Sciences de gestion

Synthèse de cours & exercices corrigés

Mathématiques appliquées à la gestion

- Cours et exercices adaptés aux besoins des gestionnaires et des économistes
- Approche progressive illustrée de nombreux exemples
- Corrigés détaillés de tous les problèmes et exercices

Collection synthex

PEARSON Education

Jeremy DUSSART, Natacha JOUKOFF, Ahmed LOULIT, Ariane SZAFARZ

Sciences de gestion

Synthèse de cours & Exercices corrigés

Mathématiques appliquées à la gestion

Jeremy DUSSART

Natacha JOUKOFF

Ahmed LOULIT

Ariane SZAFARZ

Direction de collection : Roland Gillet
professeur à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Collection synthex

PEARSON Education France

ISBN : 978-2-7440-7374-8
ISSN : 1768-7616

Composition sous $\LaTeX$: Scrip$\TeX$

À Cécile, Céline, Sylvain, Cédric, Yasmina et Clara, en espérant qu'un jour ils approfondiront cette matière fascinante qui leur a pris un peu du temps de leurs parents.

À Emerson, pour l'encourager à découvrir ce domaine que son grand frère a pris plaisir à investiguer.

Sommaire

Les auteurs VII
Introduction IX

Chapitre 1 • Rappels et définitions 1
Chapitre 2 • Suites réelles 31
Chapitre 3 • Les fonctions d'une seule variable 51
Chapitre 4 • Optimisation des fonctions d'une seule variable 101
Chapitre 5 • Les matrices 121
Chapitre 6 • Les fonctions de plusieurs variables réelles 161
Chapitre 7 • Optimisation des fonctions de plusieurs variables 201

Références bibliographiques 235
Index 237

Les auteurs

Jeremy Dussart est ingénieur de gestion de la Solvay Business School (SBS) de l'Université Libre de Bruxelles (ULB). Il est chercheur en stratégie au Centre Emile Bernheim (CEB) et enseigne les mathématiques en privilégiant les applications pratiques à ce domaine.

Natacha Joukoff est mathématicienne diplômée de l'ULB. Passionnée par la pédagogie, elle enseigne les mathématiques à la SBS, elle participe aussi activement aux cours préparatoires à destination des futurs étudiants et aux cours de soutien organisés pour ceux qui, en première année de sciences de gestion, ont des difficultés à s'adapter au rythme de l'enseignement des mathématiques.

Ahmed Loulit est titulaire d'un DEA de sciences de gestion (SBS) et d'un doctorat de mathématiques (ULB), obtenu sous la direction du professeur Jean-Pierre Gossez. Il est enseignant en mathématiques (SBS) et chercheur au CEB. Il prépare actuellement une thèse en modélisation financière sous la direction du professeur André Farber.

Ariane Szafarz est professeur de mathématiques et de finance à l'ULB. Elle y dirige le Centre Emile Bernheim (CEB) et est membre du Département d'économie appliquée (DULBEA). Diplômée en philosophie des sciences, elle a rédigé une thèse de doctorat de mathématiques sous la supervision du professeur Christian Gouriéroux (CREST, Paris), avec qui elle a régulièrement collaboré. Présidente de l'École doctorale en gestion de l'ULB (SBS), elle participe à divers projets scientifiques, nationaux et internationaux, et encadre plusieurs doctorants du département de finance dont elle assume la responsabilité avec les professeurs Ariane Chapelle et André Farber. Enfin, elle est l'auteur de nombreux livres et d'articles scientifiques en économétrie financière.

Introduction

L'objectif principal de cet ouvrage est d'apporter aux étudiants en sciences de gestion les bases mathématiques nécessaires pour aborder les diverses branches de leur discipline. À cette fin, il propose un compromis entre une vision mathématique abstraite qui ignorerait les aspects pratiques et une démarche strictement utilitariste qui masquerait la fécondité et l'esthétique du raisonnement mathématique.

Selon le principe de la collection, chaque chapitre commence par une synthèse de cours illustrée de nombreux exemples, remarques pratiques et commentaires. Ceci exclut les démonstrations (qui peuvent être trouvées dans les ouvrages de référence) au profit d'explications mettant en évidence la logique de la succession des matières. Ce sacrifice, difficile à consentir pour un mathématicien, est compensé par des définitions précises, des hypothèses explicites et des résultats rigoureux.

Les exercices et problèmes, qui occupent la seconde et majeure partie de chaque chapitre, se répartissent entre applications directes des résultats théoriques et formalisation des questions posées par les sciences de gestion. Tous sont accompagnés des solutions détaillées qui mentionnent, le cas échéant, l'existence d'autres approches possibles.

Les sciences de gestion sont jeunes et dynamiques et leurs contours théoriques fluctuent. Dresser l'inventaire détaillé des outils mathématiques qu'elles emploient constitue une mission périlleuse. Nous avons choisi la voie, plus commode, de la cohérence mathématique thématique, quitte à délaisser certaines matières, qui, comme les intégrales ou les applications linéaires, apparaissent moins souvent dans les applications, mais sont tout aussi passionnantes. Il reste donc matière à un second volume.

Ce livre est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre introduit les notions de base et les notations qui seront utilisées tout au long des pages qui suivent. Il va cependant au-delà des simples rappels en présentant notamment la résolution d'équations dans l'ensemble des nombres complexes. Le chapitre 2 étudie les suites réelles qui permettent de caractériser l'évolution et la convergence de processus déterministes en temps discret. Le chapitre 3 développe la théorie des fonctions d'une variable tandis que le chapitre 4 est dédié à la détermination des extrema de ces fonctions. Le chapitre 5 est consacré aux notions fondamentales relatives aux matrices et à la résolution de plusieurs problèmes d'algèbre linéaire. Le chapitre 6 présente les fonctions de plusieurs variables dont les applications pratiques à la gestion sont multiples. Logiquement, le chapitre 7 approfondit la recherche des extrema de telles fonctions.

**
*

Il y a près d'un an, le professeur Roland Gillet nous a proposé de rédiger cet ouvrage. Nous avons saisi avec enthousiasme cette opportunité de transmettre notre expérience de l'enseignement des mathématiques aux gestionnaires. En effet, notre équipe dispense depuis plusieurs années ce type de cours à la Solvay Business School de l'Université Libre de Bruxelles. Arrivés au terme de la rédaction, nous lui sommes très reconnaissants de la confiance qu'il nous a témoignée et des bons moments passés en sa compagnie qui nous ont permis d'apprécier sa rigueur intellectuelle, son sens de l'organisation et son humour communicatif.

Il convient de souligner le soutien efficace et les encouragements répétés que nous a prodigués Pearson Education France, et tout spécialement Pascale Pernet et Antoine Chéret, avec qui nous avons pris un grand plaisir à travailler. Ils conserveront probablement le souvenir que les matheux sont des gens certes pointilleux, mais respectant les délais.

Nous remercions également Martine Anciaux-Mundeleer pour sa patiente relecture et ses commentaires judicieux, sans oublier les générations d'étudiants et d'élèves-assistants qui nous ont aidés à ajuster le contenu de notre enseignement et à affiner l'approche pédagogique d'une discipline qui suscite parfois une certaine appréhension.

Enfin, nous formulons l'espoir que les lecteurs découvriront au fil de cet ouvrage que les mathématiques constituent non seulement un outil précieux pour les sciences de gestion, mais aussi un savoir fascinant dont l'apprentissage procure des joies insoupçonnées...

Jeremy Dussart
Natacha Joukoff
Ahmed Loulit
Ariane Szafarz

Bruxelles, juin 2004

Chapitre 1

Rappels et définitions

Rappels et définitions

1. Ensembles de nombres 2
2. Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ 3
3. Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ 4
4. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 4
5. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ 6
   5.1 Nombres complexes 6
   5.2 Plan complexe et forme trigonométrique 7
   5.3 Polynômes à coefficients complexes 9
6. Topologie et dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^n$ 9

Problèmes et exercices 12
Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ et les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ 12
Fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 14
Nombres complexes 24
Topologie et dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^n$ 27

Ce chapitre présente les notions de base et les notations utilisées dans la suite du livre[1], en commençant par les ensembles de nombres. Il évolue ensuite vers la structure ordonnée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

De là, les intervalles et autres ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont introduits. Les fonctions réelles dont l'étude détaillée apparaît dans les chapitres 3 et 4 sont brièvement présentées. La généralisation de l'ensemble $\mathbb{R}$ est abordée selon deux directions. D'une part, au plan algébrique, les nombres complexes permettent la résolution d'équations polynomiales sans solution réelle. D'autre part, les ensembles de n-uples réels constituent la base indispensable à l'examen des fonctions de plusieurs variables qui font l'objet des chapitres 6 et 7.

1. Nous supposerons néanmoins acquises les notions de base et les notations de la théorie des ensembles et de l'algèbre élémentaire.

1 Ensembles de nombres

Les ensembles de nombres sont présentés du plus petit au plus grand, partant de celui des nombres naturels, utilisés communément pour dénombrer des objets. Les nombres entiers sont obtenus en ajoutant aux nombres naturels leurs opposés, qui sont munis d'un signe négatif. Les nombres rationnels permettent d'introduire toutes les fractions (division de deux nombres entiers) à dénominateur non nul. Enfin, l'ensemble des nombres réels qui n'est pas dénombrable, est déterminé par analogie avec les points d'une droite, appelée la *droite réelle*.

Notations

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels $\left\{\dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, représenté par l'ensemble des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité.
- Pour chacun des ensembles cités, on indique l'exclusion du nombre 0 par un indice inférieur nul ou un astérisque. La restriction aux nombres positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, s'effectue à l'aide du signe qui convient placé en indice supérieur. ❏

Exemples

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution réelle. Afin de résoudre cette difficulté, on définit un ensemble plus vaste que $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres complexes.

Définition $\mathbb{C} = \left\{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}$. ❏

Les définitions et propriétés relatives à l'ensemble $\mathbb{C}$ seront présentées dans la section 5 du présent chapitre. Remarquons que les inclusions successives $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sont strictes puisque :

- $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.
- $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.
- $\pi \in \mathbb{R}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- $3 + 2i \in \mathbb{C}$ et $3 + 2i \notin \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ occupe sans conteste une place prépondérante dans les applications pratiques. En effet, les multiples éléments quantitatifs qui émaillent les problèmes de la gestion s'expriment le plus souvent à l'aide des nombres réels.

Dans le domaine des processus évolutifs, deux approches du temps coexistent. D'une part, le temps vu comme une succession d'instants dissociés (approche dite discrète) conduit à une représentation mathématique de dates appartenant à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$ et l'évolution des variables d'intérêt sera exprimée à l'aide de suites (chapitre 2). D'autre part, le temps considéré comme un continuum (approche dite continue), en référence à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_0^+$, requiert la théorie des fonctions (chapitre 3). En fait, ces deux visions du temps sont complémentaires : l'observation statistique s'effectue à des dates discrètes, tandis que l'analyse théorique repose plus volontiers sur la théorie des fonctions, plus performante à cet égard.

2 Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est naturellement ordonné selon la position des points sur la droite réelle de gauche à droite. Cette relation d'ordre, notée $\leqslant$, jouit de diverses propriétés qui enrichissent la droite réelle et permettent de définir des notions qui s'avèreront fort utiles dans l'étude des fonctions.

Propriétés

- La relation $\leqslant$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$ car :
  - $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$ (réflexivité),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie),
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitivité),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x$ (l'ordre est total).
- L'ordre $\leqslant$ est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un nombre positif ou nul car :
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.
  - $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^+ :\ x \leqslant y \Rightarrow x.z \leqslant y.z$. ❏

Attention

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^- :\ x \leqslant y \Rightarrow x.z \geqslant y.z.$

Propriété $\mathbb{R}$ est un ensemble dense car :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y.$ ❏

Remarque

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas des ensembles denses, tandis que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ le sont. En outre, ces deux derniers ensembles sont denses dans $\mathbb{R}$. En effet :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < z < y.$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y.$$

Considérons un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Les définitions suivantes utilisent la relation d'ordre $\leqslant$ afin de situer un point quelconque $b \in \mathbb{R}$ par rapport à cet ensemble.

Définitions

- b est un *majorant* de A si $\forall x \in A : x \leqslant b$. L'ensemble des majorants de A est noté $\bar{A}$.
- b est un *minorant* de A si $\forall x \in A : b \leqslant x$. L'ensemble des minorants de A est noté $\underline{A}$.
- A est *borné* si A admet au moins un minorant (A est *minoré*) et un majorant (A est *majoré*).
- Le plus petit majorant de A est appelé *supremum* ou *borne supérieure* de A. Il est noté $\sup A$. Si $\exists \sup A \in A$, alors $\sup A$ est appelé *maximum* de A. Il est noté $\max A$.
- Le plus grand minorant de A est appelé *infimum* ou *borne inférieure* de A. Il est noté $\inf A$. Si $\exists \inf A \in A$, alors $\inf A$ est appelé *minimum* de A. Il est noté $\min A$. ❏

Propriété Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble non vide majoré admet un supremum et tout ensemble non vide minoré admet un infimum. ❏

Néanmoins, certains ensembles majorés (resp. minorés) n'admettent pas de maximum (resp. minimum). Voir les exercices.

3 Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *convexe* si tout segment qui joint deux de ses points est contenu dans l'ensemble. La formalisation mathématique de cette définition s'énonce comme suit.

Définition A est un sous-ensemble *convexe* de $\mathbb{R}$ si :
$\forall x, y \in A\,,\ \forall z \in \mathbb{R} : x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in A.$ ❏

Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les *intervalles*, les *demi-droites* et les sous-ensembles triviaux : $\emptyset$ (ensemble vide) et $\mathbb{R}$. Voici tous les intervalles et demi-droites possibles :

- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Intervalle ouvert : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- Intervalles ni ouverts, ni fermés : $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ et $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$.
- Demi-droites fermées : $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$ et $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$.
- Demi-droites ouvertes : $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ et $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

4 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Considérons deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$. Par définition, une fonction de A dans B envoie chaque élément de A sur un élément de B, son image par la fonction, notée $f(x)$.

Définitions

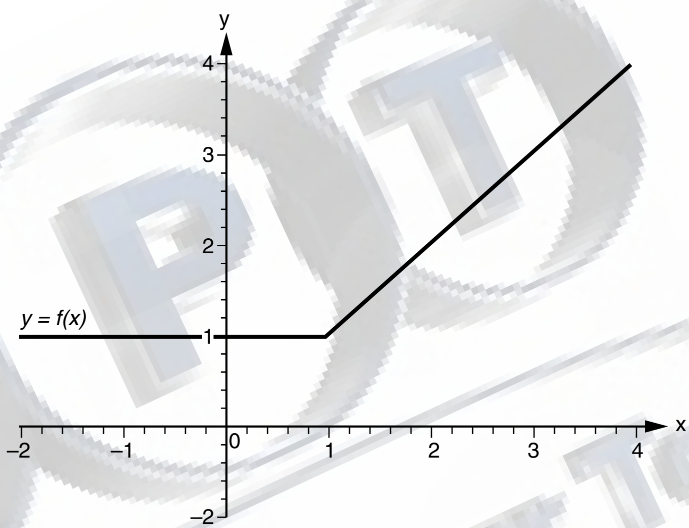
- f est une *fonction* de A dans B si à tout élément $x \in A$ correspond un et un seul élément $f(x) \in B$. On écrit : $f : A \to B : x \to f(x)$.
- L'ensemble A est appelé le *domaine de définition* de f, et noté $\mathrm{dom}\, f$.
- Le *graphe* de f est la courbe plane d'équation $y = f(x)\,,\ x \in A$. ❏

Les rôles des ensembles A et B sont fort différents. En effet, tout élément de A est obligatoirement envoyé par f sur un élément de B, tandis que chaque élément de B peut être l'image d'un, de plusieurs ou d'aucun élément de A.

Exemple

Prenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to \max\{x, 1\}$. Tous les nombres du sous-ensemble $(-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ ont pour image 1, tandis que les autres points de $\mathbb{R}$ sont envoyés sur eux-mêmes. Il s'ensuit, entre autres, que : 1/2 n'est l'image d'aucun point de $\mathbb{R}$, 1 est l'image d'une infinité de points de $\mathbb{R}$, 3 est l'image d'un seul point de $\mathbb{R}$. Notons aussi que les nombres négatifs ne font pas partie de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$. Le graphe de f est donné par la figure 1.1.

Figure 1.1



Afin de caractériser les diverses situations possibles, on adopte les définitions suivantes.

Définitions

- L'*image* par f de A est l'ensemble : $\mathrm{Im}_f(A)$ $\left[\text{ou } f(A)\right] = \{f(x) : x \in A\}$.
- L'*image inverse* de $B' \subset B$ par f est l'ensemble :$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$. ❑

Exemple

Si l'on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to \max\{x, 1\}$, on a : $Im_f(A) = [1, +\infty)$ et, pour $B' = [1, 2] \subset \mathbb{R}^+$, on a : $f^{-1}(B') = (-\infty, 2]$.

Dans les problèmes pratiques, on est souvent amené à appliquer plusieurs fonctions successivement. Par exemple, une usine peut, dans un premier temps, transformer une quantité de facteur de production de base en un produit semi-fini, lui-même appelé à servir de matériau pour le produit final. Les quantités successives en jeu dans ce processus peuvent être représentées par l'application en chaîne de fonctions de production selon le schéma suivant :

$$\text{Facteur brut } (x) \xrightarrow{f} \text{ produit semi-fini } (y) \xrightarrow{g} \text{ produit final } (z)$$

Le passage direct de l'*input* initial x à l'*output* final z est donné par la fonction composée définie comme suit :

Définition Si $f : A \to B : x \to f(x)$ et $g : B \to C : x \to g(x)$, la *composée* de f et g est la fonction de $A \to C$, notée $g \circ f$, définie par : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. ❏

Parmi les fonctions $f : A \to B : x \to f(x)$, on distingue trois grandes classes : les fonctions injectives, surjectives et bijectives.

Définitions Soit $f : A \to B : x \to f(x)$.

- f est *injective* si $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- f est *surjective* si $\forall y \in B,\ \exists x \in A : y = f(x)$;
- f est *bijective* si f est injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in B,\ \exists$ un et un seul $x \in A : y = f(x)$. ❏

Remarque

Les ensembles A et B jouent un rôle crucial dans la détermination du caractère injectif et/ou surjectif d'une fonction.

Enfin, seules les fonctions bijectives permettent de donner un sens à une fonction réciproque (ou inverse) selon le schéma suivant :

$$x = f^{-1}(y) \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad y = f(x)$$

Définition Si la fonction $f : A \to B : x \to f(x)$ est bijective, alors sa *fonction réciproque*, notée f^{-1}, de $B \to A$, est définie par :

$$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$ ❏

Ainsi, parmi les fonctions usuelles, on dénombre plusieurs couples de fonctions réciproques telles que l'exponentielle et le logarithme (dans la même base), les fonctions sinus et arcsinus (moyennant une restriction de domaine qui garantisse la bijectivité), etc. Plus simplement encore, la fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ est sa propre réciproque tandis que la fonction « carré » $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$ (domaine restreint pour bijectivité) a pour réciproque la fonction « racine carrée » $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to \sqrt{x}$.

5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Après avoir brièvement rappelé les définitions de base des nombres complexes, nous donnons ici les propriétés relatives aux solutions d'équations polynomiales.

5.1 Nombres complexes

Dans la section 1, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été défini par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

On introduit également les notions suivantes :

Définitions

- Le nombre réel a est la *partie réelle* de $a + bi$.
- Le nombre réel b est la *partie imaginaire* de $a + bi$.
- Le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$ est appelé *conjugué* de $z = a + bi$.
- $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$ est appelé le *module* de z.
- Les nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont *égaux* $\Leftrightarrow$ $a = c$ et $b = d$. ❏

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies par la généralisation des opérations correspondantes dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, on a :

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \quad \text{et} \quad z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Remarque

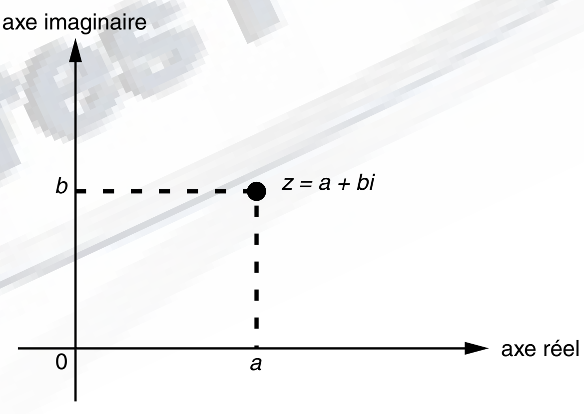
L'inverse du nombre complexe $a + bi \neq 0$ est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+bi} &= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i. \end{aligned}$$

5.2 Plan complexe et forme trigonométrique

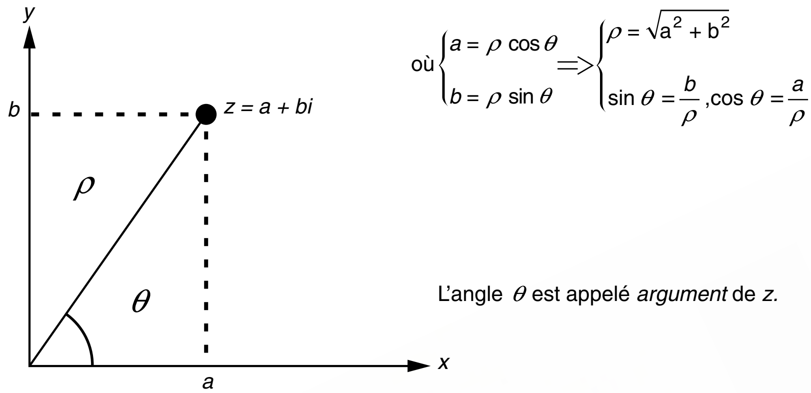
On représente volontiers les nombres complexes dans un plan, dit *plan complexe* ou *plan de Gauss*, muni en abscisse de « l'axe réel » et en ordonnée de « l'axe imaginaire » (figure 1.2).

Figure 1.2



Les nombres complexes non nuls peuvent aussi être représentés sous forme trigonométrique (figure 1.3, page suivante) : $z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,

Figure 1.3



Exemple

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ puisque :

$$\begin{cases} 1 = \rho\cos\theta \\ -\sqrt{3} = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1+3} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

On peut aussi opter pour la représentation plus générale :

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)\right], \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

La forme trigonométrique est commode pour effectuer les produits et les quotients de nombres complexes.

Propriétés Si $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors :

- $z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big)$;
- si $z_2 \neq 0$: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big)$. ❏

Exemple

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ et $z_2 = -4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

On a : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(0 + i.1) = \dfrac{1}{4}i.$

La forme trigonométrique est particulièrement appropriée au calcul des puissances. À cet égard, le résultat suivant est fondamental.

Propriété (formule de De Moivre) Si $n \in \mathbb{N}_0$ et $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. ❏

L'exponentielle des nombres complexes est définie de manière à généraliser l'exponentielle dans $\mathbb{R}$.

Définition Soit $z = a + bi$: $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$. ❏

Propriétés

- $e^{i\pi} = -1$
- $\cos b = \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$, $\sin b = \dfrac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$ (formules d'Euler). ❑

5.3 Polynômes à coefficients complexes

Le théorème de D'Alembert est fondamental pour la résolution des équations polynomiales.

Théorème de D'Alembert Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}_0$ à coefficients complexes admet exactement n racines complexes, distinctes ou non. ❑

En particulier, l'équation $x^n = z$, où z est un nombre complexe donné, a pour solutions les n racines n-ièmes de z. Dans la pratique, pour déterminer ces racines n-ièmes, il convient d'exprimer d'abord le nombre z sous sa forme trigonométrique générale.

Propriété Si $z = \rho\,(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi))$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors les n solutions de l'équation $x^n = z$, notées $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, sont données par :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$ ❑

Il n'existe malheureusement pas de formule qui fournisse de manière similaire les solutions d'une équation polynomiale de degré quelconque. Cependant, une méthode simple existe pour résoudre les équations du second degré. Elle généralise la méthode classique utilisée dans $\mathbb{R}$.

Propriété Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, sont obtenues en fonction du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \in \mathbb{R}^+$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_0^-$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$,
- Si $\Delta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm R}{2a}$, où R représente l'une des deux racines carrées du complexe Δ. ❑

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le théorème de D'Alembert entraîne que tout polynôme de degré n à coefficients réels admet n racines complexes. En outre, on peut établir que les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées 2 à 2. Ainsi, les équations $x^2 + 1 = 0$ et $2x^2 + 3x + 10 = 0$ qui n'admettent pas de solution réelle possèdent deux solutions complexes conjuguées.

6 Topologie et dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^n$

La structure topologique des ensembles $\mathbb{R}^n$ est importante pour caractériser avec précision les domaines dans lesquels seront définies les fonctions d'une variable ($n = 1$), puis de plusieurs variables ($n > 1$). L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est composé de tous les n-uples de nombres réels.

Définitions

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$.
- La *distance euclidienne* entre les points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

- Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_0^+$, la *boule ouverte* de rayon r centrée en p est composée de tous les points de $\mathbb{R}^n$ situés à une distance de p inférieure à r :

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}.$$ ❑

La notion de boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ généralise celle d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Elle permet de définir diverses caractéristiques topologiques des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Considérons à cet effet un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et un point $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définitions

- Le point p est un *point intérieur* de A (ou A est un *voisinage* de p) si $\exists r > 0 : B(p, r) \subset A$.
- L'*intérieur* de A, noté $\operatorname{Int} A$, est l'ensemble des points intérieurs de A.
- L'ensemble A est *ouvert* si $\operatorname{Int} A = A$.
- Le point p est un *point adhérent* de A si $\forall r > 0 : B(p, r) \cap A \neq \emptyset$.
- L'*adhérence* de A, notée $\operatorname{Adh} A$, est l'ensemble des points adhérents de A.
- L'ensemble A est *fermé* si $\operatorname{Adh} A = A$.
- La *frontière* de l'ensemble A, notée $\operatorname{Fr} A$, est égale à $\operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$.
- Le point p est un *point d'accumulation* de A si $\forall r > 0 : \big[B(p, r) \cap A\big] \setminus \{p\} \neq \emptyset$. ❑

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles à être ouverts et fermés.
2. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ensembles ouverts. Les intervalles fermés sont des ensembles fermés. L'intervalle $(a, b]$ n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, il n'est pas ouvert car $\operatorname{Int}(a, b] = (a, b) \neq (a, b]$ et n'est pas fermé car $\operatorname{Adh}(a, b] = [a,b] \neq (a, b]$. Par ailleurs, comme $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$ et $\operatorname{Adh}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ (en vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert, ni fermé. Tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule ouverte centrée en l'origine et de rayon 2 est donnée par $B\big((0,0),2\big) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\big\}$. L'ensemble $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\big\}$ est ouvert, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ et } x \leqslant 1\big\}$ n'est ni ouvert, ni fermé et $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\big\}$ est un ensemble fermé.
4. Un singleton (ensemble constitué d'un seul élément) est égal à son adhérence et constitue donc un ensemble fermé. Son intérieur est vide et il n'admet pas de point d'accumulation.

La notion d'ensemble convexe peut être étendue à $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

Définition L'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si tous les segments liant deux points de A sont constitués exclusivement d'éléments de A : $\forall p, q \in A,\ \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda p + (1 - \lambda) q \in A$. ❑

Exemples dans $\mathbb{R}^2$

$B\big((0,0),2\big) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\big\}$, $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\big\}$ et $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4$ et $x \leqslant 1\big\}$ sont convexes tandis que $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\big\}$ ne l'est pas puisque $(2,0)$ et $(-2,0) \in D$ mais $(0,0) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(-2,0) \notin D$.

Les ensembles $\mathbb{R}^n$ peuvent aussi être vus comme des ensembles de vecteurs (ou espaces vectoriels), munis de l'addition vectorielle et de la multiplication scalaire, définies comme suit.

Définitions Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- $p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_n) \in \mathbb{R}^n$. ❏

L'approche vectorielle est souvent utilisée dans $\mathbb{R}^3$, qui offre une représentation naturelle de l'espace physique à trois dimensions. Au plan mathématique, les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire conduisent aux notions de combinaison linéaire et de dépendance ou d'indépendance linéaire entre vecteurs, qui jouent un rôle crucial en algèbre linéaire.

Définitions

- Le vecteur $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison linéaire* des $k (\in \mathbb{N}_0)$ vecteurs $p^1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1), \ldots, p^k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_n^k) \in \mathbb{R}^n$ si $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : q = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p^j$.
- Les vecteurs $p^1, \ldots, p^k \in \mathbb{R}^n$ sont *linéairement indépendants* si $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p^j = \bar{0} \Rightarrow$ $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : \lambda_j = 0$, où $\bar{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
  Dans le cas contraire, les vecteurs sont dits *linéairement dépendants*. ❏

Ces concepts ouvrent la voie vers des développements extrêmement féconds en algèbre linéaire, un domaine que cet ouvrage ne fera cependant qu'effleurer dans le chapitre 5 consacré aux matrices.

Problèmes et exercices

Les exercices suivent globalement le schéma de la présentation théorique. Au passage, sont expliquées des méthodes pratiques relatives, notamment, à la division de polynômes et à l'étude des signes. Des fonctions élémentaires, telles que le logarithme népérien (ln) et le sinus (sin), sont présentées à l'occasion d'exercices sur la théorie de la section 4. Les équations résolues dans $\mathbb{C}$ restent relativement simples. Les exercices portant sur la structure vectorielle ou topologique de $\mathbb{R}^n$ permettent d'introduire des éléments qui serviront soit dans le chapitre 5 (matrices), soit dans les chapitres 6 et 7 (fonctions de plusieurs variables).

Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ et les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

EXERCICE 1

Énoncé

Considérons dans $\mathbb{R}$, les ensembles $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.

a A ={ - 4,3,8,2,- 9,20}.

b $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$.

c $C = [-5, 4]$.

d $D = [-2, 7) \cap \mathbb{N}$.

e $E = [-\pi, e] \cap \mathbb{Q}$.

f $F = \mathbb{Z}$.

g $G = \mathbb{R}_0^+$.

h $H = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 4\right\}$.

i $I = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 > 27\right\}$.

j $J = (-\infty, -10] \cup \{-3\}$.

Déterminez pour chacun, les ensembles de minorants et majorants, l'infimum et le supremum, le minimum et le maximum (s'ils existent). Ces ensembles sont-ils bornés, convexes?

Solution

a $\underline{A} = (-\infty, -9]$. En effet, on a, d'une part, $\underline{A} \subset (-\infty, -9]$ puisque : $-9 \in A \Rightarrow \forall x \in \underline{A} : x \leqslant -9$ et, d'autre part, $(-\infty, -9] \subset \underline{A}$ car $\forall b \in (-\infty, -9], \forall x \in A = \{-9, -4, 2, 3, 8, 20\} : x \geqslant -9 \geqslant b$.