

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 1. L'intérêt - Corrigés des exercices

1. Réponse :

La somme de 30 000 € sera placée 5 ans et donnera 5 fois des intérêt annuels simples de 6,5 %, soit un montant total à la fin du placement de 39 750 €. Si les intérêts sont composés, ils porteront eux-mêmes intérêt les années suivantes. Le montant de 30 000 € sera alors capitalisé 5 années de suite, soit un total de 41 102,6 € au bout de 5 ans.

2. Réponse :

La capitalisation de 1 000 € pendant 10 ans au taux composé donne une valeur future de :

- taux 1,80 % : 1 195,3 € ;
- taux 1,90 % : 1 207,1 € ;
- taux 2,00 % : 1 218,99 €.

3. Réponse :

Pour résoudre cet exercice, il faut capitaliser 20 000 € au taux composé de 12 % pendant n années afin d'atteindre 1 000 000 €. L'inconnue de l'équation est alors n , par résolution égal à 34,5 ans.

4. Réponse :

Pour résoudre cet exercice, il faut capitaliser 1 € au taux simple et composé de 7 % pendant n années afin d'atteindre 2 € (soit le double de la somme investie). L'inconnue des deux équations est alors n , par résolution égal à :

- intérêts simples : 14 ans, 3 mois et 15 jours ;
- intérêts composés : 10 ans, 2 mois et 27 jours.

5. Réponse :

Pour résoudre cette question, il faut comparer les deux propositions à un instant commun, par exemple l'instant 10. Dans ce cas, 1 000 € aujourd'hui est privilégié, car sa valeur en $t = 10$, soit $C(10) = 2 158,925$ €, est supérieure à 2 000 €.

6. Réponse :

$r = 9,54$ %.

7. Réponse :

Pour répondre à cette question, il suffit de capitaliser la somme investie au taux de 10 %, soit un montant cumulé de 0,275 trillion de dollars.

8. Réponse :

Pour résoudre cet exercice, il faut capitaliser 1 € au taux simple et composé de 7 % pendant n années afin d'atteindre 3 € (soit le triple de la somme investie). L'inconnue des deux équations est alors n , par résolution égal à :

- intérêts simples : 28 ans, 6 mois et 26 jours ;
- intérêts composés : 16 ans, 2 mois et 27 jours.

9. Réponse :

La première chose à trouver est le taux de rendement du placement, c'est-à-dire le taux qui égalise une somme de 75 € aujourd'hui à une valeur de 100 € dans 6 ans. Si les intérêts sont composés, ce taux est de $r = 4,25$ %.

De plus, un bon de capitalisation sera équivalent s'il est de même durée et de même rendement. Par conséquent, s'il est émis à 100 €, il doit être remboursé à $100 (1 + 0,0425)^6 = 133,33$ € pour être équivalent.

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 2. L'actualisation - Corrigés des exercices

1. Réponse :

Pour répondre à cette question, il faut actualiser le montant de 500 € au taux de 3 % sur 2 ans, ce qui donne en $t = 0$ un montant de 471,30 €.

2. Réponse :

Pour répondre à cette question, il faut actualiser le montant de 40 000 € au taux de 6 % sur 5,5 ans, ce qui donne en $t = 0$ un montant de :

- intérêts simples : 26 800 € ;
- intérêts composés : 29 032,05 €.

3. Réponse :

Pour répondre à cette question, il faut actualiser le prix du voyage sur 10 ans, au taux de 6 %. Le montant à placer est alors de C_0 , soit 2 233,58 €.

Nous pourrions partir dans 11 ans, 10 mois et 24 jours. Le taux minimal est de 7,18 %.

Puisque le montant C_0 est inférieur à cette somme, soit 2 000 €, nous cherchons une autre inconnue, soit n , qui rende la fonction de capitalisation égale à 4 000 €, le montant à atteindre. Dans ce cas, l'inconnue est alors n égale à 11 ans, 10 mois et 24 jours.

Dans le troisième cas de figure, l'horizon de placement reste de 10 ans, mais nous cherchons le taux qu'il faudrait obtenir pour atteindre 4 000 € dans 10 ans. Cette inconnue, qui est alors un taux minimal, est de 7,18 %.

4. Réponse :

Il s'agit ici de convertir un taux annuel en taux mensuel. Dans ce cas, il est égal à 0,407 %.

5. Réponse :

Il s'agit ici de transformer un taux trimestriel en taux annuel. S'il est simple, il s'agit donc de 4 fois l'intérêt trimestriel, soit des intérêts simples annuels de 8 %.

- a. Faux car 1 % trimestriel en capitalisation continue rapportera plus que 4 %.
- b. Il s'agit de transformer un taux annuel en taux trimestriel. Comme la capitalisation est continue, on ne peut simplement le diviser par 4 ; nous devons utiliser la racine 4^e ; le taux trimestriel est alors de 0,985 %.

6. Réponse :

Pour calculer la valeur aujourd'hui du financement, il faut actualiser les deux montants futurs au taux du financement, soit 4 %. La somme des deux flux actualisés donne alors 15 672,87 €.

7. Réponse :

Dans ce cas, il faut capitaliser chaque flux à l'instant du mois de juillet. Attention, la capitalisation étant mensuelle, il faut veiller à adapter le taux d'intérêt. La somme acquise en juillet sera alors de 1 117,55 €.

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 3. Les annuités - Corrigés des exercices

1. Réponse :

Cet exercice repose sur le calcul de l'actualisation d'une annuité ordinaire de 10 000 € sur 5 ans au taux de 5 %.

$$C_0 = 10\,000 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-5}}{0,05} = 43\,294,77$$

2. Réponse :

On calcule la capitalisation d'une annuité ordinaire de 1 500 € pendant 10 ans au taux de 2,75 %.

$$C_{10} = 1\,500 \times \frac{(1,0275)^{10} - 1}{0,0275} = 16\,999,15 \text{ €}$$

3. Réponse :

Le calcul d'une annuité ordinaire sur un capital initial de 25 000 € pendant 10 ans au taux de 5 % donne :

$$25\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-10}}{0,05}$$
$$A = 3\,237,61$$

4. Réponse :

Cet exercice utilise la formule de l'actualisation d'annuités ordinaires dans laquelle la durée est l'inconnue. La solution donne 7,15 années, soit 8 ans puisqu'il s'agit d'annuités entières.

$$30\,000 = 5\,000 \times \frac{1 - (1 + 0,045)^{-n}}{0,045}$$
$$n = 7,15$$

5. Réponse :

Il faut utiliser la formule de l'actualisation d'annuités ordinaires dans laquelle le rendement est l'inconnue. La solution est trouvée par solveur ou approximation linéaire.

$$20\,000 = 2\,500 \times \frac{1 - (1 + r)^{-10}}{r}$$
$$r = 4,3 \%$$

6. Réponse :

Cet exercice utilise la formule de la capitalisation d'annuités ordinaires dans laquelle la durée est l'inconnue. Comme les flux sont mensuels, le taux d'intérêt doit être préalablement adapté (voir taux équivalent au chapitre 2). La solution donne 45,6 mois, c'est-à-dire 3 ans, 9 mois et 18 jours.

$$50\,000 = 1\,000 \times \frac{(1 + 0,00407)^n - 1}{0,00407}$$
$$n = 45,6$$

7. Réponse :

La formule de la capitalisation d'annuités ordinaires dans laquelle la valeur acquise est l'inconnue permet d'écrire :

$$C_n = 100 \times \frac{(1 + 0,00165)^{480} - 1}{0,00165} = 73\,144,43$$

8. Réponse :

Cet exercice utilise le calcul d'une annuité ordinaire sur un capital initial de 10 000 € pendant 5 ans au taux de 2 %. Comme les flux sont mensuels, le taux équivalent doit être calculé préalablement et la durée est exprimée en mois ($12 \times 5 = 60$ mois).

$$10\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,00165)^{-60}}{0,00165}$$
$$A = 175,2$$

9. Réponse :

La formule de l'actualisation des 20 annuités ordinaires donne le capital au temps 2. Il faut donc actualiser ce résultat de 2 pour obtenir le montant au temps 0.

$$150\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,035)^{-20}}{0,035} \times \frac{1}{1,035^2}$$
$$A = 11\,305,88$$

10. Réponse :

On utilise la formule de l'annuité ordinaire avec comme inconnue la durée n .

$$100\,000 = 19\,700 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-n}}{0,05}$$
$$n = - \frac{\ln\left(1 - \frac{100\,000}{19\,700} \times 0,05\right)}{\ln(1,05)} = 6$$

11. Réponse :

Cet exercice utilise la formule de l'annuité ordinaire. Les flux étant mensuels, il faut préalablement estimer le taux d'intérêt mensuel.

$$r_m = \sqrt[12]{1,04} - 1 = 0,003273\dots$$

Puisque le premier flux, au lieu d'être payé dans un mois, sera payé dans 4 mois (il est donc décalé de 3 mois), il faut actualiser la somme des annuités de trois périodes pour évaluer 200 000 € au temps 0. Notons que dans ce cas, on considère que le crédit est de 20 ans et démarre au premier paiement (soit 240 mensualités).

Si, au contraire, on considère que le crédit est sur 20 ans en comprenant la période du différé, il n'y aura alors que 237 flux, qui seront :

$$200\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-240}}{0,0033} \times \frac{1}{1,0033^3}$$

$$A = 1\,216,31$$

et :

$$200\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-237}}{0,0033} \times \frac{1}{1,0033^3}$$

$$A = 1\,226,45$$

12. Réponse :

Il est plus intéressant de payer 10 fois 36 000 €, car la valeur de cette somme au temps 0 est inférieure à 300 000 €.

$$300\,000 \geq 36\,000 \times \frac{1 - (1 + 0,04)^{-10}}{0,04} = 291\,992,25$$

13. Réponse :

On utilise le calcul de la valeur actuelle d'une perpétuité constante de 100 € :

$$C_0 = \frac{100}{0,08} = 1\,250$$

14. Réponse :

Il faut utiliser le calcul d'une perpétuité constante pour un taux d'intérêt de 5 % sur un capital de 25 000 € :

$$25\,000 = \frac{A}{0,05}$$

$$A = 1\,250$$

15. Réponse :

La résolution passe par le calcul d'une perpétuité sur un capital de 35 000 €. Comme la rente est mensuelle, il faut adapter le taux d'intérêt préalablement (taux mensuel équivalent à 0,327 %).

$$35\,000 = \frac{A}{r_m} = \frac{A}{0,00327}$$

$$A = 114,58$$

16. Réponse :

On utilise le calcul de la valeur actuelle d'une perpétuité mensuelle constante dont l'inconnue est le taux d'intérêt. Comme les flux sont mensuels, le taux trouvé sera lui aussi mensuel.

$$40\,000 = \frac{200}{r_m}$$

$$r_m = 0,005$$

17. Réponse :

La solution résulte du calcul de la valeur actuelle d'une annuité ordinaire de 80 € croissante au taux de 2,5 %.

$$80 \times \frac{1 - (1,025)^{20} \times (1,06)^{-20}}{0,06 - 0,025} = 1\,117,88$$

18. Réponse :

Le calcul de la valeur actuelle d'une annuité immédiate croissante qui démarre en $t = 0$ donne :

$$5\,000 \times \frac{1 - (1,02)^5 \times (1,035)^{-5}}{0,035 - 0,02} \times 1,035 = 24\,285,79$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 4. Choix d'investissement et taux de rentabilité interne - Corrigés des exercices

1. Réponse :

Cet exercice est basé sur le calcul de la valeur actuelle nette d'une annuité constante de 7 500 € sur une durée de 5 ans au taux de 5 %.

$$\text{a. VAN} = -20\,000 + 7\,500 \frac{1 - (1 + 0,05)^{-5}}{0,05} = 12\,471,075 \text{ €}$$

$$\begin{aligned} \text{b. VANI} &= -20\,000 + \frac{7\,500 (1,02)^4 + 7\,500 (1,02)^3 + 7\,500 (1,02)^2 + 7\,500 (1,02)^1 + 7\,500}{(1,05)^5} \\ &= 10\,582,0615 \text{ €} \end{aligned}$$

2. Réponse :

Cet exercice utilise le calcul de la valeur actuelle nette d'une séquence de flux non constants au taux d'intérêt de 3 %.

$$\text{VAN} = -20\,000 - \frac{2\,500}{1,03^1} + \frac{5\,400}{1,03^2} - \frac{300}{1,03^3} + \frac{11\,000}{1,03^4} + \frac{14\,500}{1,03^5} = 4\,669,47 \text{ €}$$

3. Réponse :

Pour résoudre cet exercice, il faut calculer les deux valeurs actuelles nettes au taux d'intérêt de 2 % et comparer les deux montants à un instant commun. Le projet B est plus rentable.

$$\text{VAN}_A = -20\,000 + \frac{24\,000}{1,02^2}$$

$$\text{VAN}_B = -20\,000 + \frac{12\,000}{1,02} + \frac{12\,000}{1,02^2}$$

$$\text{VAN}_A = 3\,068,05 \text{ €} < \text{VAN}_B = 3\,298,73 \text{ €}$$

4. Réponse :

On utilise le calcul de la valeur actuelle nette de la séquence de flux non constants attendus au taux d'intérêt de 6 % et de 2 %. Si le taux exigé n'est que de 2 %, alors l'investissement peut être effectué, car sa VAN est positive (donc rapporte au moins 2 %).

$$\text{a. VAN}_{6\%} = -10\,000 + \frac{500}{1,06} + \frac{1\,500}{1,06^2} + \frac{10\,000}{1,06^{10}} = -2\,609,36 \text{ €}$$

$$\text{b. VAN}_{2\%} = -10\,000 + \frac{500}{1,02} + \frac{1\,500}{1,02^2} + \frac{10\,000}{1,02^{10}} = 135,43 \text{ €}$$

5. Réponse :

Oui, car la VAN est positive.

6. Réponse :

Il faut chercher le taux qui rend nulle la VAN du projet :

$$VAN = -5\,000 + \frac{6\,000}{1 + TRI} = 0$$

soit un TRI de 20 %.

7. Réponse :

La résolution de cet exercice nécessite un solveur, une interpolation linéaire ou l'itération de Newton-Raphson. Dans cet exercice, les flux sont mensuels ; le TRI dégagé sera alors mensuel. Il faudra le transformer en taux annuel pour le comparer à d'autres investissements, car les taux s'expriment généralement sur base annuelle. Les flux étant constants, on utilisera la formule de l'annuité constante.

$$VAN = -200\,000 + 1\,300 \times \frac{1 - (1,0041)^{-240}}{0,0041} = -1\,173,52$$

$$VAN = 0 = -200\,000 + 1\,300 \times \frac{1 - (1 + TRI_{\text{mens}})^{-240}}{TRI_{\text{mens}}}$$

$$TRI_{\text{mens}} = 0,004 \gg TRI_{\text{annuel}} = 4,93 \%$$

8. Réponse :

Le TRI est le taux qui rend la VAN du projet nulle. Les flux étant constants, on utilisera la formule de l'annuité constante. La résolution de cet exercice nécessite un solveur, une interpolation linéaire ou l'itération de Newton-Raphson.

$$VAN = 0 = -500\,000 + 75\,000 \times \frac{1 - (1 + TRI)^{-30}}{TRI}$$

$$TRI = 14,76 \%$$

9. Réponse :

Le TRI est le taux qui rend la VAN du projet nulle. Les flux étant croissants de manière constante, on utilisera la formule de l'annuité croissante. La résolution de cet exercice nécessite un solveur, une interpolation linéaire ou l'itération de Newton-Raphson.

$$VAN = 0 = -30\,000\,000 + 2\,000\,000 \times \frac{1 - (1,05)^{15} (1 + TRI)^{-15}}{TRI - 0,05}$$

$$TRI = 4,37 \%$$

10. Réponse :

Le TRI est le taux qui égalise les deux options. La résolution de cet exercice nécessite un solveur, une interpolation linéaire ou l'itération de Newton-Raphson.

$$VAN = 0 = -250\,000\,000 + 5\,000\,000 \times \frac{1 - (1 + TRI)^{-20}}{TRI} \\ + 10\,000\,000 \times \frac{1 - (1 + TRI)^{-19}}{TRI} \times \frac{1}{(1 + TRI)^{20}} + \frac{710\,000\,000}{(1 + TRI)^{40}}$$

$$TRI = 4,34 \%$$

11. Réponse :

Le TRI est le taux qui rend la VAN du projet nulle. La résolution de cet exercice nécessite un solveur, une interpolation linéaire ou l'itération de Newton-Raphson

$$VAN = 0 = -80 + \frac{5 \times 9,5}{(1 + TRI)^{\frac{7}{12}}} + \frac{3 \times 11}{(1 + TRI)^{\frac{13}{12}}} + \frac{2 \times 12}{(1 + TRI)^{\frac{22}{12}}}$$

$$TRI = 31 \%$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 5. Les emprunts indivis - Corrigés des exercices

1. Réponse :

$$60\,000 = \frac{25\,000}{1,03} + \frac{X}{1,03^2} \Rightarrow X = 37\,904$$

Cette relation exprime, en valeurs actuelles à l'origine, l'égalité des charges du prêteur et de l'emprunteur.

2. Réponse :

$$60\,000 = \frac{15\,000}{1,025} + \frac{20\,000}{1,025^2} + \frac{X}{1,025^3} \Rightarrow X = 28\,354$$

Cette relation exprime, en valeurs actuelles à l'origine, l'égalité des charges du prêteur et de l'emprunteur.

3. Réponse :

a. L'intérêt la première année est de $0,02 \times 40\,000 = 800$ €. Cela permet de calculer la part de capital remboursée si on retire cet intérêt du flux annuel, soit $15\,000 - 800 = 14\,200$ €.

b. Pour calculer l'intérêt de la seconde année, on a besoin du solde restant dû, soit :

$$40\,000 - 14\,200 = 25\,800 \text{ €}$$

L'intérêt est alors de $0,02 \times 25\,800 = 516$ €, ce que l'on vérifie dans le tableau suivant.

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	800	14 200	15 000	25 800
2	516	25 800	26 316	0

4. Réponse :

$$\begin{aligned} 20\,000 &= \frac{X}{1,02} + \frac{X}{1,02^2} \\ &= X \times \frac{1 - (1,02)^{-2}}{0,02} \end{aligned}$$

On en déduit $X = 10\,301$.

Cette relation exprime, en valeurs actuelles à l'origine, l'égalité des charges du prêteur et de l'emprunteur. Comme les flux sont constants, il est possible d'utiliser la formule de l'annuité constante où X est le montant de l'annuité.

5. Réponse :

$$86,400 = X \times \frac{1 - (1 + 6\%)^{-5}}{6\%} \Rightarrow X = 20\,511,05$$

L'intérêt la première année est le taux appliqué sur le capital emprunté :

$$0,06 \times 86\,400 = 5\,184 \text{ €}$$

Il permet de calculer la part de capital remboursée si on le retire du flux annuel :

$$20\,511,05 - 5\,184 = 15\,327,05 \text{ €}$$

On peut alors calculer le solde restant dû en retirant le capital remboursé du capital emprunté :

$$86\,400 - 15\,327,05 = 71\,072,95 \text{ €}$$

Pour calculer l'intérêt de la seconde année, on applique l'intérêt sur le solde restant dû :

$$0,06 \times 71\,073 = 4\,264,38 \text{ €}$$

Il permet de calculer la part de capital remboursée l'année 2 si on le retire du flux annuel :

$$20\,511,05 - 4\,264,38 = 16\,246,67 \text{ €}$$

On peut alors calculer le solde restant dû l'année 2, soit $71\,072,95 - 16\,246,68 = 54\,826,28 \text{ €}$, ce que l'on vérifie dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	86 400
Durée	5
Taux	0,06
Annuité	20 511,049

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	5 184	15 327,049	20 511,049	71 072,95
2	4 264,37706	16 246,6719	20 511,049	54 826,28
3	3 289,57674	17 221,4723	20 511,049	37 604,81
4	2 256,28841	18 254,7606	20 511,049	19 350,05
5	1 161,00277	19 350,0462	20 511,049	0,00

6. Réponse :

$$50\,000 = X \times \frac{1 - (1 + 0,04)^{-5}}{0,04} \Rightarrow X = 11\,231,36$$

$$S_3 = 11\,231,36 \times \frac{1 - (1 + 0,04)^{-2}}{0,04} = 50\,000 \times \frac{a_2}{a_5} = 21\,183,35$$

Le solde restant dû revient à actualiser les flux restants à payer. L'actualisation ayant pour effet de retirer l'intérêt, effectuer la somme des flux actualisés revient à additionner le capital restant à payer.

7. Réponse :

a. Le calcul de l'annuité est donné par :

$$150\,000 = X \times \frac{1 - (1 + 4\%)^{-5}}{4\%} \Rightarrow X = 33\,694,07$$

b. La part de capital l'année 2 est alors $33\,694,07 - 0,04 \times S_1 = 28\,801,83 \text{ €}$.

c. Le solde restant dû au bout de 3 ans est :

$$S_3 = 33\,694,07 \times \frac{1 - (1 + 0,04)^{-2}}{0,04} = 63\,550,2$$

d. La part d'intérêt la quatrième année est de $0,04 \times S_3 = 2\,542 \text{ €}$, ce que l'on vérifie dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	150 000
Durée	5
Taux	0,04
Annuité	33 694,067

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	6 000	27 694,067	33 694,067	122 305,93
2	4 892,23732	28 801,8297	33 694,067	93 504,10
3	3 740,16413	29 953,9029	33 694,067	63 550,20
4	2 542,00802	31 152,059	33 694,067	32 398,14
5	1 295,92565	32 398,1414	33 694,067	0,00

8. Réponse :

Le calcul de la mensualité nécessite le calcul du taux mensuel (ne pas l'arrondir dans les calculs suivants) :

$$\sqrt[12]{1,04} - 1 = 0,0033$$

a. La mensualité est donnée par :

$$150\,000 = X \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-60}}{0,0033} \Rightarrow X = 2\,757,64$$

b. La part de capital le mois 32 est :

$$X - 0,0033 \times S_{31}$$

$$S_{31} = X \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-29}}{0,0033}$$

c. Le solde restant dû au bout de 43 mois vaut :

$$S_{43} = X \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-17}}{0,0033}$$

d. La part d'intérêt le 54^e mois est donnée par :

$$0,0033 \times S_{53}$$

$$S_{53} = X \times \frac{1 - (1 + 0,0033)^{-7}}{0,0033}$$

ce que l'on vérifie dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	150 000
Durée	60
Taux annuel	0,04
Taux mensuel	0,00327374
Annuité	2 757,64019

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	491,060967	2 266,57922	2 757,64019	147 733,42
2	483,640777	2 273,99941	2 757,64019	145 459,42
3	476,196294	2 281,4439	2 757,64019	143 177,98
4	468,727441	2 288,91275	2 757,64019	140 889,06
5	461,234136	2 296,40605	2 757,64019	138 592,66
6	453,7163	2 303,92389	2 757,64019	136 288,73
7	446,173853	2 311,46634	2 757,64019	133 977,27
8	438,606714	2 319,03348	2 757,64019	131 658,23
9	431,014801	2 326,62539	2 757,64019	129 331,61
10	423,398035	2 334,24216	2 757,64019	126 997,37
11	415,756334	2 341,88386	2 757,64019	124 655,48
12	408,089616	2 349,55058	2 757,64019	122 305,93
13	400,397798	2 357,24239	2 757,64019	119 948,69
14	392,6808	2 364,95939	2 757,64019	117 583,73
15	384,938539	2 372,70165	2 757,64019	115 211,03
16	377,170931	2 380,46926	2 757,64019	112 830,56
17	369,377894	2 388,2623	2 757,64019	110 442,30
18	361,559345	2 396,08085	2 757,64019	108 046,22
19	353,715199	2 403,92499	2 757,64019	105 642,29
20	345,845374	2 411,79482	2 757,64019	103 230,50
21	337,949786	2 419,69041	2 757,64019	100 810,81
22	330,028349	2 427,61184	2 757,64019	98 383,20
23	322,08098	2 435,55921	2 757,64019	95 947,64
24	314,107593	2 443,5326	2 757,64019	93 504,10
25	306,108103	2 451,53209	2 757,64019	91 052,57
26	298,082425	2 459,55777	2 757,64019	88 593,01
27	290,030472	2 467,60972	2 757,64019	86 125,40
28	281,95216	2 475,68803	2 757,64019	83 649,72
29	273,847402	2 483,79279	2 757,64019	81 165,92
30	265,716111	2 491,92408	2 757,64019	78 674,00
31	257,5582	2 500,08199	2 757,64019	76 173,92
32	249,373582	2 508,26661	2 757,64019	73 665,65

33	241,16217	2 516,47802	2 757,64019	71 149,17
34	232,923875	2 524,71632	2 757,64019	68 624,46
35	224,658611	2 532,98158	2 757,64019	66 091,47
36	216,366289	2 541,2739	2 757,64019	63 550,20
37	208,046819	2 549,59337	2 757,64019	61 000,61
38	199,700114	2 557,94008	2 757,64019	58 442,67
39	191,326084	2 566,31411	2 757,64019	55 876,35
40	182,924639	2 574,71555	2 757,64019	53 301,64
41	174,49569	2 583,1445	2 757,64019	50 718,49
42	166,039147	2 591,60104	2 757,64019	48 126,89
43	157,55492	2 600,08527	2 757,64019	45 526,81
44	149,042917	2 608,59727	2 757,64019	42 918,21
45	140,503049	2 617,13714	2 757,64019	40 301,07
46	131,935223	2 625,70497	2 757,64019	37 675,37
47	123,339348	2 634,30084	2 757,64019	35 041,07
48	114,715333	2 642,92486	2 757,64019	32 398,14
49	106,063084	2 651,57711	2 757,64019	29 746,56
50	97,3825108	2 660,25768	2 757,64019	27 086,31
51	88,6735194	2 668,96667	2 757,64019	24 417,34
52	79,936017	2 677,70417	2 757,64019	21 739,64
53	71,1699104	2 686,47028	2 757,64019	19 053,17
54	62,3751057	2 695,26509	2 757,64019	16 357,90
55	53,5515092	2 704,08868	2 757,64019	13 653,81
56	44,6990265	2 712,94116	2 757,64019	10 940,87
57	35,8175631	2 721,82263	2 757,64019	8 219,05
58	26,9070241	2 730,73317	2 757,64019	5 488,31
59	17,9673143	2 739,67288	2 757,64019	2 748,64
60	8,99833818	2 748,64185	2 757,64019	0

9. Réponse :

Les annuités des trois premières années sont respectivement 6 000 €, 5 900 € et 5 800 €.

Capital emprunté	50 000
Durée	10
Taux	0,02

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	1 000	5 000	6 000	45 000,00
2	900	5 000	5 900	40 000,00
3	800	5 000	5 800	35 000,00
4	700	5 000	5 700	30 000,00
5	600	5 000	5 600	25 000,00
6	500	5 000	5 500	20 000,00
7	400	5 000	5 400	15 000,00
8	300	5 000	5 300	10 000,00
9	200	5 000	5 200	5 000,00
10	100	5 000	5 100	0,00

Chacun de ces flux comporte une part constante de capital (soit 5 000 €) à laquelle s'ajoute l'intérêt de 2 % sur le solde restant dû précédent.

10. Réponse :

a. L'annuité la première année est de 36 000 €.

$$36\,000 = \left(\frac{150\,000}{6} \right) + 0,02 \times 150\,000$$

b. La part de capital la seconde année est de 30 000 €.

$$36\,000 = \frac{150\,000}{6}$$

c. Le solde restant dû la troisième année est de 60 000 €.

$$60\,000 = 150\,000 - 3 \times \left(\frac{150\,000}{6} \right)$$

d. La part d'intérêt la quatrième année est de 2 400 € soit $0,04 \times 60\,000$.

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	150 000
Durée	5
Taux	0,04

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	6 000	30 000	36 000	120 000,00
2	4 800	30 000	34 800	90 000,00
3	3 600	30 000	33 600	60 000,00
4	2 400	30 000	32 400	30 000,00
5	1 200	30 000	31 200	0,00

11. Réponse :

Les remboursements annuels seront uniquement constitués de l'intérêt les deux premières années, soit $2\,400 = 0,02 \times 120\,000$.

La troisième année, l'intégralité du capital est remboursée et s'ajoute à l'intérêt :

$$122\,400 = 0,02 \times 120\,000 + 120\,000$$

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	120 000
Durée	3
Taux	0,02

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	2 400	0	2 400	120 000,00
2	2 400	0	2 400	120 000,00
3	2 400	120 000	122 400	0,00

12. Réponse :

a. Dans le cas de l'annuité constante, l'annuité est

$$400\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-25}}{0,05} \Rightarrow A = 28\,380,98$$

et le solde restant dû de :

$$S_{18} = 28\,380,98 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-6}}{0,05} = 400\,000 \times \frac{a_{18}}{a_{25}} = 164\,222 \text{ €}$$

Capital emprunté	400 000
Durée	25
Taux	0,05
Annuité	28 380,9829

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	20 000	8 380,98	28 380,98	391 619,02
2	19 580,9509	8 800,03	28 380,98	382 818,99
3	19 140,9493	9 240,03	28 380,98	373 578,95
4	18 678,9476	9 702,04	28 380,98	363 876,92
5	18 193,8458	10 187,14	28 380,98	353 689,78
6	17 684,4889	10 696,49	28 380,98	342 993,28
7	17 149,6642	11 231,32	28 380,98	331 761,97
8	16 588,0983	11 792,88	28 380,98	319 969,08
9	15 998,4541	12 382,53	28 380,98	307 586,55
10	15 379,3276	13 001,66	28 380,98	294 584,90
11	14 729,2449	13 651,74	28 380,98	280 933,16
12	14 046,658	14 334,32	28 380,98	266 598,83
13	13 329,9417	15 051,04	28 380,98	251 547,79
14	12 577,3897	15 803,59	28 380,98	235 744,20
15	11 787,21	16 593,77	28 380,98	219 150,43
16	10 957,5214	17 423,46	28 380,98	201 726,97
17	10 086,3483	18 294,63	28 380,98	183 432,33
18	9 171,61655	19 209,37	28 380,98	164 222,96
19	8 211,14823	20 169,83	28 380,98	144 053,13
20	7 202,65649	21 178,33	28 380,98	122 874,80
21	6 143,74017	22 237,24	28 380,98	100 637,56
22	5 031,87803	23 349,10	28 380,98	77 288,46
23	3 864,42279	24 516,56	28 380,98	52 771,90
24	2 638,59478	25 742,39	28 380,98	27 029,51
25	1 351,47538	27 029,51	28 380,98	0,00

b. Dans le cas de l'amortissement constant, l'annuité est :

$$22\,400 \text{ €} = \left(\frac{400\,000}{25} \right) + 0,05 \times \left(400\,000 - \left(17 \times \frac{400\,000}{25} \right) \right)$$

et le solde restant dû de :

$$112\,000 \text{ €} = 400\,000 - \left(18 \times \frac{400\,000}{25} \right)$$

Capital emprunté	400 000
Durée	25
Taux	0,05

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	20 000	16 000	36 000	384 000,00
2	19 200	16 000	35 200	368 000,00
3	18 400	16 000	34 400	352 000,00
4	17 600	16 000	33 600	336 000,00
5	16 800	16 000	32 800	320 000,00
6	16 000	16 000	32 000	304 000,00
7	15 200	16 000	31 200	288 000,00
8	14 400	16 000	30 400	272 000,00
9	13 600	16 000	29 600	256 000,00
10	12 800	16 000	28 800	240 000,00
11	12 000	16 000	28 000	224 000,00
12	11 200	16 000	27 200	208 000,00
13	10 400	16 000	26 400	192 000,00
14	9 600	16 000	25 600	176 000,00
15	8 800	16 000	24 800	160 000,00
16	8 000	16 000	24 000	144 000,00
17	7 200	16 000	23 200	128 000,00
18	6 400	16 000	22 400	112 000,00
19	5 600	16 000	21 600	96 000,00
20	4 800	16 000	20 800	80 000,00
21	4 000	16 000	20 000	64 000,00
22	3 200	16 000	19 200	48 000,00
23	2 400	16 000	18 400	32 000,00
24	1 600	16 000	17 600	16 000,00
25	800	16 000	16 800	0,00

c. Dans le cas d'absence d'amortissement, l'annuité est de $20\,000 = 0,05 \times 400\,000$ € et le solde restant dû est de 400 000 €.

Capital emprunté	400 000
Durée	25
Taux	0,05

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	20 000	0,00	20 000	400 000,00
2	20 000	0,00	20 000	400 000,00
3	20 000	0,00	20 000	400 000,00
4	20 000	0,00	20 000	400 000,00
5	20 000	0,00	20 000	400 000,00
6	20 000	0,00	20 000	400 000,00
7	20 000	0,00	20 000	400 000,00
8	20 000	0,00	20 000	400 000,00
9	20 000	0,00	20 000	400 000,00
10	20 000	0,00	20 000	400 000,00
11	20 000	0,00	20 000	400 000,00
12	20 000	0,00	20 000	400 000,00
13	20 000	0,00	20 000	400 000,00
14	20 000	0,00	20 000	400 000,00
15	20 000	0,00	20 000	400 000,00
16	20 000	0,00	20 000	400 000,00
17	20 000	0,00	20 000	400 000,00
18	20 000	0,00	20 000	400 000,00
19	20 000	0,00	20 000	400 000,00
20	20 000	0,00	20 000	400 000,00
21	20 000	0,00	20 000	400 000,00
22	20 000	0,00	20 000	400 000,00
23	20 000	0,00	20 000	400 000,00
24	20 000	0,00	20 000	400 000,00
25	20 000	0,00	20 000	400 000,00

13. Réponse :

Les paiements annuels sont de 21 835,5 €. Ils sont composés de la part d'intérêt :

$$3\ 000 = 0,03 \times 100\ 000$$

et du capital placé qui reconstitue le capital à rembourser à terme :

$$100\ 000 = 18\ 835,5 \times \frac{(1,03)^5 - 1}{0,03}$$

ce qui revient au calcul de l'annuité constante :

$$100\ 000 = 21\ 835,5 \times \frac{1 - (1,03)^{-5}}{0,03}$$

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	100 000
Durée	5
Taux	0,03

Année	Intérêt	Reconstitution du capital	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	3 000	18 835,5	0	21 835,5	
2	3 000	18 835,5	0	21 835,5	100 000
3	3 000	18 835,5	0	21 835,5	100 000
4	3 000	18 835,5	0	21 835,5	100 000
5	3 000	18 835,5	100 000	21 835,5	0

14. Réponse :

Les paiements annuels sont de 21 462,7 €. Ils sont composés de la part d'intérêt :

$$3\,000 = 0,03 \times 100\,000$$

et du capital placé qui reconstitue le capital à rembourser à terme :

$$100\,000 = 18\,462,7 \times \frac{(1,04)^5 - 1}{0,04}$$

soit $3\,000 + 18\,462,7 = 21\,462,7$ €, ce qui permet de calculer le taux réciproque :

$$100\,000 = 21\,462,7 \times \frac{1 - (1+r)^{-5}}{r} \Rightarrow r = 2,4\%$$

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	100 000
Durée	5
Taux	0,03

Année	Intérêt	Reconstitution du capital	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	3 000	18 462,7	0	21 462,7	
2	3 000	18 462,7	0	21 462,7	100 000
3	3 000	18 462,7	0	21 462,7	100 000
4	3 000	18 462,7	0	21 462,7	100 000
5	3 000	18 462,7	100 000	21 462,7	0

Calcul du taux interne :

Capital	-100 000
Flux 1	21 462,7113
Flux 2	21 462,7113
Flux 3	21 462,7113
Flux 4	21 462,7113
Flux 5	21 462,7113
TRI	0,02399918

15. Réponse :

La première annuité est donnée par la formule de l'annuité croissante :

$$150\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,02)^5 (1 + 0,04)^{-5}}{0,04 - 0,02}$$

$$A = 32\,423,30 \text{ €}$$

Les deux suivantes sont majorées du taux de croissance.

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	150 000
Durée	5
Taux d'intérêt	0,04
Taux de croissance	0,02
Annuité	32 423,2979

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	6 000,00	26 423,30	32 423,30	123 576,70
2	4 943,07	28 128,70	33 071,76	95 448,01
3	3 817,92	29 915,28	33 733,20	65 532,73
4	2 621,31	31 786,55	34 407,86	33 746,17
5	1 349,85	33 746,17	35 096,02	0,00

16. Réponse :

a. L'annuité constante est de :

$$20\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 4\%)^{-5}}{4\%}$$

$$A = 4\,492,54 \text{ €}$$

b. Les annuités croissantes sont de :

$$20\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 2\%)^5 \times (1 + 4\%)^{-5}}{4\% - 2\%}$$

$$A_1 = 4\,323,11 \text{ €}$$

$$A_2 = 4\,323,11 \times 1,02 = 4\,409,57 \text{ €}$$

$$A_3 = 4\,323,11 \times 1,02^2 = 4\,497,76 \text{ €}$$

$$A_4 = 4\,323,11 \times 1,02^3 = 4\,587,72 \text{ €}$$

$$A_5 = 4\,323,11 \times 1,02^4 = 4\,679,47 \text{ €}$$

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Année	Annuité	Intérêts	Capital remboursé	Total remboursé	SRD
1	4 492,54	800,00	3 692,54	3 692,54	16 307,46
2	4 492,54	652,30	3 840,24	7 532,79	12 467,21
3	4 492,54	498,69	3 993,85	11 526,64	8 473,36
4	4 492,54	338,93	4 153,61	15 680,25	4 319,75
5	4 492,54	172,79	4 319,75	20 000,00	0,00

Année	Annuité	Intérêts	Capital remboursé	Total remboursé	SRD
1	4 323,11	800,00	3 523,11	3 523,11	16 476,89
2	4 409,57	659,08	3 750,49	7 273,60	12 726,40
3	4 497,76	509,06	3 988,70	11 262,30	8 737,70
4	4 587,72	349,51	4 238,21	15 500,51	4 499,49
5	4 679,47	179,98	4 499,49	20 000,00	0,00

17. Réponse :

La première annuité est donnée par :

$$50\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,0632)^{-10}}{0,0632}$$

$$A = 6\,896,76 \text{ €}$$

Ensuite, il faut calculer le solde restant dû au moment de la révision de taux :

$$S_5 = 6\,896,76 \times \frac{1 - (1 + 0,0632)^{-5}}{0,0632} = 50\,000 \times \frac{a_5}{a_{10}} = 28\,800,51 \text{ €}$$

La nouvelle annuité est alors :

$$28\,800,51 = A^* \times \frac{1 - (1 + 0,0732)^{-5}}{0,0732} \Rightarrow A^* = 7\,084,46 \text{ €}$$

Ces résultats sont illustrés dans les tableaux suivants.

Capital emprunté	50 000
Durée	10
Taux	0,0632
Annuité	6 896,76429

Année	Intérêt	Capital amorti	Annuité	Solde restant dû
1	3 160	3 736,76	6 896,76	46 263,24
2	2 923,8365	3 972,93	6 896,76	42 290,31
3	2 672,74746	4 224,02	6 896,76	38 066,29
4	2 405,7896	4 490,97	6 896,76	33 575,32
5	2 121,96	4 774,80	6 896,76	28 800,51
6	1 820,19236	5 076,57	6 896,76	23 723,94
7	1 499,35302	5 397,41	6 896,76	18 326,53
8	1 158,23663	5 738,53	6 896,76	12 588,00
9	795,561678	6 101,20	6 896,76	6 486,80
10	409,965673	6 486,80	6 896,76	0,00

18. Réponse :

L'annuité constante est de 6 896,76 €.

$$50\,000 = A \times \frac{1 - (1 + 0,0632)^{-10}}{0,0632}$$

$$A = 6\,896,76\text{€}$$

Si le taux monte de 1 % et que l'on souhaite maintenir cette annuité, la nouvelle période devient :

$$n^* = m + \frac{\ln(r) - \ln\left(r - r^* + r^* \left(\frac{1}{(1+r)^{n-m}}\right)\right)}{\ln(1+r^*)}$$

$$= 5 + \frac{\ln(0,0632) - \ln\left(0,0632 - 0,0732 + 0,0732 \times \frac{1}{1,0632^{10-5}}\right)}{\ln(1,0632)} = 10,16$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 6. Les emprunts obligataires - Corrigés des exercices

1. Réponse :

La valeur nominale est : $V = 5\,000$ €. Le taux nominal est aussi le taux de coupon : $j = 10\%$. Le coupon est alors le taux de coupon appliqué à la valeur faciale :

$$c = j \cdot V = 0,10 \times 5\,000 = 500 \text{ €}$$

2. Réponse :

À partir du taux de coupon et du montant du coupon, on peut déduire la valeur faciale :

$$c = j \cdot V \Rightarrow 50 = 0,04 \times V \Rightarrow V = 1\,250 \text{ €}$$

3. Réponse :

a. Le montant total emprunté est de : $M = I_0 \cdot E = 10\,000 \times 990 = 9\,900\,000$ €.

b. Le montant du coupon de chaque titre est : $c = j \cdot V = 0,07 \times 1\,000 = 70$ €.

c. Les 5 annuités sont :

$$A_t = c \cdot I_{t-1} + d_t \cdot R$$

$$A_1 = c \cdot I_0 + d_1 \cdot R = 70 \times 10\,000 + 2\,000 \times 1\,020 = 2\,740\,000 \text{ €}$$

$$A_2 = c \cdot I_1 + d_2 \cdot R = 70 \times 8\,000 + 2\,000 \times 1\,020 = 2\,600\,000 \text{ €}$$

$$A_3 = c \cdot I_2 + d_3 \cdot R = 70 \times 6\,000 + 2\,000 \times 1\,020 = 2\,460\,000 \text{ €}$$

...

	$C \cdot I_{t-1}$	$dt \cdot R$	A_t
A_1	700 000	2 040 000	2 740 000
A_2	560 000	2 040 000	2 600 000
A_3	420 000	2 040 000	2 460 000
A_4	280 000	2 040 000	2 320 000
A_5	140 000	2 040 000	2 180 000

d. Le taux actuariel est donné par la relation :

$$I_0 \cdot E = \sum_{t=1}^n \frac{A_t}{(1+y)^t}$$

$$9\,900\,000 = \frac{2\,740\,000}{(1+y)} + \frac{2\,600\,000}{(1+y)^2} + \frac{2\,460\,000}{(1+y)^3} + \frac{2\,320\,000}{(1+y)^4} + \frac{2\,180\,000}{(1+y)^5}$$

On obtient $y = 8,0314\%$.

e. Le taux intrinsèque est donné par la relation :

$$r = \frac{c}{R} = \frac{70}{1\,020} = 0,06863 = 6,863 \%$$

Ce taux vérifie l'équation suivante qui égalise l'actualisation des flux à la valeur de remboursement :

$$10\,200\,000 = \frac{2\,740\,000}{(1+r)} + \frac{2\,600\,000}{(1+r)^2} + \frac{2\,460\,000}{(1+r)^3} + \frac{2\,320\,000}{(1+r)^4} + \frac{2\,180\,000}{(1+r)^5}$$

4. Réponse :

La valeur nominale est : $V = 500$ €. Le taux nominal est : $j = 8$ %. La durée de l'obligation est de 2 ans. On a $R = V$.

Le prix d'émission correspond à la valeur actualisée des flux de l'obligation (coupons et principal).

a. Pour un rendement $y = 6$ % :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^2 \frac{40}{(1+0,06)^t} + \frac{500}{(1+0,06)^2} \\ &= 518,33 \text{ €} > V \end{aligned}$$

b. Pour un rendement $y = 8$ % :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^2 \frac{40}{(1+0,08)^t} + \frac{500}{(1+0,08)^2} \\ &= 500 \text{ €} = V \end{aligned}$$

c. Pour un rendement $y = 10$ % :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^2 \frac{40}{(1+0,1)^t} + \frac{500}{(1+0,1)^2} \\ &= 482,64 \text{ €} < V \end{aligned}$$

5. Réponse :

La valeur nominale est : $V = 100$ €. Le taux nominal est : $j = 4,5$ %. La durée de l'obligation est de 10 ans. $E = R = V$.

a. Le rendement $y = ?$ % est le rendement qui rend la valeur d'émission égale à la somme des flux actualisés à ce taux. Nous le trouverons par interpolation linéaire ou à l'aide d'un solveur :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ 100 &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4,5}{(1+y)^t} + \frac{100}{(1+y)^{10}} \end{aligned}$$

On obtient $y = 4,5$ %.

- b. Dans ce cas, nous fixons à 5 % le rendement et cherchons le prix d'émission, soit la valeur actuelle de la séquence des flux composant l'obligation : $E = ?$ si $y = 5 \%$.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4,5}{(1+0,05)^t} + \frac{100}{(1+0,05)^{10}} \\ &= 96,14 \text{ €} \end{aligned}$$

- c. Dans ce cas, nous fixons le prix d'émission, les coupons et le rendement, et cherchons la valeur de remboursement afin de garder identique l'obligation : $R = ?$ si $j = 4 \%$.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ 96,14 &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4}{(1+0,05)^t} + \frac{R}{(1+0,05)^{10}} \end{aligned}$$

On obtient $R = 106,29 \text{ €}$.

- d. Nous cherchons à nouveau R , mais dans ce cas, l'obligation est émise à 100 €. La démarche est identique : $R = ?$ si $E = V$.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ 100 &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4}{(1+0,05)^t} + \frac{R}{(1+0,05)^{10}} \end{aligned}$$

On obtient $R = 112,58 \text{ €}$.

- e. Dans ce cas, l'inconnue est le prix d'émission : $R = V$ si $E = ?$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4}{(1+0,05)^t} + \frac{100}{(1+0,05)^{10}} \\ &= 92,28 \text{ €} \end{aligned}$$

- f. Le cas est similaire, mais avec un remboursement au-dessous du pair : $R = 115$ si $E = ?$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} \\ &= \sum_{t=1}^{10} \frac{4}{(1+0,05)^t} + \frac{115}{(1+0,05)^{10}} \\ &= 101,49 \text{ €} \end{aligned}$$

- g. Dans ce cas, il n'y a pas de coupon, donc le prix de remboursement est naturellement supérieur au prix d'émission pour procurer un rendement positif : $R = V$ si zéro coupon.

$$E = \frac{R}{(1+y)^n} = \frac{100}{(1+0,05)^{10}} = 61,39 \text{ €}$$

6. Réponse :

Le prix d'émission n'est autre que la valeur actualisée en $t = 0$ du prix de remboursement de l'obligation, soit :

$$E = \frac{R}{(1+y)^n} = \frac{105}{(1+0,04)^3} = 93,34 \text{ €}$$

7. Réponse :

Une obligation perpétuelle se valorise à l'aide de la formule de l'actualisation d'une perpétuité. En faisant varier le taux, cela donne les résultats suivants.

a. $E = \frac{c}{y} = \frac{4}{0,04} = 100 \text{ €}.$

b. $E = \frac{c}{y} = \frac{4}{0,06} = 66,67 \text{ €}.$

c. $E = \frac{c}{y} = \frac{4}{0,08} = 50 \text{ €}.$

Plus le taux est élevé, plus le prix est faible.

8. Réponse :

Le prix d'émission est la valeur actuelle de la séquence de flux d'un emprunt à amortissement constant.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{n} \cdot a_n^y \left[R - \frac{c}{y} \right] + \frac{c}{y} \\ &= \frac{1}{3} a_3^{0,025} \left[3\,000 - \frac{90}{0,025} \right] + \frac{90}{0,025} = 3\,028,79 \text{ €} \end{aligned}$$

9. Réponse :

Il s'agit simplement de calculer la valeur actuelle d'une séquence de flux constants (annuités constantes).

$$E = A_t \cdot a_n^y = 100 \cdot a_5^{0,05} = 432,95 \text{ €}$$

10. Réponse :

Vu que les flux ne sont pas constants, il faut les actualiser individuellement.

$$E = \frac{2}{(1,04)^1} + \frac{3}{(1,04)^2} + \frac{4}{(1,04)^3} + \frac{105}{(1,04)^4} = 98 \text{ €}$$

11. Réponse :

Nous cherchons l'inconnue R .

$$\begin{aligned} E &= \frac{R}{(1+y)^n} \\ 100 &= \frac{R}{(1+0,05)^3} \end{aligned}$$

On obtient $R = 115,76 \text{ €}.$

12. Réponse :

Dans ce cas, l'inconnue du problème est le taux y .

$$E = \frac{R}{(1+y)^n}$$

$$100 = \frac{110,2}{(1+y)^3}$$

On obtient $y = 3,3 \%$.

13. Réponse :

Il s'agit de chercher le rendement y qui égalise la mise investie, le prix d'émission, avec la séquence de flux actualisée. Nous utiliserons l'interpolation linéaire ou un solveur.

$$E = \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n}$$

$$102 = \sum_{t=1}^3 \frac{4}{(1+y)^t} + \frac{100}{(1+y)^3}$$

On obtient $y = 3,29 \%$.

14. Réponse :

Lorsque les flux ne sont pas constants, il faut les additionner en les actualisant et chercher le taux y qui annule cette équation.

$$102,1 = \frac{3}{(1+y)^1} + \frac{3,5}{(1+y)^2} + \frac{4}{(1+y)^3} + \frac{4,5}{(1+y)^4} + \frac{105}{(1+y)^5} \Rightarrow y = 3,5 \%$$

15. Réponse :

Obligation	Taux nominal	Échéance	Prix d'émission	Prix de remboursement	Rendement
A	4 %	3 ans	102,83	100 %	3 %
B	5 %	5 ans	104,45	100 %	4 %
C	4,5 %	4 ans	101,81	100 %	4 %
D	0 %	2 ans	98 %	105 %	3,5 %

16. Réponse :

Si l'obligation est émise et remboursée au pair, on a : $j = y = 5 \%$. Les annuités sont alors de $5\,000 / 5$ soit $1\,000$ € augmentées des intérêts, la somme de leurs valeurs actualisées à 5% donnant bien $5\,000$ €.

Valeur nominale	5 000
Taux nominal	0,05
Coupon	250
Remboursement	5 000
y	0,05

	Annuité	Annuité actualisée
1	1 250	1 190,48
2	1 200	1 088,44
3	1 150	993,41
4	1 100	904,97
5	1 050	822,70
Prix d'émission		5 000

Si l'obligation est émise à 5 050 €, j est alors différent de y afin que l'actualisation de la séquence corresponde au prix d'émission de 5 050 €.

Valeur nominale	5 000
Taux nominal	0,05
Coupon	250
Remboursement	5 000
y	0,46

	Annuité	Annuité actualisée
1	1 250	1 194,68
2	1 200	1 096,14
3	1 150	1003,99
4	1 100	917,84
5	1 050	837,35
Prix d'émission		5 050

$$E = \frac{1}{n} \cdot a_n^y \left[R - \frac{c}{y} \right] + \frac{c}{y}$$

$$5\,050 = \frac{1}{5} a_5^y \left[5\,000 - \frac{250}{y} \right] + \frac{250}{y} \Rightarrow y = 4,63 \%$$

17. Réponse :

À l'aide de la formule de l'actualisation des annuités constantes, il nous est possible de trouver l'inconnue y par interpolation linéaire ou à l'aide d'un solveur.

$$E = A_t \cdot a_n^y$$

$$2\,000 = 500 \times a_5^y \Rightarrow y = 7,9 \%$$

18. Réponse :

À l'aide de la formule de la perpétuité constante, nous retrouvons l'inconnue, ici le coupon (l'annuité).

Dans le premier cas :

$$E = \frac{c}{y}$$
$$100 = \frac{c}{0,05}$$

On obtient $c = 5$ et $j = 5 \%$.

Dans le second cas :

$$E = \frac{c}{y}$$
$$102 = \frac{c}{0,05}$$

On obtient $c = 5,1$ et $j = 5,1 \%$.

19. Réponse :

À l'aide de la formule de la perpétuité constante, nous retrouvons l'inconnue, ici le coupon (l'annuité).

Dans le premier cas :

$$E = \frac{c}{y}$$
$$100 = \frac{3}{y}$$

On obtient $y = 3 \%$.

Dans le second cas :

$$E = \frac{c}{y}$$
$$98 = \frac{3}{y}$$

On obtient $y = 3,06 \%$.

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 7. Courbe des taux - Corrigés des exercices

1. Réponse :

Cet exercice résulte du calcul du TRI de chaque obligation. On constate que dans ce cas, la courbe est normale ; elle est croissante. Il faut procéder dans l'ordre, par itération, et déduire y_1 , y_2 puis y_3 .

- $100 = \frac{103}{(1 + y_1)} \Rightarrow y_1 = 3 \%$
- $98 = \frac{3,5}{(1 + y_2)} + \frac{103,5}{(1 + y_2)^2} \Rightarrow y_2 = 4,57 \%$
- $95 = \frac{4}{(1 + y_3)} + \frac{4}{(1 + y_3)^2} + \frac{104}{(1 + y_3)^3} \Rightarrow y_3 = 5,86 \%$

2. Réponse :

Le prix d'émission est la somme de l'actualisation des flux futurs à percevoir, actualisés au taux actuariel.

- $E_1 = \frac{102}{(1 + 0,02)} = 100$
- $E_2 = \frac{2}{(1 + 0,025)} + \frac{102}{(1 + 0,025)^2} = 99,04$
- $E_3 = \frac{2}{(1 + 0,03)} + \frac{2}{(1 + 0,03)^2} + \frac{102}{(1 + 0,03)^3} = 97,17$

3. Réponse :

Cet exercice nous rappelle l'intérêt de connaître les taux spot pour ne pas avoir l'effet coupon. Dans ce cas, deux obligations de même durée ont des rendements différents. En réalité, cette différence pourrait être expliquée par un risque de défaut différent ; si le risque est identique, elles doivent avoir un rendement identique.

- $100 = \frac{3}{(1 + y_2)} + \frac{103}{(1 + y_2)^2} \Rightarrow y_2 = 3 \%$
- $106 = \frac{6}{(1 + y_2)} + \frac{106}{(1 + y_2)^2} \Rightarrow y_2 = 2,87 \%$

4. Réponse :

Dans le cas d'obligations zéro coupon, le rendement actuariel ou le TRI est un taux spot.

- $98 = \frac{100}{(1 + s_1)} \Rightarrow s_1 = 2,041 \%$
- $96 = \frac{100}{(1 + s_2)^2} \Rightarrow s_2 = 2,062 \%$
- $94 = \frac{100}{(1 + s_3)^3} \Rightarrow s_3 = 2,084 \%$

5. Réponse :

Le taux forward 1 an dans 1 an (${}_1f_1$) est issu des taux spot à 1 et 2 ans.

$$\begin{aligned}(1 + s_1)(1 + {}_1f_1) &= (1 + s_2)^2 \\(1 + 0,05)(1 + {}_1f_1) &= (1 + 0,06)^2 \\(1 + {}_1f_1) &= \frac{(1 + 0,06)^2}{(1 + 0,05)} \\({}_1f_1) &= \frac{(1 + 0,06)^2}{(1 + 0,05)} - 1 = 7,01 \%\end{aligned}$$

6. Réponse :

Le taux forward 2 ans dans 2 ans (${}_2f_2$) est issu des taux spot à 2 et 4 ans.

$$\begin{aligned}(1 + s_2)^2 (1 + {}_2f_2)^2 &= (1 + s_4)^4 \\(1 + 0,03)^2 (1 + {}_2f_2)^2 &= (1 + 0,05)^4 \\(1 + {}_2f_2)^2 &= \frac{(1 + 0,05)^4}{(1 + 0,03)^2} \\(1 + {}_2f_2) &= \sqrt{\frac{(1 + 0,05)^4}{(1 + 0,03)^2}} \\({}_2f_2) &= \sqrt{\frac{(1 + 0,05)^4}{(1 + 0,03)^2}} - 1 = 7,04 \%\end{aligned}$$

7. Réponse :

Il faut d'abord extraire les taux spot :

- $100 = \frac{102}{(1 + y_1)} = \frac{102}{(1 + s_1)} \Rightarrow s_1 = \frac{C_1 + R_1}{P_1} - 1 = 2 \%$
- $100 = \frac{3}{(1 + 0,02)} + \frac{103}{(1 + s_2)^2} \Rightarrow s_2 = 3,02 \%$
- $100 = \frac{4}{(1 + 0,02)} + \frac{4}{(1 + 0,0302)^2} + \frac{104}{(1 + s_3)^3} \Rightarrow s_3 = 4,05 \%$

Ensuite on peut estimer le taux forward 1 an dans 2 ans :

$$\begin{aligned}(1 + s_2)^2 (1 + {}_1f_2) &= (1 + s_3)^3 \\ (1 + 0,0302)^2 (1 + {}_1f_2) &= (1 + 0,0405)^3 \\ (1 + {}_1f_2) &= \frac{(1 + 0,0405)^3}{(1 + 0,0302)^2} \\ ({}_1f_2) &= \frac{(1 + 0,0405)^3}{(1 + 0,0302)^2} - 1 = 6,17 \%\end{aligned}$$

8. Réponse :

Le prix d'émission est :

$$\begin{aligned}E &= \frac{3}{(1 + s_1)} + \frac{103}{(1 + s_1)(1 + {}_1f_1)} \\ &= \frac{3}{(1 + 0,03)} + \frac{103}{(1 + 0,03)(1 + 0,02)} = 100,95\end{aligned}$$

Le rendement actuariel y_2 est :

$$100,95 = \frac{3}{(1 + y_2)} + \frac{103}{(1 + y_2)^2} \Rightarrow y_2 = 2,51 \%$$

Le taux spot s_2 est :

$$100,95 = \frac{3}{(1 + 0,03)} + \frac{103}{(1 + s_2)^2} \Rightarrow s_2 = 2,50 \%$$

9. Réponse :

La première étape consiste à construire le vecteur des M_k en posant $M_0 = M_6 = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{pmatrix}$$

La seconde étape consiste à construire la matrice A et calculer son inverse (A^{-1}) :

$$A = \begin{pmatrix} 8,00 & 2,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 2,00 & 14,00 & 5,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 5,00 & 30,00 & 10,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 10,00 & 40,00 & 10,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 10,00 & 40,00 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,12997 & -0,01986 & 0,00363 & -0,00097 & 0,00024 \\ -0,01986 & 0,07946 & -0,01453 & 0,00388 & -0,00097 \\ 0,00363 & -0,01453 & 0,03924 & -0,01047 & 0,00262 \\ -0,00097 & 0,00388 & -0,01047 & 0,02946 & -0,00736 \\ 0,00024 & -0,00097 & 0,00262 & -0,00736 & 0,02684 \end{pmatrix}$$

Puis nous pouvons construire la matrice C :

$$C = \begin{pmatrix} -1,50 \\ 0,00 \\ -0,90 \\ -0,90 \\ -0,60 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons ensuite calculer le vecteur de M_k par le produit des matrice A^{-1} et C :

$$M = \begin{pmatrix} 0,12997 & -0,01986 & 0,00363 & -0,00097 & 0,00024 \\ -0,01986 & 0,07946 & -0,01453 & 0,00388 & -0,00097 \\ 0,00363 & -0,01453 & 0,03924 & -0,01047 & 0,00262 \\ -0,00097 & 0,00388 & -0,01047 & 0,02946 & -0,00736 \\ 0,00024 & -0,00097 & 0,00262 & -0,00736 & 0,02684 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,50 \\ 0,00 \\ -0,90 \\ -0,90 \\ -0,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1974927 \\ 0,0399709 \\ -0,0329215 \\ -0,0112209 \\ -0,0121948 \end{pmatrix}$$

Enfin, il reste à calculer les coefficients A_k , B_k , C_k et D_k .

k	x_k	y_k	h_k	X_{k-1}	Y_{k-1}	M_k	M_{k+1}	A_k	B_k	C_k	D_k
	1	1,5	2	3	3	0,0000	-0,197	0,7664	0,049	-0,016	0,700
	3	3	2	5	4	-0,197	0,0399	1,7451	-0,276	0,019	-0,278
2	5	4	5	10	6,5	0,0399	-0,032	0,0787	0,0564	-0,002	2,499
3	10	6,5	10	20	10	-0,033	-0,011	0,9161	-0,027	0,000	-0,292
4	20	10	10	30	12	-0,011	-0,012	0,4626	-0,004	-0,000	2,731
5	30	12	10	40	13	-0,012	0,000	1,0552	-0,024	0,000	-3,194
6	40	13									

Nous obtenons alors les équations des polynômes du troisième degré, qui nous donnent une estimation de la courbe des taux au comptant sur le domaine de variation de maturités (0, 40 ans) par sous-intervalles (1-3 ; 3-5 ; 5-10 ; 10-20 ; 20-30 ; 30-40).

$$S_k(x) = A_k + B_k \cdot x + C_k \cdot x^2 + D_k \cdot x^3$$

$$\forall T \in [1; 3], R(0, T) = 0,766458 + 0,049373 T - 0,016458 T^2 + 0,700627 T^3$$

$$\forall T \in [3; 5], R(0, T) = 1,745110 + 0,276844 T + 0,019789 T^2 - 0,278025 T^3$$

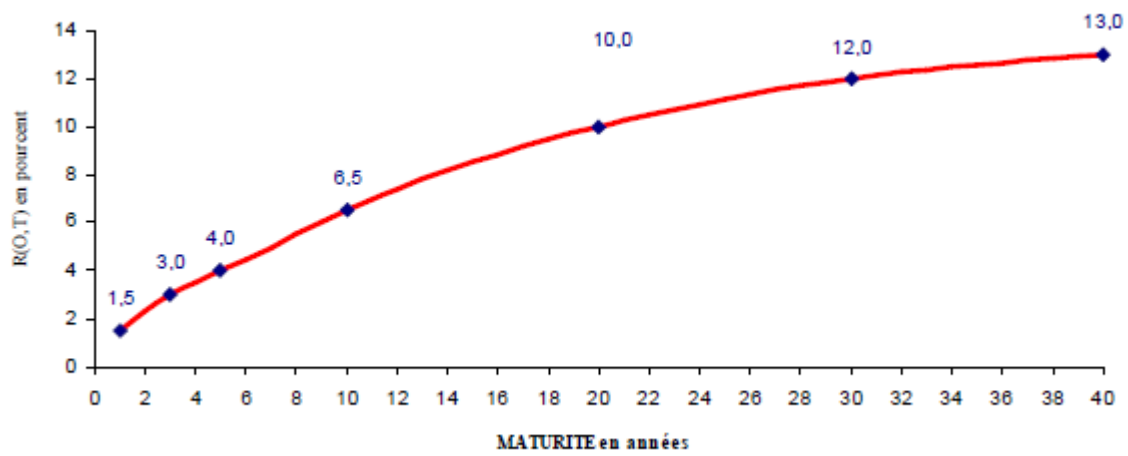
$$\forall T \in [5; 10], R(0, T) = 0,078731 + 0,056432 T - 0,002430 T^2 + 2,499273 T^3$$

$$\forall T \in [10; 20], R(0, T) = 0,916158 - 0,027311 T + 0,000362 T^2 - 0,292151 T^3$$

$$\forall T \in [20; 30], R(0, T) = 0,462670 - 0,004637 T - 0,000016 T^2 + 2,731105 T^3$$

$$\forall T \in [30; 40], R(0, T) = 1,055257 - 0,024390 T + 0,000203 T^2 - 3,194767 T^3$$

Graphiquement, cela donne :



Par la méthode de NSS, nous obtenons :

$$R(0, T) = 0,18 - 0,020 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{3,9}\right)}{\frac{T}{3,9}} \right] + 0,97 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{3,9}\right)}{\frac{T}{3,9}} - \exp\left(-\frac{T}{3,9}\right) \right] - 1,04 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{3,65}\right)}{\frac{T}{4,65}} - \exp\left(-\frac{T}{4,65}\right) \right]$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 8. Les produits de taux - Corrigés des exercices

1. Réponse :

a. Le prix des obligations zéro coupon revient à actualiser 100 au taux comptant et pour la durée de l'obligation.

1	$R(0, 1)$	0,025	$P(0, 1)$	0,976
2	$R(0, 2)$	0,029	$P(0, 2)$	0,944
3	$R(0, 3)$	0,031	$P(0, 3)$	0,912
4	$R(0, 4)$	0,033	$P(0, 4)$	0,878
5	$R(0, 5)$	0,034	$P(0, 5)$	0,846

b. Le calcul du taux à terme un an dans un an s'obtient à l'aide du taux spot 1 an et 2 ans :

$$f(0, 1, 2) = \left(\frac{(1 + R(0, 2))^2}{(1 + R(0, 1))} \right) - 1 = 0,033$$

2. Réponse :

Le prix des obligations zéro coupon revient à actualiser 100 au taux comptant et pour la durée de l'obligation. Dans cet exercice, il faut préalablement calculer les taux spot en appliquant la fonction linéaire de l'énoncé.

1	$R(0, 1)$	0,031	$P(0, 1)$	0,970
2	$R(0, 2)$	0,037	$P(0, 2)$	0,930
3	$R(0, 3)$	0,043	$P(0, 3)$	0,881
4	$R(0, 4)$	0,049	$P(0, 4)$	0,826
5	$R(0, 5)$	0,055	$P(0, 5)$	0,765

3. Réponse :

Le calcul du taux à terme deux ans dans un an s'obtient à l'aide du taux spot 1 an et 3 ans :

$$f(0, 1, 3) = \left(\frac{(1 + R(0, 3))^3}{(1 + R(0, 1))} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,049$$

4. Réponse :

Le taux d'intérêt à trois mois se calcule comme ceci :

$$F(0; 0; 0, 25) = \frac{1}{0, 25} \left((1 + 0, 025 + 0, 006 \times 0, 25)^{0, 25} - 1 \right) = 0, 02624$$

Le taux d'intérêt à terme à trois mois se calcule comme ceci :

$$F(0; 1, 5; 1, 75) = \frac{1}{0, 25} \left(\frac{(1 + 0, 025 + 0, 006 \times 1, 75)^{1, 75}}{(1 + 0, 025 + 0, 006 \times 1, 5)^{1, 5}} - 1 \right) = 0, 04382$$

5. Réponse :

La transformation s'opère à l'aide de l'équation suivante :

$$\bar{R}(0, t) = \ln(1 + R(0, t))$$

$\bar{R}(0, 1)$	0,0305
$\bar{R}(0, 2)$	0,0363
$\bar{R}(0, 3)$	0,0421
$\bar{R}(0, 4)$	0,0478
$\bar{R}(0, 5)$	0,0535

6. Réponse :

a. Il s'agit de calculer le taux à terme 3 mois dans 6 mois :

$$F(0; 0, 5; 0, 75) = \frac{1}{0, 25} \left(\frac{\frac{1}{1 + 0, 05 \times 0, 032}}{\frac{1}{1 + 0, 75 \times 0, 0355}} - 1 \right) = 0, 0418$$

b. Le payoff de FRA dépendra de la position prise et du taux en vigueur à l'échéance, soit dans notre cas :

$$\text{FRA}(0, 75) = 100\ 000 (0, 0418 - F(0; 0, 5; 0, 75))$$

$$\text{FRA}(0, 75) = 100\ 000 (0, 0418 - 0, 05) = -816, 93$$

$$\text{FRA}(0, 75) = 100\ 000 (0, 0418 - 0, 03) = 1\ 183, 07$$

7. Réponse :

a. Il s'agit de calculer le taux au comptant à 3 et 9 mois :

$$F(0; 0; 0, 25) = 0, 028 + 0, 005 \times 0, 25 = 0, 02925$$

$$F(0; 0; 0, 75) = 0, 028 + 0, 005 \times 0, 75 = 0, 03175$$

et ensuite le taux à terme 6 mois dans trois mois :

$$F(0; 0, 25; 0, 75) = \frac{1}{0, 5} \left(\frac{\frac{1}{1 + 0, 025 \times 0, 02925}}{\frac{1}{1 + 0, 75 \times 0, 03175}} - 1 \right) = 0, 0327$$

b. Le payoff de FRA dépend de la position prise et du taux en vigueur à l'échéance, soit dans notre cas :

$$\text{FRA}(0,5) = 50\,000(0,0327 - F(0; 0,25; 0,75))$$

$$\text{FRA}(0,5) = 100\,000(0,0327 - 0,03) = 138,022$$

8. Réponse :

La valeur d'un swap est la différence entre deux obligations. Dans ce cas, l'une est à taux fixe et l'autre à taux variable. Il faut donc premièrement calculer leur prix et ensuite faire la différence en fonction de la position prise. Si on reçoit le fixe et qu'on paie le variable, on soustraira l'obligation à taux variable de l'obligation à taux fixe.

$$P^f(t) = \frac{20\,000}{1 + 0,04 \times 0,25} + \frac{20\,000}{1 + 0,06 \times 0,75} = 38\,940,74$$

$$P^v(t) = \frac{12\,500}{1 + 0,04 \times 0,25} + \frac{17\,326,73}{1 + 0,06 \times 0,75} = 28\,956,84$$

$$\text{IRS} = 9\,983,9$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 9. Duration et immunisation - Corrigés des exercices

1. Réponse :

- a. La duration se calcule en appliquant la formule en utilisant les paramètres de l'obligation, $R = V = E = 1\ 000\ €$, $N = 5$ ans et $C = 80\ €$.

$$D = \frac{\sum_{t=1}^5 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{F_t}{(1,08)^t}}$$

$$= \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,08)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,08)^4} + 5 \times \frac{1080}{(1,08)^5}}{1\ 000} = 4,3121$$

- b. La duration se calcule en appliquant la formule en utilisant les paramètres de l'obligation, $R = V = E = 1\ 000\ €$, $N = 5$ ans et $C = 80\ €$, et en faisant varier le taux.

$$D(4\%) = \frac{1 \times \frac{80}{(1,04)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,04)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,04)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,04)^4} + 5 \times \frac{1\ 080}{(1,04)^5}}{\frac{80}{(1,04)^1} + \frac{80}{(1,04)^2} + \frac{80}{(1,04)^3} + \frac{80}{(1,04)^4} + \frac{1\ 080}{(1,04)^5}} = 4,3717$$

$$D(6\%) = \frac{1 \times \frac{80}{(1,06)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,06)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,06)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,06)^4} + 5 \times \frac{1\ 080}{(1,06)^5}}{\frac{80}{(1,06)^1} + \frac{80}{(1,06)^2} + \frac{80}{(1,06)^3} + \frac{80}{(1,06)^4} + \frac{1\ 080}{(1,06)^5}} = 4,3422$$

$$D(8\%) = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,08)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,08)^4} + 5 \times \frac{1\ 080}{(1,08)^5}}{\frac{80}{(1,08)^1} + \frac{80}{(1,08)^2} + \frac{80}{(1,08)^3} + \frac{80}{(1,08)^4} + \frac{1\ 080}{(1,08)^5}} = 4,3121$$

$$D(10\%) = \frac{1 \times \frac{80}{(1,1)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,1)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,1)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,1)^4} + 5 \times \frac{1\ 080}{(1,1)^5}}{\frac{80}{(1,1)^1} + \frac{80}{(1,1)^2} + \frac{80}{(1,1)^3} + \frac{80}{(1,1)^4} + \frac{1\ 080}{(1,1)^5}} = 4,2814$$

$$D(12\%) = \frac{1 \times \frac{80}{(1,12)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,12)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,12)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,12)^4} + 5 \times \frac{1\ 080}{(1,12)^5}}{\frac{80}{(1,12)^1} + \frac{80}{(1,12)^2} + \frac{80}{(1,12)^3} + \frac{80}{(1,12)^4} + \frac{1\ 080}{(1,12)^5}} = 4,2501$$

c. La sensibilité de l'obligation est la variation relative de sa valeur suite à une variation absolue des taux de -1% (8% à 7%). À l'aide de la duration, elle se calcule comme ceci :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^5 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = 4,3121$$

$$S = -\frac{D}{(1+r)} \times \Delta_r = -\frac{4,3121}{(1,08)} \times (-0,01) = 0,0399$$

Le prix de l'obligation augmentera approximativement de 4% consécutivement à la baisse des taux.

2. Réponse :

La duration se calcule en appliquant la formule en utilisant les paramètres de l'obligation, $R = V = E = 1\,000\text{ €}$, $N = 5$ ans et $C = 80\text{ €}$. Ensuite, il faut faire varier N qui diminue d'année en année.

En $t = 0$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^5 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,08)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,08)^4} + 5 \times \frac{1\,080}{(1,08)^5}}{1\,000} = 4,3121$$

En $t = 1$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^4 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,08)^3} + 4 \times \frac{80}{(1,08)^4}}{\frac{80}{(1,08)^1} + \frac{80}{(1,08)^2} + \frac{80}{(1,08)^3} + \frac{1\,080}{(1,08)^4}} = 3,5571$$

En $t = 2$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^3 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2} + 3 \times \frac{80}{(1,08)^3}}{\frac{80}{(1,08)^1} + \frac{80}{(1,08)^2} + \frac{1\,080}{(1,08)^3}} = 2,7833$$

En $t = 3$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^2 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^2 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1} + 2 \times \frac{80}{(1,08)^2}}{\frac{80}{(1,08)^1} + \frac{1\,080}{(1,08)^2}} = 1,9259$$

En $t = 4$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^1 t \times \frac{F_t}{(1,08)^t}}{\sum_{t=1}^1 \frac{F_t}{(1,08)^t}} = \frac{1 \times \frac{80}{(1,08)^1}}{\frac{80}{(1,08)^1}} = 1$$

3. Réponse :

La duration se calcule en appliquant la formule en utilisant les paramètres de l'obligation, $R = V = E = 1\ 000\ €$, $N = 10$ ans et $C = 50\ €$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{10} t \times \frac{F_t}{(1,05)^t}}{\sum_{t=1}^{10} \frac{F_t}{(1,05)^t}} = \frac{1 \times \frac{50}{(1,05)^1} + 2 \times \frac{50}{(1,05)^2} + 3 \times \frac{50}{(1,05)^3} + 4 \times \frac{50}{(1,05)^4} + \dots + 10 \times \frac{1\ 050}{(1,05)^{10}}}{1\ 000} = 8,1078$$

4. Réponse :

a. La duration se calcule en appliquant la formule en utilisant les paramètres de l'obligation, $R = V = E = 1\ 000\ €$, $N = 4$ ans et $C = 50\ €$:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^4 t \times \frac{F_t}{(1,05)^t}}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1,05)^t}} = \frac{1 \times \frac{50}{(1,05)^1} + 2 \times \frac{50}{(1,05)^2} + 3 \times \frac{50}{(1,05)^3} + 4 \times \frac{1\ 050}{(1,05)^4}}{1\ 000} = 3,7232$$

b. La valeur capitalisée des coupons est ensuite calculée pour les différents scénarios de taux :

En $t = 0$, aucun coupon n'est payé.

En $t = 1$, le coupon est de $50\ €$.

En $t = 2$, les coupons acquis sont de :

$$\begin{aligned} & 50(1+r) + 50 \\ r = 3\ \% & \quad 101,5 \\ r = 4\ \% & \quad 102 \\ r = 5\ \% & \quad 102,5 \\ r = 6\ \% & \quad 103 \\ r = 7\ \% & \quad 103,5 \end{aligned}$$

En $t = 3$, les coupons acquis sont de :

$$\begin{aligned} & 50(1+r)^2 + 50(1+r) + 50 \\ r = 3\ \% & \quad 154,55 \\ r = 4\ \% & \quad 156,08 \\ r = 5\ \% & \quad 157,63 \\ r = 6\ \% & \quad 159,19 \\ r = 7\ \% & \quad 160,75 \end{aligned}$$

En $t = 4$, les coupons acquis sont de :

$$\begin{aligned} & 50(1+r)^3 + 50(1+r)^2 + 50(1+r) + 50 \\ r = 3\ \% & \quad 209,18 \\ r = 4\ \% & \quad 212,32 \\ r = 5\ \% & \quad 215,51 \\ r = 6\ \% & \quad 218,73 \\ r = 7\ \% & \quad 222 \end{aligned}$$

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
0,03	0	50	101,5	154,55	209,18
0,04	0	50	102	156,08	212,32
0,05	0	50	102,5	157,63	215,51
0,06	0	50	103	159,18	218,73
0,07	0	50	103,5	160,75	222,00

La valeur actualisée de l'obligation est alors:

$$t = 0 \quad \sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+r)^t} = \frac{50}{(1+r)^1} + \frac{50}{(1+r)^2} + \frac{50}{(1+r)^3} + \frac{1050}{(1+r)^4}$$

$$t = 1 \quad \sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{(1+r)^t} = \frac{50}{(1+r)^1} + \frac{50}{(1+r)^2} + \frac{1050}{(1+r)^3}$$

$$t = 2 \quad \sum_{t=1}^2 \frac{F_t}{(1+r)^t} = \frac{50}{(1+r)^1} + \frac{1050}{(1+r)^2}$$

$$t = 3 \quad \sum_{t=1}^1 \frac{F_t}{(1+r)^t} = \frac{1050}{(1+r)^1}$$

$$t = 4 \quad R_t = 1\ 000$$

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
0,03	1 074,34	1 056,57	1 038,27	1 019,42	1 000
0,04	1 036,30	1 027,75	1 018,86	1 009,62	1 000
0,05	1 000,00	1 000,00	1 000,00	1 000,00	1 000
0,06	965,35	973,27	981,67	990,57	1 000
0,07	932,26	947,51	963,84	981,31	1 000

La valeur de l'investissement est la somme des coupons acquis et du prix de l'obligation.

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
0,03	1 074,34	1 106,57	1 139,77	1 173,96	1 209,18
0,04	1 036,30	1 077,75	1 120,86	1 165,70	1 212,32
0,05	1 000,00	1 050,00	1 102,50	1 157,63	1 215,51
0,06	965,35	1 023,27	1 084,67	1 149,75	1 218,73
0,07	932,26	997,51	1 067,34	1 142,05	1 222,00

La rentabilité de l'investissement à différent moment t est alors donnée par :

$$t = 1 \quad 1\ 000 \times (1 + \text{rentabilité})^1 = \text{valeur de l'investissement en } t = 1$$

$$t = 2 \quad 1\ 000 \times (1 + \text{rentabilité})^2 = \text{valeur de l'investissement en } t = 2$$

$$t = 3 \quad 1\ 000 \times (1 + \text{rentabilité})^3 = \text{valeur de l'investissement en } t = 3$$

$$t = 4 \quad 1\ 000 \times (1 + \text{rentabilité})^4 = \text{valeur de l'investissement en } t = 4$$

	<i>t</i> = 1	<i>t</i> = 2	<i>t</i> = 3	<i>t</i> = 4
0,03	10,66 %	6,76 %	5,49 %	4,86 %
0,04	7,78 %	5,87 %	5,24 %	4,93 %
0,05	5,00 %	5,00 %	5,00 %	5,00 %
0,06	2,33 %	4,15 %	4,76 %	5,07 %
0,07	-0,25 %	3,31 %	4,53 %	5,14 %

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 10. Convexité et ALM - Corrigés des exercices

1. Réponse :

- a. La valeur exacte de l'obligation est donnée par la formule du prix en introduisant les paramètres, $R = V = E = 1\ 000$ €, $N = 8$ ans et $C = 100$ €.

$$V(10\%) = \sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+0,1)^t} = \frac{100}{(1+0,1)^1} + \frac{100}{(1+0,1)^2} + \frac{100}{(1+0,1)^3} + \frac{1100}{(1+0,1)^4} = 1\ 000 \text{ €}$$

- b. La duration et la duration modifiée de l'obligation à cet instant, considéré comme l'instant présent $t = 0$, est calculée avec la formule :

$$D(10\%) = \frac{\sum_{t=1}^4 t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+r)^t}} = 3,4869 \text{ années}$$

$$D_M(10\%) = \frac{D(10\%)}{(1+0,1)} = \frac{3,4869}{1,1} = 3,1699 \text{ années}$$

- c. La convexité et la convexité modifiée de l'obligation à cet instant est calculée avec la formule :

$$Q(10\%) = \frac{\left[\sum_{t=1}^4 t(t+1) \frac{F_t}{(1+0,1)^t} \right]}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+0,1)^t}} = 16,6056 \text{ années}$$

$$Q_M(10\%) = \frac{D(10\%)}{(1+0,1)^2} = \frac{16,6056}{1,1^2} = 13,7236 \text{ années}$$

2. Réponse :

- a. La valeur exacte de l'obligation est donnée par la formule du prix en introduisant les paramètres, $R = V = E = 1\ 000$ €, $N = 8$ ans et $C = 100$ € avec un taux de 12 % :

$$V(12\%) = \sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+0,12)^t} = \frac{100}{(1+0,12)^1} + \frac{100}{(1+0,12)^2} + \frac{100}{(1+0,12)^3} + \frac{1100}{(1+0,12)^4} = 939,25 \text{ €}$$

- b. La valeur approchée de l'obligation si le taux passe à 12 % est estimée à l'aide de la duration modifiée calculée précédemment :

$$\hat{V}(12\%) = 1\ 000 - 3,1699 \times 1\ 000 \times 0,02 = 936,60 \text{ €}$$

- c. La valeur approchée de l'obligation si le taux passe à 12 % est estimée à l'aide de la duration modifiée et de la convexité modifiée :

$$\hat{V}(12\%) = 1\,000 - 3,1699 \times 1\,000 \times 0,02 + \frac{13,7236}{2} \times 1\,000 \times 0,02^2 = 939,35 \text{ €}$$

3. Réponse :

- a. La duration et la duration modifiée de l'obligation à cet instant, considéré comme l'instant présent $t = 0$, est calculée avec la formule :

$$D(12\%) = \frac{\sum_{t=1}^4 t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+r)^t}} = 3,4693 \text{ années}$$

$$D_M(12\%) = \frac{D(12\%)}{(1+0,12)} = \frac{3,4693}{1,12} = 3,0976 \text{ années}$$

- b. La convexité et la convexité modifiée de l'obligation à cet instant est calculée avec la formule :

$$Q(12\%) = \frac{\left[\sum_{t=1}^4 t(t+1) \frac{F_t}{(1+0,12)^t} \right]}{\sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1+0,12)^t}} = 16,4944 \text{ années}$$

$$Q_M(12\%) = \frac{D(12\%)}{(1+0,12)^2} = \frac{16,4944}{1,12^2} = 13,1492 \text{ années}$$

4. Réponse :

- a. La duration et la convexité modifiées de cette obligation au point $r_0 = 10\%$ sont de :

$$D = T = 5 \text{ ans}$$

$$D_M = \frac{D}{(1+r)} = \frac{5}{1,1} = 4,55 \text{ ans}$$

$$Q = T(T+1) = 5 \times 6 = 30 \text{ ans}$$

$$Q_M = \frac{T(T+1)}{(1+r)^2} = \frac{30}{1,1^2} = 24,79 \text{ ans}$$

- b. La valeur exacte de cette obligation après la modification du taux est de:

$$V(8\%) = \frac{1\,000}{1,08^5} = 680,58 \text{ €}$$

- c. La valeur approchée de cette obligation après la modification du taux est de :

$$\hat{V}(r_0 + \Delta r) = V(r_0) - D_M(r_0) \cdot V(r_0) \cdot \Delta r + \frac{Q_M(r_0)}{2} \cdot V(r_0) \cdot (\Delta r)^2$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(8\%) &= 620,92 - 4,55 \times 620,92 \times (-0,02) + \frac{24,79}{2} \times 620,92 \times (-0,02)^2 \\ &= 620,92 + 56,50 + 3,07 = 680,49 \text{ €} \end{aligned}$$

5. Réponse :

a. La duration et la convexité modifiées de cette obligation au point $r_0 = 5 \%$ sont de :

$$D_M = \frac{1}{r} = 20 \text{ ans}$$

$$Q_M = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{0,05^2} = 800 \text{ ans}$$

b. La valeur exacte de cette obligation après la modification du taux est de :

$$V(4 \%) = \frac{50}{0,04} = 1\,250 \text{ €}$$

c. La valeur approchée de cette obligation après la modification du taux à l'aide de la duration et de la convexité modifiées est de :

$$\begin{aligned}\hat{V}(r_0 + \Delta r) &= V(r_0) - D_M(r_0) \cdot V(r_0) \cdot \Delta r + \frac{Q_M(r_0)}{2} \cdot V(r_0) \cdot (\Delta r)^2 \\ \hat{V}(4 \%) &= 1\,000 - 20 \times 1\,000 \times (-0,01) + \frac{800}{2} \times 1\,000 \times (-0,01)^2 \\ &= 1\,000 + 200 + 40 = 1\,240 \text{ €}\end{aligned}$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 11. Les actions - Corrigés des exercices

1. Réponse :

La valeur théorique est de 135 €, soit 3 fois le PER.

2. Réponse :

La valeur théorique de l'entreprise (EV) est de 120 millions d'euros, soit deux fois le ratio.

3. Réponse :

La valeur théorique de l'action est de 120 €, soit l'actualisation d'une perpétuité constante :

$$P_0 = \frac{6}{0,05} = 120$$

4. Réponse :

Le taux de rentabilité exigé des actionnaires, r (issu de la formule de la perpétuité), est de 4,5454 %.

$$P_0 = \frac{5}{r} = 110 \Rightarrow r = 0,045454$$

5. Réponse :

La valeur théorique de l'action est de 160 €, soit l'actualisation d'une perpétuité croissante :

$$P_0 = \frac{8}{0,08 - 0,03} = 160$$

6. Réponse :

Le taux de croissance des dividendes, g (issu de la formule de la perpétuité croissante), est de 5 %.

$$P_0 = \frac{8}{0,10 - g} = 160 \Rightarrow g = 5 \%$$

7. Réponse :

a. Le taux de rentabilité est de 7,5 %.

$$R_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} = \frac{43 - 40}{40} = 0,075$$

b. Le taux de rentabilité est de 15 %.

$$R_t = \frac{C_t - C_{t-1} + D_t}{C_{t-1}} = \frac{43 - 40 + 3}{40} = 0,15$$

c. Non, le taux de rentabilité dépendra du cours au moment du dividende, C_d :

$$R_t = \left(\frac{C_d + D_t}{C_{t-1}} \times \frac{C_t}{C_d} \right) - 1$$

8. Réponse :

a. Le taux de rentabilité est de 4,65 %.

$$R_t = \left[\frac{Y C_t}{X C_{t-1}} \right] - 1 = \left[\frac{9 \times 5}{43} \right] - 1 = 0,0465$$

b. Le taux de rentabilité est de 16,82 %.

$$R_t = \left(\frac{C_d + D_t}{C_{t-1}} \times \frac{Y C_t}{X C_d} \right) - 1 = 16,82 \%$$

c. Le taux de rentabilité est de 14,06 %.

$$R_t = \left(\frac{Y(C_d + D_t)}{X C_{t-1}} \times \frac{C_t}{C_d} \right) - 1 = 14,06 \%$$

9. Réponse :

Le rendement espéré de ce portefeuille est donné par la formule :

$$R_{pf} = \sum_{i=1}^N X_i R_i$$

Action i	X_i	R_i	$X_i R_i$
1	0,45	0,10	0,045
2	0,10	0,14	0,014
3	0,15	0,12	0,018
4	0,25	0,11	0,0275
5	0,05	0,10	0,005
Total	1,00		0,1095

10. Réponse :

Il faut calculer la moyenne, la variance, l'écart-type des deux titres, puis la covariance et la corrélation (voir formules dans le chapitre 11).

	Rendement moyen	Variance	Écart type
Action A	3,67 %	0,00039	0,00032
Action B	3,33 %	0,00032	0,01795
Covariance		-0,0003	
Corrélation		-0,8161	

11. Réponse :

Voir formules dans le chapitre 11.

	a	b	c
E(R_i)	0,0545	0,0455	0,0405
Var(R_i)	0,000415	0,000555	0,000825
Écart type (R_i)	0,020365	0,023553	0,028718

Covariances	a	b	c
a	0,00041	0,00047	0,00052
b	0,00047	0,00055	0,00064
c	0,00052	0,00064	0,00082

Corrélations	a	b	c
a	1,00	0,98	0,89
b	0,98	1,00	0,95
c	0,89	0,95	1,00

12. Réponse :

	a	b	c
E(R_i)	0,0269	0,033	0,035
Var(R_i)	0,001322	0,001601	0,001665
Écart type (R_i)	0,036366	0,040012	0,040804

Covariances	a	b	c
a	0,00132	0,00083	0,00064
b	0,00083	0,00160	0,00106
c	0,00064	0,00106	0,00167

Corrélations	a	b	c
a	1,00	0,57	0,43
b	0,57	1,00	0,65
c	0,43	0,65	1,00

13. Réponse :

Voir formules dans le chapitre 11.

Actions	X_i	$E(R_i)$	$Var(R_i)$	Écart type (R_i)
A	0,40	0,12	0,0036	0,06
B	0,35	0,20	0,0049	0,07
C	0,25	0,15	0,0081	0,09

Corrélations	A	B	C
A	1,0	0,8	0,5
B	0,8	1,0	0,6
C	0,5	0,6	1,0

$E(R_p)$	0,1555
----------------------------	--------

Covariances	A	B	C
A	0,0036	0,0034	0,0027
B	0,0034	0,0049	0,0038
C	0,0027	0,0038	0,0081

$Var(R_p)$	0,0038248
Écart type (R_p)	0,061845
Risque total A	0,003291
Risque total B	0,004004
Risque total C	0,004428

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 12. Introduction à la gestion de portefeuille - Corrigés des exercices

1. Réponse :

L'équation de l'hyperbole est donnée par :

$$G = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{(E_1 - E_2)^2} = \frac{(0,16 + 0,25 - 2 \times 0,04)}{(0,12 - 0,25)^2} = 19,53$$

$$H = 2 \times \frac{[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2)]}{(E_1 - E_2)^2} = 2 \times \frac{[0,12 \times (0,04 - 0,25) + 0,25 \times (0,04 - 0,16)]}{(0,12 - 0,25)^2} = -6,53$$

$$I = \frac{E_2^2 \sigma_1^2 - 2E_2 E_1 \sigma_{12} + E_1^2 \sigma_2^2}{(E_1 - E_2)^2} = \frac{0,25^2 \times 0,16 - 2 \times 0,25 \times 0,12 \times 0,04 + 0,12^2 \times 0,25}{(0,12 - 0,25)^2} = 0,66$$

et donc : $\sigma_p^2 = 19,53 \cdot E_p^2 - 6,53 \cdot E_p + 0,66$.

La rentabilité espérée du portefeuille si $\sigma = 0,4$ est alors :

$$\begin{aligned} E_k^{\max} &= \text{Max} \left[\frac{-H \pm \sqrt{H^2 - 4G(I - \sigma_k^2)}}{2G} \right] = \\ &= \text{Max} \left[\frac{6,53 \pm \sqrt{(-6,53)^2 - 4 \times 19,53 \times (0,66 - 0,16)}}{2 \times 19,53} \right] = 0,2145 \end{aligned}$$

La composition du portefeuille est de :

$$a = \frac{E_k - E_2}{E_1 - E_2} = \frac{0,2145 - 0,25}{0,12 - 0,25} = 27,27 \% \quad \text{et} \quad (1 - a) = 72,73 \%$$

Le niveau d'espérance d'utilité atteint :

$$E(U(R))_{\text{point K}} \cong E_k - \frac{1}{2} [\sigma_k^2 + E_k^2] \cong 0,2145 - \frac{1}{2} [0,4^2 + 0,2143^2] = 0,1115$$

2. Réponse :

a. Le rendement espéré et l'écart-type du portefeuille au point d'équilibre R de l'investisseur, étant donné son attitude envers le risque se calcule par application des équations :

$$E_R = \frac{2 - H}{2 \cdot G + 2} = \frac{2 + 6,53}{(2 \times 19,53) + 2} = 0,2078 = 20,78 \%$$

$$\sigma_R = (G \cdot E_R^2 + H \cdot E_R + I)^{\frac{1}{2}} = (19,53 \times (0,2078)^2 - 6,53 \times 0,2078 + 0,66)^{\frac{1}{2}} = 0,3854 = 38,57 \%$$

b. La composition du portefeuille au point R est de :

$$a = \frac{E_R - E_2}{E_1 - E_2} = \frac{0,2078 - 0,25}{0,12 - 0,25} = 32,43 \% \quad \text{et} \quad (1 - a) = 67,57 \%$$

c. Le niveau d'utilité atteint au point R est de :

$$\begin{aligned} E(U(R))\Big|_{\text{point } R} &\cong E_R - \frac{1}{2}[\sigma_R^2 + E_R^2] \cong 0,2078 - \frac{1}{2}[0,3854^2 + 0,2078^2] \\ &= 0,1120 > 0,1115 \cong E(U(R))\Big|_{\text{point } K} \end{aligned}$$

d. Comparaison des niveaux d'utilité au point K et au point R :

$$\begin{aligned} E(U(R))\Big|_{\text{point } K} &\cong E_K - \frac{1}{2}[\sigma_K^2 + E_K^2] \cong 0,2145 - \frac{1}{2}[0,4^2 + 0,2143^2] = 0,1115 \\ &\cong E_R - \frac{1}{2}[\sigma_R^2 + E_R^2] \cong 0,2078 - \frac{1}{2}[0,3854^2 + 0,2078^2] \\ &= 0,1120 > 0,1115 \cong E(U(R))\Big|_{\text{point } K} \end{aligned}$$

3. Réponse :

a. Le rendement espéré et le risque du portefeuille de marché (point M), étant donné la rentabilité de l'actif sans risque, sont :

$$E_M = -\frac{R_f H + 2 I}{(2 G R_f + H)} = -\frac{0,09 \times (-6,53) + 2 \times 0,66}{(2 \times 19,53 \times 0,09 - 6,53)} = 0,2444 = 24,44 \%$$

$$\sigma_M = (G \cdot E_M^2 + H \cdot E_M + I)^{\frac{1}{2}} = (19,53 \times (0,2444)^2 - 6,53 \times 0,2444 + 0,66)^{\frac{1}{2}} = 0,4822 = 48,22 \%$$

b. La nouvelle composition du portefeuille (point M) comprenant uniquement ces deux actifs risqués est :

$$\begin{aligned} a &= \frac{E_M - E_2}{E_1 - E_2} = \frac{0,2444 - 0,25}{0,12 - 0,25} = 0,0431 = 4,31 \% \text{ d'actif } A_1 \\ (1 - a) &= 95,69 \% \text{ d'actif } A_2 \end{aligned}$$

c. Le rendement espéré et le risque pour la nouvelle composition du portefeuille (point E) intégrant cette fois l'actif sans risque sont de :

$$\begin{aligned} E_E &= \frac{(b^2 + R_f)}{(1 + b^2)} = \frac{(0,3202^2 + 0,09)}{(1 + 0,3202^2)} = 0,1746 = 17,46 \% \\ \sigma_E &= \frac{b(1 - R_f)}{(1 + b^2)} = \frac{0,3202 \times (1 - 0,09)}{(1 + 0,3202^2)} = 0,2643 = 26,43 \% \end{aligned}$$

d. Les proportions de l'actif A_1 , A_2 et de l'actif sans risque au point E sont :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sigma_E}{\sigma_M} = \frac{0,2643}{0,4822} = 0,5481 = 54,81 \% \text{ de portefeuille risqué} \\ (1 - x) &= 45,19 \% \text{ d'actif sans risque} \end{aligned}$$

et sur ces 54,81 % de portefeuille risqué, il y a :

- 4,31 % composés de l'actif A_1 , soit 4,31 % de 54,81 = 2,36 %
- 95,69 % composés de l'actif A_2 , soit 95,69 % de 54,81 = 52,45 %

e. Le niveau d'utilité que vous conférerait le portefeuille de marché (M) est de :

$$E(U(R))\Big|_{\text{point } M} \cong E_M - \frac{1}{2}[\sigma_M^2 + E_M^2] \cong 0,2444 - \frac{1}{2}[0,4822^2 + 0,2444^2] = 0,0982$$

f. Le niveau d'utilité que vous conférerait ce nouveau portefeuille (E) est lui de :

$$E(U(R))\Big|_{\text{point } E} \cong E_E - \frac{1}{2}[\sigma_E^2 + E_E^2] \cong 0,1746 - \frac{1}{2}[0,2643^2 + 0,1746^2] = 0,1244$$

Le tableau ci-dessous synthétise les positions et résultats espérés en R , M et E .

Espérance, risque et composition des portefeuilles aux points R, M et E			
	Types de portefeuilles		
	Point R	Point M	Point E
Espérance du rendement du portefeuille (E)	20,78%	24,44%	17,46%
Risque du rendement du portefeuille (σ)	38,54%	48,22%	26,43%
Proportion A_1 risqué ($E = 0,12$, $\sigma = 0,4$)	32,43%	4,31%	54,81%
Proportion A_2 risqué ($E = 0,25$, $\sigma = 0,5$)	67,57%	95,69%	54,81%
Proportion actif non risqué ($R_f = 0,09$)	–	–	45,19%
Ratio de Sharpe	30,58%	32,02%	32,02%
$E(U(R))$	0,1120	0,0983	0,1245

En synthèse :

- Point R , résultat de la maximisation de $E(U(R))$ sous la contrainte de l'hyperbole :

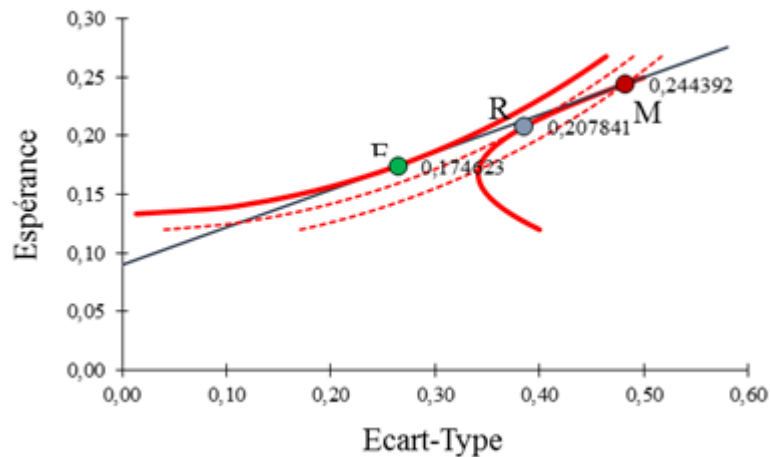
$$E(U(R)) \text{ point } R = 0,1120$$

- Point M , résultat de la maximisation du ratio de Sharpe sous la contrainte du taux de rentabilité de l'actif sans risque :

$$E(U(R)) \text{ point } M = 0,0983$$

- Point E , résultat de la maximisation de $E(U(R))$ sous la contrainte de la droite de marché des capitaux :

$$E(U(R)) \text{ point } E = 0,1245$$



4. Réponse :

a. Si l'employeur exige un rendement de 0,30 et qu'il vous permet d'emprunter, alors le risque couru σ est calculé à l'aide de la droite de marché :

$$E = \left(\frac{E_M - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma + R_f \rightarrow \sigma^* = \frac{E^* - R_f}{E_M - R_f} \cdot \sigma_M = \frac{0,3 - 0,09}{0,2444 - 0,09} \times 0,4822 = 0,6558$$

b. Calcul de la composition du portefeuille

$$x = \frac{\sigma^*}{\sigma_M} = \frac{0,6558}{0,4822} = 1,3602$$

soit 136,02 % de portefeuille risqué (portefeuille de marché).

c. L'investisseur devra donc emprunter 360,02 € pour acheter au taux sans risque (0,09) un complément de portefeuille risqué.

d. Le niveau d'utilité que confère ce portefeuille à l'investisseur est :

$$E(U(R)) \Big|_{\text{point } E} \cong E^* - \frac{1}{2} [\sigma^{*2} + E^{*2}] \cong 0,30 - \frac{1}{2} [0,6558^2 + 0,30^2] = 0,0399$$

e. Le rendement espéré de ce portefeuille est alors :

Gain espéré sur le portefeuille investi :

$$0,2444 \times 1360,02 \text{ €} = 332,42 \text{ €}$$

Intérêts dus sur l'emprunt de 360,02 € :

$$0,09 \times 360,02 \text{ €} = 32,42 \text{ €}$$

Résultat net sur actions et en remboursant le prêt :

$$332,42 \text{ €} - 32,42 \text{ €} = 300,00 \text{ €}$$

Rendement espéré :

$$\frac{300,00 \text{ €}}{1000 \text{ €}} = 0,30$$

Effet de levier espéré :

$$\frac{0,30}{0,2444} = 1,2275$$

5. Réponse :

a. Cas du rendement constaté du portefeuille de 0,05.

Gain sur le portefeuille investi :

$$0,05 \times 1360,02 \text{ €} = 68,01 \text{ €}$$

Intérêts dus sur l'emprunt de 360,02 € :

$$0,09 \times 360,02 \text{ €} = 32,42 \text{ €}$$

Résultat net en revendant les actions et en remboursant le prêt :

$$68,01 \text{ €} - 32,42 \text{ €} = 35,59 \text{ €}$$

Rendement réel :

$$\frac{35,59 \text{ €}}{1000 \text{ €}} = 0,0356$$

Effet de levier réel :

$$\frac{0,0356}{0,05} = 0,7120$$

b. Cas du rendement constaté du portefeuille de 0,2344.

Gain sur le portefeuille investi :

$$0,2344 \times 1360,02 \text{ €} = 318,79 \text{ €}$$

Intérêts dus sur l'emprunt de 360,02 € :

$$0,09 \times 360,02 \text{ €} = 32,42 \text{ €}$$

Résultat net en revendant les actions et en remboursant le prêt :

$$318,79 \text{ €} - 32,42 \text{ €} = 286,36 \text{ €}$$

Rendement réel :

$$\frac{286,36 \text{ €}}{1000 \text{ €}} = 0,2864$$

Effet de levier réel :

$$\frac{0,2864}{0,2344} = 1,2217$$

6. Réponse :

a. L'espérance de rentabilité de la composante risquée de son portefeuille, notés E_S , est :

$$a = \frac{E_S - E_2}{E_1 - E_2} = 0,50 \rightarrow E_S = a \cdot (E_1 - E_2) + E_2 = 0,5 \times (0,12 - 0,25) + 0,25 = 0,185$$

b. L'écart-type de la composante risquée de son portefeuille, notés σ_S :

$$\sigma_S = \left(G \cdot E_S^2 + H \cdot E_S + I \right)^{\frac{1}{2}} = \left(19,53 \times 0,185^2 - 6,53 \times 0,185 + 0,66 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,3500$$

c. Le ratio de Sharpe est égal à :

$$b = \left(\frac{E_S - R_f}{\sigma_S} \right) = \left(\frac{0,185 - 0,09}{0,3500} \right) = 0,2714$$

d. L'espérance de rentabilité du portefeuille total, noté E_{S_E} , est :

$$E_{S_E} = \frac{(b^2 + R_f)}{(1 + b^2)} = \frac{(0,2714^2 + 0,09)}{(1 + 0,2714^2)} = \frac{0,0737 + 0,09}{1 + 0,0737} = 0,1524$$

e. L'écart-type de la rentabilité du portefeuille total, noté σ_{S_E} , est :

$$\sigma_{S_E} = \frac{b(1 - R_f)}{(1 + b^2)} = \frac{0,2714(1 - 0,09)}{(1 + 0,0737)} = 0,2301$$

f. La proportion du portefeuille composé des actifs risqués et de l'actif sans risque qui maximise l'utilité de l'investisseur est :

$$x = \frac{\sigma_{S_E}}{\sigma_S} = \frac{0,2301}{0,350} = 0,6573 \text{ (pourcentage de portefeuille SE composé des deux actifs risqués)}$$

$$(1 - x) = 0,3427$$

g. Le niveau d'utilité du portefeuille S_E est :

$$E(U(R))\Big|_{\text{point } S_E} \cong E_{S_E} - \frac{1}{2}[\sigma_{S_E}^2 + E_{S_E}^2] \cong 0,1524 - \frac{1}{2}[0,2301^2 + 0,1524^2] = 0,1144$$

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 13. Mesures de risque - Corrigés des exercices

1. Réponse :

La VaR(95 %) est de 50.

La VaR(99 %) est de 500.

2. Réponse :

Les deux VaR(90 %) sont de 30, mais la CTE de X vaut 80, alors que celle de Y vaut 150.

Y peut donc être considéré comme un risque plus dangereux que X .

3. Réponse :

La VaR est de 100, la CTE de 175 et la TVaR de 150.

4. Réponse :

Les VaR relative et absolue sont de :

$$\text{VaR}_{\text{relative}} = 2,58 \times 5 = 12,9$$

$$\text{VaR}_{\text{absolue}} = 10 + 2,58 \times 5 = 22,9$$

5. Réponse :

Les VaR relative et absolue sont de :

$$\text{VaR}_{\alpha}^R(W)_{\text{relative}} = 1,64 \times 0,05 \times 20\,000 = 1\,640$$

$$\text{VaR}_{\alpha}^R(W)_{\text{absolue}} = -0,02 \times 20\,000 + 1,64 \times 0,05 \times 20\,000 = 1\,240$$

6. Réponse :

Les VaR valent :

$$\text{VaR}(X) = \text{VaR}(Y) = 0$$

$$\text{VaR}(X+Y) = 1\,000$$

et les TVaR :

$$\text{TVaR}(X) = \text{TVaR}(Y) = 800$$

$$\text{TVaR}(X+Y) = 1\,000$$

La VaR n'est pas sous-additive ; la TVaR est sous-additive.

Mathématiques financières

3^e édition

Pierre Devolder, Mathilde Fox, Francis Vaguener

Chapitre 14. Introduction à la finance stochastique - Corrigés des exercices

1. Réponse :

La probabilité risque neutre est alors :

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0,12 \times 0,25} - 0,90}{1,10 - 0,90} = 0,6523$$

et le call est la valeur actuelle du payoff moyen actualisé :

$$\begin{aligned} C &= [p \cdot C_u + (1 - p) \cdot C_d] \cdot e^{-rt} \\ &= [0,6523 \cdot 1 + (1 - 0,6523) \cdot 0] \cdot e^{-0,12 \cdot 0,25} \\ &= 0,633 \end{aligned}$$

2. Réponse :

La valeur du put est donnée par l'actualisation du payoff moyen ; $u = 1,2$, $d = 0,8$ et $p = 0,6282$:

$$\begin{aligned} p_u &= e^{-1 \times 0,05 \times 1} (0,6282 \times 0 + 0,3718 \times 4) = 1,4147 \\ p_d &= e^{-1 \times 0,05 \times 1} (0,6282 \times 4 + 0,3718 \times 20) = 9,4636 \\ p &= e^{-1 \times 0,05 \times 1} (0,6282 \times 1,4147 + 0,3718 \times 9,4636) = 4,1923 \\ &= e^{-2 \times 0,05 \times 1} (0,6282^2 \times 0 + 2 \times 0,6282 \times 0,3718 \times 4 + 0,3718^2 \times 20) = 4,1923 \end{aligned}$$

3. Réponse :

La valeur du put est donnée par l'actualisation du payoff moyen sur trois périodes. Il faut avant tout calculer la taille d'une période et ensuite la probabilité risque neutre sur cette période (donc les paramètres u et d sur cette période).

$$\begin{aligned} t &= \frac{20}{365} = 0,0548 \\ u &= \exp\{\sigma\sqrt{t}\} = \exp\{0,3\sqrt{0,0548}\} = 1,0727 \\ d &= \exp\{-\sigma\sqrt{t}\} = \exp\{-0,3\sqrt{0,0548}\} = 0,9322 \\ p &= \frac{e^{0,0255 \times 0,0548} - 0,9322}{1,0727 - 0,9322} = 0,4925 \\ \text{put} &= \frac{p^3 0 + 3p^2(1-p) 0 + 3p(1-p)^2 2,8822 + (1-p)^3 8,0734}{e^{0,0255 \times 0,0548 \times 3}} = 3,0730 \end{aligned}$$

4. Réponse :

La valeur du call est donnée par la formule de Black & Scholes :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{45}{40} + 0,09 \times 0,5 + \frac{0,3^2 \times 0,5}{2}}{0,3 \times \sqrt{0,5}}$$
$$d_2 = 0,8734 - 0,3 \times \sqrt{0,5} = 0,6613$$
$$N(d_1) = 0,8087$$
$$N(d_2) = 0,7458$$
$$c = 45 \times 0,8087 - 40 \times e^{-0,09 \times 0,5} \times 0,7458 = 7,757$$

5. Réponse :

La valeur du call et du put est donnée par la formule de Black & Scholes. Une fois les valeurs du call et du put calculées, on doit pouvoir vérifier la relation de parité entre le call et le put.

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{30}{28} \right) + 0,04 \times 0,25 + \frac{0,3^2 \times 0,25}{2}}{0,3 \sqrt{0,25}} = 0,6016$$
$$d_2 = 0,6016 - 0,3 \sqrt{0,25} = 0,4516$$
$$N(d_1) = 0,7263$$
$$N(d_2) = 0,6742$$
$$c = 30 \times 0,7263 - 28 \times e^{-0,04 \times 0,25} \times 0,6742 = 3,0980$$
$$p = 28 \times e^{-0,04 \times 0,25} \times 0,3258 - 30 \times 0,2737 = 0,8194$$
$$c + K e^{-rt} = p + S(t)$$
$$3,0980 + 28 e^{-0,04 \times 0,25} = 0,8194 + 30$$