 13 \text{ et } a-13 = n^2+1)$ *alors* $n^2 = -14$ *ce qui est impossible*

si $(a+13 = n^2+1 \text{ et } a-13 = 13)$ *alors* $n^2 = 30$ *ce qui est impossible*

si $(a+13 = 13(n^2+1) \text{ et } a-13 = 1)$ *alors* $3n^2 = 14$ *ce qui est impossible*

donc dans tous les cas N *n'est pas un carré parfait.*

EXO173 : Montrer que $19341 \mid 2^{306} - 1$

I.S : Il s'agit de montrer que : $2^{306} \equiv 1 \quad [19341]$

Remarquons d'abord que : $19341 = 7 \times 9 \times 307$ *et que* 7 *et* 307 *sont des nombres premiers.*

D'aprés le petit théorème de Fermat, $2^{306} \equiv 1 \quad [307]$ *car* 307 *est un nombre premier et* $2 \wedge 307 = 1$

et toujours d'après le petit théorème de Fermat, $2^6 \equiv 1 \quad [7]$ *donc* $2^{306} \equiv 1 \quad [7]$ *car* $306 = 6 \times 51$

de plus $2^3 \equiv -1 \quad [9]$ *donc* $2^{306} \equiv 1 \quad [9]$ *ainsi donc :* $2^{306} \equiv 1 \quad [7]$ *et* $2^{306} \equiv 1 \quad [9]$ *et* $2^{306} \equiv 1 \quad [307]$

puisque $7, 9$ *et* 307 *sont premiers entre eux deux à deux alors* $2^{306} \equiv 1 \quad [7 \times 9 \times 307]$

EXO174 : Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $2^n + 3^n + 5^n$ n'est jamais divisible par 7

I.S : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ *, posons* $u_n = 2^n + 3^n + 5^n$

d'après le petit théorème de Fermat, puisque 7 *est un nombre premier et qu'il ne divise ni* 2 *ni* 3 *ni* 5 *(ou encore que* $2 \wedge 7 = 1$, $3 \wedge 7 = 1$ *et* $5 \wedge 7 = 1$ *) on a :* $2^6 \equiv 1 \quad [7]$, $3^6 \equiv 1 \quad [7]$ *et* $5^6 \equiv 1 \quad [7]$ *donc*

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{n+6} \equiv 2^n \quad [7]$, $3^{n+6} \equiv 3^n \quad [7]$ *et* $5^{n+6} \equiv 5^n \quad [7]$ *et donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+6} \equiv u_n \quad [7]$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est modulo* 7 *, périodique de période* 6

ainsi donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \equiv u_0 , u_1 , u_2 .... ou\ u_5 \quad [7]$ *et donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \equiv 1, 3 \text{ ou } 6 \quad [7]$

et par suite l'entier u_n *n'est jamais divisible par* 7

EXO175 : Soient x, y *et* z trois entiers distincts deux à deux.

Montrer que $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ est divisible par $5(x-y)(y-z)(z-x)$

I.S : 5 *est un nombre premier donc* $(\forall a \in \mathbb{Z})$; $a^5 \equiv a \quad [5]$

donc $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \equiv (x-y) + (y-z) + (z-x) \quad [5]$

ce qui donne $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \equiv 0 \quad [5]$ *ainsi* 5 *divise* $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

posons $P(x)=(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ *(considéré comme polynôme en* x*)*

on a $P(y)=P(z)=0$ *donc*

$(x-y)$ *divise* $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ *et* $(x-z)$ *divise* $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

posons $Q(y)=(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ *(considéré comme polynôme en* y*)*

on a $Q(z)=0$ *et donc* $(y-z)$ *divise* $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

par suite $(x-y)(y-z)(z-x)$ *divise* $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

et donc $5(x-y)(y-z)(z-x)\mid(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

EXO176 : Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que p divise $n\cdot 2^n+1$

I.S : Soit p *un nombre premier impair et considérons les entiers positifs* $n=(p-1)(kp+1)$ *avec* $k\in\mathbb{N}^*$

On a $(p-1)\mid n$ *et d'après le petit théorème de Fermat* $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$ *donc* $2^n\equiv 1\ [p]$

et par suite $n2^n\equiv n\ [p]$ *or* $n+1\equiv 0\ [p]$ *(puisque* $n+1=kp^2+(1-k)p$ *) et donc*

il existe donc une infinité d'entiers positifs n *tels que* p *divise* $n\cdot 2^n+1$

EXO177 : Montrer que pour tout nombre premier p , il existe un nombre premier q tel que : $q\mid p^p-1$ et $p\mid q-1$

I.S :-Remarquer que $q=3$ *correspond bien au cas* $p=2$

- On suppose $p\geq 3$

on a : $(\forall k\in\{0,1,......., p-1\})$; $p^k\equiv 1\ [p-1]$ *car* $p-1\mid p^k-1$

donc $p^{p-1}+p^{p-2}+.......+p+1\equiv 1\ [p-1]$ *et d'après le théorème de Bézout,* $p-1$ *et*

$p^{p-1}+p^{p-2}+.......+p+1$ *sont premier entre eux.*

Soit q *un diviseur premier de* $p^{p-1}+p^{p-2}+.......+p+1$

puisque $p^p-1=(p-1)(p^{p-1}+p^{p-2}+.......+p+1)$ *alors* q *ne divise pas* $(p-1)$ *et divise* p^p-1

soit que $p^p\equiv 1\ [q]$ *ainsi donc* p *et* q *sont premiers entre eux et donc d'après le théorème de Fermat,*

on a aussi $p^{q-1}\equiv 1\ [q]$

par suite si $d=p\wedge(q-1)$ *alors* $p^d\equiv 1\ [q]$

or p *est premier donc* $d=1$ *ou* p

si $d=1$ *alors on aura* $p\equiv 1\ [q]$ *ce qui est absurde car* q *ne divise pas* $p-1$ *par suite* $d=p$

et donc $p\mid q-1$

EXO178 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (E) ; $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=0$

I.S : Soit $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^{*3}$ *une solution de l'équation* (E)

On a $(E) \Leftrightarrow zx^2+xy^2+yz^2=0 \Leftrightarrow (-xz)^3=xyz^2\left(xy+z^2\right)$

posons $d=xy\wedge z^2$ *, donc il existe deux entiers premiers entre eux* a *et* b *tel que :* $xy=da$ *et* $z^2=db$

et donc $(E) \Leftrightarrow (-xz)^3=d^3ab(a+b)$ *et par suite* $ab(a+b)$ *est le cube d'un entier.*

Or a *,* b *et* $(a+b)$ *sont premiers entre eux deux à deux (car* $a\wedge b=1$*) donc ils sont aussi des cubes d'entiers*

il existe donc trois entiers n *,* m *et* k *tels que* $a=n^3$ *,* $b=m^3$ *et* $a+b=k^3$ *soit que* $k^3=n^3+m^3$

or d'après le grand théorème de Fermat l'équation $X^3+Y^3=Z^3$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}^3$ *autre que la solution* $(0;0;0)$ *et donc* $n=m=k=0$ *par suite* $a=b=a+b=0$ *soit que* $x=y=z=0$ *ce qui est absurde car* x *,* y *et* z *sont supposés toutes non nuls.*

EXO179 : Soient a , b , c et d des entiers de l'ensemble $\{0;1;2;.........;99\}$

et pour tout entier k on pose : $n_k=101k+100\times 2^k$.

Montrer que si $n_a+n_b\equiv n_c+n_d \quad [10100]$ alors $a=c$ et $b=d$

I.S : Remarquons que $10100=101\times 100$

si $n_a+n_b\equiv n_c+n_d \quad [10100]$ *alors* $a+b\equiv c+d \quad [100]$ *et* $2^a+2^b\equiv 2^c+2^d \quad [101]$

posons $f(x)=x^2-\left(2^a+2^b\right)x+2^{a+b}$ *et* $g(x)=x^2-\left(2^c+2^d\right)x+2^{c+d}$

101 *étant un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat* $2^{100}\equiv 1 \quad [101]$ *et donc* *et par suite* $(\forall x\in\mathbb{Z})$; $f(x)\equiv g(x) \quad [101]$

en particulier $g\left(2^c\right)\equiv f\left(2^c\right) \quad [101]$ *et puisque* $g\left(2^c\right)=0$ *et* $f\left(2^c\right)=\left(2^c-2^a\right)\left(2^c-2^b\right)$

alors $\left(2^c-2^a\right)\left(2^c-2^b\right)\equiv 0 \quad [101]$ *soit que* $2^c\equiv 2^a \quad [101]$ *ou* $2^c\equiv 2^b \quad [101]$

Supposons que $2^c\equiv 2^a \quad [101]$ *soit que* $2^{c-a}\equiv 1 \quad [101]$ *et* δ *le plus petit entier positif tel que* $2^\delta\equiv 1 \quad [101]$ *et* r *le reste de la division euclidienne de* 100 *par* δ

On a $2^{100}\equiv 1 \ [101]$ *et donc* $2^{100}=2^{q\delta+r}=\left(2^\delta\right)^q\times 2^r\equiv 2^r \quad [101]$ *soit que* $2^r\equiv 1 \quad [101]$ *avec* $0\le r<\delta$

et donc $r=0$ *car* δ *le plus petit entier positif tel que* $2^\delta\equiv 1 \quad [101]$ *ainsi donc* δ *est un diviseur* 100

et par le calcul direct sur les diviseurs de 100 *on vérifie que* $\delta=100$ *est la seule valeur qui vérifie la propriété* $2^\delta\equiv 1 \quad [101]$ *ainsi donc* 100 *est le plus petit entier positif qui vérifie* $2^\delta\equiv 1 \quad [101]$

puisque $2^{c-a}\equiv 1 \ [101]$ *alors* 100 *divise* $(a-c)$ *et donc* $a\equiv c \quad [100]$ *puisque* $0\le a\,;c\le 99$ *alors* $a=c$ *et donc* $b=d$ *ce qu'il fallait démontrer.*

EXO180 : Montrer que si p est un nombre premier de la forme $4k+3$ (avec $k \in \mathbb{N}$)
alors l'équation : $x^2 \equiv p-1 \quad [p]$ n'a pas de solution.

I.S : Supposons p est un nombre premier et que $p=4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$

si x est une solution de cette équation alors on a d'une part $x^p \equiv x \quad [p]$ (petit théorème de Fermat)

et d'autre part $x^p = x^{p-1} \cdot x = \left(x^2\right)^{2k+1} .x \equiv -x \quad [p]$ car et que $2k+1$ est impair

donc $x \equiv -x \quad [p]$ ce qui donne $2x \equiv 0 \ [p]$ ou encore que $x \equiv 0 \ [p]$ car $2 \wedge p = 1$

ainsi on aura $x^2 \equiv 0 \ [p]$ et $x^2 \equiv p-1 \ [p]$ et en déduit que $p-1 \equiv 0 \ [p]$ ou encore $p \equiv 1 \ [p]$ ce qui est absurde et donc l'équation $x^2 \equiv p-1 \quad [p]$ n'a pas de solution.

EXO181 : Montrer que pour tout entier n, l'ensemble $S = \{n; n+1; n+2; n+3; n+4; n+5\}$ ne peut pas être partagé en deux sous- ensembles disjoints tel que le produit de tous les éléments de l'un soit égal au produit de tous les éléments de l'autre.

I.S : Supposons qu'il existe deux sous-ensembles S_1 et S_2 de S tel que : $S_1 \cup S_2 = S$ et $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

soit $\prod_1$ le produit de tous les éléments de S_1 et $\prod_2$ le produit de tous les éléments de S_2

on a $\prod_1 = \prod_2$ donc $\prod_1 \equiv \prod_2 \quad [7]$

- Si l'un des éléments de S est congru à 0 modulo 7 alors aucun autre élément de S ne l'est et on aura l'un des $\prod_i$ égal à 0 modulo 7 et l'autre non ce qui est absurde car $\prod_1 \equiv \prod_2 \quad [7]$

- Supposons donc qu'aucun élément de S n'est congru à 0 modulo 7

on aura d'une part le produit de tous les éléments de S est $\prod_1 \times \prod_2 \equiv \prod_1^2 \quad [7]$

et d'autre part $\prod_1 \times \prod_2 \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ [7]$ or 7 est un nombre premier donc d'après le théorème de Wilson $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv -1 \ [7]$ on aura donc $\prod_1^2 \equiv -1 \quad [7]$ ce qui est absurde aussi car

pour tout entier n, $n^2 \equiv 1;\ 2$ ou $4 \quad [7]$

EXO182 : Montrer que pour tout couple d'entiers $(m;n)$, l'entier $N = mn\left(m^{60} - n^{60}\right)$ est divisible par l'entier 56786730

I.S : La décomposition en produit de facteurs premiers de 56786730 est : $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$

soit d un diviseur de 60, donc $N = N'\left(n\left(m^{d+1} - m\right) - m\left(n^{d+1} - n\right)\right)$

si $(d+1)$ est premier alors d'prés le petit théorème de Fermat, il divise $m^{d+1} - m$ et $n^{d+1} - n$ donc il divise aussi N

Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60

donc N est divisible par les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 31 et 61

et par suite N est divisible par leur produit qui est : 56786730

remarque : $60 = dk$ donc

$$N = nm\left(\left(m^d\right)^k - \left(n^d\right)^k\right) = nm\left(m^d - n^d\right)\left(\left(m^d\right)^{k-1} + \left(m^d\right)^{k-2} \cdot \left(n^d\right) + \ldots\ldots\ldots \left(n^d\right)^{k-1}\right)$$

soit que : $N = N'\left(n\cdot m^{d+1} - m\cdot n^{d+1}\right) = N'\left(n\left(m^{d+1}-m\right) - m\left(n^{d+1}-n\right)\right)$

EXO183 : (i) Démontrer qu'il existe une infinité de triplets $(m,n,p)\in\mathbb{N}^{*3}$ tels que : $4mn - m - n = p^2 - 1$

(ii) Démontrer qu'il n'existe aucun un triplets $(m,n,p)\in\mathbb{N}^{*3}$ tels que : $4mn - m - n = p^2$

I.S : (i) Pour tout entier t *non nul, il suffit de poser :* $m = \dfrac{t(t-1)}{2}$, $n = \dfrac{t(t+1)}{2}$ *et* $p = t^2 - 1$

(ii) S'il existe un triplets $(m,n,p)\in\mathbb{N}^{*3}$ *tels que :* $4mn - m - n = p^2$ *alors* $(4m-1)(4n-1) = 4p^2 + 1$

soit q *un diviseur premier de* $(4m-1)$ *alors* $(2p)^2 \equiv -1\ [q]$

puisque q *est premier et que* $q\wedge(2p) = 1$ *alors* $(2p)^{q-1} \equiv 1\ [q]$

et puisque $(2p)^{q-1} = \left((2p)^2\right)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}}\ [q]$ *alors* $(-1)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1\ [q]$

ce qui entraine que $\dfrac{q-1}{2}$ *est pair soit que* $\dfrac{q-1}{2} = 2k\ (k\in\mathbb{N})$ *et donc* $q \equiv 1\ [4]$

et par suite on aura : $4m - 1 \equiv 1\ [4]$ *et* $4m - 1 \equiv 3\ [4]$ *ce qui est absurde*

EXO184 : Soit $x\in\mathbb{N}$.

Montrer que si $10^x \equiv 2\ [19]$ alors $x \equiv 17\ [18]$

I.S : Si $10^x \equiv 2\ [19]$ *alors* $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$

or d'après le petit théorème de Fermat : $10^{18} \equiv 1\ [19]$ *car 19 est premier et* $10\wedge 19 = 1$

donc si $d = 18\wedge(x+1)$ *alors d'après le théorème de Bézout il existe un couple d'entiers* (u,v) *tel que*

$18u + (x+1)v = d$ *et donc* $10^d = \left(10^{18}\right)^u \times \left(10^{(x+1)}\right)^v \equiv 1\ [19]$

Les diviseurs de 18 *étant : 1 , 2 , 3 , 6 , 9 et 18 et par un calcul direct on trouve que seule la valeur* $d = 18$ *vérifie* $10^d \equiv 1\ [19]$ *donc* $18\wedge(x+1) = 18$ *et par suite* 18 *divise* $(x+1)$ *soit que* $x \equiv 17\ [18]$

EXO185 : Trouver le reste de la division euclidienne de $A = 1000^{2000^{3000^{4000}}}$ par 19

I.S : On a $1000 \equiv -7\ [19]$ *donc* $A \equiv 7^{2000^{3000^{4000}}}\ [19]$ *de plus d'après le théorème de Fermat* $7^{18} \equiv 1\ [19]$

il faut donc déterminer le reste de la division euclidienne de $2000^{3000^{4000}}$ *par* 18

on a : $2000 \equiv 2\ [18]$ *donc* $2000^{3000^{4000}} \equiv 2^{3000^{4000}}\ [18]$

or $2^6 \equiv -8\ [18]$ *et* $2^{12} \equiv -8\ [18]$

si on suppose que $2^{6n} \equiv -8\ [18]$ *jusqu'à l'ordre* n *(hypothèse de récurrence)*

alors $2^{6(n+1)} = 2^{6n}\cdot 2^6 \equiv -8\ [18]$ *et on peut conclure d'après le principe de récurrence que*

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $2^{6n} \equiv -8\ [18]$

or 6 *divise* 3000 *donc il divise aussi* 3000^{4000} *et par suite* $2^{3000^{4000}} \equiv -8 \equiv 10 \quad [18]$

ainsi donc le reste de la division euclidienne de $2000^{3000^{4000}}$ *par* 18 *est* 10

et donc $A = \left(7^{18k+10}\right) = \left(7^{18}\right)^k \times 7^{10} \equiv 7^{10} \quad [19]$ *et en remarquant que* $7^3 = 343 \equiv 1 \quad [19]$

on aura $7^{10} = 7^9 \cdot 7 \equiv 7 \quad [19]$ *et par suite* $A \equiv 7 \quad [19]$

le reste de la division euclidienne de A *par* 19 *est* 7

EXO186 : Soit p un nombre premier. Montrer que si $(8p-1)$ est premier alors $(8p+1)$ ne l'est pas.

I.S : On a $(8p-1)(8p+1) = 64p^2 - 1 \equiv p^2 - 1 \quad [3]$

- Si $p = 3$ *alors* $8p-1 = 23$ *et* $8p+1 = 25$ *et donc la proposition est vraie*

- Si $p \geq 5$ *puisque* $3 \wedge p = 1$ *alors* $3 \mid p^2 - 1$ *soit que* $3 \mid (8p-1)(8p+1)$

et si est premier alors d'après le théorème de Gauss, $3 \mid 8p+1$

donc $(8p+1)$ *n'est pas premier car* $8p+1 > 3$

EXO187 : Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si l'un des deux entiers $(2^n - 1)$ et $(2^n + 1)$ est premier alors l'autre ne l'est pas.

I.S : On a $(2^n - 1)(2^n + 1) = 4^n - 1 \equiv 0 \quad [3]$ *ainsi donc* $3 \mid 2^n - 1$ *ou* $3 \mid 2^n + 1$

de plus $2^n + 1 > 2^n - 1 \geq 7 > 3$ *donc si l'un des deux entiers* $(2^n - 1)$ *et* $(2^n + 1)$ *est premier alors l'autre est divisible par* 3 *.*

EXO188 : Montrer que $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right) \quad ; \quad a^2 \mid b^2 \Rightarrow a \mid b$

I.S : Soit $b = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{r_i}$ *la décomposition en facteurs premiers de* b. *On a alors* $b^2 = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{2r_i}$

si $a^2 \mid b^2$ *alors* $a^2 = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{2s_i}$ *avec pour tout* i , $0 \leq s_i \leq r_i$ *donc* $a = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{s_i}$ *et donc* $a \mid b$

EXO189 : Soient a *et* b deux entiers naturels tels que $\dfrac{a+1}{b} + \dfrac{b+1}{a}$ soit un entier naturel.

Montrer que : $a \wedge b \leq \sqrt{a+b}$

I.S : Soit p un diviseur commun à a *et* b

On a $p \mid a$ *et* $p \mid b$ *donc* $p^2 \mid ab$, $p^2 \mid a^2$ *et* $p^2 \mid b^2$ *et puisque* $\dfrac{a+1}{b} + \dfrac{b+1}{a} = \dfrac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$ *est un entier alors* $p^2 \mid a^2 + b^2 + a + b$ *et par suite* $p^2 \mid a + b$ *soit que* $p^2 \leq a + b$ *ou encore* $p \leq \sqrt{a+b}$

en particulier le plus grand diviseur commun à a *et* b *vérifie aussi cette inégalité.*

EXO190 : Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe deux entiers naturels premiers p *et* q avec ($q < p$) tel que $n \mid p - q$

I.S : Notons (P) *l'ensemble des nombres premiers.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in (\mathrm{P})$ *, on note* $r_n(p)$ *le reste de la division euclidienne de* p *par* n

puisque l'ensemble (P) *est infini et que l'ensemble des* $r_n(p)$ *est fini (* $r_n(p) \in \{0;1;.......;n-1\}$ *)*

donc il existe au moins deux nombres premiers p *et* q *tels que :* $r_n(p) = r_n(q)$ *et par suite* $n \mid p - q$

EXO191 : Soit p un nombre premier impair et q un entier positif.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = u_2 = p$ et $(\forall n \geq 2)$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n \times u_{n-1} + q}{u_{n-2}}$

Montrer que tous les éléments u_n sont des entiers si et seulement si $p^2 \mid q$

I.S : Pour tout entier n *on a :*

$u_{n+1} \times u_{n-2} - u_n \times u_{n-1} = q$ *donc* $u_{n+1} \times u_{n-2} - u_n \times u_{n-1} = u_{n+2} \times u_{n-1} - u_{n+1} \times u_n$

donc $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}(u_n + u_{n-2})}{u_{n-1}} - u_n$ *et donc* $\dfrac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}}$ *et par suite*

$$\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{u_2+u_0}{u_1} = 2 & si\ n\ est\ pair \\ \dfrac{u_3+u_1}{u_2} = 2 + \dfrac{q}{p^2} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

- Si $p^2 \mid q$ *alors il existe un entier* k *tel que* $q = kp^2$ *et donc* $u_{n+2} = cu_{n+1} - u_n$ *avec* $c = 2$ *ou* $c = 2 + k$ *suivant que la parité de* n *et puisque* u_0 , u_1 *et* u_2 *sont des entiers alors* u_n *est un entier pour tout* n

- réciproquement, si p^2 *ne divise pas* q *on aura* $u_5 = p + \dfrac{2q}{p}\left(2 + \dfrac{q}{p^2}\right)$ *qui n'est pas un entier*

et donc si u_n *est un entier pour tout* n *, alors* $p^2 \mid q$

EXO192 : Soient a *et* b deux entiers naturels.

Montrer que si le polynôme $x^2 + ax + b + 1$ admet deux racines entières alors $a^2 + b^2$ est un entier composé (n'est pas premier).

I.S : Soient x_1 *et* x_2 *les deux racines entières du polynôme* $x^2 + ax + b + 1$

d'après les formules de VIETTE : $x_1 + x_2 = -a$ *et* $x_1 \times x_2 = b + 1$

donc $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 \times x_2 - 1)^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$ *est un nombre composé*

car $x_1^2 + 1 \geq 2$ *et* $x_2^2 + 1 \geq 2$

EXO193 : Déterminer tous les entiers naturels n tels que : n^2 ne divise pas $n!$

I.S : - Si n est premier d'après le théorème de Wilson, n ne divise pas $(n-1)!$ donc

n^2 ne divise pas $n\cdot(n-1)!=n!$

- Si $n=pq$ avec $p\geq 2$ et $q\geq 2$ (n composé) alors $p\leq n-2$ et $q\leq n-2$ et donc

$n=pq\mid(n-1)!$ et par suite $n^2\mid n!$

Ainsi donc n^2 ne divise pas $n!$ si et seulement n est premier

EXO194 : Soient p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p (p ne divise pas a)

et n le plus petit entier naturel qui vérifie $a^n\equiv 1\ [p]$

Montrer que n divise $(p-1)$

I.S : Posons $p-1=nq+r$ la division euclidienne de $(p-1)$ par n avec $0\leq r<n$

p est premier et $a\wedge p=1$ donc d'après le théorème de Fermat, $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$

donc $(a^n)^q\times a^r\equiv 1\ [p]$ soit que $a^r\equiv 1\ [p]$ puisque par hypothèse $a^n\equiv 1\ [p]$

or n est le plus petit entier naturel qui vérifie $a^n\equiv 1\ [p]$ et $0\leq r<n$ donc $r=0$ et par suite $p-1=nq$

soit que $n\mid(p-1)$

Compléments : - Le plus petit entier naturel n qui vérifie $a^n\equiv 1\ [p]$ est appelé l'ordre de l'élément a

dans le groupe $\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*;\times\right)$ dont le cardinal est $(p-1)$ appelé l'ordre de ce groupe.

- Si n est l'ordre de a alors pour tout entier naturel q, $a^q\equiv 1\ [p] \Leftrightarrow n\mid q$

- En particulier si $a\wedge p=1$ alors $n\mid p-1$ soit que l'ordre de a divise l'ordre du groupe.

EXO195 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^2+x+7\equiv 0\ [13]$

I.S : On a : $(E)\Leftrightarrow 4x^2+4x+28\equiv 0\ [13] \Leftrightarrow (2x+1)^2\equiv 12\ [13]$

Or $X^2\equiv 12\ [13] \Leftrightarrow X\equiv 5\ [13]$ ou $X\equiv 8\ [13]$

(on dit que 12 est un résidu quadratique modulo 13)

ainsi donc $(E) \Leftrightarrow (2x+1\equiv 5\ [13]$ ou $2x+1\equiv 8\ [13]) \Leftrightarrow (2x\equiv 4\ [13]$ ou $2x\equiv 7\ [13])$

- Résolution de l'équation $2x\equiv 4\ [13]$: Puisque $2\wedge 13=1$, on aura $2x\equiv 4\ [13] \Leftrightarrow 2(x-2)\equiv 0\ [13]$

ce qui donne $x\equiv 2\ [13]$ (ou encore que 2 est inversible donc régulier dans le groupe $\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*;\times\right)$)

- Résolution de l'équation $2x\equiv 7\ [13]$: dans ce cas on est obligé de déterminer l'inverse

de 2 modulo 13 en appliquant l'algorithme d'Euclide au couple $(13,2)$

on obtient : $13+2\times(-6)=1$ et donc $2\times(-6)\equiv 1\ [13]$ et donc *soit que* $x \equiv -42\ [13]$ *ou encore* $x \equiv 10\ [13]$

En conclusion : $(E) \Leftrightarrow (x \equiv 2\ [13]$ *ou* $x \equiv 10\ [13])$ *et donc l'ensemble des solutions dans* $\mathbb{Z}$ *est* $S = \{2+13k ; 10+13k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

EXO196 : Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels k tels que $n^4 + 4k^4$ soit un entier composé.

I.S : En effet,

$$n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = \left(n^2 + 2k^2\right)^2 - (2nk)^2 = \left(n^2 + 2k^2 + 2nk\right)\left(n^2 + 2k^2 - 2nk\right)$$

or $n^2 + 2k^2 + 2nk \geq n^2 + 2k^2 - 2nk = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2 \geq 4$ *pour* $k \geq 2$

donc pour n *un entier naturel non nul et pour tout entier* $k \geq 2$, $n^4 + 4k^4$ *est un entier composé.*

EXO197 : Montrer que pour tout entier n , l'entier $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121

I.S : Supposons que $121 \mid n^2 + 2n + 12$ *donc* $11 \mid n^2 + 2n + 12 = (n+1)^2 + 11$ *et donc* $11 \mid (n+1)^2$

11 *étant un nombre premier donc* $11^2 = 121 \mid (n+1)^2$ *et donc* $121 \mid 11$ *ce qui est absurde.*

EXO198 : Trouver l'exposent de 2 dans la décomposition de $1000!$ en produit de facteurs premiers.

I.S : (i) - les $500 = \left[\dfrac{1000}{2}\right]$ *entiers pairs inférieurs à* 1000 *donnent chacun un exposent de* 2

- *les* $250 = \left[\dfrac{1000}{2^2}\right]$ *entiers multiples de* 4 *inférieurs à* 1000 *donnent chacun un exposent de* 2 *supplémentaire.*

- *les* $125 = \left[\dfrac{1000}{2^8}\right]$ *entiers multiples de* 8 *inférieurs à* 1000 *donnent chacun un exposent de* 2 *supplémentaire, et ainsi de suite.….jusqu'à* $\left[\dfrac{1000}{2^9}\right] = 1$ *qui donne le dernier exposent de* 2 *supplémentaire.*

En conclusion l'exposent de 2 *dans la décomposition de* $1000!$ *en produit de facteurs premiers est :*

$$\left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \ldots\ldots. + \left[\frac{1000}{2^9}\right] = 994$$

EXO199 : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3 et p un nombre premier.

Déterminer l'exposent de p dans la décomposition de $n!$

I.S : On suppose que $2 \leq p \leq n$ *et soit* m *le plus grand entier naturel qui vérifie* $p^m \leq n$ *;*

on a donc $p \leq n$, $p^2 \leq n$, ..., $p^m \leq n$ *et* $p^{m+1} > n$

ainsi donc $p^m \leq n < p^{m+1}$ *soit que* $m \leq \dfrac{ln(n)}{ln(p)} < m+1$ *et par suite* $m = \left[\dfrac{ln(n)}{ln(p)}\right]$

et l'exposent de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est :

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+.......+\left[\frac{n}{p^m}\right] \textit{ avec } m=\left[\frac{ln(n)}{ln(p)}\right]$$

EXO200 : Soient a, b *et* c trois entiers strictement positifs. Montrer que si $\dfrac{a^2}{a+b}$, $\dfrac{b^2}{b+c}$ *et* $\dfrac{c^2}{c+a}$ sont des entiers premiers alors $a=b=c$

I.S : - Si $\dfrac{a^2}{a+b}$ *est un nombre premier alors* $a^2 = p(a+b)$ *où* p *est un nombre premier*

donc $p \mid x^2$ *ce qui donne* $p \mid a$ *(car* p *est premier) et par suite il existe un entier* a' *tel que* $a = pa'$

donc $aa' = a+b$ *et donc* $a \mid a+b$ *soit que* $a \mid b$

- Si les trois nombres $\dfrac{a^2}{a+b}$, $\dfrac{b^2}{b+c}$ *et* $\dfrac{c^2}{c+a}$ *sont premiers on aura* $a \mid b$, $b \mid c$ *et* $c \mid a$ *soit que* $a=b=c$

EXO201 : Soit a un entier strictement positif.
Montrer que si a^n+1 est premier alors n est une puissance de 2

I.S : Procédons par contraposé.

Si n *n'est pas une puissance de* 2 *alors il est divisible par un nombre impair donc il existe un entier* d *impair et supérieur ou égal à* 3 *tel que :* $n = dk$ $(k \in \mathbb{N})$

et ainsi on aura $a^n+1=\left(a^k\right)^d+1=\left(a^k+1\right)\left(a^{k(d-1)}-a^{k(d-2)}+.....-1\right)$

puisque $a^k+1 \geq 2$ *et que* $a^{k(d-1)}-a^{k(d-2)}+.....-1 \geq d-1 \geq 2$ *alors* a^n+1 *est un entier composé.*

EXO202 : Trouver les entiers naturels n pour lesquels $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ est un entier naturel.

I.S : On utilise une technique proche de l'algorithme d'Euclide

on a : $9\left(2n^7+1\right)=\left(3n^3+2\right)\left(6n^4-4n\right)+8n+9$ *et*

$512\left(3n^3+2\right)=\left(8n+9\right)\left(192n^2-216n+243\right)-1163$

or 1163 *est un nombre premier donc* $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ *est un entier si* $1163 \mid 8n+9$ *soit que* $8n+9 \equiv 0 \quad [1163]$

ou encore que $8n \equiv 1154 \quad [1163]$

puisque $1163 \times 3 - 8 \times 436 = 1$ *(l'algorithme d'Euclide appliqué au couple* $(1163;8)$ *)*

alors $8 \times (-436) \equiv 1 \quad [1163]$ *ou encore* $8 \times 700 \equiv 1 \quad [1163]$ *et par suite* $n \equiv 435 \quad [1163]$

En conclusion : Si $n \equiv 435 \quad [1163]$ *alors* $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ *est un entier*

EXO203 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier inférieur ou égal à n

Montrer que p divise $C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right]$

I.S : Posons $k = \left[\frac{n}{p}\right]$ *donc* $n = kp + r$ *avec* $0 \le r \le p-1$ *(c'est la division Euclidienne de* n *par* p *)*

on a donc : $p! \times C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \prod_{i=r-p+1}^{r} (kp+i)$

donc $p \times (p-1)! C_n^p = (kp+r)(kp+r-1)........(kp+1)kp(kp-1)......(kp-r+p-1)$

donc $(p-1)! C_n^p = (kp+r)(kp+r-1)........(kp+1) \cdot k \cdot (kp-1)......(kp-r+p-1)$

donc $(p-1)! C_n^p = k \cdot (kp+1)(kp+2)........(kp+r-1)(kp+r)......(kp-1)$

et par suite $(p-1)! C_n^p \equiv k \cdot 1 \cdot 2.......... \cdot (r-1) \cdot r \cdot (r+1).........(p-1) \quad [p]$ *(car* $-1 \equiv p-1 \quad [p]$*)*

soit que $(p-1)! \times C_n^p \equiv k \times (p-1)! \quad [p]$ *ou encore* $(p-1)! \times (C_n^p - k) \equiv 0 \quad [p]$

p *étant premier donc d'après le théorème de Wilson,* p *et* $(p-1)!$ *sont premiers entre eux (puisque p ne divise pas* $(p-1)!$ *) et donc* $C_n^p - k \equiv 0 \quad [p]$ *ce qu'il fallait démontrer.*

EXO204 : Déterminer tous les entiers naturels p qui vérifient : $p, p+2, p+6, p+8, p+12$ *et* $p+14$ sont des nombres premiers.

I.S : $p=2$ *et* $p=3$ *ne conviennent pas.*

$p=5$ *convient car :* $5, 7, 11, 13, 17$ *et* 19 *sont des nombres premiers.*

Supposons $p > 5$

$p = 5k$ *ne convient pas car* $5 \mid p$

$p = 5k+1$ *ne convient pas car* $5 \mid p+14$

$p = 5k+2$ *ne convient pas car* $5 \mid p+8$

si $p = 5k+3$ *ne convient pas car* $5 \mid p+2$

si $p = 5k+4$ *ne convient pas car* $5 \mid p+6$

En conclusion, la seule solution est $p = 5$

EXO205 : Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ des entiers premiers deux à deux distincts et k un entier naturel non nul. Pour tout élément $x \in \mathbb{Z}$, on pose : $f(x) = x + 2k$

(i) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,......,n\}$ il existe $x_i \in \mathbb{Z}$ tel que p_i ne divise pas $f(x_i)$

(ii) En déduire qu'il existe un entier $x_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $i \in \{1,2,......,n\}$; $f(x_0) \wedge p_i = 1$

(iii) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des entiers naturels. On pose $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot .... \cdot p_n^{\alpha_n}$

Montrer que $f(x_0) \wedge m = 1$

I.S : (i) supposons qu'il existe $i \in \{1,2,......,n\}$ tel que $(\forall x \in \mathbb{Z})$; $p_i \mid f(x) = x + 2k$

en particulier pour $x=1$ *et* $x=-1$ ce qui donne $p_i \mid 2k+1$ *et* $p_i \mid 2k-1$ ce qui est absurde car $(2k+1)\wedge(2k-1)=1$ donc pour tout $i\in\{1,2,......,n\}$ il existe $x_i\in\mathbb{Z}$ tel que p_i ne divise pas $f(x_i)$

(ii) considérons le système suivant : $\begin{cases} x\equiv x_1 \quad [p_1] \\ \quad . \\ \quad . \\ x\equiv x_n \quad [p_n]\end{cases}$

puisque les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts alors ils sont premiers entre eux deux à deux et donc d'après le théorème des restes chinoix, il existe $x_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $i\in\{1,2,.......,n\}$; $x_0\equiv x_i \quad [p_i]$ soit que $f(x_0)\equiv f(x_i) \quad [p_i]$ pour tout $i\in\{1,2,.......,n\}$
donc pour tout $i\in\{1,2,.......,n\}$, p_i ne divise pas $f(x_0)$ et par suite
pour tout $i\in\{1,2,.......,n\}$; $f(x_0)\wedge p_i=1$
(iii) On a $\forall i\in\{1,2,.......,n\}$; $f(x_0)\wedge p_i=1$ donc $f(x_0)\wedge\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot.......\cdot p_n^{\alpha_n}\right)=1$

EXO206 : Soit $p=2q+1$ un nombre premier impair donné.
Montrer que : $p\mid (q!)^2+(-1)^q$

I.S : p étant premier donc $(2q)!+1\equiv 0 \quad [p]$ *(théorème de Wilson)*

or $(2q)!=q!\prod_{k=1}^{q}(q+k)$ *et puisque alors* $q+k\equiv-(q+1-k) \quad [p]$

et par suite $\prod_{k=1}^{q}(q+k)\equiv(-1)^q\prod_{k=1}^{q}(q+1-k) \quad [p]$

posons $j=q+1-k$ *donc* $\prod_{k=1}^{q}(q+1-k)=\prod_{j=1}^{q}j=q!$ *et donc* $(2q)!=q!\prod_{k=1}^{q}(q+k)\equiv(-1)^q(q!)^2 \quad [p]$

et par suite $1+(-1)^q(q!)^2\equiv 0 \quad [p]$ *ou encore* $(q!)^2+(-1)^q\equiv 0 \quad [p]$

EXO207 : Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$ *(* $k\in\mathbb{N}$ *)*
Montrer que l'équation $x^2+y^2=pz^2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^3$ autre que $(0;0;0)$

I.S : Soit (x,y,z) *une solution en entiers autre que* $(0;0;0)$ *de cette équation.*
donc $p\mid x^2+y^2$ *et puisque* p *est de la forme* $p\equiv 3 \quad [4]$ *alors* $p\mid x$ *et* $p\mid y$ *et donc* $p^2\mid x^2$ *et* $p^2\mid y^2$
et par suite $p\mid z^2$ *donc* $p\mid z$
ainsi donc $\exists(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{N}^3$ *autre que* $(0;0;0)$ *tels que :* $x=px_1$, $y=py_1$ *et* $z=pz_1$
et $x_1^2+y_1^2=pz_1^2$ *de plus*

ainsi de suite en répétant le même procédé, on obtient trois suites infinies d'entiers naturels $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *et* $(z_n)_{n\geq 1}$ *qui de plus sont strictement décroissantes ce qui est absurde d'après le principe de la descente infinie.*
donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^3$ *autre que* $(0;0;0)$

EXO208 : (i) Résoudre l'équation (E) : $x^2+2x-3=0$ dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$

(ii) Résoudre l'équation (E) : $x^2+2x-3=0$ dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$

I.S : (i) On a : $(E) \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\equiv 0\ [97]$

puisque 97 *est un nombre premier donc* $(E) \Leftrightarrow x-1\equiv 0\ [97]$ *ou* $x+3\equiv 0\ [97]$

soit que $x\equiv 1\ [97]$ *ou* $x\equiv 94\ [97]$

et par suite l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ *est :* $\{1;94\}$

(ii) On a aussi $(E) \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\equiv 0\ [91]$

mais $91=7\cdot 13$ *n'est pas premier donc* $(E) \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+3)\equiv 0 & [7]\\(x-1)(x+3)\equiv 0 & [13]\end{cases}$ *puisque* 7 *et* 13 *sont premiers entre eux.*

ainsi donc $(E) \Leftrightarrow \begin{cases}x-1\equiv 0\ [7] \text{ ou } x+3\equiv 0\ [7]\\x-1\equiv 0\ [13] \text{ ou } x+3\equiv 0\ [13]\end{cases}$ *ce qui nous donne quatre système :*

$$(E) \Leftrightarrow (S_1):\begin{cases}x\equiv 1 & [7]\\x\equiv 1 & [13]\end{cases} \text{ ou } (S_2):\begin{cases}x\equiv 1 & [7]\\x\equiv 10 & [13]\end{cases} \text{ ou } (S_3):\begin{cases}x\equiv 4 & [7]\\x\equiv 1 & [13]\end{cases} \text{ ou } (S_4):\begin{cases}x\equiv 4 & [7]\\x\equiv 10 & [13]\end{cases}$$

Rappel *: Si* p *et* q *sont deux entiers premiers entre eux alors d'après le théorème de Bezout il existe* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que :* $pu+qv=1$ *et donc d'après le théorème des restes chinois,*

$\begin{cases}x\equiv a & [p]\\x\equiv b & [q]\end{cases}$ *est équivalent à* $x\equiv aqv+bpu\ [pq]$

et en appliquant ce résultat aux quatre systèmes, on trouve les solutions suivantes :

$(S_1) \Leftrightarrow x\equiv 1\ [91]$, $(S_2) \Leftrightarrow x\equiv 36\ [91]$, $(S_3) \Leftrightarrow x\equiv 53\ [91]$ *et*

$(S_4) \Leftrightarrow x\equiv 88\ [91]$

et par suite l'ensemble des solution dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ *est :* $\{1;36;53;88\}$

EXO209 : Soit p un nombre premier et a un entier naturel non nul.

Montrer que si $p\,|\,a^p-1$ alors $p^2\,|\,a^p-1$

I.S : Si $p\,|\,a^p-1$ *alors il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que :* $a^p-1=kp$ *donc d'après le théorème de Bézout,* a *et* p *sont premiers entre eux et donc d'après le petit théorème de Fermat,* $p\,|\,a^{p-1}-1$

puisque $a^p - 1 = a\left(a^{p-1} - 1\right) + \left(a-1\right)$ *alors* $p \mid a-1$

et par suite $p \mid a^j - 1$ *pour tout* $j \in \{0;1;2;.....;p-1\}$ *(puisque* $a-1 \mid a^j - 1$*)*

ainsi on a : $\sum_{j=0}^{j=p-1} a^j \equiv \underbrace{1+1+.......+1}_{p\ fois} \equiv 0 \quad [p]$ *et puisque* $a^p - 1 = (a-1)\cdot\left(\sum_{j=0}^{j=p-1} a^j\right)$ *et que* $p \mid a-1$ *et*

$p \mid \left(\sum_{j=0}^{j=p-1} a^j\right)$ *alors* $p^2 \mid (a-1)\cdot\left(\sum_{j=0}^{j=p-1} a^j\right) = a^p - 1$

EXO210 : Soient $x, y, z\ et\ t$ quatre entiers premiers et tels que :

$0 < x < y < z < t \quad et \quad xy + yz + zt + tx = 882$

Déterminer les entiers $x, y, z\ et\ t$

I.S : rappel : le seul nombre premier pair est 2

Remarquer d'abord que 882 *est un nombre pair qui n'est pas divisible par* 2^2 *et que*

$xy + yz + zt + tx = (x+z)(y+t)$

puisque 882 *n'est pas divisible par* 2^2 *alors l'un des deux entiers* $(x+z)$ *et* $(y+t)$ *est impair*

et comme $0 < x < y < z < t$ *alors nécessairement* $x = 2$

ainsi donc $z+2$ *est un diviseur impair de* $441 = 3^2 \cdot 7^2$ *et comme* $2+z < y+t$ *alors*

$(2+z)^2 < 882 < 30^2$ *donc* $2+z < 30$ *par suite* $2+z = 7, 9$ *ou* 21

- Si $z = 5$ *alors* $y = 3$ *et* $t = 123$ *qui n'est pas premier donc c'est à rejeter.*

- Si $z = 7$ *alors* $y = 3$ *ou* 5 *et* $t = 93$ *ou* 95 *qui n'est pas premier donc c'est à rejeter.*

- Si $z = 19$ *alors* $y+t = 42$ *et* $y < 19$ *donc* $y = 5, 11$ *ou* 13 *et* $t = 37, 31$ *ou* 29 *qui tous premiers et donc cette valeur* $z = 19$ *est acceptée.*

En conclusion $(x;y;z;t) = (2;5;19;37)$ *ou* $(2;11;19;31)$ *ou* $(2;13;19;29)$

EXO211 : Pour tout entier p strictement supérieur à 1 on pose : $S_p = \sum_{k=1}^{k=p} k^p$

(i) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, si p est impair alors $p^2 \mid a^p + (p-a)^p$

(ii) Montrer que si p est premier impair alors $p^2 \mid S_p$

I.S : (i) Soit $a \in \mathbb{Z}$ *et* p *un entier positif impair.*

On a : $a^p + (p-a)^p = a^p - (a-p)^p = a^p - \left(a^p - C_p^1 a^{p-1} \cdot p + C_p^2 a^{p-2} \cdot p^2 + ... + p^p\right)$

donc $a^p + (p-a)^p = a^{p-1} \cdot p^2 - C_p^2 a^{p-2} \cdot p^2 + ... + p^p$ *et par suite* $p^2 \mid a^p + (p-a)^p$

car $p \geq 3$ *et* $C_p^1 = p$

(ii) On a $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + ...(p-1)^p + p^p = (p-1)^p + (p-2)^p + ...2^p + 1^p + p^p$

donc $2S_p = 2p^p + \sum_{a=1}^{a=p-1}\left(a^p + (p-a)^p\right)$ *et donc si* p *est impair alors* $p^2 \mid 2p^p$

et $p^2 \mid a^p + (p-a)^p$ *pour tout entier* $a \in \{1;2;.......;p-1\}$ *donc* $p^2 \mid 2S_p$ *et puisque* p *est premier impair, donc* p^2 *premier avec* 2 *et par suite* $p^2 \mid S_p$ *(théorème de Gauss)*

EXO212 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \vee b = n$ est égal au nombre de diviseurs de n^2

I.S : *Posons* $n = \prod_{i=1}^{i=N} p_i^{r_i}$, $a = \prod_{i=1}^{i=N} p_i^{s_i}$ *et* $b = \prod_{i=1}^{i=N} p_i^{t_i}$ *les décompositions en facteurs premiers des entiers* n, a *et* b *respectivement.*

On a : $a \vee b = n \Leftrightarrow (\forall i \in \{1;2;....;N\})$; $\sup(s_i, t_i) = r_i$

donc le nombre de couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $a \vee b = n$ *est égal au nombre de couples* (s_i, t_i) *tels que* $\sup(s_i, t_i) = r_i$ *pour tout indice* $i \in \{1;2;......;N\}$ *qui est égal à* $\prod_{i=1}^{i=N} (2r_i + 1)$

or la décomposition en facteurs premiers de n^2 *est* $n^2 = \prod_{i=1}^{i=N} p_i^{2r_i}$ *donc le nombre de diviseurs positifs de* n^2 *est justement* $\prod_{i=1}^{i=N} (2r_i + 1)$ *ce qui répond à notre question.*

EXO213 : Montrer que $\frac{1}{5}\left(2^{4n+2}+1\right)$ est un entier composé pour tout entier n strictement supérieur à 1

I.S : d'après le petit théorème de Fermat on a : $2^4 \equiv 1 \quad [5]$ donc $(\forall n > 1)$; $2^{4n} \equiv 1 \quad [5]$ et par suite $(\forall n > 1)$; $2^{4n+2} \equiv 4 \equiv -1 \quad [5]$ donc $(\forall n > 1)$; $5 \mid 2^{4n+2} + 1$ et par suite

$\frac{1}{5}\left(2^{4n+2}+1\right)$ est un entier pour tout $n > 1$ de plus $2^{4n+2} + 1 = \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right) \quad (*)$

$2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1 > 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1 \geq 25$

ainsi donc $5 \mid \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right)$ et par suite $5 \mid 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ou $5 \mid 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$

et le quotient est chaque fois strictement supérieur à 1 et par suite $\frac{1}{5}\left(2^{4n+2}+1\right)$ est composé.

EXO214 : Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^2 = y^5 - 4$

I.S : Comme les puissances intérvenants dans l'équation (E) *sont* 2 *et* 5 *il serait intéressant de travailler modulo un nombre premier* p *tel que* 2 *et* 5 *soit des diviseurs de* $p-1$ *à savoir :* $p = 11$

or $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^5 \equiv -1$, 0 *ou* $1 \quad [11]$ *donc*

si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ *est solution de l'équation* (E) *alors* $x^2 \equiv -5$, -4 *ou* $-3 \quad [11]$

soit que $x^2 \equiv 6$, 7 *ou* $8 \quad [11]$

or $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^2 \equiv 0$,1,3 , 4 ,5 *ou* $9 \quad [11]$ *donc l'équation* (E) *n'admet pas solution dans* $\mathbb{Z}^2$

EXO215 : Quel est le plus petit entier naturel admettant exactement 15 diviseurs positifs distincts ?

I.S : Si $n=\prod_{i=1}^{i=N} p_i^{r_i}$ *est la décomposition en facteurs premiers de* n *alors le nombre de ses diviseurs positifs est :* $\prod_{i=1}^{i=N}(r_i+1)$

puisque $15=15\times 1$ *ou* $15=5\times 3$ *alors nécessairement :*

$N=2$ *et* $(r_1,r_2)=(14;0)$ *ou* $N=2$ *et* $(r_1,r_2)=(4;2)$ *ainsi donc* $n=p_1^{14}$ *ou* $n=p_1^4\cdot p_2^2$

par conséquent le plus petit entier naturel n *correspond à* $p_1=2$ *et* $p_2=3$ *soit que* $n=144$

EXO216 : Montrer que la suite arithmétique $(4n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une infinité de nombres premiers.

I.S : Pour tout entier $n>0$ *, on considère l'entier* $A_n=(4n)!-1$

- On a $A_n\equiv 3\ [4]$ *donc il s'écrit sous la forme* $4k+3$

- A_n *admet un diviseur premier* p *supérieur à* n *(si* $p\leq n$ *alors* $p\,|\,(4n)!$ *et donc p ne peut pas diviser* $A_n=(4n)!-1$ *)*

- p *étant premier donc il est soit de la forme* $4k+1$ *soit de la forme* $4k+3$ *et puisque il divise un entier de la forme* $4k+3$ *donc nécessairement il est de la forme* $4k+3$

ainsi donc pour tout entier ,il existe un nombre premier p *de la forme* $4k+3$ *tel que* $p>n$ *et par suite il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $4k+3$ *et donc la suite* $(4n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ *contient une infinité de nombres premiers.*

EXO217 : Soient n un entier naturel non nul et p un nombre premier qui divise $(n!)^2+1$

Montrer que p est de la forme $4k+1$ ($p\equiv 1\ [4]$)

I.S : - p *est nécessairement impair.*

- $p>n$ *car si* $p\leq n$ *alors* $p\,|\,(n!)^2$ *et donc ne diviserai pas* $(n!)^2+1$

- p *étant premier donc* $p\equiv 1\ [4]$ *ou* $p\equiv 3\ [4]$

- Supposons que : $p\equiv 3\ [4]$ *et posons* $p=3+4k$ *(* $k\in\mathbb{N}$ *)*

on a $(n!)^2+1\,|\,(n!)^{2(2k+1)}+1$ *puisque* $\left(\forall(a,k)\in\mathbb{N}^2\right)$ *;* $a+1\,|\,a^{2k+1}+1$

or $2(2k+1)=p-1$ *et* $p\,|\,(n!)^2+1$ *donc* $p\,|\,(n!)^{p-1}+1$

mais p *est premier et* $p\wedge(n!)^2=1$ *donc* $p\wedge(n!)=1$ *et d'après le théorème de Fermat,*

$p\,|\,(n!)^{p-1}-1$ *et par suite* $p\,|\,2$ *ce qui est absurde.*

En conclusion $p\equiv 1\ [4]$ *(de la forme* $1+4k$ *)*

EXO218 : Soit p un nombre premier impair.

Montrer que $p \equiv 1 \quad [4]$ si et seulement si il existe un entier t tel que : $t^2+1 \equiv 0 \quad [p]$

(on dit que $p-1$ $(ou \ -1)$ est un résidu quadratique modulo p)

I.S : - Si $p \equiv 1 \quad [4]$ *alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $p=1+4k$

posons $t=(2k)!=(-1)^{2k}(2k)!=(-1)(-2)........(-2k)$

donc $t \equiv (p-1)(p-2)..........(p-2k) \quad [p]$ *soit que* $t \equiv (p-1)(p-2)..........(1+2k) \quad [p]$

et donc $t^2 \equiv (2k)!\times(2k+1)(2k+2)..........(p-2)(p-1) \quad [p]$ *soit que* $t^2 \equiv (p-1)! \quad [p]$

et puisque p *est premier donc d'après le théorème de Wilson* $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$

et par suite $t^2+1 \equiv 0 \quad [p]$ *avec* $t=(2k)!$ *lorsque* $p=1+4k$

- Réciproquement

** supposons qu'il existe un entier* t *tel que :* $t^2+1 \equiv 0 \quad [p]$

donc d'une part $t^4 \equiv 1 \quad [p]$

et d'autre part il existe un entier q *tel que* $q \cdot p - t \cdot t = 1$ *donc d'après le théorème de Bézout,* $p \wedge t = 1$

et donc $t^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *(d'après le petit théorème de Fermat)*

ainsi donc on a : $t^4 \equiv 1 \quad [p]$ *et* $t^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

***** *Soit* $p-1=4q+r$ *avec* $0 \le r \le 3$ *la division euclidienne de* $p-1$ *par* 4

on a $t^{p-1} \equiv 1 \quad [p] \quad \Leftrightarrow \quad (t^4)^q \cdot t^r \equiv 1 \quad [p] \quad \Leftrightarrow \quad t^r \equiv 1 \quad [p]$

pour $r=1$ *on aura* $t \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $t^2 \equiv 1 \quad [p]$ *ce qui est absurde car* $t^2 \equiv -1 \quad [p]$ *ce qui donnera* $1 \equiv -1 \quad [p]$ *soit que* $2 \mid p$

pour $r=2$ *on aura* $t^2 \equiv 1 \quad [p]$ *ce qui est encore absurde.*

pour $r=3$ *on aura* $t^3 \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $t^2 \cdot t \equiv 1 \quad [p]$ *soit que* $(-1)t \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $t^2 \equiv 1 \quad [p]$ *ce qui est encore absurde .*

Ainsi donc $r=0$ *et par suite* $4 \mid p-1$ *ce qui veut dire que* $p \equiv 1 \quad [4]$

EXO219 : Soit p un nombre premier de la forme $3+4k$ ($k \in \mathbb{N}$) et (x,y) un couple d'entiers.

Montrer que si $p \mid x^2+y^2$ alors $p \mid x$ et $p \mid y$

I.S : - si $p \mid x^2+y^2$ *alors* $p \mid x \quad \Leftrightarrow \quad p \mid y$

en effet, si $p \mid x$ *alors* $p \mid x^2$ *et puisque* $p \mid x^2+y^2$ *alors* $p \mid y^2$ *et* p *étant premier donc* $p \mid y$

- supposons que p *ne divise pas* x *, puisque* p *est premier alors* $x \wedge p = 1$ *et donc* $x^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *d'après le théorème de Fermat, soit que* $(x^2)^{1+2k} \equiv 1 \quad [p]$

or $x^2+y^2\equiv 0\ \ [p]$ *donc* $1+x^{4k}\cdot y^2\equiv 0\ \ [p]$ *soit que* $\left(x^{2k}\cdot y\right)^2\equiv -1\ \ [p]$ *(*)*

puisque $x\wedge p=1$, *alors on a d'une part* $x^{2k}\wedge p=1$ *et d'autre part* *(car* $p\,|\,x \Leftrightarrow p\,|\,y$*)*

et donc $\left(x^{2k}\cdot y\right)\wedge p=1$ *par suite d'après le théorème de Fermat,* $\left(x^{2k}\cdot y\right)^{p-1}\equiv 1\ \ [p]$

soit que $\left(x^{2k}\cdot y\right)^{2+4k}\equiv 1\ \ [p]$ *ou encore* *soit que* $\left(x^{2k}\cdot y\right)^{2}\equiv 1\ \ [p]$

ce qui donne d'après (*) que $p\,|\,2$ *ce qui est faux.*

Ainsi donc $p\,|\,x$ *et donc* $p\,|\,y$ *aussi*

***Remarque** : La condition : p un nombre premier de la forme* $3+4k$ *(*$k\in\mathbb{N}$*) est nécessaire car*

$13\,|\,6^2+9^2$ *mais* 13 *ne divise ni* 6 *ni* 9

EXO220 : Déterminer tous les entiers premiers p tel que : $1+p+p^2+p^3+p^4$ soit un carrée parfait.

I.S : Supposons qu'il existe un entier a *tel que :* $1+p+p^2+p^3+p^4=a^2$

donc $\left(2p^2+p\right)^2<(2a)^2<\left(2p^2+p+2\right)^2$ *et par suite* $(2a)^2=\left(2p^2+p+1\right)^2$

on a donc $4n^2=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$ *mais aussi* $4n^2=4\left(p^4+p^3+p^2+p+1\right)$

donc $p^2-2p+3=0$ *et par suite* $p\,|\,3$ *ou encore que* $p=3$ *(car p est premier)*

réciproquement, on vérifie que pour $p=3$ *on a :* $1+p+p^2+p^3+p^4=121=(11)^2$

En conclusion : $p=3$ *est la seule valeur possible.*

EXO221 : Montrer que l'équation $x^2-y^3=7$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

I.S : Soit$(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *une solution de cette équation si elle existe.*

- Si y est pair alors $x^2\equiv 7\ \ [8]$ *ce qui est absurde car :* $y^3\equiv 0\ [8]$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $n^2\equiv 0,1$ *ou* $4\ \ [8]$

Si y est impair, puisque $x^2+1=y^3+8=(y+2)\left((y-1)^2+3\right)$ *et que* $(y-1)^2+3$ *est un entier de la forme* $4k+3$ *alors* x^2+1 *admet un diviseur premier de la forme* $4k+3$

or si p est premier et si $p\,|\,x^2+1$ *(ou encore* $x^2+1\equiv 0\ \ [p]$*) alors p est de la forme* $1+4k$

(ou encore $p\equiv 1\ \ [4]$*) d'où la contradiction.*

donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Rappel : Soit p est un nombre premier impair.

l'équation $x^2+1\equiv 0\ \ [p]$ *admet une solution si et seulement si* $p\equiv 1\ \ [4]$

EXO222 : (i) Montrer que $(\forall a\in\mathbb{Z})$; si $a\wedge 24=1$ alors $a^2\equiv 1\ \ [24]$

(ii) Montrer que $\left(\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right)$; si $ab\equiv -1\ \ [24]$ alors $a+b\equiv 0\ \ [24]$

I.S : (i) - On vérifie par le calcul direct que si a est un entier premier avec 24 *et inférieur à* 24 *alors*

$a^2 \equiv 1 \ [24]$

- Si a est un entier quelconque premier avec 24 , on considère la division euclidienne de a par 24 . soit que $a = 24q + r$ avec $0 \le r < 24$ or d'après le théorème d'Euclide $a \wedge 24 = r \wedge 24$

et puisque $a \wedge 24 = 1$ alors $r \wedge 24 = 1$ et donc $r^2 \equiv 1 \ [24]$

or $a \equiv r \ [24]$ donc $a^2 \equiv r^2 \equiv 1 \ [24]$

(ii) Si $ab \equiv -1 \ [24]$ alors $a \wedge 24 = 1$

(car il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $24q - ab = 1$ et on applique le théorème de Bézout)

et par suite $a^2 \equiv 1 \ [24]$ et donc $a(a+b) = a^2 + ab \equiv 0 \ [24]$ et puisque $a \wedge 24 = 1$ d'après le théorème de Gauss $a + b \equiv 0 \ [24]$

EXO223 : Montrer que si n est un multiple non nul de 24 alors la somme des diviseurs positifs de $(n-1)$ est aussi un multiple de 24

I.S : *Soit n un multiple non nul de 24 et $D(n-1)$ l'ensemble des diviseurs positifs de $(n-1)$*

- $(n-1)$ n'est pas un carré parfait sinon on aura $n - 1 = a^2$ soit que $a^2 \equiv -1 \ [24]$ donc $a^2 \equiv -1 \ [3]$ ce qui est absurde car $(\forall a \in \mathbb{Z})$; $a^2 \equiv 0$ ou $1 \ [3]$

- Les éléments de $D(n-1)$ se regroupe par couples (deux à deux dont le produit est $(n-1)$)

posons $D(n-1) = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ avec $a_i \cdot a_j = (n-1)$ quand $i + j = k$ et leur somme est :

$S_{n-1} = (a_0 + a_k) + (a_1 + a_{k-1}) + ...$

or pour tout couple (i, j) on a $a_i \cdot a_j = n - 1 \equiv -1 \ [24]$ donc $a_i + a_j \equiv 0 \ [24]$ et donc $S_{n-1} \equiv 0 \ [24]$ ce qui répond à notre question.

EXO224 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n

I.S : - Si n est premier : d'après le théorème de Wilson, $(n-1)! + 1 \equiv 0 \ [n]$ ou encore que $(n-1)! \equiv -1 \equiv n - 1 \ [n]$ et puisque $0 \le n - 1 < n$ donc le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n est $(n-1)$

- Si n est un entier composé :

** pour $n = 4$ le reste est 2*

** pour $n > 4$, posons $n = ab$ avec $a \ge 2$ et $b \ge 2$*

..si $a \wedge b = 1$, on a $a | n$ et $b | n$ de plus $a < n$ et $b < n$ donc $a | (n-1)!$ et $b | (n-1)!$ et par suite $n | (n-1)!$; le reste est alors 0

.. si $n = p^2$ avec $2 < p < n - 1$ alors $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot ...... \cdot p \cdot (p+1) \cdot .... \cdot 2p \cdot .... \cdot (n-1)$ car $2p < p^2$ donc $p^2 | (n-1)!$ et le reste est alors 0

..*si* $n=\prod_{i=1}^{i=N} p_i^{\alpha_i}$ *avec* $\alpha_i \geq 1$ *pour tout* $i \in \{1;2;.....;N\}$ *est la décomposition en produit de facteurs premiers de* n, *on applique les résultats ci-dessus et on trouve que le reste est nul.*

EXO225 : Soit p un nombre premier.

Montrer que s'il existe un couple $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $p=m^2+n^2$ et $m\wedge n=1$ alors $p\equiv 1\ [4]$ (de la forme $p=1+4k\ (k\in\mathbb{N})$)

I.S : Pour tout $u\in\mathbb{Z}$, *on a :* $u^2\equiv 0$ *ou* $1\ [4]$

si $m^2+n^2\equiv 0\ [p]$ *et* $m\wedge n=1$ *alors* p *ne divise pas le produit* $m\cdot n$ *si non on aura* $m+n\equiv 0\ [p]$ *et donc* p *ne divise ni* m *ni* n *et par suite* $p=m^2+n^2\equiv 1\ [4]$ *car* $m^2+n^2\neq 0\ [4]$ *et* $m^2+n^2\neq 2\ [4]$

EXO226 : Déterminer tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tels que $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ soit un entier.

I.S : - Remarquer que $mn-(mn-1)=1$ *donc d'après le théorème de Bézout,* $m\wedge(mn-1)=1$ *et donc* $m^3\wedge(mn-1)=1$

donc $mn-1|n^3+1 \iff mn-1|m^3(n^3+1) \iff mn-1|(mn)^3-1+m^3+1$ *et par suite* $mn-1|m^3+1$ *car* $mn-1|(mn)^3-1$

- Remarquer aussi que si $m=n$ *alors* $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=n+\dfrac{1}{n-1}$ *est un entier si et seulement si* $n=m=2$

- Supposons $m>n$

.. *si* $n=1$ *alors* $\dfrac{2}{m-1}$ *est entier si et seulement si* $m=2$ *ou* $m=3$

.. *si* $n\geq 2$ *on a* $n^3+1\equiv 1\ [n]$ *et* $mn-1\equiv -1\ [n]$

donc il existe $k\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$

or $kn-1=\dfrac{n^3+1}{mn-1}<\dfrac{n^3+1}{n^2-1}=n+\dfrac{1}{n-1}$ *donc* $(k-1)n<1+\dfrac{1}{n-1}$ *soit que* $k=1$

par suite $n^3-1=(n-1)(mn-1)$ *ce qi nécessite* $m=\dfrac{n^3+1}{n-1}=n+1+\dfrac{2}{n-1}$

or m *est entier donc* $n=2$ *ou* $n=3$ *et par suite* $m=5$

- Supposons $m<n$ *et effectuons le même raisonnement…..*

En conclusion : il ya neuf couples de solutions à ce problème qui sont

$(2;2),(2;1),(3;1),(5;3),(5;2),(1;2),(1;3),(2;5)$ *et* $(3;5)$

EXO227 : Démontrer que l'ensemble des entiers de la forme $2^k - 3$ $(avec\ k \geq 2)$ contient une infinité d'entiers deux à deux premiers entre eux.

I.S : Supposons que $2^{k_1} - 3\ , 2^{k_2} - 3\ , ... et\ 2^{k_n} - 3$ *sont* n *entiers de cette forme et deux à deux premiers entre eux et posons* $P = \prod_{i=1}^{i=n} \left(2^{k_i} - 3\right)$

l'entier P *est impair car c'est le produit d'entiers impair.*

Considérons les $(P+1)$ *entiers :* $2^0\ , 2^1 , ..., 2^P$

leurs reste dans la division euclidienne par S *ne peut que* $0, 1, ..., P-1$ *(au nombre de* P *)*

donc nécessairement, il existe α *et* β *de l'ensemble des restes* $\{0, 1, ..., P-1\}$ *tel que*

$\alpha < \beta$ *et* $2^\alpha \equiv 2^\beta \quad [P]$ *soit que* $2^\alpha \cdot \left(2^{\beta-\alpha} - 1\right) \equiv 0 \quad [P]$

puisque P *est impair alors d'après le théorème de Gauss,* $2^{\beta-\alpha} - 1 \equiv 0 \quad [P]$ *et donc* $P \wedge \left(2^{\beta-\alpha} - 3\right) = 1$

ainsi donc $2^{\beta-\alpha} - 3 = \left(2^{\beta-\alpha} - 1\right) - 2 = qP - 2$ *et donc d'après le théorème d'Euclide,*

$P \wedge \left(2^{\beta-\alpha} - 3\right) = P \wedge 2 = 1$ *et par suite* $\forall i \in \{1; 2; ....; n\} \quad ; \quad \left(2^{k_i} - 3\right) \wedge \left(2^{\beta-\alpha} - 3\right) = 1$

soit que les entiers $2^{k_1} - 3\ , 2^{k_2} - 3\ , ..., 2^{k_n} - 3$ *et* $2^{\beta-\alpha} - 3$ *sont encore deux à deux premiers entre eux et donc il existe une infinité d'entiers de la forme* $\left(2^k - 3\right)$ *qui sont deux à deux premiers entre eux.*

Remarque : on pourra aussi utiliser le théorème d'Euler et obtenir le résultat $P \mid 2^{\varphi(P)} - 1$ *et donc* $2^{k_1} - 3\ , 2^{k_2} - 3\ , ..., 2^{k_n} - 3$ *et* $2^{\varphi(P)} - 3$ *sont encore deux à deux premiers entre eux.*

EXO228 : Déterminer tous les entiers naturels $n \geq 2$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$

I.S : - remarquer que $n = 3$ *est une solution du problème.*

- Soit $n \geq 2$ *un entier naturel tel que :* $n^2 \mid 2^n + 1$

l'entier n *s'écrit sous la forme* $n = 3^k \cdot d$ *avec* $d \wedge 3 = 1$ *et donc* $3^{2k} \mid 2^{3^k \cdot d} + 1$

or $2^{3^k \cdot d} + 1 = \left(\left(2^d\right)^{3^k} + 1\right) = \left(2^d + 1\right)\left(\left(2^d\right)^{3^k - 1} - \left(2^d\right)^{3^k - 2} + ... - 2^d + 1\right)$

puisque $\sum_{m=1}^{m=3^k} \left(2^d\right)^{3^k - m} \cdot (-1)^{m-1} = \prod_{m=0}^{m=k-1} \left(\left(2^d\right)^{2 \cdot 3^m} - \left(2^d\right)^{3^m} + 1\right)$ *qu'on peut montrer par récurrence sur* m

alors $2^{3^k \cdot d} + 1 = \left(2^d + 1\right) \prod_{m=0}^{m=k-1} \left(\left(2^d\right)^{2 \cdot 3^m} - \left(2^d\right)^{3^m} + 1\right)$

et puisque pour q *un entier impair, on a :* $\left(2^{2q} - 2^q + 1\right)\left(2^q + 1\right) = 2^{3q} + 1 = \left(2^3\right)^q + 1 \equiv 0 \quad [9]$

les diviseurs de 0 *dans l'anneau* $\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \times\right)$ *sont* 3 *et* 6 *en plus* $2^{2q} - 2^q + 1$ *étant impair* *donc* $2^{2q}-2^q+1\equiv 3\quad[9]$ *et par suite* $3^k \mid \prod_{m=0}^{m=k-1}\left(\left(2^d\right)^{2\cdot 3^m}-\left(2^d\right)^{3^m}+1\right)$ *et* 3^{k+1} *ne le divise pas*

et comme $3^{2k}\mid 2^{3^k\cdot d}+1$ *alors* $3^k\mid 2^d+1$ *et comme* $d\wedge 3=1$ *alors* 9 *ne divise pas* 2^d+1
et donc $k=0$ *ou* $k=1$
Supposons maintenant que $d>1$ *et soit* p *le plus petit facteur premier de* d
d *étant impair et* $3\wedge d=1$ *donc* $p\geq 5$
on a $p\mid 2^n+1$ *donc* $p\mid 2^{2n}+1$ *or* $2\wedge p=1$ *donc* $p\mid 2^{p-1}-1$ *(le petit théorème de Fermat)*
soit $j=2n\wedge(p-1)$ *d'après le théorème Bézout,* $p\mid 2^j-1$
(puisque il existe un couple d'entiers (u,v) *tel que* $2nu+(p-1)v=j$ *et donc* $2^j\equiv 1\ [p]$*)*
on a $2n=6d$ *et* $d\wedge(p-1)=1$ *donc* $j\mid 6$ *et par suite* $j=1,2,3$ *ou* 6
puisque $p\mid 2^j-1$ *alors* $p\mid 1,3,7$ *ou* 63 *or* $p\geq 5$ *donc* $p=7$
Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *,* 7 *ne divise pas* 2^n+1 *:*
En effet, soit n_0 *le plus petit entier naturel tel que* $7\mid 2^{n_0}+1$
On a $2^{n_0}+1=8\cdot 2^{n_0-3}+1\equiv 2^{n_0-3}+1\quad[7]$ *donc* $n_0-3<n_0$ *et* $2^{n_0-3}+1\equiv 0\quad[7]$
d'où la contradiction
ainsi donc 7 *ne divise pas* 2^n+1 *et par suite l'hypothèse* $d>1$ *est absurde*
En conclusion : $k=1$ *et* $d=1$ *et donc* $n=3$ *est la seule solution du problème.*

EXO229 : existe-t-il un nombre entier p tel que : $p, p+6, p+12$ *sont premiers* et
$p+1, p+2, p+3, p+4, p+5, p+7, p+8, p+9, p+10, p+11$ *sont composés*

I.S : - $p\neq 2$ *car* $p+6=8$ *n'est pas premier*
- $p\neq 3$ *car* $p+2=5$ *n'est pas composé donc* $3\mid p+1$ *ou* $3\mid p+2$
- si $3\mid p+1$ *alors* $3\mid p+4$ *et* $3\mid p+7$ *et*
- on a $p\neq 5$ *car* $p+2$ *est composé, donc* $5\mid p+1$ *ou* $5\mid p+2$ *ou* $5\mid p+3$ *ou* $5\mid p+4$
et comme $p+6$ *et* $p+12$ *sont premiers alors* 5 *ne divise pas* $p+1$ *et* $p+2$
- si $5\mid p+3$ *alors* $5\mid p+8$ *et donc* $7\mid p+2$

Ainsi donc p *est premier et vérifie le système* $\begin{cases} p\equiv 2 & [3]\\ p\equiv 2 & [5]\\ p\equiv 5 & [7]\end{cases}$ *et* $p+6$ *et* $p+12$ *sont premiers.*

puisque 3 *,* 5 *et* 7 *sont premiers entre eux deux à deux, le théorème des restes chinois nous donne que*
$p\equiv 47\ [105]$ $(car\ \ 3\cdot 5\cdot 7=105)$ *soit que* $p=47+105k$ *,* $p+6=53+105k$ *et* $p+12=59+105k$
et on vérifie que pour $k=2,10,50,74,.....$ *l'entier* p *répond bien à la question.*

EXO230 : Soient a *et* b deux entiers naturels non nuls.

Montrer que si $ab+1$ divise a^2+b^2 alors $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

I.S : Supposons qu'il existe un entier k *positif tel que :* $a^2+b^2=k(ab+1)$ *(*)*

- si $k=1$ *alors* $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ *=1 est bien un carré parfait*

- si $k=2$ *alors de (*) on déduit que* $(a-b)^2=2$ *ce qui est absurde car* 2 *n'est pas un carré.*

- supposons que $k\geq 3$ *et que* k *n'est pas un carré parfait.*

.. $a\neq b$ *sinon on aura* $(k-2)a^2+k=0$ *ce qui est impossible*

.. on suppose que $0<b<a$

l'équation $x^2+y^2-kxy=k$ $(**)$ *issue de la relation (*), a pour solutios particulière* $(x_0,y_0)=(a,b)$
considérée comme une équation en x *, elle a dux solutions dont la somme est* ky $(\text{formules de Viette})$
donc si (x_0,y_0) *est une solution de* $(**)$ *alors* $(y_0,k\,y_0-x_0)$ *l'est aussi.*

Posons $x_1=y_0$ *et* $y_1=ky_0-x_0$ *et soient* α *et* β *les deux racines de* $z^2-kz+1=0$ *tel que* $\alpha\beta=1$
donc $\alpha>k-1$ *et puisque* $(x_0-\alpha y_0)(x_0-\beta y_0)=k$ *alors* $x_0>\alpha y_0>(k-1)y_0$ *donc* $y_1=ky_0-x_0<y_0$
si $y_1<0$ *alors* $x_1y_1<0$ *et donc* $x_1y_1\leq -1$ *ce qui est impossible car* (x_1,y_1) *est solution de* $(**)$ *et*
$x_1=y_0>0$

si $y_1=0$ *on aura* $x_1^2=k$ *ce qui est absurde car* k *n'est pas un carré parfait et par suite* $y_1>0$
ainsi donc à partir de la solution particulière (x_0,y_0) *on construit une solution* (x_1,y_1) *avec* $x_1>y_1>0$
et ainsi de suite on construit deux suites infinies $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'entiers naturels strictement décroissantes ce qui est absurde d'après le principe de la descente infinie de Fermat*
En conclusion k *est necessairement un carré parfait.*

EXO231 : Déterminer les entiers naturels p et n vérifiant :

p est premier impair , $n\leq 2p$ et $(p-1)^n+1\equiv 0\quad [n^{p-1}]$

I.S : - n *est nécessairement impair car sinon* n^{p-1} *serait un nombre pair ,* $(p-1)^n$ *et donc* $(p-1)^n+1$
et on aura un nombre pair qui diviserait un nombre impair.

- Soit q *le plus petit diviseur premier de* n

on a $n^{p-1}\,|\,(p-1)^n+1$ *donc* $n\,|\,(p-1)^n+1$ *et donc* $q\,|\,(p-1)^n+1$ *soit que* $(p-1)^n\equiv -1\quad [q]$
et donc d'après le théorème de Bézout, $(p-1)\wedge q=1$ *(puisqu' il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* $kq-(p-1)^n=1$
et par suite d'après le théorème de Fermat, $(p-1)^{q-1}\equiv 1\quad [q]$

puisque q *est le plus petit diviseur premier de* n *alors* $n\wedge(q-1)=1$ *et donc d'après le théorème de Bézout , il existe* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que :* $nu+(q-1)v=1$

Soient q' *et* r *respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* u *par* $(q-1)$
alors $u=q'\cdot(q-1)+r$ *et donc on a* $nr+(q-1)(v+nq')=1$

or $v+nq'=v+n\cdot\left[\dfrac{u}{q-1}\right]\leq v+\dfrac{nu}{q-1}=\dfrac{nu+(q-1)v}{q-1}=\dfrac{1}{q-1}<1$ *soit que* $v+nq'\leq 0$

et donc il existe deux entiers naturels : $u'=r$ *et* $v'=-(v+nq')$ *tels que* $nu'=1+(q-1)v'$

et par suite $(p-1)^{nu'}=(p-1)\cdot(p-1)^{(q-1)v'}$ *et donc* $(-1)^{u'}\equiv p-1\quad[q]$

puisque n *est impair et que* $1+(q-1)v'$ *est impair (car* $(q-1)$ *est pair) alors* u' *est impair*

et donc $-1\equiv p-1\quad[q]$ *soit que* $q\,|\,p$ *et donc* $p=q$ *car* p *est premier et ainsi donc* p *est le plus petit diviseur premier de* n

de plus $p=q$ *étant le plus petit diviseur premier de* n *donc il existe* $k\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $n=kp$

puisque $n\leq 2p$ *donc* $kp\leq 2p$ *et donc* $1\leq k\leq 2$ *et puisque* n *est impair alors* $k=1$ *et par suite* $n=p$

on a $(p-1)^p+1=1+\sum_{k=0}^{k=p}C_p^k p^{p-k}(-1)^k=1+C_p^0p^p-C_p^1p^{p-1}+C_p^2p^{p-2}+......+C_p^{p-1}p-1$

donc $(p-1)^p+1=p^2+p^3Q$ *avec* $Q\in\mathbb{Z}$ *(remarquer que* $C_p^{p-1}=p$ *)*

et donc p^{α} *ne divise pas* $(p-1)^p+1$ *pour* $\alpha\geq 3$

or $(p-1)^p+1\equiv 0\quad\left[p^{p-1}\right]$ *donc nécessairement* $p\leq 4$

puisque p *est premier alors* $p=3$

En conclusion le couple $(n,p)=(3,3)$ *est l'unique solution de ce problème.*

EXO232 : Montrer que pour tout entier $k\geq 1$; $2^{k+2}\,|\,3^{2^k}-1$ et si $m>k+2$ alors 2^m ne divise pas $3^{2^k}-1$

I.S : Procédons par récurrence sur k *:*

** pour* $k=1$ *, on a* $2^3\,|\,3^2-1$ *donc la proposition est vraie.*

** Soit* $k\geq 1$*, et montrons que si* $2^{k+2}\,|\,3^{2^k}-1$ *alors* $2^{(k+1)+2}\,|\,3^{2^{k+1}}-1$

en effet on a $3^{2^{k+1}}-1=\left(3^{2^k}-1\right)\left(3^{2^k}+1\right)$ *, puisque* $3^{2^k}+1$ *est un entier pair et non divisible par* 4

alors $3^{2^{k+1}}-1=2n\left(3^{2^k}-1\right)$ *et donc si* $2^{k+2}\,|\,3^{2^k}-1$ *alors* $2^{(k+1)+2}\,|\,3^{2^{k+1}}-1$

d'après le principe de récurrence, $\left(\forall k\in\mathbb{N}^*\right)$ *;* $2^{k+2}\,|\,3^{2^k}-1$

et si $m>k+2$ *alors* 2^m *ne divise pas* $3^{2^k}-1$

EXO233 : Montrer que pour tout entier $n\geq 1$; l'équation $3^x\equiv y\quad\left[2^n\right]$ admet des solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ si et seulement si $y\equiv 1$ *ou* $3\quad[8]$

I.S : *On a pour tout entier* $a\in\mathbb{N}^*$, $3^{2a}-1=\left(3^a-1\right)\left(\left(3^a-1\right)+2\right)$

d'après (i) $3^{2^{n-2}}\equiv 1\quad\left[2^n\right]$ *et* 2^{n-2} *est la seule puissance de* 3 *qui vérifie cette propriété*

donc les entiers 3^x *avec* $1\leq x\leq 2^{n-2}$ *sont tous différents modulo* 2^n

or toute puissance de 3 *est congrue soit à* 1 *soit à* 3 *modulo* 8 *et donc tout entier* y *congru à* 1 *ou à* 3 *modulo* 8 *est une puissance* 3^x *modulo* 2^n *avec* $1 \le x \le 2^{n-2}$ *et vis-versa.*

EXO234 : Pour tout entier $n \ge 2$, on pose $S_n = 1+2+.......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $P_n = 1\cdot 2\cdot ....\cdot n = n!$

Montrer que $S_n \mid P_n$ si et seulement si $(n+1)$ est un entier composé.

*I.S : * Si* $(n+1)$ *est premier (impair puisque* $n \ge 2$ *) alors d'après le théorème de Wilson,* $(n+1) \mid n!+1$ *donc* $(n+1)$ *ne divise pas* $n! = P_n$ *car* $n!$ *et* $(n!+1)$ *sont premiers entre eux*

et par suite S_n *ne divise pas* P_n

** réciproquement : - si* $(n+1)$ *est pair alors* $\dfrac{n+1}{2} \mid n!$ *car* $\dfrac{n+1}{2} < n$ *et puisque* $n \mid n!$ *alors*

$n \cdot \dfrac{n+1}{2} \mid n!$ *soit que* $S_n \mid P_n$

- si $(n+1)$ *est impair et non premier alors tous les nombres premiers qui divisent* $(n+1)$ *sont inférieur à* n *et donc divise et par suite* $(n+1) \mid n!$

or $\dfrac{n}{2} \mid n!$ *et puisque* n *est pair et que* $\dfrac{n}{2} < n$ *alors* $\dfrac{n}{2} \cdot (n+1) \mid n!$ *soit que* $S_n \mid P_n$

donc si $(n+1)$ *n'est pas un entier premier impair alors* $S_n \mid P_n$

EXO235 : Soit p un nombre premier impair et on pose : $S = 1 + p + p^2 + ...+ p^{p-1}$

Montrer que si q est un nombre premier qui divise S alors $q \equiv 1 \quad [p]$

I.S : - remarquer que $S - p\left(1 + p + p^2 + ...+ p^{p-2}\right) = 1$ *donc d'après le théorème de Bézout* $p \wedge S = 1$

Soit q *un nombre premier qui divise* S *alors* $p \wedge q = 1$ *et d'après le théorème de Fermat,* $p^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$

on a $p^p - 1 = (p-1)\cdot S$ *donc* $q \mid p^p - 1$ *soit que* $p^p \equiv 1 \quad [q]$ *et donc* $p^{p\wedge(q-1)} \equiv 1 \quad [q]$

rappel : si p *est un nombre premier alors pour tout entier* a *on a :* $p \wedge a = 1$ *ou* $p \mid a$

si on suppose que $p \wedge (q-1) = 1$ *alors* $p \equiv 1 \quad [q]$ *et donc* $S \equiv \underbrace{1+1+.........+1}_{p \text{ fois}} \equiv p \quad [q]$ *et par suite*

$S \equiv 1 \quad [q]$ *ce qui est absurde car* $q \mid S$ *et donc* p *et* $(q-1)$ *ne sont pas premier entre eux et puisque* p *est premier alors* $p \mid q-1$ *soit que* $q \equiv 1 \quad [p]$

EXO236 : Déterminer le plus petit entier naturel $n \ge 2$ tel que : $A = \sqrt{\dfrac{1^2 + 2^2 + ...+ n^2}{n}}$ soit un entier.

I.S : On a $A^2=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ *donc* A *est un entier naturel si et seulement si* $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ *est le carré d'un entier* m

de plus on a : $(n+1)(2n+1)\equiv 0\quad[6]\ \Leftrightarrow\ n\equiv 1\quad[6]$ *ou* $n\equiv 5\quad[6]$

- si $n\equiv 5\quad[6]$ *alors il existe un entier* $k\geq 0$ *tel que* $n=5+6k$ *et* $m^2=(k+1)(12k+1)$

or $(k+1)\wedge(12k+1)=1$ *donc il existe* $(t,s)\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $k+1=s^2$ *et* $12k+1=t^2$

on en déduit que $12s^2=t^2+1$ *or* $12s^2\equiv 0\quad[4]$ *et* $t^2+1\equiv 1$ *ou* $2\ [4]$ *et donc il est impossible d'avoir* $12s^2=t^2+1$

- si $n\equiv 1\ [6]$ *alors il existe un entier* $k\geq 0$ *tel que* $n=1+6k$ *et* $m^2=(3k+1)(4k+1)$

or $(3k+1)\wedge(4k+1)=1$ *donc il existe* $(t,s)\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $3k+1=s^2$ *et* $4k+1=t^2$

si on fait varier s^2 *on trouve les valeurs de* k *suivantes :* $0,2,6,12,20,30,42,56,......$

si on fait varier t^2 *on trouve les valeurs de* k *suivantes :* $0,1,5,8,16,21,33,40,56,......$

donc la plus petite valeur de n *est obtenue pour* $k=56$ *et corréspond à* $n=1+6\cdot 56=337$

EXO237 : Soit n un entier impair non divisible ni par 3 ni par 5
Montrer qu'il existe un multiple de n qui s'écrit en base 10 uniquement avec le chiffre 1

I.S : On a :

$$n\,|\,\underbrace{11.......1}_{k\ fois}\ \Leftrightarrow\ 10^{k-1}+10^{k-2}+.......+1\equiv 0\quad[n]$$
$$\Leftrightarrow\ 9\left(10^{k-1}+10^{k-2}+.......+1\right)\equiv 0\quad[n]$$
$$\Leftrightarrow\ 10^k-1\equiv 0\quad[n]$$
$$\Leftrightarrow\ 10^k\equiv 1\quad[n]$$

or $10\wedge n=1$ *donc d'après le théorème d'Euler,* $10^{\varphi(n)}\equiv 1\quad[n]$ *avec* $\varphi(n)$ *est l'indicateur d'Euler de* n *il suffit donc de prendre* $k=\varphi(n)$ *et donc* $n\,|\,\underbrace{11.......1}_{\varphi(n)\ fois}$

Rappel :si $n=\prod_{i=1}^{i=N}p_i^{\alpha_i}$ *est la décomposition en facteurs premiers de* n *alors* $\varphi(n)=\prod_{i=1}^{i=N}(p_i-1)^{\alpha_i}$

en particulier, si n *est premier alors* $\varphi(n)=n-1$ *et* $n\,|\,\underbrace{11.......1}_{(n-1)\ fois}$

EXO238 : Déterminer tous les couples d'entiers naturels (n,m) vérifiant : $1!\cdot 2!.........(2n-1)!=m!$

I.S : - remarquer que les couples $(2,3),(3,6)$ *et* $(4,10)$ *sont solutions du problème.*

- si $n=5$ *on a* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!>10!$ *donc si* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!=m!$ *alors* $m\geq 11$ *donc* $11|m!$ *or* 11 *ne divise pas* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!$ *d'où la contradiction*

- si $n=6$ *on a* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!.10!.11!>12!$ *donc si* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!.10!.11!=m!$ *alors* $m\geq 13$ *donc* $13|m!$ *or* 13 *ne divise pas* $1!.2!.3!.4!.5!.6!.7!.8!.9!.10!.11!$ *d'où la contradiction*

- si $n\geq 7$ *on montre que* $1!\cdot 2!.........(2n-1)!>(4n)!$

le postulat de Bertrand nous indique qu'il existe un nombre premier p *tel que* $2n < p < 4n$
et si $1!\cdot 2!.........(2n-1)! = m!$ *alors* $m \geq p$ *et donc* $p \mid m!$ *or* p *ne divise pas* $1!\cdot 2!.........(2n-1)!$
car $p > 2n$ *d'où la contradiction*
ainsi donc les seules solutions du problème sont les couples : $(2,3),(3,6)$ *et* $(4,10)$

EXO239 : Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui sont congrus à 3 modulo 4

I.S : (Méthode du à Fermat)
- remarquons d'abord que tout nombre premier impair et soit de la forme $1+4k$ *soit de la forme* $3+4k$ $(k \in \mathbb{N})$
- supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de la forme $3+4k$ $(k \in \mathbb{N})$ *:*
$p_1, p_2, ..., p_n$ *et posons* $N = \prod_{i=1}^{i=n} p_i - 1$
on a pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, p_i *ne divise pas* N *et puisque* N *est impair alors tout diviseur de* N *est congrue à* 1 *modulo* 4 *(de la forme* $1+4k$ $(k \in \mathbb{N})$*) donc dans la décomposition de* N *en produits de facteurs premiers ces derniers sont tous congrus à* 1 *modulo* 4 *et donc* $N \equiv 1 \quad [4]$
ce qui est absurde car $N \equiv 3 \quad [4]$
En conclusion il y'a une infinité de nombres premiers qui sont congrus à 3 *modulo* 4

EXO240 : Soit p un nombre premier impair. Montrer que tout diviseur premier (et différent de 3) du nombre $2^p + 1$ est de la forme $2kp + 1$ $\left(avec\ k \in \mathbb{N}^*\right)$

I.S : Soit q *un diviseur premier et différent de* 3 *du nombre* $2^p + 1$
on a : $q \mid 2^p + 1$ *donc* $q \mid 2^{2p} - 1 = (2^p - 1)(2^p + 1)$ *soit que* $2^{2p} \equiv 1 \quad [q]$
Soit d *le plus petit entier naturel tel que* $2^d \equiv 1 \quad [q]$
(d *est appelé l'ordre de* 2 *dans le groupe* $\left(\left(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\right)^*, \times\right)$
on a ainsi par définition $d \leq 2p$ *et donc* $(**)$ $d \mid 2p$ *et par suite* $d = 1, 2, p$ *ou* $2p$
$(**)$ *(En effet, considérons la division euclidienne de* $2p$ *par* d *:* $2p = ds + r$ *avec* $0 \leq r < d$ *,*
on a donc $2^{2p} = (2^d)^s \cdot 2^r \equiv 2^r \quad [q]$ *soit que* $2^r \equiv 1 \quad [q]$ *ce qui nécessite que* $r = 0$ *par définition de* d *)*
* $d = 1$ *entraine que* $2 \equiv 1 \quad [q]$ *ce qui est impossible*
* $d = 2$ *entraine que* $2^2 \equiv 1 \quad [q]$ *soit que* $q = 3$ *ce qui est impossible*
* $d = p$ *entraine que* $2^p \equiv 1 \quad [q]$ *donc* $q \mid 2^p - 1$ *et* $q \mid 2^p + 1$ *soit que* $q \mid 2$ *ce qui est impossible car* q *est impair.*

et ainsi $d = 2p$ *ce qui veut dire que* $d = 2p$ *est le plus petit entier positif tel que :* $2^d \equiv 1 \quad [q]$

or d'après le petit théorème de Fermat, $2^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$ *(puisque* q *est premier et que* $2 \wedge q = 1$*)*

donc $2p \mid q-1$ *(le même raisonnement que* $(**)$ *) soit que* $q = 1 + 2kp \quad \left(avec\ k \in \mathbb{N}^*\right)$

EXO241 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$ (appelés les nombres de Fermat)

(i) Montrer que tout diviseur premier différent de 3 du nombre F_n est de la forme : $2^{n+1} \cdot k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

(ii) Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad ; \quad n \wedge F_n = 1$

I.S : (i) Soit q *un diviseur premier et différent de* 3 *du nombre* F_n

on a : $q \mid 2^{2^n} + 1$ *donc* $q \mid 2^{2^{n+1}} - 1$ *soit que* $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \quad [q]$

et donc si d *est le plus petit entier naturel tel que* $2^d \equiv 1 \quad [q]$ *alors* $d \mid 2^{2^{n+1}}$ $\left(voir\ exo277\right)$

et donc $d = 1, 2, 2^2, ...,2^{n+1}$

soit s *un entier tel que :* $1 \le s \le n+1$ *et* $2^{2^s} \equiv 1 \quad [q]$

on a : $q \mid 2^{2^s} - 1$ *et* $q \mid 2^{2^{n+1}} - 1$ *donc* $q \mid 2^{2^{n+1}} - 2^{2^s} = 2^{2^s}\left(2^{2^{n+1}-2^s} - 1\right)$ *et donc* $q \mid 2^{2^{n+1}-2^s} - 1$

soit que $2^{2^{n+1}-2^s} \equiv 1 \quad [q]$ *et par suite* $2^{n+1} - 2^s \mid 2^{n+1}$ *qui n'est possible que si* $n+1 = s$

ainsi $d = 2^{n+1}$ *or d'après le petit théorème de Fermat,* $2^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$ *car* q *est premier et* $2 \wedge q = 1$

et par définition de d *ceci entraine que :* $d \mid q-1$ *soit que* $q = 1 + 2^{n+1} \cdot k \quad \left(avec\ k \in \mathbb{N}^*\right)$

et donc les diviseur premier différent de 3 *du nombre* F_n *est de la forme :* $2^{n+1} \cdot k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$

(ii) On a $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*\right) \quad ; \quad 2^{n+1} \cdot k + 1 \ge 2^{n+1} + 1 > 2^{n+1} > n$ *ainsi donc* n *est strictement inférieur à tous les diviseurs premiers de* F_n *et donc* $n \wedge F_n = 1$

EXO242 : Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels définie par :

$u_1 = 39 \quad , \quad u_2 = 45$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad ; \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$

Montrer qu'il existe une infinité de termes de cette suite qui soient divisible par 1986

I.S : -Remarquer que $u_3 = 1986$

- Dans la division euclidienne de u_n *par* 1986 *:* $u_n = 1986 q_n + r_n$ *avec* $0 \le r_n \le 1985$ *considérons la suite finie* $\left(r_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\left(r_n \in \{0, 1, ..., 1985\}\right)$ *et soit* k *le plus petit indice tel que* $\left(r_k, r_{k+1}\right) = \left(r_1, r_2\right)$

si $\left(r_k, r_{k+1}\right) = \left(r_i, r_{i+1}\right)$ *pour* $i \ne 1$ *alors on aura d'une part :* $r_{k+1} = r_{i+1}$ *donc* $u_{k+1} \equiv u_{i+1} \quad [1986]$

soit que $u_k^2 - u_{k-1} \equiv u_i^2 - u_{i-1} \quad [1986]$ *et d'autre part* $r_k = r_i$ *donc* $u_k \equiv u_i \quad [1986]$ *soit que*

$u_k^2 \equiv u_i^2 \quad [1986]$

et par suite $u_{k-1} \equiv u_{i-1} \quad [1986]$ *et donc* $r_{k-1} = r_{i-1}$ *et donc aussi* $r_k = r_i$ *soit que* $(r_{k-1}, r_k) = (r_{i-1}, r_i)$ *ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle* k *est le plus petit indice qui vérifie cette égalité de couples.*

- on a $(r_k, r_{k+1}) = (r_1, r_2)$ *et* $r_3 = 0$ *car* $u_3 = 1986$ *donc* $(\forall j \in \mathbb{N}) \quad ; \quad r_{jk+3} = r_3 = 0$

soit que $(\forall j \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{jk+3} \equiv 0 \quad [1986]$ *et donc les* u_{jk+3} *sont tous des multiples de* 1986

EXO243 : Montrer qu'il existe deux entiers naturels consécutifs dont aucun n'est la somme de deux carrés.

I.S : On considère deux nombres premiers distincts p *et* q *de la forme* $3+4k \quad (k \in \mathbb{N})$

d'après le théorème des restes chinois, le système (S) : $\begin{cases} x \equiv p & [p^2] \\ x \equiv q-1 & [q^2] \end{cases}$ *admet une solution* x *unique modulo* p^2q^2 *puisque* $p^2 \wedge q^2 = 1$

de plus on a : $p \mid x$ *mais* p^2 *ne divise pas* x *et* $q \mid x+1$ *mais* q^2 *ne divise pas* $(x+1)$

donc x *et* $(x+1)$ *ne sont pas somme de deux carrés sinon s'il existe* $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $x = n^2 + m^2$ *puisque* $p \mid x$ *alors* $p \mid n^2 + m^2$ *donc* $p \equiv 1 \quad [4]$ *ce qui est faux.*

EXO244 : On dit qu'un entier positif n vérifie la propriété (P) si :

pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$, si $n \mid a^n - 1$ alors $n^2 \mid a^n - 1$

(i) Montrer que tout entier premier vérifie la propriété (P)

(ii) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs non premiers qui vérifie la propriété (P)

I.S : (i) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ *et* p *un nombre premier.*

si $p \mid a^p - 1$ *alors il existe un entier* k *tel que* $a^p - kp = 1$ *et donc d'après le théorème de Bézout,* $a \wedge p = 1$ *et par suite* $p \mid a^{p-1} - 1$ *d'après le petit théorème de Fermat.*

or $a^p - 1 = a(a^{p-1} - 1) + (a-1)$ *donc* $p \mid a-1$ *et donc* $p \mid a^k - 1$ *pour tout* $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$

ainsi $\underbrace{a^{p-1} + a^{p-2} + ... + a + 1}_{p \text{ termes}} \equiv 0 \quad [p]$ *soit que* $p \mid \sum_{k=0}^{k=p-1} a^k$ *et donc* $p^2 \mid (a-1) \cdot \left(\sum_{k=0}^{k=p-1} a^k \right) = a^p - 1$

En conclusion tout nombre premier vérifie la propriété (P)

(ii) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ *et* n *un nombre naturel non premier.*

si $n \mid a^n - 1$ *alors d'après le théorème de Bézout,* $a \wedge n = 1$

et par suite d'après le théorème d'Euler : $n \mid a^{\varphi(n)} - 1$ *(* $\varphi(n)$ *étant l'indicateur d'Euler de* n *)*

et puisque $n \mid a^n - 1$ *alors* $n \mid a^{n \wedge \varphi(n)} - 1$

- si $n \wedge \varphi(n) = 1$ *alors* $a \equiv 1 \quad [n]$ *et donc* $n^2 \mid a^n - 1$ *par suite le problème se ramène à la recherche des entiers naturels non premiers* n *et tels que :* $n \wedge \varphi(n) = 1$

- Soit p un nombre premier supérieur à ou égal à 5

on choisit un entier premier q tel que $q \mid p-2$ et on pose $n = pq$

on a $\varphi(n)=\varphi(p)\varphi(q)=(p-1)(q-1)$

puisque $q \mid p-2$ alors q ne divise pas $p-1$ (car $(p-1)\wedge(p-2)=1$) et puisque $q<p$ alors p ne divise pas $q-1$ et par suite ni p ni q ne divise $(p-1)(q-1)=\varphi(n)$ soit que $n\wedge\varphi(n)=1$

comme il y'a une infinité de façons de choisir des couples de nombres premiers (p,q) tel que $q \mid p-2$ alors il y'a une infinité d'entiers $n = pq$ non premiers qui vérifient la propriété (P)

EXO245 : Montrer qu'il existe 21 entiers naturels positifs consécutifs tels que chacun soit divisible par au moins un nombre premier de l'ensemble $\{2,3,5,7,11,13\}$.

I.S : -si $n\equiv 0 \quad [2]$ alors les entiers $n, n+2, \ldots\ldots, n+20$ sont divisibles par 2

si $n\equiv 2 \quad [3]$ alors les entiers $n+1, n+4, n+7, n+10, n+13, n+16, n+19$ sont divisibles par 3

si $n\equiv 0 \quad [5]$ alors les entiers $n, n+5, n+10, n+15, n+20$ sont divisibles par 5

si $n\equiv 4 \quad [7]$ alors les entiers $n+3, n+10, n+17$ sont divisibles par 7

si $n\equiv 2 \quad [11]$ alors les entiers $n+9$ est divisible par 11

si $n\equiv 2 \quad [13]$ alors les entiers $n+11$ est divisible par 13

Ainsi donc les 21 entiers positifs consécutifs $n, n+1, \ldots\ldots, n+20$ sont divisible chacun par au moins un nombre premier de l'ensemble $\{2,3,5,7,11,13\}$ si n est solution du système :

$$(S): \begin{cases} n\equiv 0 \quad [2] \\ n\equiv 2 \quad [3] \\ n\equiv 0 \quad [5] \\ n\equiv 4 \quad [7] \\ n\equiv 2 \quad [11] \\ n\equiv 2 \quad [13] \end{cases}$$

puisque les entiers $2,3,5,7,11,13$ sont deux à deux premiers entre eux alors d'après le théorème des restes chinois le système (S) admet une solution modulo $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=30030$ et donc il existe une infinité d'entiers n qui répondent à la question.

EXO246 : Démontrer que si n est un entier naturel impair alors $n \mid 2^{n!}-1$

I.S : Soit n un entier naturel impair et $\varphi(n)$ l'indicateur d'Euler de n

si $n=\prod_{i=1}^{i=N} p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition primaire de n alors $\varphi(n)=n\cdot\prod_{i=1}^{i=N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\left(\prod_{i=1}^{i=N} p_i^{\alpha_i-1}\right)\left(\prod_{i=1}^{i=N}(p_i-1)\right)$

or $\prod_{i=1}^{i=N} p_i^{\alpha_i-1} \mid n$ et les tous les p_i-1 sont strictement inférieur à n et deux à deux disjoints alors

$\prod_{i=1}^{i=N}(p_i-1)\,|\,(n-1)!$ *et par suite* $\varphi(n)\,|\,n!$

puisque $2\wedge n=1$ *alors d'après le théorème d'Euler,* $n\,|\,2^{\varphi(n)}-1$ *et par suite* $n\,|\,2^{n!}-1$ *puisque* $\varphi(n)\,|\,n!$

EXO247 : Montrer que pour tout entier naturel m , il existe un entier n divisible par m et dont la somme de ses chiffres dans la base décimale soit égale à m

I.S : posons $m=2^a\cdot 5^b\cdot t$ *avec* $(a,b,t)\in\mathbb{N}^3$ *et* t *n'est divisible ni par* 2 *ni par* 5

on a donc $t\wedge 10=1$ *par suite* $10^{\varphi(t)}\equiv 1\quad[t]$ *avec* $\varphi(t)$ *est l'indicateur d'Euler de* t

considérons l'entier $n=10^{a+b}\left(10^{\varphi(t)}+10^{2\cdot\varphi(t)}+......+10^{m\cdot\varphi(t)}\right)$

on a donc $m\,|\,n$ *car* $2^a\cdot 5^b\,|\,10^{a+b}$ *et* $t\,\left|\left(\underbrace{10^{\varphi(t)}+10^{2\cdot\varphi(t)}+......+10^{m\cdot\varphi(t)}}_{m\ termes}\right)\right.$

de plus la somme des chiffres de n *en base décimale est :* $\underbrace{1+1+..........+1}_{m\ termes}=m$

EXO248 : Soit A l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 0 et 232
On considère l'application f de A vers A définie comme suit :
pour tout élément a de A, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233
Montrer que l'application f est une bijection de A dans A puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

I.*S : - Remarquer que* 233 *est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat,*
pour tout élément $a\in A\backslash\{0\}$ *on a :* $a^{232}\equiv 1\quad[233]$

- soit $(a,b)\in A^2$ *si* $f(a)=f(b)$ *alors* $a^{195}\equiv b^{195}\quad[233]$

or $195\wedge 232=1$ *donc il existe* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $au+bv=1$

- si on considère l'équation (E) : $195x\equiv 1\quad[232]$ *elle admet dans* $\mathbb{Z}/232\mathbb{Z}$ *une unique solution* $d=163$

(car l'ensemble des solution dans $\mathbb{Z}^2$ *de l'équation* $195x-232y=1$ *est*
$S=\{(163+232k,137+195k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$ *)*

et donc $\left(a^{195}\right)^{163}\equiv\left(b^{195}\right)^{163}\quad[233]$ *et donc* $a^{1+232\cdot 137}\equiv b^{1+232\cdot 137}\quad[233]$ *soit que*
$a\cdot\left(a^{232}\right)^{137}\equiv b\cdot\left(b^{232}\right)^{137}\quad[233]$

- si $a=0$ *ou* $b=0$ *on a nécessairement* $a=b=0$

- si $a\neq 0$ *et* $b\neq 0$ *alors* $a^{232}\equiv 1\quad[233]$ *et* $b^{232}\equiv 1\quad[233]$ *et donc* $a\equiv b\quad[233]$

En conclusion l'application f *est injective.*

Montrons que f *est surjective : en effet soit* $(a,b)\in A^2$ *tel que* $f(a)=b$ *alors* $a^{195}\equiv b\quad[233]$

- si $b=0$ *on a nécessairement* $a=0$

- *si* $b \neq 0$ *alors de* $a^{195} \equiv b \quad [233]$ *on déduit que* $\left(a^{195}\right)^{163} \equiv b^{163} \quad [233]$ *donc* $a \cdot \left(a^{232}\right)^{137} \equiv b^{195} \quad [233]$ *soit que* $a \equiv b^{195} \quad [233]$ *ainsi donc pour tout élément* $b \in A$ *, il existe* $a \in A$ *(* $a \equiv b^{195} \quad [233]$ *) tel que* $f(a) = b$ *par suite* f *est surjective*

Ainsi f *est une bijection de* A *sur* A *et sa bijection réciproque* f^{-1} *est définie par :*

pour tout $x \in A$ *,* $f^{-1}(x)$ *est le reste de la division euclidienne de* x^{195} *par* 233 *soit que* $f^{-1}(x) \equiv x^{195} \quad [233]$

EXO249 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F) \quad ; \quad x^{35} \equiv 2 \quad [97]$

I.S : - remarquer que 97 *est un nombre premier .*

- remarquer aussi que $35 \wedge 96 = 1$ *et en appliquant l'algorithme d'Euclide au couple* $(96,35)$ *on trouve que :* $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$ *soit que* $35 \times 11 = 1 + 96 \times 4$

Si x *est une solution de l'équation* (F) *alors* $x^{35} \equiv 2 \quad [97]$

97 *étant premier donc* $97 \mid x$ *ou* $x \wedge 97 = 1$ *or* 97 *ne divise pas* x *car* 97 *ne divise pas* 2*, donc* $x \wedge 97 = 1$ *et d'après le petit théorème de Fermat, on a aussi* $x^{96} \equiv 1 \quad [97]$

ainsi donc $\left(x^{35}\right)^{11} \equiv 2^{11} \quad [97]$ *soit que* $x \cdot \left(x^{96}\right)^{4} \equiv 2^{11} \quad [97]$ *puisque* $35 \times 11 = 1 + 96 \times 4$

ce qui donne $x \equiv 2^{11} \quad [97]$

Réciproquement on vérifie que $\left(2^{11}\right)^{35} \equiv 2 \quad [97]$

En conclusion l'ensemble des solution de l'équation (F) *dans* $\mathbb{Z}$ *est :* $S = \left\{2^{11} + 97k \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXO250 : Pour tout entier naturel non nul n on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

Montrer que pour tout entier naturel premier q il existe un entier naturel non nul n tel que : $q \mid a_n$

I.S : - il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *,* a_n *est pair*

- on a : $a_n \equiv 0 \quad [3] \iff 2^n \equiv 1 \quad [3] \iff n \equiv 0 \quad [2]$ *soit que* n *est pair*

- soit p *un nombre premier strictement supérieur à* 3

d'après le P.T.F : $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *,* $3^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *et* $6^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *car* $p \wedge 2 = p \wedge 3 = p \wedge 6 = 1$

et donc $6 \cdot a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 0 \quad [p]$ *et puisque* $p \wedge 6 = 1$

d'après le T.G $a_{p-2} \equiv 0 \quad [p]$ *soit que* $p \mid a_{p-2}$

ainsi donc pour tout nombre premier q

* *si* $q = 2$ *alors pour tout entier naturel non nul ,* a_n *est pair donc :* $2 \mid a_n$ *et par suite* $2 \wedge a_n = 2$

* *si* $q = 3$ *alors pour tout entier naturel non nul pair* n*, on a :* $3 \mid a_n$ *et donc* $a_n \wedge 3 = 3$

* *si* $q > 3$ *il existe un entier naturel non nul* n $(n = q - 2)$ *tel que* $q \mid a_n$ *et donc* $a_n \wedge q = q$

EXO251 : Soit p un nombre premier de la forme $3+4k$ $(k \in \mathbb{N})$

Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2+1 \equiv 0 \quad [p]$

I.S : Soit n *un entier naturel tel que*

on a $n^2 \equiv -1 \quad [p]$ *donc* $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1 \quad [p]$ *soit que* $n^{p-1} \equiv -1 \quad [p]$ *car* $p-1=2+4k$

or de $n^2+1 \equiv 0 \quad [p]$ *on déduit qu'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $kp-n^2=1$ *donc d'après le T.B* $n \wedge p=1$

et donc d'après le P.T.F $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

ainsi donc on a $n^{p-1} \equiv -1 \quad [p]$ *et* $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $1 \equiv -1 \quad [p]$ *soit que* $2 \equiv 0 \quad [p]$ *ou encore que* $p=2$ *ce qui est absurde car* 2 *n'est pas de la forme* $3+4k$ $(k \in \mathbb{N})$

EXO252 : Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{11..........1}_{2010\ fois}$

Montrer que le nombre N est divisible par 22121

I.S : - On a $N=\underbrace{11.......1}_{2010\ fois}=10^{2009}+10^{2008}+.......+10+1 \equiv (-1)^{2009}+(-1)^{2008}+........+(-1)+1 \quad [11]$

donc $N \equiv 0 \quad [11]$ *soit que* $11 \mid N$

- on a 2011 *est un nombre premier et* $10^{2010}-1=(10-1)\left(10^{2009}+10^{2008}+......+10+1\right)=9N$

et puisque $2011 \wedge 10=1$ *alors d'après le P.T.F* $10^{2010} \equiv 1 \quad [2011]$ *soit que* $2011 \mid 10^{2010}-1=9N$

or $2011 \wedge 9=1$ *d* $2011 \mid N$ *onc d'après le T.G*

de plus $2011 \wedge 11=1$ *donc* $11 \times 2011 \mid N$ *soit que* $22121 \mid N$

EXO253 : Déterminer l'entier naturel x qui vérifie : $10^x \equiv 2 \quad [19]$

I.S : 19 *étant un nombre premier et* $10 \wedge 19=1$ *donc d'après le P.T.F* $10^{18} \equiv 1 \quad [19]$

si x *un entier naturel qui vérifie* $10^x \equiv 2 \quad [19]$ *alors* $10^{x+1} \equiv 1 \quad [19]$

posons $d=18 \wedge (x+1)$ *alors en appliquant l'algorithme d'Euclide au couple* $(18,x+1)$ *, il existe* $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $18u+(x+1)v=d$

si $u=q(x+1)+r$ *est la division euclidienne de* u *par* $x+1$

alors $d=18\cdot\left(q(x+1)+r\right)+(x+1)v=18r+(x+1)(v+18q)$

or $v+18q=v+18\cdot\left[\dfrac{u}{x+1}\right] \leq v+\dfrac{18u}{x+1}=\dfrac{18u+(x+1)v}{x+1}=\dfrac{d}{x+1} \leq 1$ *car* $d \mid x+1$

et donc $v+18q \leq 0$ *ou* $x+1=d$

si $x+1=d$ *alors on a bien* $10^d \equiv 1 \quad [19]$

si $v+18q \leq 0$ *alors* $-(v+18q) \geq 0$ *et* $18r=d+\left(-(v+18q)\right)(x+1)$

et donc $10^{18r}=10^{d}\cdot 10^{-(v+18q)(x+1)}$ *soit que* $\left(10^{18}\right)^{r}=10^{d}\cdot\left(10^{x+1}\right)^{-(v+18q)}$

puisque $10^{18}\equiv 1\ [19]$ *et* $10^{x+1}\equiv 1\ [19]$ *alors* $10^{d}\equiv 1\ [19]$

d *est un diviseur de* 18 *et les diviseurs de* 18 *étant* $1,2,3,6,9$ *et* 18

on vérifie par le calcul que seule la valeur $d=18$ *vérifie* $10^{d}\equiv 1\ [19]$

ainsi donc $18\wedge(x+1)=18$ *et donc* $18\mid(x+1)$ *soit que* $x\equiv -1\equiv 17\ [18]$

ou encore $x=17+18k$ *avec* $k\in\mathbb{N}$

Réciproquement on vérifie que $10^{17+18k}\equiv 2\ [19]$ *pour tout* $k\in\mathbb{N}$ *car* $10^{17+18k}=10^{17}\cdot\left(10^{18}\right)^{k}\equiv 10^{17}\ [19]$

or $10^{18}=10^{17}\cdot 10\equiv 1\ [19]$ *et* $2\cdot 10\equiv 1\ [19]$ *donc* $10^{17}\equiv 2\ [19]$ *et donc* $10^{17+18k}\equiv 1\ [19]$

EXO254 : Soient $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $143x-195y=52$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

I.S : Si $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *est une solution de l'équation* $143x-195y=52$ *alors il existe* $k\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $(x,y)=(-1+195k,-1+143k)$ *car cette équation admet* $(-1,-1)$ *comme solution particulière dans* $\mathbb{Z}^2$

et donc $x=y+52k$

- on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *:* $n^x\equiv n^y\ [2]$ *car* x *et* y *ont la même parité.*

- si n *un entier non nul premier avec* 5 *on a d'après le P.T.F* $n^4\equiv 1\ [5]$

donc $(\forall k\in\mathbb{N})$; $n^{4k}\equiv 1\ [5]$ *et par suite* $n^x=n^{y+52k}=n^y\cdot\left(n^4\right)^{13k}$ *donc* $n^x\equiv n^y\ [5]$

- si $5\mid n$ *on a* $n^x\equiv 0\ [5]$ *et* $n^y\equiv 0\ [5]$ *et donc on a encore* $n^x\equiv n^y\ [5]$

et puisque $2\wedge 5=1$ *alors d'après le T.G* $n^x\equiv n^y\ [2\cdot 5]$ *soit que* $n^x\equiv n^y\ [10]$

soit que n^x *et* n^y *ont le même reste dans la division Euclidienne par* 10 *et par suite ils ont le même chiffre d'unité dans leurs écriture en base décimale.*

EXO255 : On pose $N=1+7+7^2+......+7^{2007}$

Montrer que le nombre N est divisible par 2012

I.S : on a $7\equiv -1\ [4]$ *donc* $7^{2k}\equiv 1\ [4]$ *et* $7^{2k+1}\equiv -1\ [4]$

or $N=\underbrace{1+7+7^2+......+7^{2007}}_{2008\ nombres}$ *donc* $N\equiv 1-1+1-1+........-1+1\equiv 0\ [4]$

de même on a 503 *est un nombre premier et* $7\wedge 503=1$ *donc d'après le P.T.F* $7^{502}\equiv 1\ [503]$

et par suite $7^{2008}\equiv 1\ [503]$ *puisque* $2008=4\cdot 502$

et puisque $7^{2008}-1=(7-1)\left(7^{2007}+7^{2006}+.....+7+1\right)=6N$ *alors* $6N\equiv 0\ [503]$ *ce qui donne* $N\equiv 0\ [503]$ *car* $503\wedge 6=1$

enfin puisque $4\wedge 503=1$ *et que* $503\mid N$ *et* $4\mid N$ *alors* $2012=503\cdot 4\mid N$

EXO256 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1vérifiant :

$$(R)\ ;\quad 3^n - 2^n \equiv 0 \quad [n]$$

I.S : Supposons qu'il existe un entier naturel $n > 1$ qui vérifie la relation $(R)\ ;\quad 3^n - 2^n \equiv 0 \quad [n]$

et soit p le plus petit diviseur premier de n

on a $p | n$ et $n | 3^n - 2^n$ donc $3^n - 2^n \equiv 0 \quad [p]$

- si $p = 2$ on aura $1 \equiv 0 \quad [2]$ ce qui est absurde donc $p \neq 2$

- si $p = 3$ on aura $(-1)^n \equiv 0 \quad [3]$ ce qui est absurde donc $p \neq 3$ et ainsi donc $p \geq 5$

et d'après le P.T.F on a : $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

si $d = n \wedge (p-1)$ alors $d \leq p-1 < p$ et $d | n$ or p est le plus petit diviseur premier de n donc $d = 1$

et par suite d'après le T.B il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $an + b(p-1) = 1$

soit $a = q(p-1) + r$ avec $0 \leq r < p-1$ la division Euclidienne de a par $p-1$

donc $n(q(p-1)+r) + b(p-1) = 1$ soit que $nr = 1 + k(p-1)$ avec $k = -(b+nq) \in \mathbb{Z}$

or $b + nq = b + n\left[\dfrac{a}{p-1}\right] \leq b + \dfrac{na}{p-1} = \dfrac{na + b(p-1)}{p-1} = \dfrac{1}{p-1} < 1$ donc $b + nq \leq 0$ et par suite $k \geq 0$

puisque $3^n \equiv 2^n \quad [p]$ donc $3^{nr} \equiv 2^{nr} \quad [p]$ soit que $3^{1+k(p-1)} \equiv 2^{1+k(p-1)} \quad [p]$

or $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ donc on aura $3 \equiv 2 \quad [p]$ soit que $1 \equiv 0 \quad [p]$ ce qui est absurde

donc qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1vérifiant :

$$(R)\ ;\quad 3^n - 2^n \equiv 0 \quad [n]$$

EXO257 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{33..........3}_{n\ fois}$ (n fois le chiffre 3)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1 \quad [30]$ alors l'équation : $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

I.S : - on a $3a_n + 7 = \underbrace{99......9}_{n\ fois}3 + 7 = 10^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et puisque 31 est un nombre premier

et que $10 \wedge 31 = 1$ alors d'après le P.T.F $10^{30} \equiv 1 \quad [31]$ et par suite pour tout $k \in \mathbb{N}$,

on a $10^{30k+2} \equiv 10^2 \equiv 7 \quad [31]$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, et

soit que $3a_{30k+1} \equiv 0 \quad [31]$

or $3 \wedge 31 = 1$ donc d'après le T.G, $a_{30k+1} \equiv 0 \quad [31]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

ce qui veut dire que $31 | a_{30k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \equiv 1 \quad [30]$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 30k + 1$ et donc $31 | a_n$

si l'équation (E_n) ; $a_n x-31y=1$ *admet une solution* $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *alors* $31|a_n x=1+31y$ *et puisque* $31|31y$ *alors* $31|1$ *ce qui est absurde*
et par suite l'équation (E_n) *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}^2$ *dans ce cas particulier.*

EXO258 : Pour tout entier naturel non nul n on pose : $b_n=2\cdot 10^n+1$ et $c_n=2\cdot 10^n-1$
Trouver un couple $(x_n,y_n)\in\mathbb{Z}^2$ qui vérifie : $b_n x_n+c_n y_n=1$

I.S : On a $b_n=c_n+2$ *donc d'après le théorème d'Euclide,* $b_n\wedge c_n=c_n\wedge 2$
puisque c_n *est un nombre impair alors* $c_n\wedge 2=1$ *et donc* b_n *et* c_n *sont premiers entre eux et par suite d'après le T.B il existe* $(x_n,y_n)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $b_n x_n+c_n y_n=1$
et en appliquant l'algorithme d'Euclide au couple (b_n,c_n) *on trouve que :*
$b_n=c_n+2$ *et* $c_n=2\cdot(10^n-1)+1$
donc $1=c_n-2\cdot(10^n-1)=c_n-(b_n-c_n)(10^n-1)=(1-10^n)b_n+10^n c_n$
et par suite il suffit de prendre $(x_n,y_n)=(1-10^n,10^n)$

EXO259 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^{1439}\equiv 1436\quad[2015]$

I.S :- En appliquant l'algorithme d'Euclide au couple $(2015,1436)$ *on trouve que* $1436\cdot 1051-2015\cdot 749=1$ *et donc d'après le T.B,* 2015 *et* 1436 *sont premier entre eux.*
- si x *est un entier qui vérifie :* $x^{1439}\equiv 1436\quad[2015]$ *alors tout diviseur commun à* x *et* 2015 *est un diviseur commun à* 1436 *et* 2015 *et puisque* 2015 *et* 1436 *sont premier entre eux alors* x *et* 2015 *sont aussi premier entre eux or* $2015=5\cdot 13\cdot 31$ *alors* x *est premier avec les trois nombres premiers* $5,13$ *et* 31 *et par suite d'après le P.T.F,* $x^4\equiv 1\quad[5]$, $x^{12}\equiv 1\quad[13]$ *et* $x^{30}\equiv 1\quad[31]$
et en remarquant que : $1440=4\cdot 360=13\cdot 120=30\cdot 48$ *alors*
$x^{1440}\equiv 1\quad[5]$, $x^{1440}\equiv 1\quad[13]$ *et* $x^{1440}\equiv 1\quad[31]$ *donc* $x^{1440}\equiv 1\quad[2015]$ *car* $2015=5\cdot 13\cdot 31$
nous avons donc d'une part que $x^{1439}\equiv 1439\;[2015]$ *et d'autre part que* $x^{1440}\equiv 1\;[2015]$
et par suite $x^{1439}\cdot x\equiv 1\;[2015]$ *soit que* $1436\cdot x\equiv 1\;[2015]$
or $1436\cdot 1051-2015\cdot 749=1$ *donc* $1436\cdot 1051\equiv 1\;[2015]$ *et par suite* $1051\cdot 1436\cdot x\equiv 1051\;[2015]$
ou encore $x\equiv 1051\;[2015]$
Réciproquement puisque $1436\cdot 1051-2015\cdot 749=1$ *alors* 1051 *est premier avec* 2015 *donc il est premier avec chacun des nombres* $5,13$ *et* 31
et par suite $1051^{1440}\equiv 1\;[5]$, $1051^{1440}\equiv 1\;[13]$ *et* $1051^{1440}\equiv 1\;[31]$ *soit que* $1051^{1440}\equiv 1\;[2015]$

et donc $1051^{1439}\cdot 1051\equiv 1\ [2015]$ *soit que* $1051^{1439}\cdot 1051\cdot 1436\equiv 1436\ [2015]$ *ou encore* $1051^{1439}\equiv 1436\ [2015]$ *puisque* $1436\cdot 1051\equiv 1\ [2015]$ *et par suite* 1051 *modulo* 2015 *est bien la solution de l'équation* (E)

EXO260 : Résoudre dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation : $(E)\quad ;\quad x^3+y^3=173(xy+1)$

I.S : Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

si $173|a^3+b^3$ *alors* $a^3\equiv -b^3\ [173]$ *et donc* $\left(a^3\right)^{57}\equiv\left(-b^3\right)^{57}\ [173]$ *soit que* $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$

et plus puisque 173 *est un nombre premier alors :*

$a\equiv 0\ [173]\ \Leftrightarrow\ a^3\equiv 0\ [173]\ \Leftrightarrow\ b^3\equiv 0\ [173]\ \Leftrightarrow\ b\equiv 0\ [173]$

ainsi :- si $173|a$ *alors* $173|b$ *et donc* $173|a+b$

- si 173 ne divise pas a *alors 173 ne divise pas* b

et d'après le P.T.F $a^{172}\equiv 1\ [173]$ *et* $b^{172}\equiv 1\ [173]$ *soit que* $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

donc $a^{172}-b^{172}\equiv 0\ [173]$ *ou encore* $a^{171}\cdot a-b^{171}\cdot b\equiv 0\ [173]$ *et puisque* $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$

alors $a^{171}\cdot a+a^{171}\cdot b\equiv 0\ [173]$ *soit que* $a^{171}\cdot(a+b)\equiv 0\ [173]$

et puisque 173 *ne divise pas* a *alors* 173 *ne divise pas* a^{171} *et donc* $173|a+b$

donc dans les deux cas $173|a+b$

ainsi donc si $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *est solution de l'équation* (E) *alors* $173|x+y$

donc il existe $k\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $x+y=173k$ *et donc puisque* $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

alors $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=173(xy+1)$ *ou encore* $173k\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=173(xy+1)$

soit que $k\cdot(x-y)^2+(k-1)xy=1$ *avec* $k\in\mathbb{N}^*$ *et* $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

et donc $k(x-y)^2=0$ *et* $(k-1)xy=1$ *ou* $k(x-y)^2=1$ *et* $(k-1)xy=0$

si $k(x-y)^2=0$ *et* $(k-1)xy=1$ *alors* $x=y$ *et* $(k-1)x^2=1$ *soit que* $x=y$ *et* $(k-1)=x=1$

donc $x=y=1$ *et* $k=2$ *ce qui est impossible car* $173|x+y$ *et* $x+y=2$

et par suite $k=1$ *et ainsi* $(x-y)^2=1$ *soit que* $x-y=1$ *ou* $x-y=-1$

et donc $x+(x-1)=173$ *ou* $x+(x+1)=173$ *soit que* $2x=174$ *ou* $2x=172$

ce qui donne ($x=87$ *et donc* $y=86$ *) ou (* $x=86$ *et donc* $y=87$ *)*

En conclusion les solutions de (E) *dans* $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *sont :* $(87,86)$ *et* $(86,87)$

EXO261 : Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5

Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$px + y^{p-1} = 2017$

I.S :- on remarque que 2017 *est un nombre premier et que* $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

Si $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *vérifiant :* $p \cdot x + y^{p-1} = 2017$ *alors* $p < 2017$ *(car* $px < 2017$ *)*

et p *ne divise pas* y *sinon* p *diviserait* 2017 *ce qui est faux*

ainsi d'après le P.T.F, $y^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *et donc puisque* $p \cdot x + y^{p-1} = 2017$ *alors* $1 \equiv 2017 \quad [p]$

soit que $p \mid 2016$ *et puisque* p *est un nombre premier supérieur à* 5 *alors* $p = 7$

ainsi donc s'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *vérifiant :* $p \cdot x + y^{p-1} = 2017$ *alors nécessairement* $p = 7$

et dans ce cas on aura : $7x + y^6 = 2017$

remarquer que dans ce cas on doit avoir $y < \sqrt[6]{2017}$ *soit que* $1 \le y \le 3$

$y = 1$ *donne* $7x + 1 = 2017$ *soit que* $7x = 2016$ *et donc* $x = 288$

$y = 2$ *donne* $7x + 64 = 2017$ *soit que* $7x = 1953$ *et donc* $x = 279$

$y = 3$ *donne* $7x + 729 = 2017$ *soit que* $7x = 1288$ *et donc* $x = 184$

les couples $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *qui répondent à la question sont donc :* $(288,1)$, $(279,2)$ *et* $(184,3)$

EXO262: On admet que 2969 est un nombre premier et soient n et m deux entiers naturels.

Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \quad [2969] \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \quad [2969]$ et $m \equiv 0 \quad [2969]$

I.S : - on remarque que 2969 *est un nombre premier.*

- Soient n *et* m *deux entiers naturels tels que* $n^8 + m^8 \equiv 0 \quad [2969]$

si 2969 *ne divise pas* n *alors d'après le T.B, il existe* $u \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n \cdot u \equiv 1 \quad [2969]$

(car il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $nu + 2969v = 1$*) et donc* $(un)^8 + (um)^8 \equiv 0 \quad [2969]$

soit que $(um)^8 \equiv -1 \quad [2969]$ *et donc* $(um)^{2968} \equiv -1 \quad [2969]$ *puisque* $2968 = 8 \cdot 371$

ainsi donc 2969 *ne divise pas* $(um)^{2968}$ *et donc* 2969 *ne divise pas* um *car* 2969 *est premier*

et donc d'après le P.T.F , $(um)^{2968} \equiv 1 \quad [2969]$ *et donc* $1 \equiv -1 \quad [2969]$

ou encore que $2969 \mid 2$ *ce qui est absurde et par suite* $2969 \mid n$ *donc* $2969 \mid n^8$ *et par suite* $2969 \mid m^8$

puisque $n^8 + m^8 \equiv 0 \quad [2969]$

Réciproquement, si $n \equiv 0 \quad [2969]$ *et* $m \equiv 0 \quad [2969]$ *donc* $n^8 \equiv 0 \quad [2969]$ *et* $m^8 \equiv 0 \quad [2969]$

et par suite $n^8 + m^8 \equiv 0 \quad [2969]$

EXO263 : Montrer que l'équation : $(D) \;\; ; \;\; 7x^3 - 13y = 5$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

I.S : Si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ *est une solution de l'équation* (D) *alors* $7x^3 - 13y = 5$

tout diviseur d *positif et commun à* x *et* 13 *divise nécessairement* 5 *donc égal à* 1 *ou* 5

or 5 *ne divise pas* 13 *donc* $d = 1$ *et par suite* $x \wedge 13 = 1$ *ou encore que* x *et* 13 *sont premiers entre eux*

et d'après le P.T.F on a $x^{12} \equiv 1 \quad [13]$

or $7x^3-13y=5$ *donc* $7x^3\equiv 5\quad[13]$ *et par suite* $2\cdot 7\cdot x^3\equiv 2\cdot 5\quad[13]$ *et donc* $x^3\equiv 10\quad[13]$

on déduit alors que $x^{12}=\left(x^3\right)^4\equiv 10^4\quad[13]$

or $x^{12}\equiv 1\quad[13]$ *donc* $10^4\equiv 1\quad[13]$ *ce qui est absurde car* $10^4\equiv 3\quad[13]$

En conclusion l'équation (D) *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}^2$

EXO264 : Déterminer tous les nombres premiers p *et* q vérifiant : $p<q$ et $9^{p+q-1}\equiv 1\quad[pq]$

I.S : On a $9^{p+q-1}\equiv 1\quad[pq]$ *donc il existe un entier* $k\in\mathbb{N}$ *tel que* $kpq-9\cdot 9^{p+q-2}=1$

donc d'après le T.B 9 *et* p *sont premiers entre eux et d'après le P.T.F* $9^{p-1}\equiv 1\quad[p]$

et puisque $9^{p+q-1}\equiv 1\quad[p]$ *soit que* $9^q\cdot 9^{p-1}\equiv 1\quad[p]$ *alors* $9^q\equiv 1\quad[p]$

de plus $p-1<q$ *et* q *est premier donc* $(p-1)$ *et* q *sont premiers entre eux*

et donc d'après le T.B , il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $uq+v(p-1)=1$ *en on déduit que*

$9=9^{uq}\cdot 9^{v(p-1)}=\left(9^q\right)^u\cdot\left(9^{p-1}\right)^v\equiv 1\quad[p]$ *soit que* $p|8$ *or* p *est premier donc* $p=2$

remarquer que comme pour p *on montre que* 9 *et* q *sont premiers entre eux*

et donc puisque q *est premier alors d'après le P.T.F* $9^{q-1}\equiv 1\quad[q]$

or $9^{p+q-1}\equiv 1\quad[q]$ *et* $p=2$ *donc* $9^{q+1}\equiv 1\quad[q]$ *soit que* $9^{q-1}\cdot 9^2\equiv 1\quad[q]$

et donc $80\equiv 0\quad[q]$ *et puisque* $80=2^4\cdot 5$ *et que* $2=p<q$ *alors* $q=5$

En conclusion la seule valeur de (p,q) *est* $(2,5)$

EXO265 : (i) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(F)\quad;\quad x^{41}\equiv 4\quad[43]$

(ii) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système : $(S)\;;\;\begin{cases}x^{41}\equiv 4 & [43]\\ x^{47}\equiv 10 & [47]\end{cases}$

I.S : (i) Si x *est une solution de l'équation* (F) *alors il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* $x^{41}=4+43k$

et donc tout diviseur positif commun à x *et* 43 *doit diviser* 4 *donc il ne peut prendre que les valeurs* 1 , 2 *ou* 4 *et puisque ni* 2 *ni* 4 *ne divise* 43 *alors le seul diviseur positif commun à* x *et* 43 *est* 1

soit que x *et* 43 *sont premiers entre eux en on déduit d'après le P.T.F que* $x^{42}\equiv 1\quad[43]$

soit que $x\cdot x^{41}\equiv 1\quad[43]$ *ou encore que* $4x\equiv 1\quad[43]$ *et donc* $x\equiv 11\quad[43]$ *puisque* $4\cdot 11\equiv 1\quad[43]$

Réciproquement on a $11^{42}=11^{41}\cdot 11\equiv 1\quad[43]$ *puisque* $11\wedge 43=1$ *et donc* $11^{41}\cdot 11\cdot 4\equiv 4\quad[43]$

soit que $11^{41}\equiv 4\quad[43]$ *donc* $x\equiv 11\quad[43]$ *est bien la solution de* (F)

et donc l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{Z}$ *est* $\{11+43k\;/\;k\in\mathbb{Z}\}$

(ii) On rappelle une deuxième version du P.T.F à savoir :

Si p *est un nombre premier alors* $(\forall a\in\mathbb{Z})\;;\;a^p\equiv a\quad[p]$

- si x *est une solution du système* (S) *alors* $x^{41}\equiv 4\quad[43]$ *et* $x^{47}\equiv 10\quad[47]$

donc $x\equiv 11\ [43]$ *d'après la partie (i) et* $x\equiv 10\ [47]$ *puisque* 47 *est un nombre premier et que*

$x^{47}\equiv x\ [47]$ *(Deuxième version du P.T.F) ainsi donc x est solution du système* $(S'):\begin{cases} x\equiv 11\ [43] \\ x\equiv 10\ [47]\end{cases}$

puisque $43\wedge 47=1$ *d'après le théorème des restes chinois ce système admet une unique solution modulo* $43\cdot 47=2021$ *à savoir* $x\equiv 11\cdot 47\cdot u+10\cdot 43\cdot v\quad [2021]$ *avec* (u,v) *le couple de Bézout associé au couple* $(47,43)$ *et puisque* $11\cdot 47-12\cdot 43=1$ *(d'après l'algorithme d'Euclide)*

donc $(u,v)=(11,-12)$ *et donc* $x\equiv 11\cdot 47\cdot 11+10\cdot 43\cdot(-12)\quad [2021]$ *soit que* $x\equiv 527\quad [2021]$

donc l'ensemble des solutions du système (S) *dans* $\mathbb{Z}$ *est* $\{527+2021k\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

EXO266 : Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$
Montrer que si p un nombre premier impair qui divise A alors : $p=7$ ou $p\equiv 1\ [7]$

I.S : On a $a^7-1=(a-1)A$ *et puisque* $p\,|\,A$ *alors* $p\,|\,a^7-1$ *soit que* $a^7\equiv 1\ [p]$

et donc $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad a^{7n}\equiv 1\quad [p]$

puisque $a^7\equiv 1\ [p]$ *alors il existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tel que* $a\cdot a^6-kp=1$ *donc d'après le T.B* a *et* p *sont premiers entre eux et par suite d'après le P.T.F* $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$ *et donc* $(\forall m\in\mathbb{N})\quad ;\quad a^{(p-1)m}\equiv 1\quad [p]$

- si 7 *ne divise pas* $(p-1)$ *alors* $7\wedge(p-1)=1$ *et donc d'après le T.B il existe* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $7u+(p-1)v=1$ *et par suite* $a=a^{7u+(p-1)v}=a^{7u}\cdot a^{(p-1)v}\equiv 1\quad [p]$

dans ce cas $A\equiv 1+1+1+1+1+1+1\equiv 7\ [p]$ *et puisque* $p\,|\,A$ *alors* $p\,|\,7$ *soit que* $p=7$

- si 7 *divise* $(p-1)$ *alors* $p\equiv 1\quad [7]$

ainsi dans tous les cas on a : $p=7$ *ou* $p\equiv 1\quad [7]$

EXO267 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ ;\ x^{19}\equiv 1\quad [137]$

I.S : - Remarquer que 137 *est un nombre premier.*
Soit x *une solution de l'équation* (E) *alors* $x^{19}\equiv 1\quad [137]$ *donc d'une part on a* $x^{38}\equiv 1\quad [137]$ *et d'autre part* x *et* 137 *sont premiers entre eux (car si* $137\,|\,x$ *alors* 137 *diviserait nécessairement* 1 *ce qui est absurde) donc d'après le P.T.F* $x^{136}\equiv 1\quad [137]$

or $38\wedge 136=2$ *donc* $x^2\equiv 1\quad [137]$

(en effet $38\wedge 136=2$ *donc il existe* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ *tel que* $38u+136v=2$ *et donc* $x^2=x^{38u}\cdot x^{136v}\equiv 1\quad [137]$*)*

et puisque 137 *est un nombre premier alors* $x^2\equiv 1\quad [137]\ \Leftrightarrow\ x\equiv 1\quad [137]$ *ou* $x\equiv 136\quad [137]$

Ainsi donc si $x^{19}\equiv 1\quad [137]$ *alors* $x\equiv 1\quad [137]$ *ou* $x\equiv -1\quad [137]$

Réciproquement :
- si $x\equiv 1\quad [137]$ *alors* $x^{19}\equiv 1\quad [137]$ *donc* $x\equiv 1\quad [137]$ *est solution de l'équation* (E)

- mais si $x \equiv -1 \quad [137]$ *alors* $x^{19} \equiv -1 \quad [137]$ *et donc* $x^{19} \equiv -1 \quad [137]$ *n'est pas solution*

En conclusion l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ *de l'équation* (E) *est :* $\{1+137k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

EXO268 : Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $x^2 \equiv 2 \quad [p]$

Montrer que si $p \equiv 5 \quad [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

I.S : - p *étant premier impair donc* $(p-1)$ *est un nombre pair et* $2 \wedge p = 1$ *et donc d'après le P.T.F*

$2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *et par suite* $\left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \quad [p]$ *ce qui donne* $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *ou* $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

- si x *est une solution de l'équation* (E) *alors* x *et* p *sont premiers entre eux*

et donc d'après le P.T.F $x^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *soit que* $\left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *et par suite* $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

ainsi donc si l'équation (E) *admet une solution alors* $\mathbb{Z}$ *alors* $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

- on a d'après la formule de Moivre : $(1+i)^p = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^p = 2^{\frac{p}{2}} cos\frac{\pi}{4}p + i2^{\frac{p}{2}} sin\frac{\pi}{4}p$

et en utilisant la formule du binôme de Newton : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

donc $2^{\frac{p}{2}} cos\frac{\pi}{4}p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$

et puisque si p *est premier alors* $p \,|\, C_p^k$ *pour tout* $k \in \{1,2,......,p-1\}$

alors $2^{\frac{p}{2}} cos\frac{\pi}{4}p = 1 + \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \equiv 1 \quad [p]$

et ainsi si $p \equiv 5 \quad [8]$ *alors* $p = 5+8k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *et donc* $2^{\frac{p}{2}} cos\frac{\pi}{4}p = 2^{\frac{p}{2}} cos5\frac{\pi}{4} = -2^{\frac{p}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -2^{\frac{p-1}{2}}$

soit que $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$ *et donc l'équation n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}$

EXO269 : Soit p un nombre premier impair et a un entier naturel non divisible par p

(i) Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv p-1 \quad [p]$

(ii)Montrer que si a est un carré modulo p alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

(iii) Montrer que si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv p-1 \quad [p]$ alors l'équation $x^2 \equiv a \quad [p]$ n'admet pas de solution

dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

I.S : (i) a *est un entier naturel non divisible par p donc* $a \wedge p = 1$ *et donc d'après le P.T.F* $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

puisque p *est impair alors* $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \quad [p]$ *soit que* $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \quad [p]$

p *étant premier donc* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *ou* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

(ii) Si a *est un carré modulo* p *(on dit que* a *est un résidu quadratique modulo* p *) alors il existe un entier* n *tel que* $n^2 \equiv a \quad [p]$ *et puisque* $p \wedge a = 1$ *donc* $p \wedge n^2 = 1$ *soit que* $p \wedge n = 1$ *et d'après le P.T.F* $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $\left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *soit que* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

(iii) en effet si l'équation admet une solution alors il existe un entier n *tel que* $n^2 \equiv a \quad [p]$ *et alors on aura* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *soit que* $1 \equiv -1 \quad [p]$ *ou encore que* $p = 2$ *ce qui est faux car* p *est impair.*

EXO270 : Soit p un nombre premier impair et a un entier premier avec p . Montrer que :
l'équation $x^2 \equiv a \quad [p]$ admet une solution danc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

I.S : *- si* p *est un nombre premier impair et* a *un entier premier avec* p *alors d'après le P.T.F*

$a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ *donc* $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \quad [p]$ *ou encore* $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \quad [p]$

p *étant premier donc* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ *ou* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

- si l'équation $x^2 \equiv a \quad [p]$ *admet une solution* n *alors* $n \wedge p = 1$ *et d'après le P.T.F* $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

or $n^{p-1} = \left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}}$ *donc* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

- réciproquement si l'équation $x^2 \equiv a \quad [p]$ *n'admet pas de solution alors pour tout élément* i *de l'ensemble* $\{1, 2, ..., p-1\}$ *il existe un unique élément* j *de l'ensemble* $\{1, 2, ..., p-1\}$ *tel que* $i \cdot j = a \quad [p]$

(il suffit de prendre $j \equiv i' \cdot a \quad [p]$ *avec* i' *est le symétrique de* i *dans le groupe* $\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*, \cdot\right)$)

on a d'une part d'après le théorème de Wilson: $1 \cdot 2 .... \cdot (p-1) = (p-1)! \equiv -1 \quad [p]$

et d'autre par, en rangeant les éléments de ce produit par groupes $(i \cdot j)$ *tel que* $i \cdot j = a \quad [p]$ *on aura :*

$1 \cdot 2 .... \cdot (p-1) = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{\frac{p-1}{2} \text{ fois}} = a^{\frac{p-1}{2}}$ *ainsi donc :* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

En conclusion : l'équation $x^2 \equiv a \quad [p]$ *admet une solution modulo* p *si et seulement si* $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

exemple : l'équation $x^2 \equiv 6 \quad [7]$ *n'admet pas de solution modulo* 7 *car* $(6)^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \quad [7]$
et on peut vérifier directement que modulo 7 *, aucun carré n'est égal à* 6

EXO271 : On considère l'équation (E) ; $(x^2-2)(x^2+7)(x^2+14)=0$

Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$ mais qu'elle admet des solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour tout nombre premier impair p différent de 7

I.S : - les solutions dans $\mathbb{R}$ *de l'équation* (E) *sont* $\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$ *qui ne sont pas des entiers donc elle n'admet pas de solutions dans* $\mathbb{Z}$
supposons que ni l'équation $x^2 \equiv 2 \quad [p]$ *ni l'équation* $x^2 \equiv -7 \quad [p]$ *n'admette de solution(exercice285)*

puisque $2 \wedge p = (-7) \wedge p = 1$ *alors* $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$ *et* $(-7)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$ *donc*

$(-14)^{\frac{p-1}{2}} = 2^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-7)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$

et par suite puisque $(-14) \wedge p = 1$ *, l'équation* $x^2 \equiv -14 \quad [p]$ *admet une solution dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

EXO272 : Trouver tous les entiers naturels $x > 3$ qui vérifie : $x-3 \mid x^3-3$

I.S : posons $t = x-3$ *; Si* $x-3 \mid x^3-3$ *alors* $t \mid (t+3)^3 - 3$ *soit que* $t \mid t^3+9t^2+27t+27-3$ *et donc* $t \mid 24$
Les diviseurs positifs de 24 *étant :* $1,2,3,4,6,8,12$ *et* 24 *et par suite les vaeurs de* x *sont :*
$4,5,6,7,9,11,15$ *et* 27

EXO273 : Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout entier $a > 1$ on a :

$$\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) \wedge (a-1) = (a-1) \wedge n$$

I.S : Soit $d = \left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) \wedge (a-1)$ *et* $\delta = (a-1) \wedge n$

on a : $\frac{a^n-1}{a-1} = a^{n-1} + a^{n-2} + ...a+1 = (a^{n-1}-1) + (a^{n-2}-1) + ...(a-1) + n$

et puisque $(a-1) \mid a^k - 1$ *pour tout , alors tout diviseur commun à* $\frac{a^n-1}{a-1}$ *et* $(a-1)$ *est un diviseur commun à* $(a-1)$ *et* n *et réciproquement ainsi donc* $d = \delta$

EXO274 : Montrer que pour tout entier naturel n impair ona : $n \mid 1^n + 2^n + ...+(n-1)^n$

I.S : *On a pour tout* $k \in \{1,2,......,(n-1)\}$ *;* $(-k)^n = -k^n$ *(car* n *est impair)* *et* $(n-k)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i\cdot n^{n-i}\cdot k^i=\sum_{i=0}^{i=n-1}C_n^i\cdot n^{n-i}\cdot(-k)^i+(-k)^n$ *soit que* $k^n+(n-k)^n=\sum_{i=0}^{i=n-1}C_n^i\cdot n^{n-i}\cdot(-k)^i$

donc pour tout $k\in\{1,2,......,(n-1)\}$ *on a :* $n\,|\,k^n+(n-k)^n$

EXO275 : Montrer que n ne divise pas l'entier $1^n+2^n+.......+(n-1)^n$ si n est un entier pair.

I.S : Suppose que $n\,|\,1^n+2^n+.......+(n-1)^n$

Soit $k\in\{1,2,.......,(n-1)\}$ *et soit* m *le plus grand entier naturel tel que* $2^m\,|\,n$

- si k *est pair alors :* $2^m\,|\,k^n$ *(car* $2^m\geq m$*)*

- si k *est impair (au nombre de* $\frac{1}{2}n$ *) alors d'après le théorème d'Euler,* $k^{\varphi(2^m)}\equiv 1\quad[2^m]$

soit que $k^{2^{m-1}}\equiv 1\quad[2^m]$ *car* $\varphi(2^m)=2^m\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=2^{m-1}$ *et donc* $k^n\equiv 1\quad[2^m]$ *car* $2^{m-1}\,|\,n$

ainsi donc *et donc* $1^n+2^n+.......+(n-1)^n\equiv\frac{1}{2}n\quad[2^m]$

(puisque $2^n+4^n+........+(n-2)^n\equiv 0\quad[2^m]$ *)*

puisque par hypothèse $n\,|\,1^n+2^n+.......+(n-1)^n$ *alors* $2^m\,|\,1^n+2^n+.......+(n-1)^n$ *et donc* $\frac{1}{2}n\equiv 0\quad[2^m]$

soit que $n\equiv 0\quad[2^{m+1}]$ *ou encore que* $2^{m+1}\,|\,n$

ce qui est absurde car m *le plus grand entier naturel tel que* $2^m\,|\,n$

donc n *ne peut diviser* $1^n+2^n+.......+(n-1)^n$

EXO276 : Montrer que si n est un entier naturel pair alors tous les entiers : $n+1,n^n+1,n^{n^n}+1,......$ sont premiers avec 7

I.S : Si n *est pair alors tous les entiers* $n,n^n,n^{n^n},......$ *sont pairs*

si l'un des termes $n+1,n^n+1,n^{n^n}+1,......$ *est divisible par* 7 *alors il existerait un entier naturel* m *tel que* $n^{2m}+1\equiv 0\quad[7]$ *ce qui est impossible car :* $(\forall n\in\mathbb{Z})$; $n^2\equiv 0,1,2$ *ou* $4\quad[7]$

EXO277 : n étant un entier naturel.

Calculer la somme $S_n=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+......+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+......$

I.S :- On remarque que cette somme est fini puisque à partir de $2^{k+1}>n+2^k$ *soit que* $2^k>n$

on a $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$

- On a : pour tout réel x , $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$

en effet si $n \le x < n+\frac{1}{2}$ *alors* $2n \le 2x < 2n+1$ *et* $n+\frac{1}{2} \le x+\frac{1}{2} < n+1$ *donc* $[2x]=2n$ *et* $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$

et si $n+\frac{1}{2} \le x < n+1$ *alors* $2n+1 \le 2x < 2n+2$ *et* $n+1 \le x+\frac{1}{2} < n+\frac{3}{2}$ *donc*

$[2x]=2n+1$ *et* $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1$

ainsi donc $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$ *et par suite :*

$S_n=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]+.........+\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=n$

car $2^{k+1}>2^k>n$ *et donc*

ainsi donc $n=\sum_{k=0}^{k=m}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$ *avec* m *est la plus grande puissance telle que* $2^m \le n$

EXO278 : Déterminer tous les entiers naturels n tels que $2^n \mid 3^n-1$

I.S : On a : $3^n-1=2\left(3^{n-1}+3^{n-2}+......+1\right)$

- si n *est impair et* $n>1$ *alors* $\left(3^{n-1}+3^{n-2}+......+1\right)$ *est la somme d'un nombre impair de nombres impairs donc il est impair donc il n'est pas divisible par* 2 *et par suite* 3^n-1 *n'est pas divisible par* 2^2 *et donc il n'est pas divisible par* 2^n *puisque* $n \ge 2$

- pour $n=1$ *on a bien* $2 \mid 2$

- si n *est pair posons* $n=2k$ *et donc* $3^n-1=3^{2k}-1=\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)$

si $\delta=\left(3^k-1\right)\wedge\left(3^k+1\right)$ *alors* $\delta \mid 3^k-1$ *et* $\delta \mid 3^k+1$ *donc* $\delta \mid 2$

or 3^k-1 *et* 3^k+1 *sont pairs donc* $\delta=2$

puisque $2^{2k} \mid \left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)$ *alors soit* $\left(3^k-1\right)$ *ou soit* 3^k+1 *est divisible par* 2^{2k-1}

ce qui implique que soit $3^k-1 \ge 2^{2k-1}$ *ou soit* $3^k+1 \ge 2^{2k-1}$ *donc dans les deux cas* $3^k+1 \ge 2^{2k-1}$

car $3^k+1 \ge 3^k-1$

Or l'inégalité $3^k+1 \ge 2^{2k-1}$ *n'est pas vriae pour* $k \ge 3$ *et par suite il reste les cas :* $k=0,1$ *et* 2

on vérifie par le calcul direct : $k=0$ *donc* $n=0$ *et* $1 \mid 0$

$k=1$ *donc* $n=2$ *et* $2 \mid 8$

$k=2$ *donc* $n=4$ *et* $16 \mid 80$

En conclusion : Les entiers qui vérifient cette relation sont $0, 1, 2$ *et* 4

EXO279 : Déterminer un entier naturel n pour lequel $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$ ôu les d_i ($i=1 à 4$) sont les plus petits diviseurs de n tels que : $1=d_1<d_2<d_3<d_4$

I.S : - on a $d_1=1$

- *Si* n *est impair alors tous ses diviseurs sont impair et donc* $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ *est pair ce qui est impossible.*
- *supposons* n *pair donc* $d_2=2$
- *si* d_3 *et* d_4 *sont de même parité alors* $d_3^2+d_4^2$ *est pair et donc* $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ *est impair ce qui est encore impossible.*
- *si* $d_3=3$ *, puisque* d_4 *est le plus petit diviseur après* $d_3=3$ *alors* $d_4>3$ *est un nombre premier et donc il est impair cecqui est encore impossible car* d_3 *et* d_4 *seraient de même paité.*
- *si* $d_3=4$ *alors* $d_4=p$ *est un nombre premier strictement supérieur à* 3 *et on aura alors :*

$21+p^2=n$

or $p|n$ *donc* $p|21$ *et par suite* $p=7$ *mais ça ne convient pas car*

$n=21+49=70$ *et* 4 *ne divise pas* 70

- *si* 4 *ne divise pas* n *alors* $d_3=p$ *est un nombre premier supérieur ou égal à* 5 *et* $d_4=2p$ *on aura alors :* $5+5p^2=n$ *donc* $p|5$ *et par suite* $p=5$ *et* $n=130$ *convient.*

EXO280 : Déterminer tous les couples $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ pour lesquels la somme des entiers de n à $n+m$ est égale à 1000

I.S : La somme en question vaut

$$n+(n+1)+(n+2)+.....+(n+m)=n(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{(2n+m)(m+1)}{2}$$

ce qui revient à résoudre dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *l'équation :* $(2n+m)(m+1)=2000=2^4\cdot 5^3$

avec les conditions : $3\le 2n+m$, $2\le m+1<2n+m$ *et est un nombre impair*

soit que $(2n+m)$ *et* $(m+1)$ *sont de parité différentes.*

les seules possibilités qui restent sont : - $m+1=5$ *et* $2n+m=400$ *donc* $m=4$ *et* $n=198$

- $m+1=25$ *et* $2n+m=80$ *donc* $m=24$ *et* $n=28$
- $m+1=16$ *et* $2n+m=125$ *donc* $m=15$ *et* $n=55$

EXO281 : Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels strictements positifs telle que $u_i\wedge u_j=i\wedge j$ pour tous les indices i *et* j

I.S : On a pour tout , $u_{2n}\wedge u_n=2n\wedge n=n$ *donc* $n|u_n$ *pour tout* $n\ge 1$

donc pour tout $n\ge 1$ *il existe un entier* k_n *tel que* $u_n=n\cdot k_n$

supposons qu'il existe un indice $m\ge 1$ *tel que* $k_m>1$ *et soit* p *un diviseur premier de* k_m

$p|k_m$ *donc* $p|u_m$ *et comme il divise aussi* u_p *alors* $p|u_m\wedge u_p=m\wedge p$ *et donc* $p|m$

soit p^a *la plus grande puissance de* p *qui divise* m

alors p^{a+1} *divise* u_m *(car* $u_m=m\cdot k_m$, $m=p^a\cdot k$ *et* $k_m=p\cdot k'$ *)*

mais $u_m\wedge u_{p^{a+1}}=m\wedge p^{a+1}=p^a$ *donc* p^{a+1} *divise* p^a *ce qui est absurde.*

Ainsi pour tout $n \geq 1$ ¸ $u_n = n$

EXO282 : Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2^n \mid 3^{2^n} - 1$

I.S : Procèdons par récurrence

pour $n = 1$ *on a bien* $2 \mid 3^2 - 1$

Montrons que si $2^n \mid 3^{2^n} - 1$ *alors* $2^{n+1} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$

En effet $3^{2^{n+1}} - 1 = \left(3^{2^n}\right)^2 - 1 = \left(3^{2^n} - 1\right)\left(3^{2^n} + 1\right)$

si par hypothèse $2^n \mid 3^{2^n} - 1$ *alors* $2^n \cdot 2 \mid \left(3^{2^n} - 1\right)\left(3^{2^n} + 1\right)$ *car* $3^{2^n} + 1$ *est un nombre pair*

et donc $2^{n+1} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$ *et donc d'après le principe de récurrene* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $2^n \mid 3^{2^n} - 1$

EXO283 : Soient a , b et c trois entiers strictement positifs deuxpr et tels que :

- il n'existe aucun nombre premier qui les divise tous les trois (premiers dans leur ensemble)
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

Montrer que $a + b$ est un carré parfait.

I.S : Posons $d = a \wedge b$ *alors il existe deux entiers premiers entre eux tels que :* $a = da'$ *et* $b = db'$

puisque $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ *alors* $c\left(a' + b'\right) = da'b'$ *et donc* $c \mid da'b'$ *et comme* a , b *et* c *sont premiers dans leur ensemble alors* c *et* d *sont premiers entre eux et donc d'après le théorème de Gauss* $c \mid a'b'$

de même $a' \mid c\left(a' + b'\right)$ *et comme* $a' \wedge b' = 1$ *alors* $a' \wedge \left(a' + b'\right) = 1$ *et donc* $a' \mid c$

par le même raisonnement on montre que $b' \mid c$

et puisque $a' \wedge b' = 1$ *alors* $a'b' \mid c$ *(deuxième version du théorème de Gauss)*

ainsi donc on a $c \mid a'b'$ *et* $a'b' \mid c$ *et par suite* $a'b' = c$ *(puisque ce sont des entiers positifs)*

et donc $c\left(a' + b'\right) = dc$ *soit que* $a' + b' = d$ *et ainsi* $a + b = d\left(a' + b'\right) = d^2$

EXO284 : soient a et b deux entiers premiers entre eux.

Montrer que l'équation (E) ; $(a + x) \vee (b + x) = a \vee b$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^*$

I.S : On rappelle la formule : $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$

on a $a \vee b = ab$ *car* $a \wedge b = 1$

soit $x \in \mathbb{N}^*$ *une solution de l'équation* (E) *alors* $(a + x) \vee (b + x) = a \vee b$

soit p *un diviseur premier commun à* $a + x$ *et* $b + x$ *alors* p *divise* $a \vee b$ *et donc il divise* ab

et par suite il divise a *ou* b *et dans les deux cas on déduit que* $p \mid x$

si $p \mid x$ *alors* $p \mid a$ *et* $p \mid b$ *car* p *un diviseur premier commun à* $a + x$ *et* $b + x$

et ceci est absurde car $a \wedge b = 1$

l'équation (E) *devient* $ab = (a + x)(b + x)$ *c'est une équation qui n'admet pas solution dans* $\mathbb{N}^*$

EXO285 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers positifs inférieurs à n et premiers avec n (c'esr l'indicateur d'Euler)

Montrer que pour $n > 2$, $\varphi(n)$ est toujours un nombre pair

I.S : on remarque que si un entier k est premier avec n alors $n-k$ est aussi premier avec n ainsi donc on peut regrouper les entiers positifs inférieurs à n et premiers avec n en groupes de deux éléments k et $(n-k)$ sauf dans le cas $k = n-k$

or dans ce cas on aura $k = \frac{n}{2}$ et si $n > 2$ on a n et $\frac{n}{2}$ ne sont pas premiers entre eux et donc c'est un cas à rejeter.

En conclusion si $n > 2$ alors $\varphi(n)$ est pair.

EXO286 : Montrer que pour tout entier naturel n , on a $n^2 \mid (n+1)^n - 1$

I.S : d'après la formule binômiale $(n+1)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k n^{n-k} = n^n + C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} + ... + C_n^{n-1} n + 1$

soit que $(n+1)^n - 1 = n^n + C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} + ... + C_n^{n-1} n$ or tous les termes de cette somme sont divisible par n^2 (puisque $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$) donc $n^2 \mid (n+1)^n - 1$

EXO287 : Soit x, y *et* z trois entiers naturels.

Montrer que si : $x \wedge y = 1$ et $x^2 + y^2 = z^4$ alors $7 \mid xy$

I.S : Si $x \wedge y = 1$ et $x^2 + y^2 = z^4$ alors il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ premiers entre eux tel que :

$x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ *et* $z^2 = m^2 + n^2$

si 7 ne divise pas y alors 7 ne divise pas m et 7 ne divise pas n

or le carré modulo 7 d'un entier non divisible par 7 est soit 1 , 2 ou 4

donc $m^2 \equiv 1 , 2$ ou 4 $[7]$ et $n^2 \equiv 1 , 2$ ou 4 $[7]$

et puisque $1+2, 1+4$ et $2+4$ sont différents de $1, 2$ et 4 donc nécessairement $m^2 \equiv n^2 \quad [7]$

et par suite $7 \mid x = m^2 - n^2$

Remarque : la condition $x \wedge y = 1$ est nécessaire car : $15^2 + 20^2 = 5^4$ mais 7 ne divise pas 15×20

EXO288 : Soit a un entier naturel tel que $(a+1)$ n'est pas une puissance de 2

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels m tels que : $m \mid a^m + 1$

I.S : puisque $a+1$ n'est pas une puissance de 2 alors il admet un diviseur premier impair p $(p \mid a+1)$

Montrons que si pour un certain entier naturel n , $p^{n+1} \mid a^{p^n} + 1$ alors $p^{n+2} \mid a^{p^{n+1}} + 1$

en effet si $p^{n+1} \mid a^{p^n}+1$ *et posons* $b=a^{p^n}$ *alors soit que* $b \equiv -1 \quad \left[p^{n+1}\right]$

puisque p *est impair alors* $a^{p^{n+1}}+1=b^p+1=(b+1)\left(b^{p-1}-b^{p-2}+......-b+1\right)$

or $b^{p-1}-b^{p-2}+......-b+1 \equiv 1-1+......-1+1 \equiv 0 \quad \left[p^{n+1}\right]$ *et* $b+1 \equiv 0 \ [p]$ *(puisque* $b \equiv -1 \quad \left[p^{n+1}\right]$*)*

soit que $p \mid b+1$ *et* $p^{n+1} \mid b^{p-1}-b^{p-2}+.....-b+1$ *et donc* $p^{n+2} \mid (b+1)\left(b^{p-1}-b^{p-2}+......-b+1\right)=a^{p^{n+1}}+1$

ainsi d'après le principe de récurrence : $p^{n+1} \mid a^{p^n}+1$ *pour tout* $n \geq 1$ *et par suite* $p^n \mid a^{p^n}+1$
(puisque $p^n \mid p^{n+1}$*)*

et donc il existe une infinité d'entiers naturels m *tels que :* $m \mid a^m+1$
(il suffit de prendre $m=p^n$ *avec* n *variant dans* $\mathbb{N}^*$ *)*

EXO289 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel $n>1$ tel que $n \mid 2^n-1$

I.S : Supposons qu'un tel entier existe et soit n *le plus petit entier strictement supérieur à* 1 *et tel que* $n \mid 2^n-1$

puisque 2^n-1 *est impair alors* n *est impair et donc premier avec* 2 *donc d'après le théorème d'Euler* $n \mid 2^{\varphi(n)}-1$ *(*$\varphi(n)$ *étant l'indicateur d'Euler de* n*)*

on rappelle que pour deux entiersnaturels a *et* b *on a :* $\left(2^a-1\right) \wedge \left(2^b-1\right)=2^{a \wedge b}-1$

puisque $n \mid 2^n-1$ *et* $n \mid 2^{\varphi(n)}-1$ *alors* $n \mid \left(2^n-1\right) \wedge \left(2^{\varphi(n)}-1\right)=2^{n \wedge \varphi(n)}-1$

et puisque $n \wedge \varphi(n) \mid n$ *alors* $n \wedge \varphi(n) \mid 2^{n \wedge \varphi(n)}-1$

or $1<n \wedge \varphi(n) \leq \varphi(n)=n\prod_{i=1}^{i=N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)<n$ *ce qui est contraire au fait que* n *est le plus petit entier strictement supérieur à* 1 *et tel que* $n \mid 2^n-1$

Donc n *ne peut pas exister .*

EXO290 : Soit n un entier strictement supérieur à 2

Montrer que l'équation (E) ; $2^x+1 \equiv 0 \quad \left[2^n-1\right]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

I.S : Soit $x>1$ *une solution de*(E) *et* $x=nq+r$ *avec* $0 \leq r<n$ *la division Euclidienne de* x *par* n

on a : $2^x+1=2^{nq+r}+1=2^r 2^{nq}+1=2^r\left(2^{nq}-1\right)+\left(2^r+1\right)$

puisque 2^x+1 *est divisible par* 2^n-1 *et que* $2^{nq}-1=\left(2^n-1\right)\left(2^{n(q-1)}+2^{n(q-2)}+......+1\right)$ *donc*

$2^{nq}-1$ *divisible par* 2^n-1, *alors* 2^r+1 *est divisible par* 2^n-1 *et donc* $2^r+1 \geq 2^n-1$

or $0 \leq r<n$ *donc* $2^r<2^n$ *et ainsi on a :* $0<2^n-2^r \leq 2$ *ce qui est impossible car* $n>2$

donc l'équation(E) *n'a pas de solution* $x>1$

EXO291 : Montrer que le produit de k $(k \geq 2)$ entiers consécutifs est divisible par $k!$

I.S : En effet soient $n, n+1, \ldots\ldots\ldots, n+k-1$ *des entiers consécutifs au nombre de* k

puisque $C_n^k = \dfrac{n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)}{k!}$ *alors* $k! \cdot C_n^k = n(n+1)\ldots\ldots\ldots(n+k-1)$ *et que* C_n^k *est un entier*

alors $k!$ *divise* $n(n+1)\ldots\ldots\ldots(n+k-1)$

EXO292 : Déterminer tous les nombres premiers p tels que $4p+1$ *et* $7p-4$ soient également premiers.

I.S : on a $4p+1 \equiv p+1 \quad [3]$ *et* $7p-4 \equiv p-1 \equiv p+2 \quad [3]$ *ainsi donc l'un des entiers* p, $4p+1, 7p-4$ *est divisible par* 3 *puisque tout entier s'écrit sous l'une des formes :* $3k, 3k+1$ *ou* $3k+2$

comme $4p+1$ *et* $7p-4$ *sont supérieurs à* 3 *alors* $p=3$

EXO293 : Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un diviseur premier de p^p-1 qui soit congru à 1 mudolo p

I.S : Soit q *un diviseur de* p^p-1 *donc* $p^p \equiv 1 \quad [q]$ *et donc* p *et* q *sont premiers entre eux.*

d'après le P.T.F $p^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$ *et si* $d = p \wedge (q-1)$ *alors* $p^d \equiv 1 \quad [q]$

p *étant premier donc :* $d = p$ *(le cas :* $p \mid q-1$*) ou* *(le cas :* p *et* $(q-1)$ *sont premiers entre eux)*

si $d = p$ *alors* $p \mid q-1$ *donc* $q \equiv 1 \quad [p]$ *et ça répond à notre question*

si $d = 1$ *alors* $p \equiv 1 \quad [q]$ *donc* $q \mid p-1$

il suffit donc de trouver un diviseur de p^p-1 *qui ne divise pas* $(p-1)$

or $p^p - 1 = (p-1)\left(p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots\ldots + 1\right)$ *et* $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots\ldots + 1 > 1$ *et* $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots\ldots p + 1 \equiv 1 \quad [p-1]$

car $p \equiv 1 \quad [p-1]$ *donc* $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots\ldots + 1$ *est un diviseur de* (p^p-1) *qui ne divise pas* $(p-1)$

donc il existe un diviseur premier r *de* $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots\ldots + 1$ *et qui divise* (p^p-1) *et ne divise pas* $(p-1)$

et il répond bien à notre question.

EXO294 : Soit p un nombre premier et a *et* b deux entiers naturels.

Montrer que si $2^p + 3^p = a^b$ alors $b = 1$

I.S : - remarquons que $2^2 + 3^2 = 13$

- supposons donc que $p > 2$, *alors* $3^p + 2^p = 5\left(3^{p-1} - 2 \cdot 3^{p-2} + \ldots\ldots\ldots + 2^{p-1}\right)$

donc $5 \mid 3^p + 2^p = a^n \quad (n \geq 2)$ *donc* $25 \mid 3^p + 2^p$ *et donc* $0 \equiv 3^p + 2^p \equiv 5 \cdot p \cdot 2^{p-1} \quad [25]$

et donc *mais* $2^5 + 3^5 = 275 = 5^2 \cdot 11$ *n'est pas une puissance parfaite.*

et donc $b = 1$

EXO295 : Montrer que tout entier naturel non nul n admet un multiple qui s'écrit dans la base décimale sous la forme : 11.....1.00....0

I.S : Considérons les $(n+1)$ *entiers :* $1\ ,11\ ,111\ ,\ ....,\underbrace{11111......1}_{(n+1)\ fois}$

Pour $1\le i\le n+1$ *, soit* r_i *le reste de la division Euclidienne de l'entier* $\underbrace{11.......1}_{i\ fois}$ *par* n $\left(0\le r_i\le n-1\right)$

puisque les restes possible dans la division Euclidienne par n *sont au nombre de* n *et que il y'a* $(n+1)$ *restes* r_i *alors d'après le principe des pigeons, il existe* (i,j) *tel que* $i<j$ *et* $r_i=r_j$ *et donc*

$\underbrace{11111......1}_{i\ fois}\equiv\underbrace{11111......1}_{j\ fois}\quad [n]$ *soit que* $\underbrace{11111......1}_{i\ fois}-\underbrace{11111......1}_{j\ fois}\equiv 0\quad [n]$

ou encors $\underbrace{11...1}_{(j-i)\ fois}\underbrace{00....0}_{i\ fois}\equiv 0\quad [n]$ *et donc l'entier* $\underbrace{11...1}_{(j-i)\ fois}\underbrace{00....0}_{i\ fois}$ *est un multiple de* n

EXO296 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $5^x=y^2-2$

I.S : Si il existe un couple $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *vérifiant :* $5^x=y^2-2$ *alors* $y^2-2\equiv 1\quad [4]$ *car* $5\equiv 1\quad [4]$

soit que $y^2\equiv 3\quad [4]$ *ce qui est absurde car modulo* 4 *, l'entier* 3 *n'est pas un carré.*

($(\forall n\in\mathbb{Z})\quad ;\quad n^2\equiv 0$ *ou* $1\quad [4]$ *)*

EXO297 : Pour m *et* n deux entiers naturels stictement positifs, déterminer la valeur minimale positive de 12^m-5^n

I.S : Soit $\delta=12^m-5^n$ *cette valeur minimale positive.*

On a : $\delta\equiv -5^n\quad [6]$ *donc* δ *n'est divisible ni par* 2 *ni par* 3 *ni par* 5 *et donc* $\delta=1$ *ou* $\delta\ge 7$

de plus $\delta\equiv -1\quad [4]$ *ou encore* $\delta\equiv 3\quad [4]$ *et donc* $\delta\ne 1$

en conclusion $\delta\ge 7$ *et on remarque que pour* $(m,n)=(1,1)$ *on a :* $12^m-5^n=12-5=7$

donc $\delta=7$

EXO298 : Trouver tous les entiers stictement positifs x *et* y vérifiants :

$$(x+1)^2+(x+2)^2+.......+(x+99)^2=y^2$$

I.S : S'il existe (x,y) *un couple d'entiers stictement positifs vérifiants :*

$(x+1)^2+(x+2)^2+.......+(x+99)^2=y^2$

puisque $1+2+....+99=\dfrac{99(99+1)}{2}\equiv 0\quad [9]$ *et* $1^2+2^2+......+99^2=\dfrac{99(99+1)(198+1)}{6}\equiv 6\quad [9]$

alors :

$(x+1)^2+(x+2)^2+.......+(x+99)^2=99\cdot x^2+2x(1+2+.....+99)+\left(1^2+2^2+.....+99^2\right)\equiv 11\cdot 6\equiv 3\quad [9]$

ce qui est absurde car 3 *n'est pas un carré modulo* 9

EXO299 : Déterminer tous les entiers strictement positifs x,y *et* n qui vérifient les deux conditions :

$$x\wedge(n+1)=1 \quad \text{et} \quad x^n+1=y^{n+1}$$

I.S : Si $(x,y,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *vérifie la relation* $x^n+1=y^{n+1}$ *alors* $x^n=(y-1)\left(y^n+y^{n-1}+......+y+1\right)$

- soit p *est un diviseur premier de* $(y-1)$ *alors* $p\,|\,x^n$ *et donc* $p\,|\,x$

et puisque $x\wedge(n+1)=1$ *alors* p *ne divise pas* $(n+1)$

et puisque on a $y\equiv 1\quad[p]$ *alors* $y^n+y^{n-1}+......+y+1\equiv n+1\ [p]$

et donc p *ne divise pas* $y^n+y^{n-1}+......+y+1$ *et par suite* $(y-1)$ *et* $\left(y^n+y^{n-1}+......+y+1\right)$ *sont premier entre eux et donc puisque* $(y-1)\left(y^n+y^{n-1}+......+y+1\right)$ *est une puissance d'ordre* n

alors $\left(y^n+y^{n-1}+......+y+1\right)$ *(et bien sur* $(y-1)$ *aussi) est une puissance d'ordre* n *ce qui est impossible puisque on a* $y^n<y^n+y^{n-1}+......+y+1<(y+1)^n$ *soit que* $y^n+y^{n-1}+......+y+1$ *est compris entre les puissances d'ordre* n *de deux entiers consécutifs.*

EXO300 : Montrer que pour tout entier naturel m il existe un entier naturel n divisible par m et tel que la somme des chiffres de n dans la base décimale soit égale à m

I.S : Posons $m=2^{\sim}\cdot 5\ \cdot a$ *avec* $\sim\ \geq 0$, $\ \geq 0$ *et* a *premier avec* 2 *et* 5

considérons l'entier $n=10^{\sim+}\left(10^{\ddot{}(a)}+10^{2\ddot{}(a)}+......+10^{m\ddot{}(a)}\right)$ *alors :*

la somme des chiffres de n *est égale à* m

et d'après le théorème d'Euler : $10^{\ddot{}(a)}\equiv 1\ [a]$ *donc* $10^{\ddot{}(a)}+10^{2\ddot{}(a)}+......+10^{m\ddot{}(a)}\equiv m\equiv 0\ [a]$

et puisque $10^{\sim+}\ \equiv 0\ \left[2^{\sim}\cdot 5\ \right]$ *alors* $m\,|\,n$

FIN