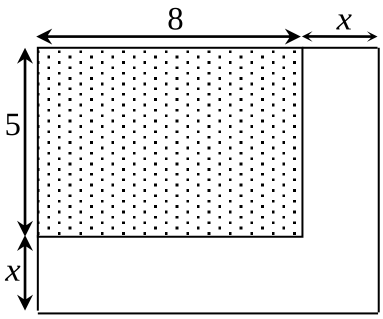
# Leçon 1 : Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire utilise un terrain rectangulaire dont la largeur et la longueur mesurent respectivement 5m et 8m pour produire des tomates. Pour augmenter la production, le responsable de la coopérative informe que les côtés du terrain doivent être augmentés chacun d'une longueur identique comme l'indique la figure ci-dessous pour avoir un terrain rectangulaire dont l'aire sera de 88m$^2$.
Curieux, des élèves de la classe de  première A présents, désirent connaitre le nombre de mètres à ajouter pour avoir l'aire voulue. Ils sollicitent leur professeur de mathématique pour en savoir plus.



# B. CONTENU DE LA LEÇON

## 1. Polynômes du second degré

**Définition**
Toute expression de la forme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ où $a, b$ et $c$ sont des nombres réels et $a \neq 0$,
est appelée ***polynôme du second degré***.

**Vocabulaire**
Le coefficient du terme de degré 2 est $a$ .
Le coefficient du terme de degré 1 est $b$
Le coefficient du terme de degré 0 est $c$

**Exemple** :
Les expressions $x^2 + 4x + 3$ ; $4x^2$ et $3x^2 - 1$ sont des polynômes du second degré car elles sont de la forme $ax^2 + bx + c$.
• Les coefficients de $x^2 + 4x + 3$ sont : $a = 1$ ; $b = 4$ et $c = 3$.
• Les coefficients de $4x^2$ sont : $a = 4$ ; $b = 0$ et $c = 0$ .
• Les coefficients de $3x^2 - 1$ sont : $a = 3$ ; $b = 0$ et $c = -1$

***Exercice de fixation***
Pour chacun des polynômes du second degré suivants trouve les réels a ;b et c :
$-4x^2 + x + 10$ ; $x^2 + 3x$ ; $5x^2 - 4$ ; $-10x^2$

***Solution***
▪ Les coefficients de $-4x^2 + x + 10$ ; sont : $a = -4$ ; $b = 1$ et $c = 10$.
▪ Les coefficients de $x^2 + 3x$ sont : $a = 1$ ; $b = 3$ et $c = 0$ .
▪ Les coefficients de $5x^2 - 4$ sont : $a = 5$ ; $b = 0$ et $c = -4$ .
▪ Les coefficients de -$10x^2$ sont : $a = -10$ ; $b = 0$ et $c = 0$ .

## 2-Equations du second degré dans $\mathbb{R}$

### 2-1 Définition
Soit $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ un polynôme du second degré
Toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ , est appelée **équation du second degré dans** $\mathbb{R}$.

**Exemples**
$x^2 + 4x + 3 = 0$ et $5x^2 - 4 = 0$ sont des équations du second degré dans $\mathbb{R}$

### 2-2 Notion de discriminant

**Définition**
Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$
Le nombre réel noté $\Delta$ tel que : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ est appelé le **discriminant** de cette équation**.**
$\Delta$ est aussi appelé le **discriminant** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

**Exemple**
On donne l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$
$\Delta = \boldsymbol{4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4}$

***Exercice de fixation***
Calcule le discriminant de chacun des polynômes suivants
a) $2x^2 - 3x + 1$ ; b) $x^2 - 4x + 4$ ; c) $x^2 + x + 1$

***Solution***
a) Pour le polynôme $2x^2 - 3x + 1$, on a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$
b) Pour le polynôme$x^2 - 4x + 4$, on a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
c) Pour le polynôme $x^2 + x + 1$ on a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

**2-3 Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$**

**Méthode**
Pour résoudre dans$\mathbb{R}$ une équation du second degré $(E): ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, on peut calculer le discriminant $\Delta$ ($\Delta = b^2 - 4ac$ ) puis utiliser le tableau suivant:

| Signe de $\Delta$ | Nombre de solutions | Calcul des solutions |
|---|---|---|
| $\Delta < 0$ | $(E)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ | |
| $\Delta = 0$ | $(E)$ a une solution | $x_0 = -\frac{b}{2a}$ |
| $\Delta > 0$ | $(E)$ a deux solutions distinctes | $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

**Remarque :**
Lorsqu'elles existent, les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) sont appelées **les zéros** ou **les racines** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

***Exercice de fixation***
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
$(\boldsymbol{E_1}) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$ ; $(\boldsymbol{E_2}) : 2x^2 - 4x + 2 = 0$ ; $(\boldsymbol{E_3}) : x^2 - x + 7 = 0$.

***Solution***
•$(\boldsymbol{E_1}) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$$

$\Delta > 0$ alors $(E_1)$ admet deux solutions distinctes $x_1$ et $x_2$ telles que :
$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 2} = 1$
$1$ et $\frac{3}{2}$ sont solutions de l'équation $(E_1)$
Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$
•$(\boldsymbol{E_2}) : 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$ alors $(\boldsymbol{E_2})$ admet une solution unique $x_0 = -\frac{-4}{2\times 2} = 1$.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$.
• $(\boldsymbol{E_3}) : x^2 - x + 7 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 1 - 28 = -27$$

$\Delta < 0$ alors $(\boldsymbol{E_3})$ n'a pas de solution.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

## 3- Factorisation d'un polynôme du second degré

**Méthode**

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x)$ tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, on peut procède comme suit :

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ n'a pas de racine. Donc P(x) n'est pas factorisable

•Si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ admet un zéro $x_0$ tel que : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

La forme factorisée de P(x) est : $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_0)^2}$.

•Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux zéros distincts $x_1$ et $x_2$ tels que :$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La forme factorisée de $P(x)$ est : $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

| Signe de $\Delta$ | Nombre de racines | Forme factorisée |
|---|---|---|
| $\Delta < 0$ | P($x$) n'a pas de racine $\mathbb{R}$ | P($x$) n'est pas factorisable |
| $\Delta = \mathbf{0}$ | P($x$) a un zéro $x_0 = -\frac{b}{2a}$ | **P($x$)=** $\boldsymbol{a(x - x_0)^2}$ |
| $\Delta > 0$ | P($x$) a deux zéros distincts $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | **P($x$)=** $\boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2)}$. |

***Exercice de fixation***

Factorise chacun des polynômes $P(x)$, $R(x)$ et $T(x)$ suivants.

$P(x) = 3x^2 + 2x + 1$;   $R(x) = 2x^2 - 4x + 2$   ;  $T(x) = -x^2 - 3x + 4$

***Solution***

• $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$$

$\Delta$ étant négatif, alors $P(x)$ n'a pas de racine par conséquent $P(x)$ n'est pas factorisable

• $R(x) = 2x^2 - 4x + 2$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$ , alors $R(x)$ admet une racine double $x_0 = -\frac{-4}{2\times 2} = 1$ , par conséquent la forme factorisée de $R(x)$ est : $R(x) = 2(x - 1)^2$

• $T(x) = -x^2 - 3x + 4$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25$$

$\Delta$ étant positif $T(x)$ alors admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -4$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 1$ par conséquent la forme factorisée de $T(x)$ est : $T(x) = -(x + 4)(x - 1)$

## 4- Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

### 4-1 Signe d'un polynôme second degré

**Méthode**

Pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré $P(x)$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ on peut procède comme suit :

• On calcule le discriminant $\Delta$ ; ($\Delta = b^2 - 4ac$).

•on utilise l'un des tableaux de signe ci-dessous :

- si $\Delta < 0$ , alors $P(x)$ n'a pas de zéro.
  $P(x)$ **est toujours du signe de $\boldsymbol{a}$.**

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | Signe de $a$ |

- si $\Delta = 0$, alors P(x) admet un zéro $x_0$ tel que $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  **$P(x)$ est du signe de $\boldsymbol{a}$ pour tout $\boldsymbol{x \neq x_0}$.**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | Signe de $a$ | 0 | Signe de $a$ |

- si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux zéros distincts $x_1$ et $x_2$ tels que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(On suppose $x_1 < x_2$)
$P(x)$ est du signe de $a$ à l'extérieur des zéros et du signe de $-a$ (signe contraire de $a$) à l'intérieur des zéros.

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | Signe de $a$ | 0 | Signe de $-a$ | 0 | Signe de $a$ |

***<u>Exercice de fixation</u>***
Détermine le signe de chacun des polynômes suivants :
$$P(x) = x^2 - x + 3 = 0\ ;\ Q(x) = -x^2 + x + 2 = 0;\ R(x) = -9x^2 + 6x - 1 = 0$$

***<u>Solution</u>***
• $P(x) = x^2 - x + 3 = 0$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -8$$
$\Delta$ étant négatif, alors $P(x)$ n'a pas de zéro. $P(x)$ est du signe de $a$. ($a = 1$)
Tableau de signe de $P(x)$:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | $+$ |

Conclusion : pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ , $P(x) > 0$

• $Q(x) = -x^2 + x + 2$
$\Delta = (+1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$ , alors $Q(x)$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$,
Tableau de signe de $Q(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Conclusion :
pour tout $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2 + \infty[$ , $Q(x) < 0$
pour tout $x \in ]-1; 2[$ , $Q(x) > 0$
pour tout $x \in \{-1; 2\}$ , $Q(x) = 0$

- $R(x) = -9x^2 - 6x - 1$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-9) \times (-1) = 36 - 36 = 0$ , alors $R(x)$ admet un zéro $x_0 = -\frac{-6}{2\times(-9)} = \frac{1}{3}$

Tableau de signe de $R(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |

Conclusion :

Pour $x \in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[ \cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ , $R(x) < 0$

Pour $x = \dfrac{1}{3}, R(x) = 0$

### 4-2 Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$.

**Définition**

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré tel que : $\mathrm{P(x) = ax^2 + bx + c}$ où $\mathrm{a} \neq 0$.
Toute inéquation de l'un des types suivants : $P(x) > 0$ ; $P(x) \geq 0$ ; $P(x) < 0$ ou $P(x) \leq 0$ est appelée inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$.

**Exemple**

$-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ est une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$.

**Méthode**

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du second degré du type $ax^2 + bx + c \geq 0$ ; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ; $ax^2 + bx + c < 0$ *ou* $ax^2 + bx + c > 0$ (où $\mathrm{a} \neq 0$), on peut procéder comme suit :

- étudier le signe du polynôme du second degré $P(x)$ tel que :$P(x) = ax^2 + bx + c$ ;
- déterminer l'intervalle sur lequel $P(x)$ vérifie l'inégalité donnée;
- conclure.

***Exercice de fixation***

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes $(I_1)$: $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ et ( $I_2$): $-x^2 + x + 2 < 0$

***Solution***

•$(I_1)$: $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$

Soit $P(x) = -x^2 + 10x - 25$

$\Delta = (10)^2 - 4 \times (-1) \times (-25) = 100 - 100 = 0$ , alors $P(x)$admet un zéro $x_0 = -\frac{10}{2\times(-1)} = 5$

Tableau de signe de $P(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |

Conclusion : $S_R = \{5\}$

•$(I_2)$: $-x^2 + x + 2 < 0$

Soit $R(x) = -x^2 + x + 2$

$\Delta = (+1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$ , alors $R(x)$ admet deux zéros distinctes $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$,

Tableau de signe de $P(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Conclusion : $S_{\mathbb{R}} = \ ]-\infty;-1[ \cup ]2 + \infty[$

## 5-<u>Equations du type</u> : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

**<u>Méthode</u>**

Pour résoudre l'équation du type $\frac{ax+d}{cx+d} = 0$ , on peut procéder comme suit :
- Chercher la contrainte sur l'inconnue ;
- Résoudre l'équation $ax + b = 0$ ;
- Vérifier si la solution obtenue vérifie la contrainte sur l'inconnue :si c'est le cas, l'ensemble des solutions de $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ est la solution obtenue. Dans le cas contraire l'ensemble des solutions est l'ensemble vide

***<u>Exercice de fixation</u>*** Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
$(E_1)$ : $\frac{x-1}{2x-1} = 0$ ; ( E 2) :$\frac{3x-9}{3-x} = 0$

***<u>Solution</u>***

$(E_1)$ : $\frac{x-1}{2x-1} = 0$
Contrainte sur l'inconnue : $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.
- Pour $x \neq \frac{1}{2}$ on a :
- $\frac{x-1}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

  -Comme $1 \neq \frac{1}{2}$. alors $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

$(E_2)$ : $\frac{3x-9}{3-x} = 0$
- Contrainte sur l'inconnue : $3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- : $\frac{3x-9}{3-x} = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- Comme 3=3 alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

## 6-<u>Inéquations du type</u> : $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$

**<u>Méthode</u>**

Pour résoudre une inéquation du type $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0}$ **ou** $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0}$**,** on peut procéder comme suit :
- Chercher la contrainte sur l'inconnue ;
- Étudier le signe de la fraction rationnelle $R(x) = \boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ;
- Déterminer l'intervalle sur lequel $\boldsymbol{R(x)}$ vérifie l'inégalité donnée ;
- Conclure.

***<u>Exercice de fixation</u>***

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-1}{2x-1} \leq 0$

***Solution***

Soit $R(x) = \boldsymbol{\frac{x-1}{2x-1}}$
-Cherchons la contrainte
$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$
On a : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

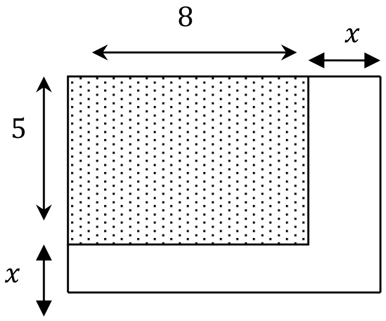
- Tableau de signe de $R(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $2x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $R(x)$ | $+$ | || | $-$ | $0$ | $+$ |

Alors $S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{1}{2}; 1\right]$

## C. SITUATION COMPLEXE

Une coopérative scolaire utilise un terrain rectangulaire dont la largeur et la longueur mesurent respectivement 5m et 8m pour produire des tomates. Pour augmenter la production, le responsable de la coopérative informe que les côtés du terrain doivent être augmentés chacun d'une longueur identique comme l'indique la figure ci-dessous pour avoir un terrain rectangulaire dont l'aire sera de 88m$^2$.
Des élèves de première A présent désirent connaitre le nombre de mètres à ajouter. Il sollicite ton aide.
Détermine le nombre de mètres à ajouter.




***Corrigé***

1) Justification de $x^2 + 13x - 48 = 0$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du grand rectangle

$\mathcal{A} = (x+8)(x+5)$

$\mathcal{A} = x^2 + 13x + 40$

Pour $\mathcal{A} = 88$ ; on a $x^2 + 13x + 40 = 88$

D'où $x^2 + 13x - 48 = 0$.

2) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times (1) \times (-48) = 361 = 19^2$$

$\Delta > 0$, l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-13-19}{2}$ et $x_2 = \frac{-13+19}{2}$.

$x_1 = -16$ et $x_2 = 3$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-16;\ 3\}$$

3) Nombre de mètres à ajouter

-16 et 3 sont les deux solutions de l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$
Or -16 est négatif donc le nombre de mètre à ajouter est 3

## D-EXERCICES

### 1. EXECICES DE FIXATION :

**Exercice 1**

Pour chaque affirmation, il est proposé trois réponses dont une seule est exacte. Indique la réponse exacte par la lettre A, B ou C

| Affirmations | A | B | C | Réponses |
|---|---|---|---|---|
| Le discriminant du polynôme $3x^2 - x + 2$ est | 25 | 23 | $-23$ | |
| Les zéros du polynôme $-x^2 + 5x - 4$ sont | 1 et 4 | $-1$ et $-4$ | 1 et $-4$ | |
| L'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$ a | aucune solution | une seule solution | deux solutions distinctes | |

***Corrigé***

| Affirmations | A | B | C | Réponses |
|---|---|---|---|---|
| Le discriminant du polynôme $3x^2 - x + 2$ est | 25 | 23 | $-23$ | **C** |
| Les zéros du polynôme $-x^2 + 5x - 4$ sont | 1 et 4 | $-1$ et $-4$ | 1 et $-4$ | **A** |
| L'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$ a | aucune solution | une seule solution | deux solutions distinctes | **C** |

**Exercice** 2

En utilisant le discriminant factorise chacun des polynômes suivants :

$T(x) = -2x^2 + x + 10$ ; $V(x) = x^2 - 25$ ; $Y(x) = 3x^2 - x + 4$ ; $Z(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

***Corrigé***

▪ $T(x) = -2x^2 + x + 10$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-2) \times (10) = 81$$

$\Delta > 0$, donc $T(x)$.admet deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{-1-9}{-4} = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+9}{-4} = -2.$$

On a alors $\boldsymbol{T(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2)}$

▪ $V(x) = x^2 - 25$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times (1) \times (-25) = 100$$

$\Delta > 0$, donc $V(x)$.admet deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{0-10}{2} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{0+10}{2} = 5.$$

On a alors $\boldsymbol{V(x) = (x + 5)(x - 5)}$

▪ $Y(x) = 3x^2 - x + 4$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (3) \times (4) = -47$$

$\Delta < 0$, donc $Y(x)$.n'admet pas de zéro :

**$\boldsymbol{Y(x)}$.n'est pas factorisable**

▪ $Z(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (1) \times \left(\frac{9}{4}\right) = 0$$

$\Delta = 0$, donc $Z(x)$.admet un zéro double : $x_0 = \frac{3}{2}$

On a alors $\boldsymbol{Z(x) = (x - \frac{3}{2})^2}$

## 2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

### Exercice 3

Recopie et complète le tableau ci-dessous

| Polynômes | Discriminant | $P(x) = 0$ | $P(x) > 0$ | $P(x) \leq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x) = x^2 - x + 2$ | Δ= | $S_R =$ | $S_R =$ | $S_R =$ |
| $P(x) = -x^2 + 3x + 4$ | Δ= | $S_R =$ | $S_R =$ | $S_R =$ |

***Corrigé***

| Polynômes | Discriminant | $P(x) = 0$ | $P(x) > 0$ | $P(x) \leq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x) = x^2 - x + 2$ | Δ= -7 | $S_R = \emptyset$ | $S_R =$ IR | $S_R = \emptyset$ |
| $P(x) = -x^2 + 3x + 4$ | Δ= 25 | $S_R = \{-1; 4\}$ | $S_R =$ ]-1 ; 4[ | $S_R =$]-∞$; -1] \cup [4; +\infty$ |

### Exercice 4

1) Écris $\frac{-x+3}{2x-3} - 2$ sous la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$
2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$
3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$

***Corrigé***

1) $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 = \frac{-x+3-2(2x-3)}{2x-3} = \frac{-5x+9}{2x-3}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$

$\frac{-x+3}{2x-3} = 2$ équivaut à $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 = 0$

Ce qui revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{-5x+9}{2x-3} = 0$

La contrainte sur l'inconnue est $x \neq \frac{3}{2}$

$-5x + 9 = 0$ équivaut à $x = \frac{9}{5}$

$\frac{9}{5} \neq \frac{3}{2}$, d'où $S_R = \left\{\frac{9}{5}\right\}$

Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$ est : $\boldsymbol{S_R = \left\{\frac{9}{5}\right\}}$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$

$\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$ équivaut à $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 \geq 0$

Ce qui revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{-5x+9}{2x-3} \geq 0$

La contrainte sur l'inconnue est $x \neq \frac{3}{2}$

Tableau de signe de $\frac{-5x+9}{2x-3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{9}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x+9$ | | + | | + | 0 | - | |
| $2x-3$ | | - | 0 | + | | + | |
| $\frac{-5x+9}{2x-3}$ | | - | | + | 0 | - | |

L'ensemble de solutions dans ℝ de l'inéquation $\frac{-5x+9}{2x-3} \geq 0$ est $S_R = ]\frac{3}{2};\frac{9}{5}]$
Donc l'ensemble de solutions dans ℝ de l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$ est $\boldsymbol{S_R = ]\frac{3}{2};\frac{9}{5}]}$

## 3. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

**Exercie 5**
On donne $P(x) = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$
1) Calcule $P(1)$. Déduis-en que 1 est un zéro de P(x)
2) Justifie que $P(x) = (x-1)(-2x^2 - 3x - 1)$
3) On pose $Q(x) = -2x^2 - 3x - 1$
   Détermine les zéros de Q(x)
4) ) Résous l'équation P(x) = 0
5) -a) Dresse le tableau de signe de $P(x)$.
   b) Déduis-en la résolution de l'inéquation P(x) ≤ 0.

**Corrigé**

1) $P(1) = -2 \times (1)^3 - (1)^2 + 2 \times (1) + 1 = 0$. Donc 1 est un zéro de P(x)
2) $(x-1)(-2x^2 - 3x - 1) = -2x^3 - 3x^2 - x + 2x^2 + 3x + 1$
   $= -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

D'où $P(x) = (x-1)(-2x^2 - 3x - 1)$

3) Détermination des zéros de $Q(x)$.

$$Q(x) = -2x^2 - 3x - 1$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1$

$\Delta > 0$, donc $Q(x)$.admet deux zéros distincts :
$x_1 = \frac{3-1}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+1}{-4} = -1$.

4) Résolution de l'équation P(x) = 0
   P(x) = 0 équivaut à $(x-1)(-2x^2 - 3x - 1) = 0$

Ceci équivaut à $x - 1 = 0$ ou $-2x^2 - 3x - 1 = 0$
D'où $S_{IR} = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1\right\}$

5) a)-Tableau de signe de $P(x)$.

$$P(x) = (x-1)\,Q(x).$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | - | | - | | - | 0 | + | |
| $Q(x)$. | | - | 0 | + | 0 | - | | - | |
| $P(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |

b) Résolution de l'inéquation P(x) ≤ 0.

D'après le tableau de signe de $P(x)$, l'inéquation P(x) ≤ 0 a pour ensemble de solution
$S_{IR} = [-1; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$

**MON ECOLE A LA MAISON**

**SECONDAIRE**
**$1^{\text{ère}}$ A**
**MATHEMATIQUES**

**CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE**

# Leçon 02 : DENOMBREMENT

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la cérémonie de remise des prix d'excellence aux meilleurs élèves d'un lycée moderne, des jeunes filles d'une classe de première A sont choisies pour être des hôtesses. Celles-ci doivent faire asseoir chacun des quatre membres de la délégation officielle de la DRENET-FP sur quatre fauteuils prévus pour la circonstance.

Pendant les séances de répétitions, elles ont constaté qu'il y a plusieurs possibilités de faire asseoir les hôtes. L'une d'elle affirme qu'il y a 24 possibilités de faire asseoir les quatre membres de la délégation officielle. Ne parvenant pas à s'accorder sur ce nombre, elles en parlent à leurs camarades de classe puis, décident ensemble avec l'aide de leur professeur de mathématiques d'étudier les dénombrements.

## B. CONTENU DE LA LEÇON

### 1-COMPLEMENTS SUR LES ENSEMBLES

### 1.1- Cardinal d'un ensemble fini

**Définition**

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note : Card(E).

**Exemple : On donne A = {a ;b ;c ;d ;e ;f} et B = { 0 ;1}**

**Card(A)= 6 et card(B)=2**

### 1.2-Complementaire d'un ensemble

**Définition**

Soit A une partie non vide d'un ensemble E.

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

On le note $C_E^A$ ou $\overline{A}$ et on lit « complémentaire de A dans E »

Exemple : on donne E={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7} et A ={1 ;4 ;7} une partie de l'ensemble E.

$\overline{A} = \{2; 3; 5; 6\}$ .

**Propriété**

Soit A une partie d'un ensemble fini E.

On a Card($\overline{A}$) = Card(E) − Card(A)

**Exercice de fixation**

Soit E un ensemble tel que E= {1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11}

1- Détermine l'ensemble A des nombres impairs de E
2- Détermine Card($\overline{A}$)

***Réponse attendue*** :

1- A= {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11}
2- Card($\overline{A}$)=Card(E) − Card(A)

= 10 - 6

Card($\overline{A}$)= 4

## 2. PRODUIT CARTESIEN DE DEUX ENSEMBLES FINIS

### 2.1 Définition

A et B étant deux ensembles finis non vides.

On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(a,b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.

On note A×B et on lit « A croix B »

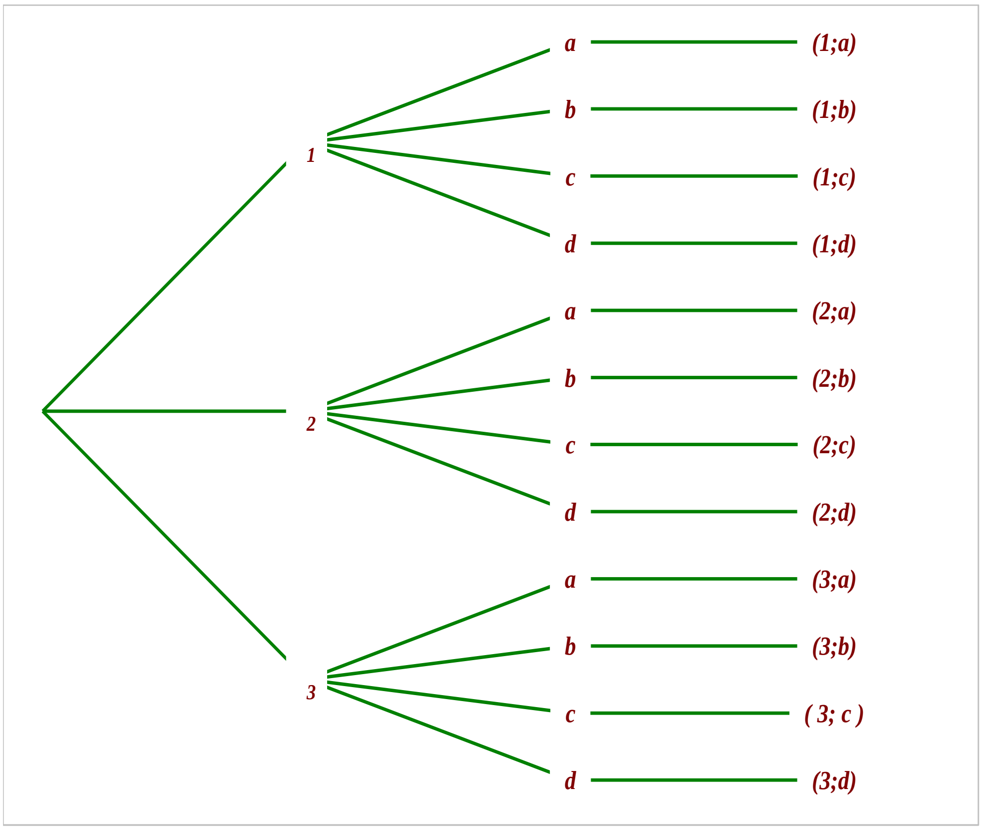
**Exemple**

Soit A et B des ensembles telle que A = {1 ; 2 ; 3} et B = {a ; b ; c ; d}

les éléments du produit cartésien de A×B sont :

(On pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrées)

- Arbre de choix




- Tableau à double entrées

| A \ B | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1 ;a) | (1 ;b) | (1 ;c) | (1 ;d) |
| 2 | (2 ;a) | (2 ;b) | (2 ;c) | (2 ;d) |
| 3 | (3 ;a) | (3 ;b) | (3 ;c) | (3 ;d) |

**AxB = {**(1 ;a);(1 ;b) ; (1 ;c) ; (1 ;d) ; (2 ;a) ; (2 ;b) ; (2 ;c) ; (2 ;d) ; (3 ;a) ; (3 ;b) ; (3 ;c) (3 ;d)**}**

**Remarque** : Dans un couple l'ordre des éléments est très important

Ainsi $(a,b) \neq (b,a)$.

**2.2-Propriété**

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

Card(A×B)= Card(A)× Card(B)

**Exercice de fixation**

Soit A et B des ensembles telle que $A = \{1; 2; 3\}$ $et$ $B = \{a, b, c, d\}$

Calcule Card(A×B)

**Réponse attendue :**

$Card(A\times B)= Card(A)\times Card(B)= 3\times 4=12$

## 3-P-LISTE D'UN ENSEMBLE FINI

### 3.1- Définitions

-Etant donné un ensemble E et un nombre entier naturel p non nul, on désigne par $E^p$ le produit cartésien de p ensembles tous égaux à E.

-On appelle p-liste ou p-uplets de E tout élément de l'ensemble $E^p$.

### 3.2- Propriété

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est $n^p$.

**Exercice de fixation 1**

E est un ensemble tel que card(E) = 6.

Détermine $card(E^3)$

**Réponse attendue**

$Card(E^3)= card(E) \times card(E) \times card(E)$

$= 6^3$

$= 216$

Exercice de fixation 2

Calcule le nombre de nombres à trois chiffres que l'on peut former avec les éléments de l'ensemble $A = \{2; 3; 5; 7; 8; 9\}$

**Réponse attendue**

357 est un élément du produit cartésien $A\times A\times A = A^3$.

Donc le nombre de nombres de trois chiffres formés à partir des éléments de A est :

$Card(A^3)= 6^3$

$=216$

## 4- ARRANGEMENT ET PERMUTATION

### 4.1- Arrangement

**Définition**

Soit E un ensemble à $n$ éléments et $p$ un nombre entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle arrangement de $p$ éléments de $E$ tout p-uplet de $E$ deux à deux distincts

**Exemple**

Soit E={0 ;1 ; 3 ; 4 }

- (0 ;3) est un arrangement de deux éléments de E.
- (1 ;4 ;3 ;1) n'est pas un arrangement de 4 éléments de E car 1 se répète deux fois dans l'ensemble.
- (0 ;4 ;1 ;3) est un arrangement de 4 éléments de E.
- (0 ;1 ;1 ;3) n'est pas un arrangement de 4 éléments de E

**Propriété**

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.

Le nombre d'arrangements de $p$ éléments de l'ensemble $E$ est :

$$\boldsymbol{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$$

On le note $A_n^p$ et se lit : « Arrangement de p dans n. »

***Exercice de fixation :***

***Soit A=*** {a ;2 ; b ; e ; f ;5 }

Calcule le nombre d'arrangement à 3 éléments de A.

***Réponse attendue :***

$A_6^3$ = 6x5x4

= 120

**4.2- Permutation**

**4.2.1-Factorielle**

**Définition**

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle n, le produit : n x (n-1) x (n-2) x…x 3 x 2 x 1.

On le note : n !

**On admet que** : 0 !=1.

***Exemple***

●$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

●$\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

**Propriété**

Soient $n\ et\ p$ deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ . On a $A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$

***Exercice de fixation***

Calcule : $A_5^2$ et $A_6^3$

**Réponses attendues**

$A_5^2 = \frac{5!}{3!}$

$= \frac{5\times4\times3!}{3!}$

$= 20$

$A_6^3 = \frac{6!}{3!}$

$= \frac{6\times5\times4\times3!}{3!}$

$= 120$

**4.2.2-Permutation**

**Définition**

Soit E un ensemble à n éléments.

-Une permutation des n éléments de E est un arrangement des n éléments de E.

-Le nombre de permutations des n éléments de E est : $A_n^n$ .

On a $A_n^n$ = n !

***Exemple***

Soit E= {1 ; 3 ; 0 ; 5}

1°) trois permutations des éléments de E sont : (1 ; 3 ; 0 ; 5) ; (3 ; 0 ; 5 ; 1) ;(0 ; 5 ; 1 ; 3)

2°) le nombre de permutations des éléments de E est : 4 ! = 4x3x2x1 = 24

**5- COMBINAISON**

**5.1-Définitions**

**Définition1**

Soit E un ensemble à $n$ éléments et $p$ un nombre entier naturel tel que

$p \leq n$ .

Une combinaison de $p$ éléments de E est un sous ensemble de E ayant $p$ éléments

***Exemple***

**On donne** A= {1 ; 3 ; 0 ; 2}

Exemple de deux combinaisons de 3 éléments de A sont :{1 ; 0 ; 2} et {3 ; 0 ; 2}

**Définition2**

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$ .

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\frac{A_n^p}{p!}$ . On le note :
$C_n^p$ ; se lit « Combinaison de p dans n »

***Exemple***

le nombre de combinaisons à 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments est :

$C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!}$

$=10$

**5.2-<u>Propriété</u>**

Soient n et $p$ deux entiers naturels tels que: $p \leq n$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

**Remarques :** $C_n^n = 1$ ; $C_n^1 = n$ ; $C_n^0 = 1$

***<u>Exercice de fixation</u>***

**Calcule** $C_5^2$

**<u>Réponse attendue</u>**

$C_5^2 = \frac{5!}{2!x3!}$

$= \frac{5x4x3!}{2!x3!}$

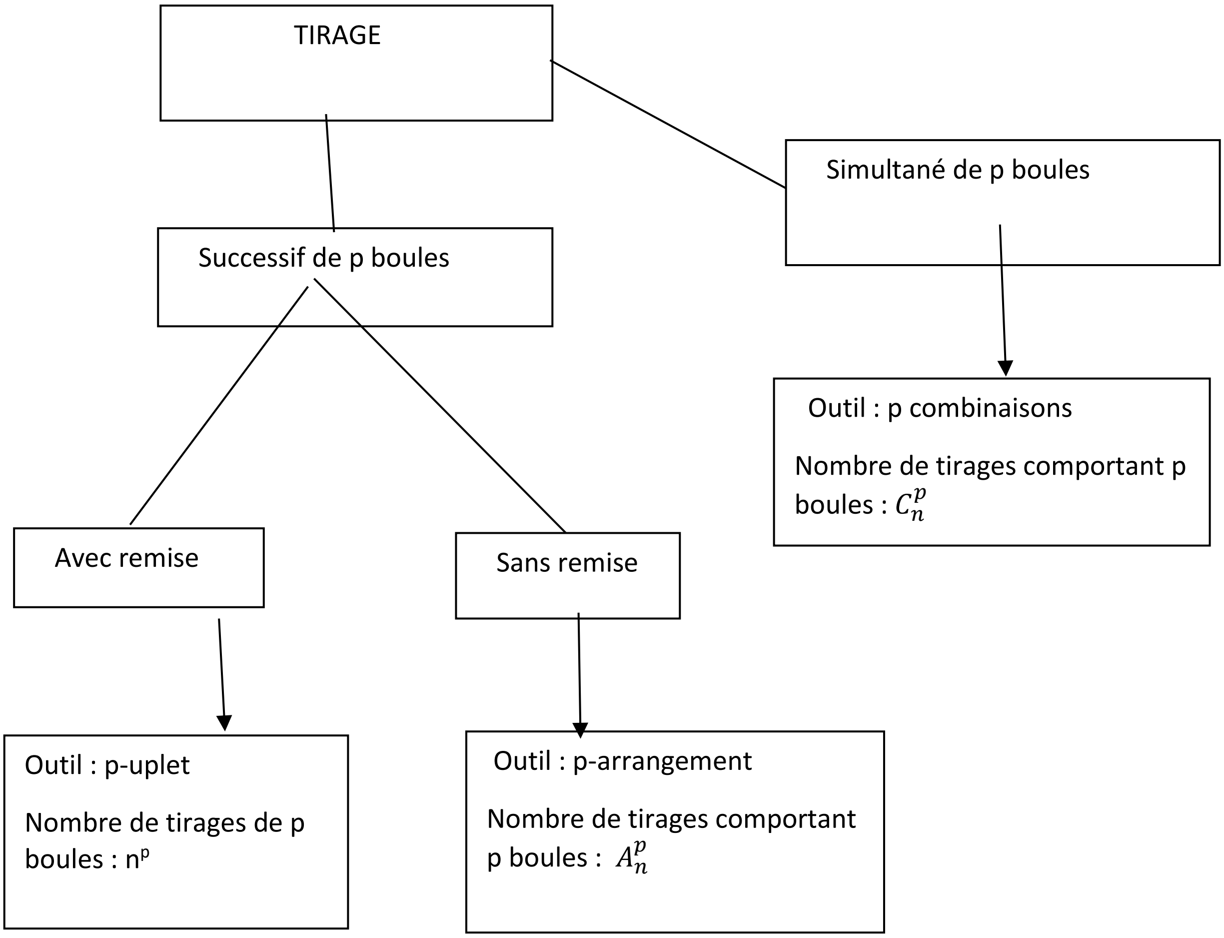
**= 10**

**MODELISATION**

Pour choisir une des notions : p-uplet, arrangement, permutation ou combinaison pour dénombrer, on peut ramener le problème posé au modèle de tirage de boules.

Une urne contient n boules. On tire p boules ($p \leq n$) de cette urne.

On veut déterminer le nombre de tirages possibles de p boules




## C. SITUATION COMPLEXE

Pour l'organisation de la cérémonie de remise des prix d'excellence aux meilleurs élèves d'un lycée moderne, des jeunes filles d'une classe de première A sont choisies pour être des hôtesses. Celles-ci doivent faire asseoir chacun des quatre membres de la délégation officielle de la DRENET-FP sur quatre fauteuils prévus pour la circonstance.

Pendant les séances de répétitions, elles ont constaté qu'il y a plusieurs possibilités de faire asseoir les hôtes. L'une d'elle affirme qu'il y a 24 possibilités de faire asseoir les quatre membres de la délégation officielle. Elles ne parviennent pas à s'accorder.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances des dénombrements, tu es sollicité pour trancher cette discussion.

**Proposition de correction**

Pour trancher cette discussion, je vais utiliser le dénombrement.

Je vais déterminer le mode de rangement dont il est question ici afin de trouver la formule idéale à utiliser.

Je vais faire le calcule approprié en fonction du mode de calcul choisi ;

Je vais comparer le résultat obtenu à 24 afin de trancher la discussion.

Une manière de faire asseoir les 4 personnalités, qui sont toutes distinctes deux à deux, sur les 4 fauteuils est un arrangement de 4 fauteuils dans l'ensemble constitués par les 4 personnalités.

Donc le nombre total de manières de les faire asseoir est égal au nombre de permutations de 4 éléments de l'ensemble des 4 personnalités.

D'où on a:4 ! = 4x3x2x1

= 24

Il y a 24 manières. Celle qui affirme qu'il y a 24 possibilités a raison.

## D. EXERCICES

### Exercice de fixation

Exercice1

A, B et C sont des ensembles tels que : A = {a ; b} ; B = {1 ; 2} et

C= {α ; β ; γ}

Entoure la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

| N° | Enoncé | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le couple (a ;1) est un élément du produit cartésien | A x B | A x C | B x A |
| 2 | Le couple (γ ;b) est un élément du produit cartésien | A x C | A x B | C x A |
| 3 | Le couple (a ;γ ) est un élément du produit cartésien | A x C | A x B | C x A |
| 4 | Le couple (2 ; β) est un élément du produit cartésien | C x B | A x B | B x C |

### Correction de l'exercice 1

1. **Réponse1**
2. **Réponse 3**
3. **Réponse 1**
4. **Réponse 3**

### Exercice 2

On donne A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}

Entoure la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

| N° | Enoncés | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Une 2-liste ou couple d'éléments de A est : | (2 ; 5 ) | ( 1 ; 7 ) | ( 8 ; 3 ) |
| 2 | Un 3-uplet ou 3-liste ou un triplet d'éléments de A est : | (1 ; 0 ; 6 ) | ( 4 ; 4 ; 0 ) | (3 ; 9 ; 2 ) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Une 5-liste ou 5-uplet d'éléments de A est : | (9 ;2 ;2 ;3 ;5 ) | (0 ;1 ;1 ;6 ;4 ) | (0 ;0 ;0 ;0 ;0 ) |

Correction de l'exercice 2

**1.Réponse1**

**2.Réponse 2**

**3.Réponse 3**

## EXERCICES DE RENFORCEMENT

### Exercice 3

Une classe comporte 36 élèves, dont 18 filles et 18 garçons. On veut constituer une équipe de 5 élèves pour participer à un concours.

1- Détermine le nombre d'équipes qu'on peut former

2- Détermine le nombre d'équipes constituées de 3filles et de 2 garçons

**Correction de l'exercice 3**

1-Avoir des équipes de 5 personnes dans une classe de 36 élèves constitue une combinaison de 5 éléments dans un ensemble à 36 éléments. Donc le nombre d'équipes est :

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!(36-5)!} = \frac{36!}{5!\times 31!} = \frac{36\times 35\times 34\times 33\times 32}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 376\,992$$

2-Avoir des équipes constituées de 3 filles et de 2 garçons consiste à faire une combinaison de 3 éléments dans un ensemble à 18 éléments et une combinaison de 2 éléments dans un ensemble à 18 éléments. Donc le nombre d'équipe est :

$$C_{18}^{3} \times C_{18}^{2} = 816 \times 153 = 124\,848$$

### Exercice 4

Une urne contient 3 boules noires, 2 boules blanches et 5 boules rouges. On tire successivement 3 boules avec remise de l'urne.

1- Calcule le nombre de tirage possible

2- Calcule le nombre de tirage contenant :

a- Trois boules de mêmes couleurs

b- Trois boules de couleurs différentes

c- Exactement deux boules de mêmes couleurs

d- Au moins une boule noire

**Correction de l'exercice 4**

Résumé : $\begin{cases} 3\ boules\ noires \\ 2\ boules\ blanches \\ 5\ boules\ rouges \end{cases}$ ;

Il s'agit d'un tirage successif avec remise : l'outil de dénombrement utilisé est le P- uplet.

1- le nombre de tirage possible est : $10^3 = 1000$.

2- a- Former des tirages de trois boules de mêmes couleurs constitue un 3-uplets (triplet). Le tirage se fera alors dans l'ensemble des 3 boules noirs ou dans l'ensembles des 5 boules rouge ou dans l'ensemble des deux boules blanche. Donc le nombre de tirage est :

$$3^3+5^3+2^3=27+125+8=160$$

b- Former des tirages de trois boules de couleurs différentes consiste à tirer une boule noire et une boule blanche et une boule rouge. En tenant compte de la position des couleurs on obtient 6 cas possible. Donc le nombre de tirage est :

$$3^1 \times 2^1 \times 5^1 \times 6 = 180$$

c - Former des tirages de trois boules contenant exactement deux boules de mêmes couleurs consiste à tirer soit: 2 boules noires et 1 boule parmi les 7 restantes ou 2 boules blanches et 1 boule parmi les 8 restantes ou deux boules rouges et 1 parmi les 5 restantes. Tenant compte des différentes positions, on a :

$$(3^2 \times 7^1 + 2^2 \times 8^1 + 5^2 \times 5^1) \times 3 = 660$$

d – le nombre de tirages contenant aucune boule noire est $7^3 = 343$

L'ensemble constitué par les tirages contenant aucunes boule noire est le complémentaire de l'ensemble constitué par les tirages contenant au moins une boule noire ». Par conséquent le nombre de tirage contenant au moins une boule noire est :

$$10^3 - 7^3 = 1000 - 343 = 657$$

**EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 5**

Combien de mots de 4 lettres deux à deux distincts ayant un sens ou non peut-on former avec les lettres du nom CHANSLY dans chacun des cas suivants :

1- Le mot commence par C

2- Le mot commence par C et se termine par Y.

3- Aucune restriction n'est faite.

Correction de l'exercice 5

Le nom CHANSLY comporte 7 lettres, donc former des mots de 4 lettres deux à deux distincts ayant un sens ou non à parti du nom CHANSLY revient à utiliser un arrangement.

1- Le mot commence par C, donc on a une seule disposition possible pour cette lettre, alors on va prendre les trois autres lettres dans l'ensemble des 6 lettres restantes :

{H ; A ; N ; S ; L ; Y}, le nombre de mot est donc :

$$1 \times A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

2- Le mot commence par C et se termine par Y, alors la position de ses deux lettres reste connue. Alors pour les deux autres lettres du milieu, on va les choisir parmi les 5 lettres restantes ; le nombre de mot est donc :

$$1 \times A_5^2 \times 1 = 20.$$

## Exercice 6

Dans le souci de mieux organiser leur quartier, les habitants décident de se regrouper en association. Cette association composée de 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Un élève de 1$^{ère}$ A, habitant ce quartier, décide de trouver les différents comités susceptibles d'être formés.

Détermine le nombre de façons qu'on peut former ce comité dans les cas suivants :

1- Chaque membre accepte de faire partie du comité.

2- M. Konan et Mme Yéo font partie des 20 membres de l'association et refusent de siéger ensemble.

Correction de l'exercice 6

1- L'association se compose de 5 personnes avec au moins 2 hommes et 2 femmes, alors on aura le cas où le comité va se constituer de 2 hommes et 3 femmes ou le cas où le comité aura en son sein 3 hommes et 2 femmes. Dans ses deux cas, aucune personne ne pourra occuper deux post en même temps ; on va donc utiliser des combinaisons vues que l'ordre n'a pas d'importance ici. Le nombre de cas possible est donc :

$$C_{12}^2 \times C_8^3 + C_{12}^3 \times C_8^2 = 8008$$

2- M. Konan et Mme Yéo refusent de siéger ensemble, donc on aura deux cas de figures ici ; si M. Konan est dans le bureau, Mme Yéo n'en fera pas parti ou si Mme Yéo est dans le bureau, M. Konan n'y sera pas. Le nombre de possibilités est déterminé presque de la même manière que dans la question1, mais tout en réservant la place de M. Konan ou Mme Yéo et en évitant de les mettre ensemble. Le nombre de possibilités est donc :

$$1 \times C_{11}^1 \times C_7^3 + C_{11}^3 \times 1 \times C_7^1 = 1540$$

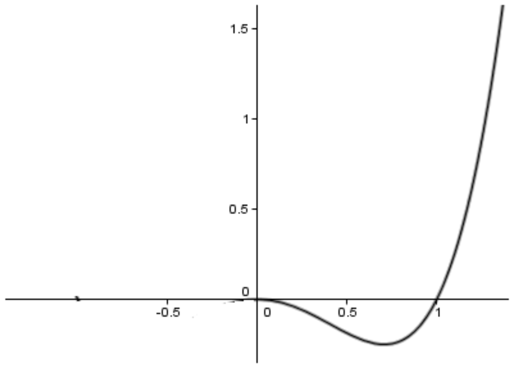
Première A

Mathématiques

# CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

**Leçon 3 : <u>GENERALITES SUR LES FONCTIONS</u>**

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

| | |
|---|---|
| Pendant une expérience en classe, un ordinateur donne différentes positions d'un objet mobile sur son écran.<br><br>Le professeur affirme qu'on peut utiliser les propriétés d'une fonction paire pour obtenir toute la trajectoire du mobile.<br><br>Curieux, les élèves décident d'approfondir leurs connaissances sur les fonctions paires ou impaires et leurs représentations graphiques. |  |



## B. RESUME DE COURS

### 1- FONCTIONS PAIRES - FONCTIONS IMPAIRES

Soit *f* une fonction définie sur l'ensemble IR. (C), sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

#### 1.1-Fonction paire

- **Définition**

Soit $f$ une fonction numérique d'ensemble de définition $D_f$.

$f$ est une **fonction paire** lorsque $\forall x \in D_f$, on a :

- $-x \in D_f$ et
- $f(-x) = f(x)$

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur IR par $f(x) = x^2 + 2$. Montrons que $f$ est paire

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$.

  $D_f$ = IR car $f$ est une fonction polynôme.

- Calculons $f(-x)$

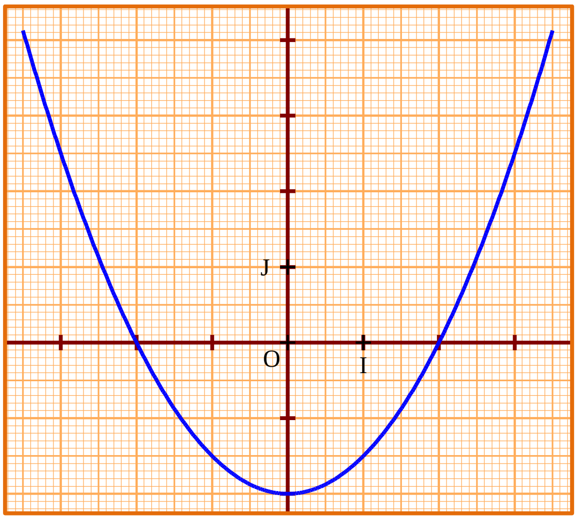
  Comme $D_f$ = IR ; on a : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

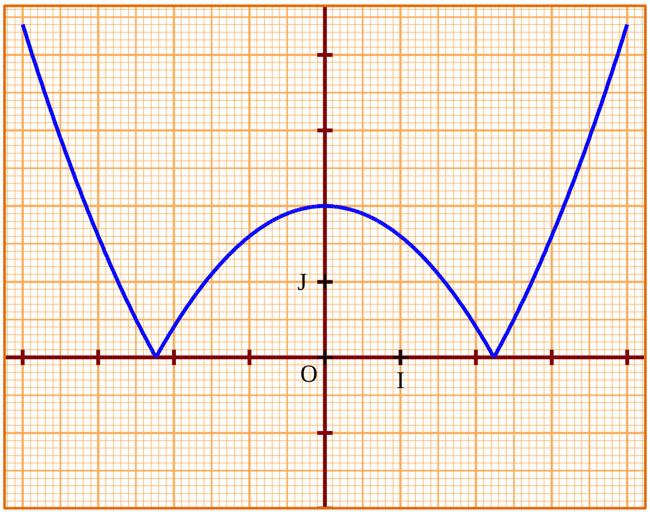
  De plus $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$

En conclusion $f$ est une fonction paire

● **Propriété**

Une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées (OJ) est un axe de symétrie de sa courbe représentative.




**Exercice de fixation**

Parmi les représentations graphiques ci-dessous, une seule est la représentation graphique d'une fonction paire.

Trouve la figure.

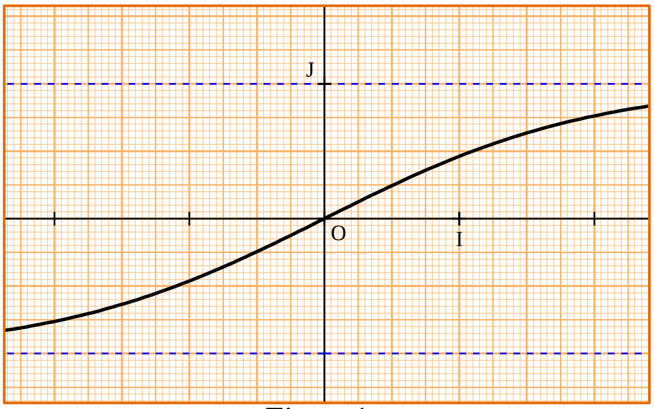



*Figure* 1

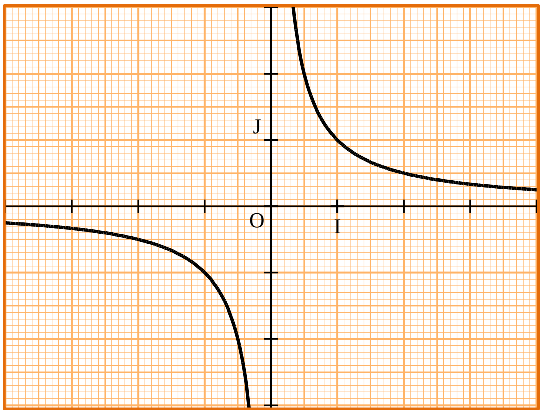



*Figure* 2

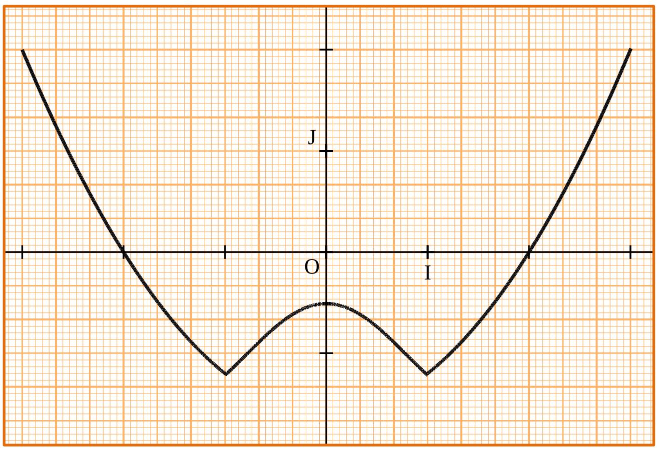



*Figure* 3

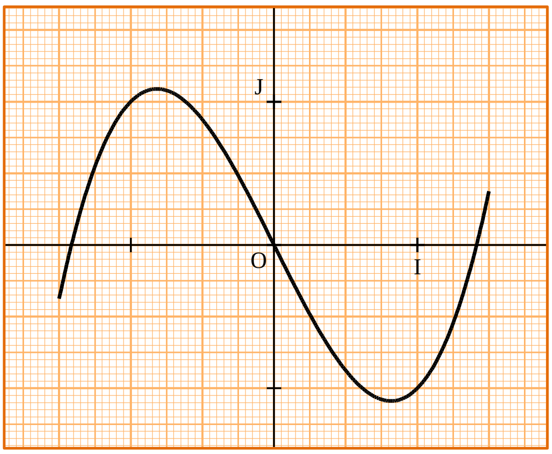



*Figure* 4

**SOLUTION**

*Figure 3*

### 1.2 Fonction impaire

●**Définition**

Soit $f$ une fonction numérique d'ensemble de définition $D_f$.

$f$ est une **fonction impaire** lorsque $\forall x \in D_f$, on a :

- $-x \in D_f$ et
- $f(-x) = -f(x)$

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x$. Montrons que la fonction $f$ est impaire.

- Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$.

  $D_f = \mathbb{R}$ car $f$ est une fonction polynôme.

- Calculons $f(-x)$.

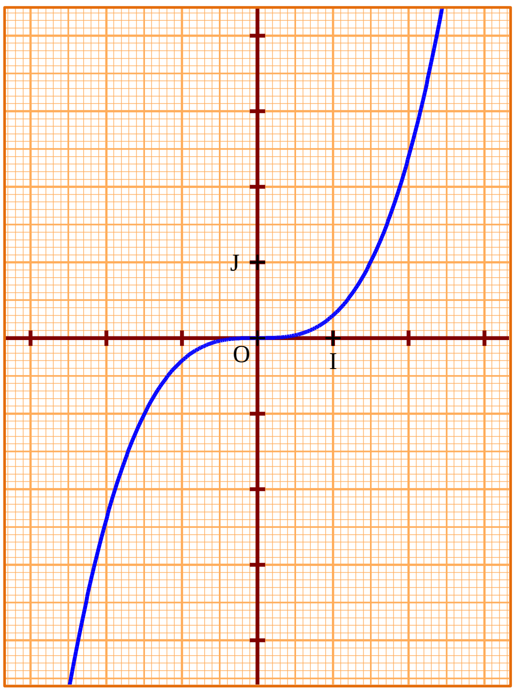
  Comme $D_f = \mathbb{R}$ ; on a : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

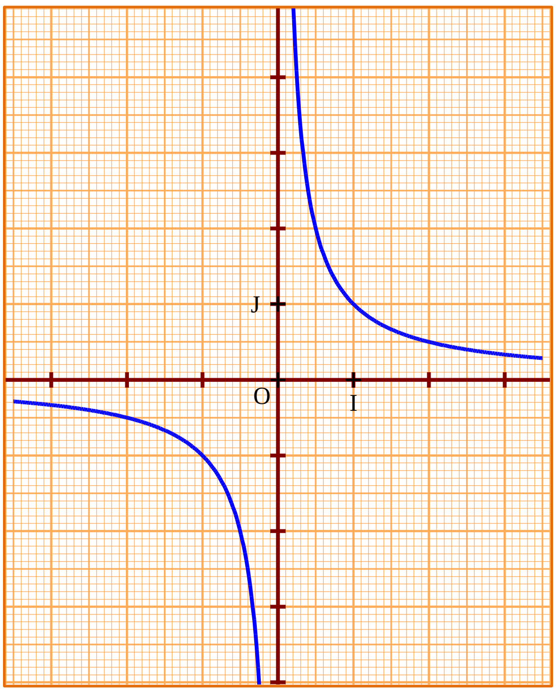
  De plus $f(-x) = (-x)^3 - 6x = -x^3 + 6x = -(x^3 - 6x) = -f(x)$

  En conclusion $f$ est une fonction impaire

● **Propriété**

Une fonction est impaire si et seulement si l'origine O du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.



**Exercice de fixation**

Parmi les représentations graphiques ci-dessous, deux d'entre eux représentent la courbe d'une fonction impaire.

Figure 1

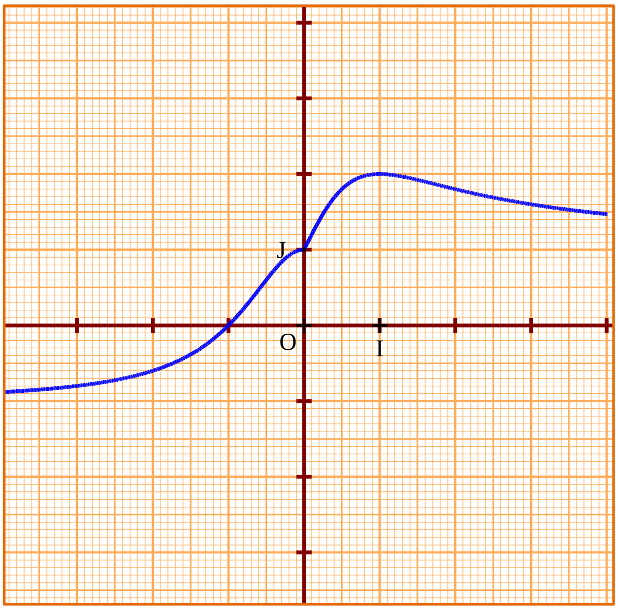



Figure 2

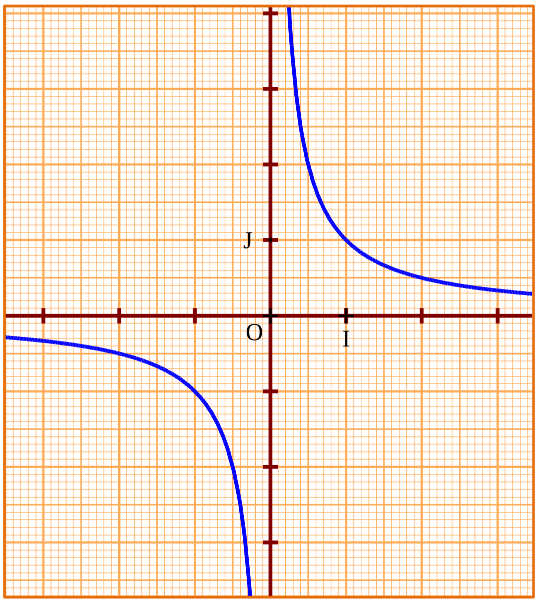



Figure 3

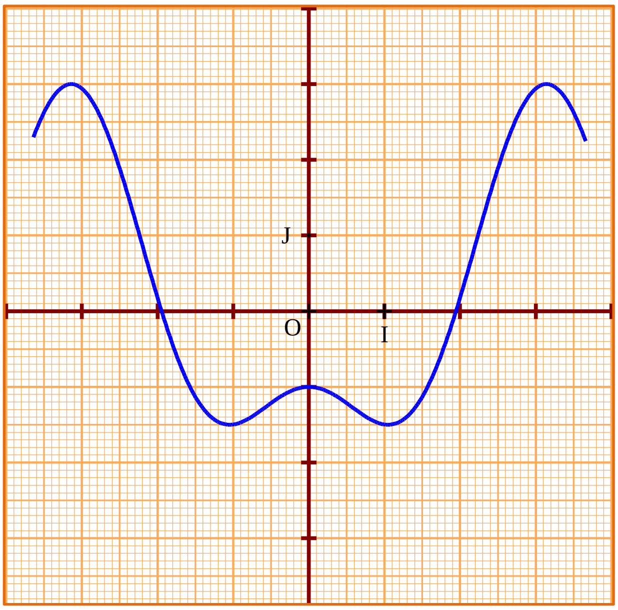
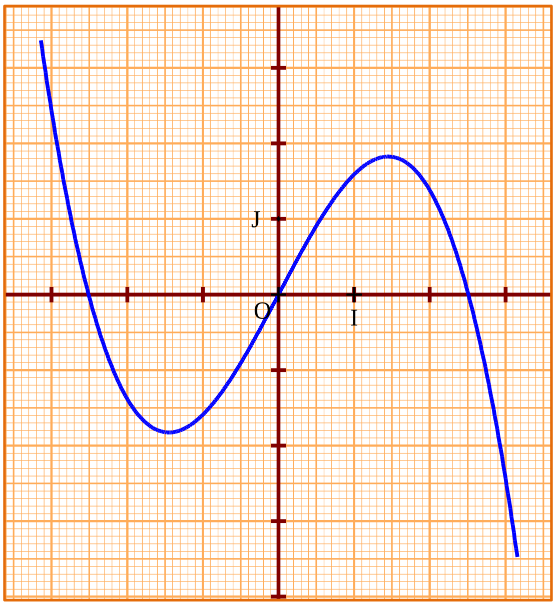



Figure 4




**SOLUTION**

*Figure 2 et Figure 4*

**Remarque :**
Il existe de nombreuses fonctions ne sont ni paires, ni impaires. Ainsi dans l'étude de la parité d'une fonction $f$, on arrive à l'une des conclusions suivantes : soit $f$ est paire, soit $f$ est impaire, soit $f$ est ni paire ni impaire.

## 2- AXE DE SYMETRIE – CENTRE DE SYMETRIE

Soit $f$ une fonction définie sur l'ensemble IR. $(C_f)$, sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

## 2.1 Axe de symétrie

**Propriété**

Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(C_f)$ et soit la droite (Δ) d'équation $x = a$.
(Δ) est un axe de symétrie de $(C_f)$ si et seulement si pour tout $h \in$ IR tel que $(a + h) \in D_f$, on a : $(a - h) \in D_f$ et $f(a+h) = f(a-h)$

**Exercice de fixation**

Soit la fonction $f$ définie sur IR par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
Justifier que la droite (Δ) d'équation $f(x) = (x-2)^2 + 1$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

**SOLUTION**

Justifions que la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

$f(x) = (x-2)^2 + 1$ et (Δ) : $x = 2$.

- $D_f$ = IR. Alors pour tout $h \in$ IR tel que $(2 + h) \in D_f$, on a : $(2 - h) \in D_f$.
- Calculons $f(2+h)$ et $f(2-h)$.
  $f(2+h) = (2+h-2)^2 + 1 = h^2 + 1$
  $f(2-h) = (2-h-2)^2 + 1 = (-h)^2 = h^2 + 1$
  D'où $f(2+h) = f(2-h)$ donc la droite (Δ) est bien un axe de symétrie de la courbe $(C_f)$.

## 2.2 Centre de symétrie

**Propriété**

Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(C_f)$ et $\Omega(a\,;b)$ un point du plan.
Ω est un centre de symétrie de $(C_f)$ si et seulement si pour tout $h \in$ IR tel que $(a + h) \in D_f$, on a : $(a - h) \in D_f$ et $\dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$

**Exercice de fixation**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.
Justifier que le point A(1 ; 2) est un centre de symétrie de $(C_f)$.

**SOLUTION**

Justifions que le point A(1 ; 2) est un centre de symétrie de $(C_f)$.

$f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ et A(1 ; 3).

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(1+h) \in D_f$, on a : $(1-h) \in D_f$.
- Calculons $f(1+h)$ ; $f(1-h)$ puis $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2}$.

$$f(1+h) = \frac{3(1+h)}{(1+h)-1} = \frac{3+3h}{h}$$

$$f(1-h) = \frac{3(1-h)}{(1-h)-1} = \frac{3-3h}{-h} = \frac{-3+3h}{h}$$

$$f(1+h)+f(1-h) = \frac{3+3h}{h} + \frac{-3+3h}{h} = \frac{6h}{h} = 6$$

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 3$$

D'où $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 3$ donc le point A est bien un centre de symétrie de la courbe $(C_f)$.

## C. SITUATION COMPLEXE

Pour compléter son rapport, Kouadio doit imprimer la figure 1 s'affichant à l'écran de son ordinateur. Son imprimante étant à court d'encre, l'impression produit la figure figure 2. Vu l'urgence et ne pouvant pas s'approvisionner en cartouche d'encre, Kouadio se propose de compléter soignement la fiche imprimée en observant les propriétés de la figure 1. Il sollicite ton aide à cette effet.

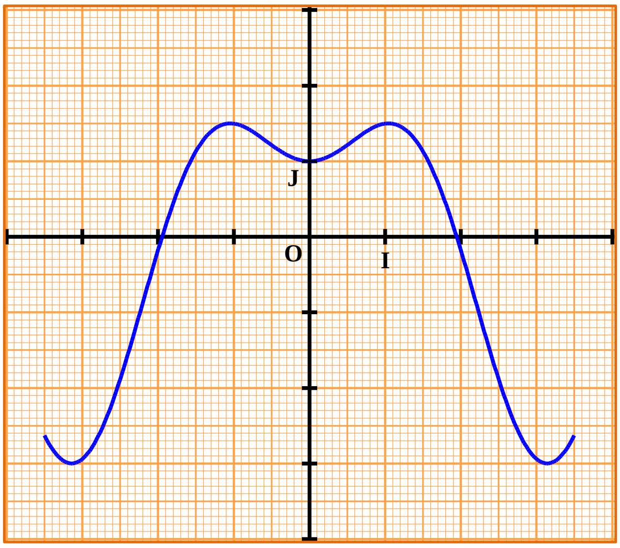



*Figure 1*

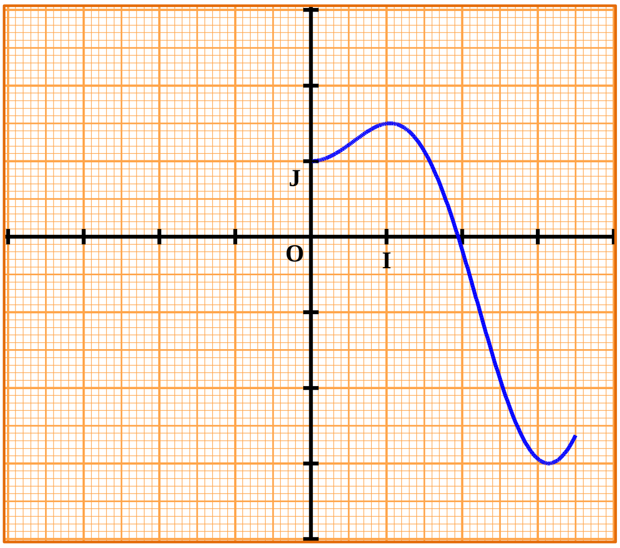



*Figure 2*

## SOLUTION

1°) La représentation graphique de la figure 1 admet l'axe des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie.

On peut donc compléter la figure en construisant le symétrique de la partie imprimée par rapport à l'axe (OJ).

## D. EXERCICES

## 1- EXERCICES DE FIXATION

### Exercice 1

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ ; on a indiqué ci-dessous quatre expressions de $f(x)$.

Complète en cochant la case correspondant à la réponse juste.

| $f(x)$ | paire | impaire | Ni paire, ni impaire |
|---|---|---|---|
| $x^2+1$ | | | |
| $2x^2-3x+1$ | | | |
| $3x^3-6x$ | | | |
| $\frac{-3}{x^2+1}$ | | | |

**SOLUTION**

| $f(x)$ | paire | impaire | Ni paire, ni impaire |
|---|---|---|---|
| $x^2+1$ | X | | |
| $2x^2-3x+1$ | | | X |
| $3x^3-6x$ | | X | |
| $\frac{-3}{x^2+1}$ | X | | |

### Exercice 2

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de correspondance ci-dessous.

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7 | | 2 | -3 | | -4,5 | |

Recopie puis complète le tableau si

1) $f$ est paire.
2) $f$ est impaire.

**SOLUTION**

1. $f$ est paire.

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7 | -4,5 | 2 | -3 | 2 | -4.5 | 7 |

2. $f$ est impaire.

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7 | 4,5 | 2 | -3 | -2 | -4.5 | -7 |

### Exercice 3

Soit la fonction $f$ définie sur par $f(x)=3x^2-2x$.

1- Calcule $f(1)$ et $f(-1)$.
2- Justifie que $f$ n'est pas paire.
3- a) La fonction est-elle impaire ?
   b) Si la fonction n'est par impaire, que peut-on conclure ?

**SOLUTION**

1. $f(1)=3\times1^2-2\times1=3-2=1$ et $f(-1)=3\times(-1)^2-2\times(-1)=3+2=5$

2. $f(1)=1$ et $f(-1)=5$. $f(1)\neq f(-1)$, $f$ n'est pas une fonction paire.

3. a) $f(1)=1$ et $f(-1)=5 \Longrightarrow -f(-1)=-5$. $f(1)\neq -f(-1)$, $f$ n'est pas une fonction impaire.

   b) $f$ n'est pas paire et $f$ n'est pas impaire. $f$ est donc ni paire ni impaire.

## 2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

### Exercice 3

On considère les fonctions $f$ ; $g$ et $h$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par respectivement :

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ; $g(x)=2-x^2$ et $h(x)=\left(x-1\right)^2$. Étudier la parité de chacune de ces fonctions.

**Solution**

Étude de la parité de la fonction $f$

- Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$.

  Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\in D_f \iff x^2-1\neq 0$
  $\iff (x-1)(x+1)\neq 0$
  $\iff x\neq 1$ et $x\neq -1$

  Donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

- Calculons $f(-x)$.

  Comme $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ ; on a : $\forall\, x\in D_f, -x\in D_f$.

  De plus $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x}{x^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$

  En conclusion $f$ est une fonction impaire

Étude de la parité de la fonction $g$

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition $D_g$ de la fonction $g$.

  $D_g=\mathbb{R}$ car $g$ est une fonction polynôme.

- Calculons $g(-x)$

  Comme $D_g=\mathbb{R}$ ; on a : $\forall\, x\in D_g, -x\in D_g$.

De plus $g(-x) = 2-(-x)^2 = 2-x^2 = g(x)$

En conclusion $g$ est une fonction paire

Étude de la parité de la fonction $h$

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition $D_h$ de la fonction $h$.

  $D_h = \mathbb{R}$ car $h$ est une fonction polynôme.
- Calculons $h(-x)$

  Comme $D_h = \mathbb{R}$ ; on a : $\forall\, x \in D_h, -x \in D_h$.

  De plus $h(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2$

  On constate que $h(-x) \neq h(x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$

  En conclusion $h$ est ni paire ni impaire.

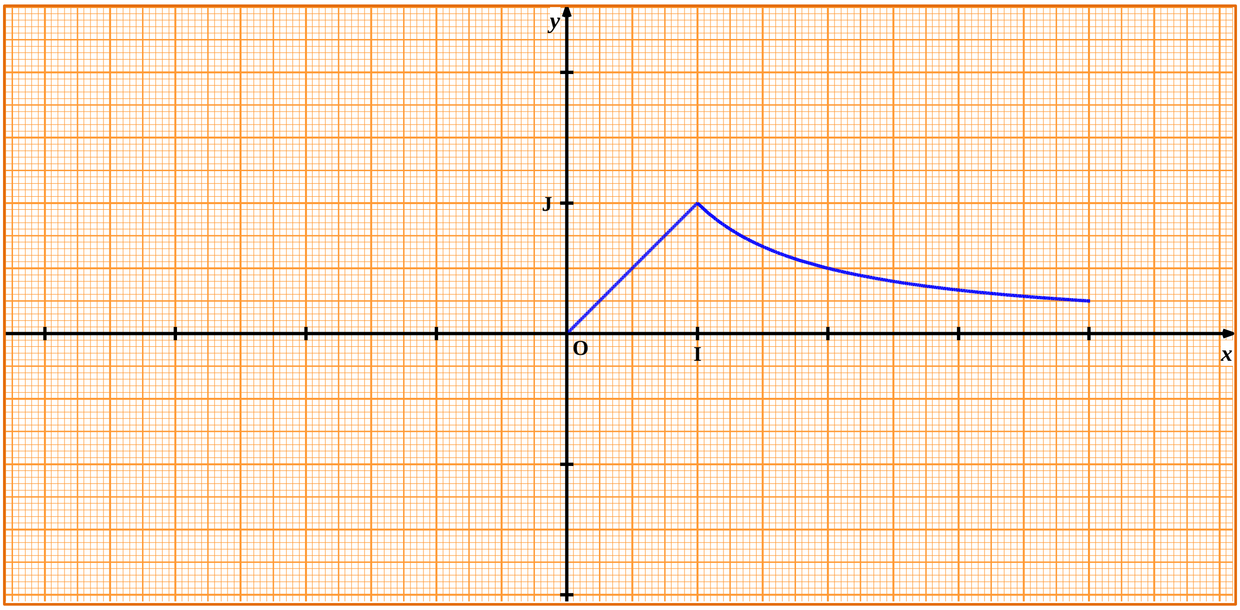
Conclusion : $f$ est impaire ; $g$ est paire et $h$ est ni paire ni impaire.

**Exercice 4**

La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique (C) d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition [-4 ; 4]. Reproduis puis complète (C) pour que

a) $f$ soit une fonction paire.

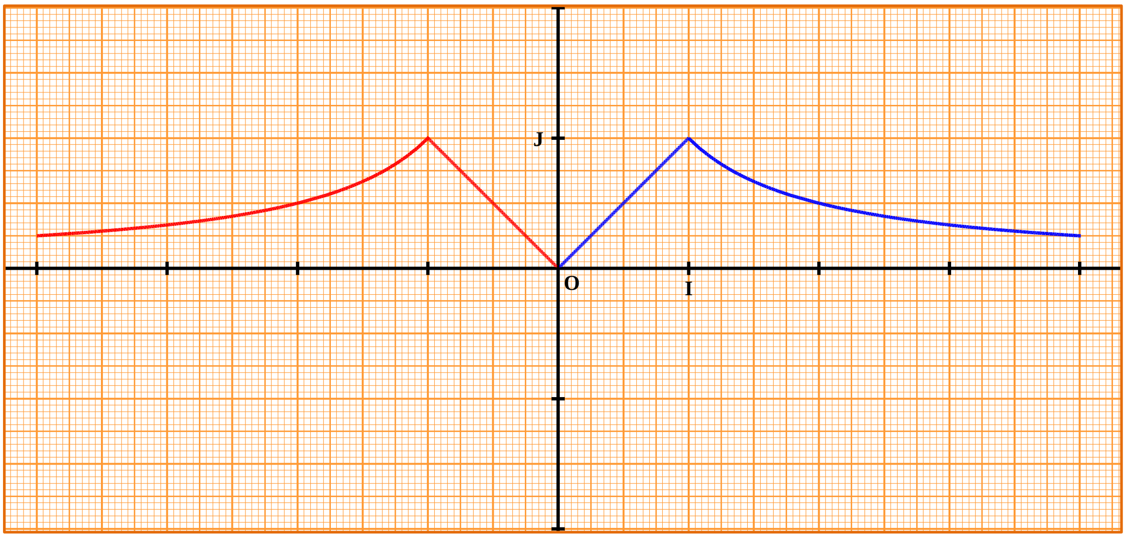
b) $f$ soit une fonction impaire.




**SOLUTION**

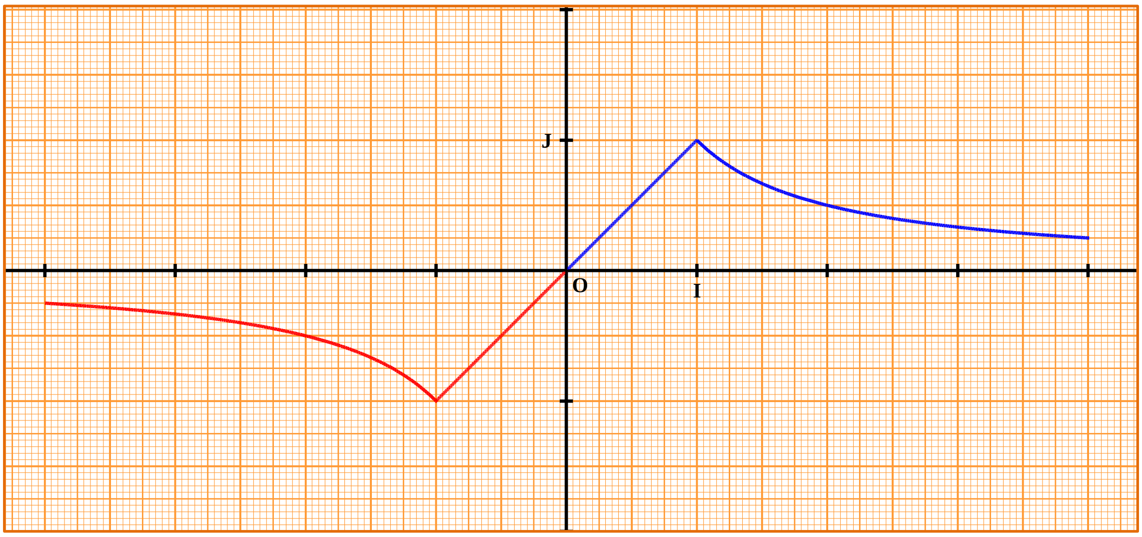
a) Cas où la fonction $f$ est paire.

Il suffit de construire le symétrique de la courbe par rapport à la droite des ordonnées (OJ).




b) Cas où la fonction $f$ impaire.

Il suffit de construire le symétrique de la courbe par rapport à l'origine du repère O.




**Exercice 5**

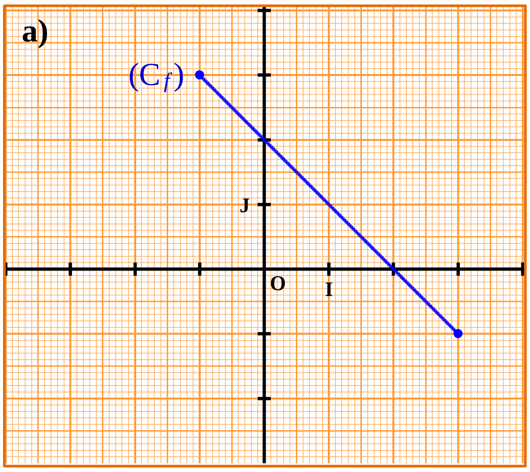
Le plan est muni d'un repère (O, I, J). $(C_f)$ est la représentation graphique d'une fonction $f$. Dans chacun des cas suivants :

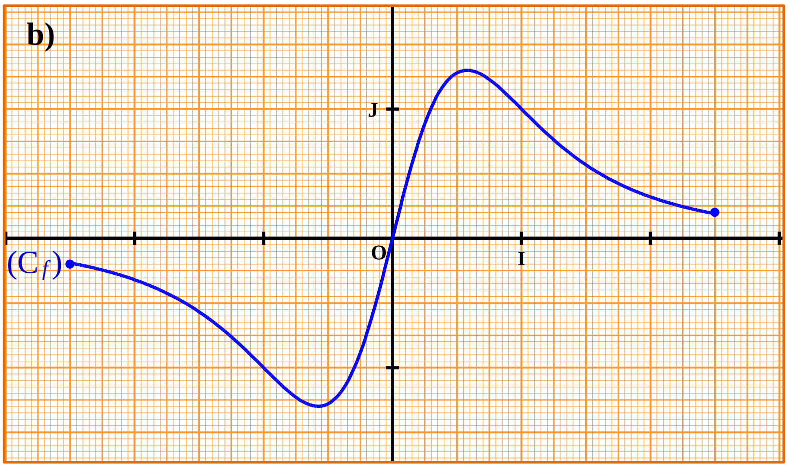
1- Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$.

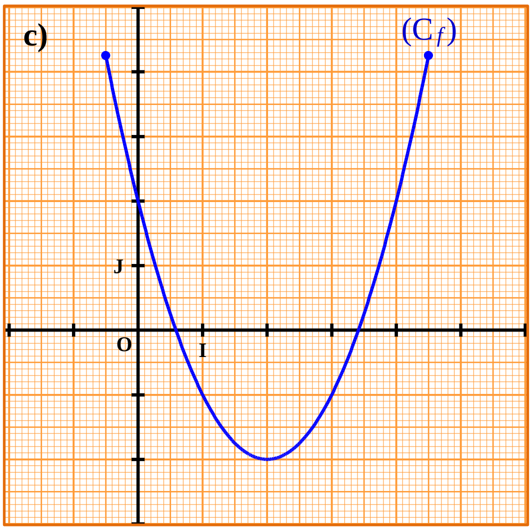
2- $(C_f)$ admet un élément de symétrie (c'est-à-dire un centre ou un axe de symétrie) .

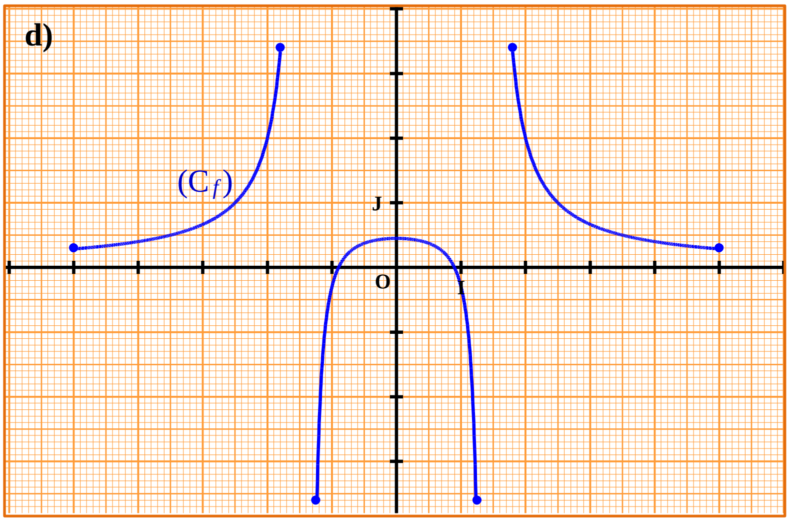
a) Détermine l'élément de symétrie.

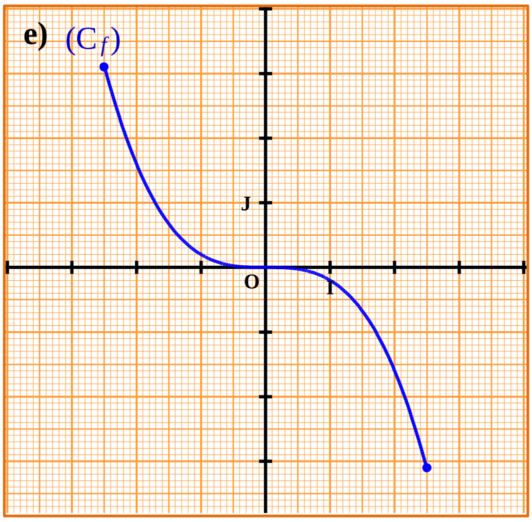
b) Précise la parité de $f$.

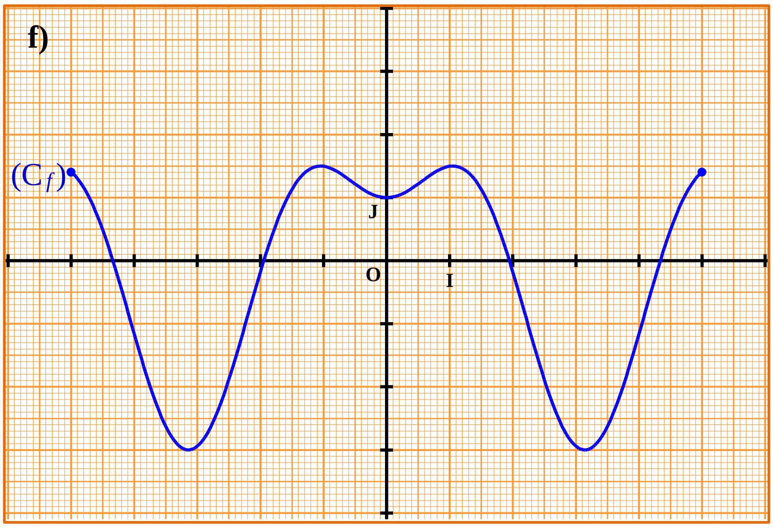



**SOLUTION**

Cas de la figure (a)

1. Ensembles de définition : [– 1 ; 3]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est le point A(1 ; 1)

   b) Parité : $f$ est ni paire ni impaire (le centre est différent de l'origine du repère O)

Cas de la figure (b)

1. Ensembles de définition : [-2,5 ; 2,5]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est l'origine du repère O

   b) Parité : $f$ est impaire

Cas de la figure (c)

1. Ensemble de définition : [-0,5 ; 4,5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui est la droite d'équation $x = 2$.
   b) Parité : $f$ est ni paire ni impaire (l'axe de symétrie est différent de la droite (OJ))

Cas de la figure (d)

1. Ensemble de définition : [-5 ; -1,8] ∪ [-1,2 ; 1,2] ∪ [1,8 ; 5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui l'axe des ordonnées (OJ)
   b) Parité : $f$ est ni paire ni impaire

Cas de la figure (e)

1. Ensemble de définition : [-2,5 ; 2,5]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est l'origine du repère O.
   b) Parité : $f$ est impaire

Cas de la figure (f)

1. Ensembles de définition : [-5 ; 5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui l'axe des ordonnées (OJ)
   b) Parité : $f$ est paire

| SECONDAIRE<br><br>$1^{ère}$A<br>MATHEMATIQUES | CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE |  |
| --- | --- | --- |

# Leçon 4 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une entreprise produit et commercialise des pièces destinées à l'industrie automobile. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de $x$ pièces peut être modélisé sur l'intervalle [0 ; 30] par une fonction B définie par :

$B(x) = -2x^2 + 60x - 400$.

Désireux d'accroître son bénéfice, le directeur de l'entreprise cherche le nombre de pièces à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
Ayant découvert un brouillon de ces recherches, son fils très curieux, en classe de première A, sollicite l'aide de ses camarades de classe.
Ceux-ci décident d'étudier et représenter une fonction.

## B. CONTENU DE LA LECON

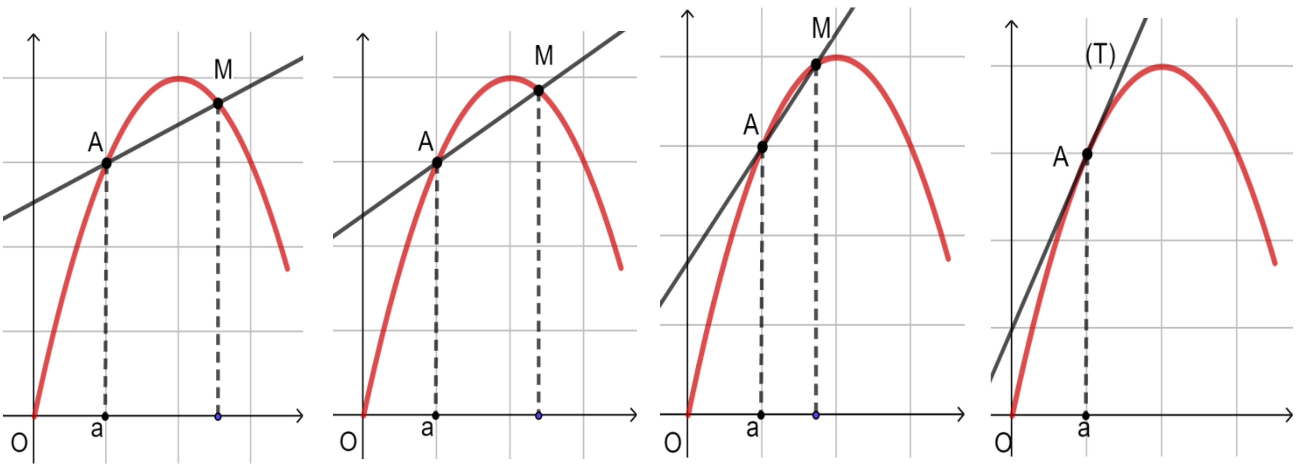
### I- DERIVATION

#### 1- Tangente à une courbe en un point

**Présentation**

Soient $f$ une fonction .$(C_f)$sa courbe representative, $A(a; f(a))$et $M(x; f(x))$deux points de $(C_f)$.
Lorsque le point $M$ se deplace sur la courbe$(C_f)$ et se rapproche de plus en plus du point $A$ la secante $(AM)$à cette courbe finit par prendre une « position limite » representée par la droite $(T)$(voir figures ci-dessous). On dit que la droite $(T)$est la tangente en $A$ à la courbe$(C_f)$.

**Illustration :**



Rappel : Le coefficient directeur de la droite $(AM)$ est $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

## 2- Nombre derive d'une fonction en un point

**Definition**

Soit $f$ une fonction definie sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ un element de $I$.

- On dit que $f$ est derivable en $a$ , lorsque la representation graphique de $f$ admet en son point d'abscisse $a$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
- On appelle nombre derivé de $f$ en $a$ le coefficient directeur de cette tangente.

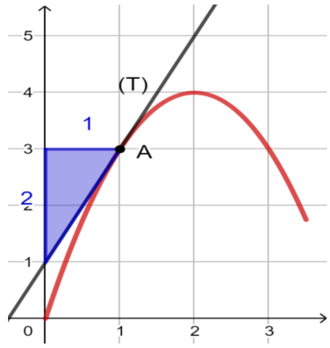
On note : $f'(a)$ ; on lit : $f$ prime de $a$ .

**Exemple :**

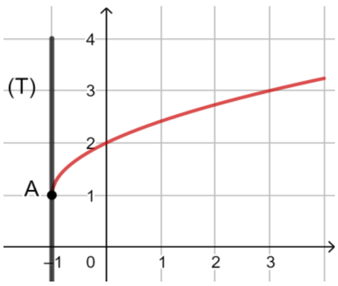
Soit $(C_f)$ la courbe representative d'une fonction $f$ dans le plan muni d'un repere orthonormé $(O,I,J)$.

La courbe $(C_f)$ admet au point $A(1;3)$ une tangente (T) de coefficient directeur 2.

La fonction $f$ est donc derivable en 1 et $f'(1)=2$.




Au point $A$ d'abscisse $-1$, la courbe ci-contre admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées . donc la fonction representée ci-contre n'est pas derivable au point d'abscisse $-1$.




## 3- CALCULS DE DERIVEES

### a- Fonction dérivée

**Définition**

Soit une fonction $f$ dérivable en tout élément d'un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$

La fonction qui a tout nombre $x$ élément de $I$ associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de $f$ .

Elle se note $f'$.

On a : $\begin{aligned} f' : I &\rightarrow IR \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$.

### b- Dérivée de fonctions de référence

| Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | $f$ est dérivable sur l'intervalle |
|---|---|---|
| $x \mapsto k \ (k \in IR)$ | $x \mapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x$ | $x \mapsto 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto ax+b$ | $x \mapsto a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^2$ | $x \mapsto 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^3$ | $x \mapsto 3x^2$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |

**Exercice de fixation**

Répond par Vrai si l'affirmation est vraie et par Faux si l'affirmation est fausse.

1- La dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ est la fonction $x \mapsto 3x$ sur $\mathbb{R}$.

2- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.

3- La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -120x$ est la fonction $x \mapsto -120$

**corrigé**

1- Faux
2- Faux
3- Vrai

**c- Derivées et operations sur les fonctions**

$u$ et $v$ sont deux fonctions definies et derivables sur un intervalle ouvert $I$

| Fonction | Fonctions dérivée | Dérivable sur |
|---|---|---|
| Somme : $u+v$ | $u'+v'$ | $I$ |
| Produit : $u\ v$ | $u'v+uv'$ | $I$ |
| Produit par un nombre réel : $ku$ | $ku'$ | $I$ |
| Quotient : $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ | $\{x \in I \ / \ v(x) \neq 0\}$ |
| Inverse : $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $\{x \in I \ / \ v(x) \neq 0\}$ |

**Exercice de fixation**

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués

$Q(x) = x + x^3$ ; $\quad I = IR$

$J(x) = \sqrt{2}\ x$ ; $\quad I = IR$

$V(x) = \frac{2}{x}$ ; $\quad I = ]1;+\infty[$

**corrigé**

$Q'(x) = 1 + 3x^2$ ; $\quad J'(x) = \sqrt{2}$ ; $\quad V'(x) = \frac{-2}{x^2}$

**d- Equation de la tangente à une courbe**

**Proprieté**

Soient $f$ une fonction, $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$ et $A$ un point de $(C_f)$ d'abscisse $a$. Lorsque $f$ est derivable en $a$ ,une équation de la tangente à $(C_f)$ au point $A$ d'abscisse $a$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

**<u>Cas particulier</u> : Tangente horizontale.**

Lorsque $f'(a) = 0$, la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse $a$ est parallèle à l'axe des abscisses.

On dit que $(C_f)$ admet **une tangente horizontale** au point d'abscisse $a$ dans le cas d'un plan muni d'un repère orthogonal ou orthonormé $(O, I, J)$.

**<u>Exercice de fixation</u>**

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 1$ et ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Justifie que $f'(1) = -3$.
2. Détermine une équation de la tangente à ($C_f$) au point d'abscisse 1.

**Corrigé**

1- On a : $f'(x) = -3x^2$ et $f'(1) = -3 \times 1^2$ . Donc $f'(1) = -3$

2- On a : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f(1) = 0$. Donc $y = -3x + 3$

## II- <u>ETUDE DE FONCTION</u>

### 1- <u>Sens de variation d'une fonction</u>

**<u>Propriété</u>**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $IR$.

▪Si pour tout $x \in I$ , $f'(x) \geq 0$ alors la fonction $f$ est croissante sur $I$.

▪Si pour tout $x \in I$ , $f'(x) \leq 0$ alors la fonction $f$ est décroissante sur $I$.

▪Si pour tout $x \in I$ , $f'(x) = 0$ alors la fonction $f$ est constante sur $I$.

**<u>Exercice de fixation</u>**

On considere la fonction g derivable sur [-1 ; 3].

On suppose que la fonction derivée g' est tel que : $\begin{cases} \forall\, x \in [-1; 1], & g'(x) \leq 0 \\ \forall\, x \in [1; 3], & g'(x) \geq 0 \end{cases}$

Determine le sens de variation de la fonction de la fonction g sur [-1 ; 3].

**<u>corrigé</u>**

2- La fonction g est decroissante sur $[-1; 1]$

**3-** La fonction g est croissante sur $[1; 3]$.

**<u>Remarque</u>**

Le tableau de variation d'une fonction peut être un tableau du type ci-dessous :

| $x$ | $a$ | $x_0$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\searrow$ |

►la flêche « monte » pour indiquer que la fonction est croissante sur l'intervalle $]a; x_0]$.

►la flêche « descend » pour indiquer que la fonction est decroissante sur l'intervalle $[x_0; b[$.

**Exercice de fixation**

On considère la fonction f définie sur [-1 ;3] par $f(x = x^2 - 2x + 5$ , croissante sur $[1; 3]$et décroissante sur $[-1; 1]$.

dresse le tableau de variation de f sur [-1 ; 3].

**corrigé**

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $8$ | ↘ | $4$ | ↗ | $8$ |

## 2 Extremum relatif d'une fonction sur un intervalle

### 2-2-1. Propriété

Soit $f$ une fonction derivable sur un intervalle $]a; b[$ et $x_0$ un element de $]a; b[$ .Si $f'$s'annule en $x_0$ et change de signe alors $f$ admet un extremum relatif en $x_0$ .

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $M$ | ↘ | |

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $m$ | ↗ | |

$f$ admet un maximum relatif $M$ en $x_0$ .     $f$ admet un minimum relatif $m$ en $x_0$ .

**Remarque :**

Un maximun relatif ou un minimum relatif est appele simplement un **extremum relatif.**

**Exercice de fixation**

On donne le tableau de variation d'une fonction $f$ ci-dessous :

| $x$ | $-4$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-5$ | ↗ | |

La fonction $f$ admet un extremum relatif sur l'intervalle $]-4; 3[$ .

Precise la nature de cet extremum , sa valeur et en quel nombre cet extremum existe

**corrigé:**

D'après le tableau de variation de $f$ , la fonction $f$ admet sur l'intervalle $]-4; 3[$ un minimum relatif égal à $-5$ en 1.

## C-. SITUATION COMPLEXE

Une entreprise produit et commercialise des pièces destinées à l'industrie automobile. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de $x$ pièces peut être modélisé sur l'intervalle [0 ; 30] par une fonction B définie par :
$B(x) = -2x^2 + 60x - 400$.
N'ayant pas de personnel qualifié mais désireux d'accroître son bénéfice, le directeur de l'entreprise désire déterminer le nombre de pièces à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le père sollicite son fils élève de1ère A, Qui décide a l'aide de ses acquits mathématiques de Répondre à la préoccupation de son père.

**<u>Corrigé</u>**

Pour repondre à la preoccupation du directeur,on utilise :

- la lecon derivabilité et etude de fonction
- Pour cela
- on étudie les variations de la fonction B sur [0 ; 30]
- on dresse son tableau de variation.
- _On Calcule la derivée de la fonction B.
- on doit determiner sil existe le maximum de la fonction B.

- <u>Calculons la derivée de la fonction B</u>

$\forall x \in [0; 30], B'(x) = -4x + 60$

- <u>Determinons le signe de la derivée</u>

On a : $B'(x) = -4x + 60$

Tableau de signe

| $x$ | 0 | | 15 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | + | | − | |

- <u>Etudions le sens de variation de B.</u>

$\forall x \in [0; 15], B'(x) \geq 0$; donc B est croissante sur $[0; 15]$
$\forall x \in [15; 60], B'(x) \leq 0$; donc B est croissante sur $[15; 60]$

- <u>Dressons le tableau de variation</u>

| $x$ | 0 | | 15 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $B(x)$ | -400 | ↗ | 50 | ↘ | -1300 |

- <u>Conclusion</u>

La fonction B atteint son maximum au point d'abscisse 15.
Pour réaliser un bénéfice maximal, l'entreprise doit produire 15 pièces.

## D. EXERCICES

### 1- Exercices d'application

**Exercice 1**

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction g.

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $8$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $24$ |

Justifie que la fonction g admet un extremum relatif en 0

**Corrigé**

D'après le tableau de variation, la fonction dérivée g' de g s'annule en 0 en changeant de signe, donc g admet un extremum relatif en 0.

**Exercice 2**

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $K$ donné.

a- $f: x \mapsto 7\sqrt{3}$ avec $K = \mathbb{R}$
b- $f: x \mapsto \frac{-3}{x}$ avec $K == [1; 5]$
c- $f: x \mapsto 3x^2 + 7x$ avec $K = \mathbb{R}$

**Corrigé**

a- $f'(x) = 0$

b- $f'(x) = \frac{3}{x^2}$

c- $f'(x) = 6x + 7$

### 2- Exercices de renforcement

**Exercice 3**

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction g.

| $x$ | $-3$ | | -1 | | 1 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | $+$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | 8 | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ | 5 | $\nearrow$ | 24 |

1. Justifie que la fonction g admet un extremum relatif en -1.
2. Justifie que 5 n'est pas un extremum relatif.

**Corrigé**

D'après le tableau de variation, la fonction dérivée g' de g s'annule en -1 en changeant de signe, donc g admet un extremum relatif en -1

D’après le tableau de variation, la fonction dérivée g’ de g s’annule en 1 et ne change pas de signe, donc g n’admet pas d’extremum relatif en 1.

**<u>Exercice 4</u>**

On considère la fonction h de IR vers IR, définie par $h(x) = x^3 - 3x + 5$ , ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Calcule la dérivée de la fonction h.
2. Détermine une équation de la tangente au point d’abscisse 0.
3. Etudie le sens de variation de h sur [-2 ; 2]
4. Etablis le tableau le tableau de variation de h sur [-2 ; 2].
5. a- Complète le tableau suivant.

| *x* | *-2* | *-1,5* | *-1* | *1,5* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|
| *h’(x)* | | *6,1* | | *3,9* | |

b- Construis la courbe ($C_f$) dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. <u>corrigé</u>
2. <u>Calculons la dérivée de la fonction h.</u>

$\forall x \in IR, h^{'}(x) = 3x^2 - 3$

3. <u>Déterminons une équation de la tangente au point d’abscisse 0.</u>

On a : $y = h^{'}(0)(x - 0) + f(0)$ or $h(0) = 5$ et $h^{'}(0) = -3$ . Donc $y = -3x + 5$

4. <u>Etudions le sens de variation de h sur [-2 ; 2]</u>

<u>Signe de la derivée</u>

On a : $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

<u>Tableau de signe</u>

| *x* | -2 -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| *3* | + | + | + |
| *x-1* | - | - | + |
| *x+1* | - | + | + |
| *h’(x)* | + | - | + |

<u>Sens de variations</u>
$\forall x \in [-2; -1] \cup [1; 5], h'(x) \geq 0$; donc $h$ est croissante sur les intervalles $[-2; -1]$ et $[1; 2]$
$\forall x \in [-1; 1], h'(x) \leq 0$; donc h est croissante sur $[-1; 1]$

5. <u>Etablissons le tableau le tableau de variation de h sur [-2 ; 5]</u>

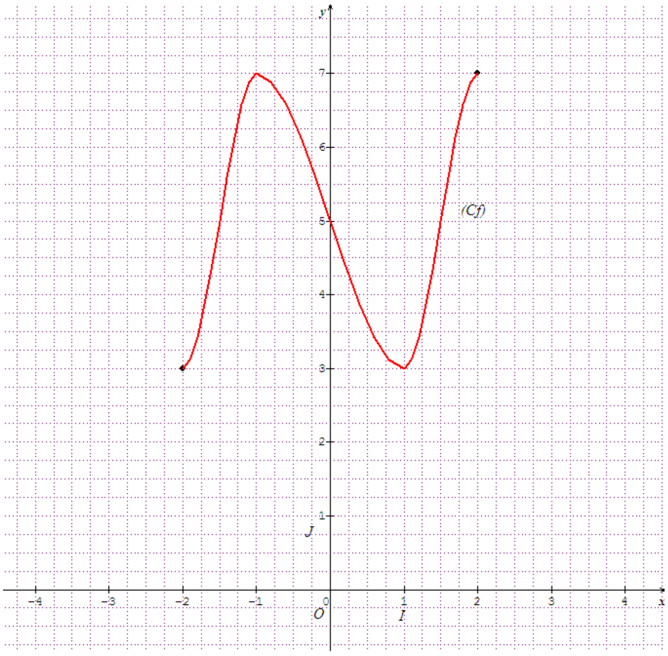
| $x$ | -2 | | -1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | 7 | ↘ | | ↗ | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| | 3 | 3 |

6. a- Complétons le tableau suivant.

| *x* | *-2* | *-1,5* | *-1* | *1,5* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|
| *h'(x)* | *3* | *6,1* | *7* | *3,9* | *7* |

b- Construis la courbe ($C_f$) dans un repère orthogonal (O, I, J).




**3- Exercices d'approfondissement**

**Exercice 5**

On considère la fonction h de IR vers IR, définie par $h(x) = x^3 + 5x^2 + 3x$ , ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Justifie que la dérivée de la fonction h est $h'(x) = 3x^2 + 10x + 3$.
2. Etudie le signe de $h'(x)$
3. Démontre que h est croissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$ et décroissante sur $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$
4. Dresse le tableau de variation de h sur [-5 ; 3].

**1. Corrigé**

**2. Justifions que la dérivée de la fonction h est $h'(x) = 3x^2 + 10x + 3$.**

On a : $h'(x) = (x^3 - 5x^2 + 3x)' = 3x^2 - 10x + 3$

**3. Etudions le signe de $h'$**

On a : $h'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$\Delta = 10^2 - 4 \times (3) \times 3 = 100 - 36 = 64$ , donc $h'(x)$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-10+\sqrt{64}}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-10-\sqrt{64}}{2\times3} = -3$,

Tableau de signe de $h'(x)$:

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Donc

Pour tout $x \in [-5;-3] \cup \left[-\frac{1}{3};3\right]$ , $h'(x) \geq 0$

Pour tout $x \in \left[-3;-\frac{1}{3}\right]$ , $h'(x) \geq 0$

**4. Démontrons que h est croissante sur les intervalles $[-5;-3]$ et $\left[-\frac{1}{3};3\right]$ et décroissante sur $\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$**

$\forall\ x \in [-5;-3] \cup \left[-\frac{1}{3};3\right]$ , $h'(x) \geq 0$ , h est croissante sur les intervalles $[-5;-3]$ et $\left[-\frac{1}{3};3\right]$

$\forall\ x \in \left[-3;-\frac{1}{3}\right]$ , $h'(x) \leq 0$, h est décroissante sur $\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$.

**5. Dressons le tableau le tableau de variation de h sur [-5 ; 3].**

| $x$ | -5 | | -3 | | $-\frac{1}{3}$ | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | -15 | ↗ | 3 | ↘ | $-\frac{13}{27}$ | ↗ | 81 |

## V. DOCUMENTS

Mon cahier d'habiletés MATHS $1^{ère}$ A ( JD editions) ; mon cahier de la reussite $1^{ère}$ A (VALLESSE edition) ; CIAM $1^{ère}$ A.

# Leçon 6 : STATISTIQUES

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Après un devoir, le professeur de mathématiques d'une classe de 1ère a mis à la disposition des élèves les notes suivantes :

10 07 10 05 12 11 12 10 16 08 11 07 13 04 03 07 13 08 16 02 16 10 12 09 17 11 09 05 10 09.

Curieux de savoir s'ils ont bien travaillé, les élèves décident d'organiser ces données, de faire des calculs et des représentations graphiques.

## B. RESUME DE COURS

### I. SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSES

**Rappel**

Lorsqu'il est question d'une série statistique regroupée en classes, on considère le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs de X | $[x_1; x_2[$ | $[x_2; x_3[$ | $[x_3; x_4[$ | ... | $[x_p; x_{p+1}[$ | TOTAL |
| Effectifs | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | ... | $n_p$ | N |
| Centre | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | ... | $c_p$ | |

- L'amplitude de la classe $[x_1; x_2[$ est $x_2 - x_1$
- Le centre $c_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$

**Exemple :**

On donne la série statistique suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |

Les amplitudes et les centres des différentes classes de cette série statistique sont déterminées dans le tableau suivant :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| Centre | 3 | 6,5 | 10,5 | 13,5 | 17,5 |
| Amplitude | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 |

- $c_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et l'amplitude de la classe $[1; 5[$ est $5 - 1 = 4$.

**Définition**

On appelle densité d'une classe, le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

**Exemple** On donne la série statistique suivante :

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| Centre | 3 | 6,5 | 10,5 | 13,5 | 17,5 |
| Amplitude | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 |

La densité de la classe [1 ; 5[ est $\frac{12}{4} = 3$.

## II. Caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes

### 1. Classe modale

**Définition**

On appelle classe modale toute classe dont la densité est maximale

**Exemple**

La classe modale de cette série statistique si dessous est [13 ; 14[.

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| Densités | 3 | 9,33 | 6,4 | 24 | 1,14 |

**Cas particulier :**

Si toutes les classes ont la même amplitude, alors une classe modale est une classe dont l'effectif est maximal.

### 2. Moyenne

La moyenne d'une série statistique, notée : $\bar{x}$ , est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p) .$$

En utilisant les fréquences, on a :

$$\bar{x} = f_1c_1 + f_2c_2 + \cdots + f_pc_p.$$

**Exercice de fixation**

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |

Calcule la moyenne de la série statistique.

**Solution**

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 | 104 |
| Centre des classes | 3 | 6,5 | 10,5 | 13,5 | 17,5 | |

La moyenne est : $\frac{1}{104}(12 \times 3 + 28 \times 6,5 + 32 \times 10,5 + 24 \times 13,5 + 8 \times 17,5) = 9,79$

### 3. Médiane

**Définition :**

La médiane d'une série statistique continue est un nombre qui sépare les valeurs ordonnées de la série en deux familles de même effectif.
Autrement dit : c'est un nombre M tel qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

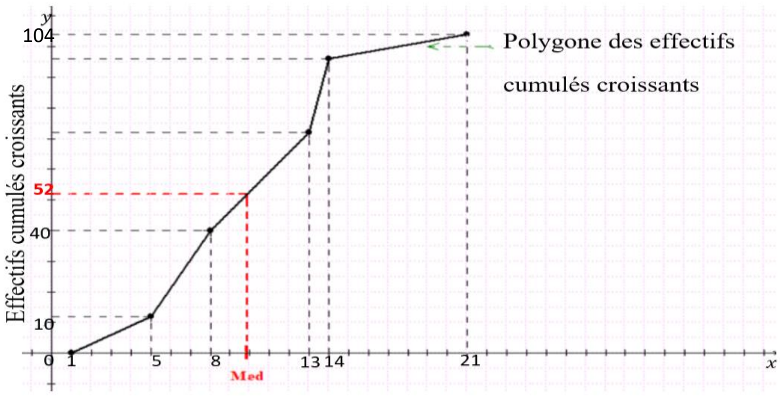
Elle se détermine :

- Soit graphiquement : c'est l'abscisse du point de la courbe cumulative des effectifs (resp. fréquences) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5) ;

**Exemple :**

Considérons la série statistique suivante et son polygone des effectifs cumulés croissants:

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| Effectifs cumulés croissants(Ecc) | 12 | 40 | 72 | 96 | 104 |



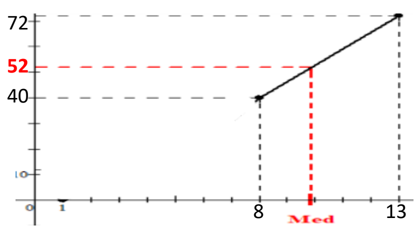

La médiane est environ égale à 9.

- Soit par interpolation linéaire.

**Exemple :**

Considérons l'exemple précédent.

On a : $\frac{N}{2} = \frac{104}{2} = 52$ ; 52 est compris entre le 40$^{e}$ rang et le 72$^{e}$ rang. On a Me ∈ [8 ; 13[.




On obtient le tableau suivant :

| Modalités (Abscisse) | 8 | Me | 13 |
|---|---|---|---|
| Ecc (Ordonnée) | 40 | 52 | 72 |

Alors

$\frac{Me-8}{13-8} = \frac{52-40}{72-40}$, donc Me = 9,87

### 4. Quartiles

**Définition :**

Les valeurs de la série étant ordonnées :

- Le premier quartile, noté $Q_1$, est la valeur de la variable telle que 25% des valeurs sont inférieures ou égales à $Q_1$ et 75% lui sont supérieures.
- Le deuxième quartile $Q_2$, est la médiane.

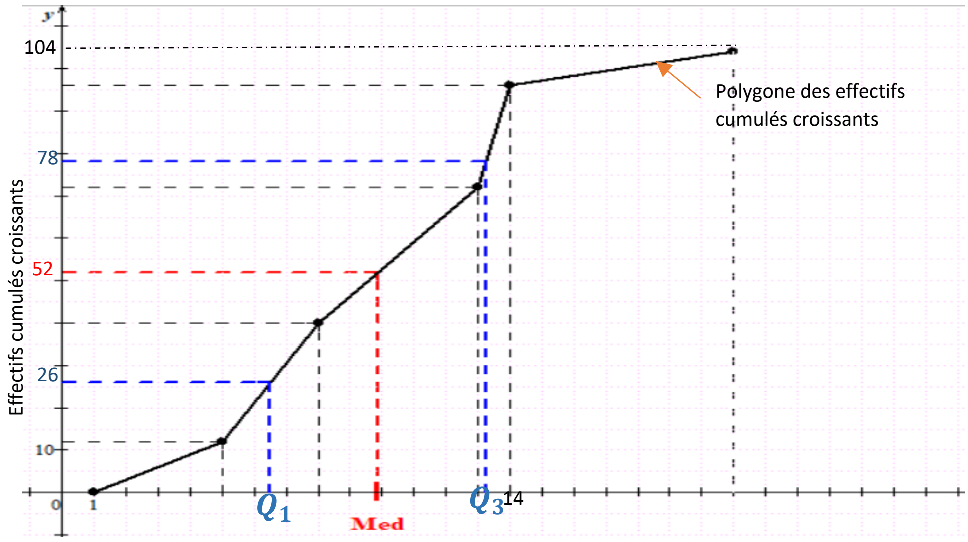
- Le troisième quartile, noté $Q_3$, est la valeur de la variable telle que 75% des valeurs sont inférieures ou égales à $Q_3$ et 25% lui sont supérieures.

➢ Graphiquement,
  - $Q_1$ correspond à 25% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
  - $Q_3$ correspond à 75% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.

**<u>Exemple :</u>**

Considérons la série statistique suivante et son polygone des effectifs cumulés croissants:

| Classes | [1 ; 5[ | [5 ; 8[ | [8 ; 13[ | [13 ; 14[ | [14 ; 21[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| Effectifs cumulés croissants (Ecc) | 12 | 40 | 72 | 96 | 104 |




Le premier quartile est environ égal à 7.

Le troisième quartile est environ égal à 13.

➢ On peut calculer une valeur plus précise de $Q_1$ et $Q_3$ par interpolation linéaire.

<u>Calculons le premier quartile</u>

N$\times \frac{25}{100} = 104 \times \frac{25}{100} = 26$ ; 26 est compris entre le 12$^e$ rang et le 40$^e$ rang. On a $Q_1 \in [5; 8[$

Alors $\frac{Q_1 - 5}{8-5} = \frac{26-12}{40-12}$, donc $Q_1 = 6,5$

<u>Calculons le troisième quartile</u>

N$\times \frac{75}{100} = 104 \times \frac{75}{100} = 78$ ; 78 est compris entre le 72$^e$ rang et le 96$^e$ rang. On a $Q_3 \in [13; 14[$

Alors $\frac{Q_3 - 13}{14-13} = \frac{78-72}{96-72}$, donc $Q_1 = 13,25$

## III. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

### 1. Histogramme

- L'histogramme d'une série statistique regroupée en classes est constitué de rectangles juxtaposés.
- L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (resp. la fréquence) de la classe correspondante.
- Les largeurs des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes des classes.
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes

**Exercice de fixation**

On donne la série statistique suivante :

| Modalité | [2 ; 3[ | [3 ; 4,5[ | [4,5 ; 5,5[ | [5,5 ; 6[ | [6 ; 8[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0,15 |
| Amplitude | | | | | |
| Centre | | | | | |
| Densité | | | | | |

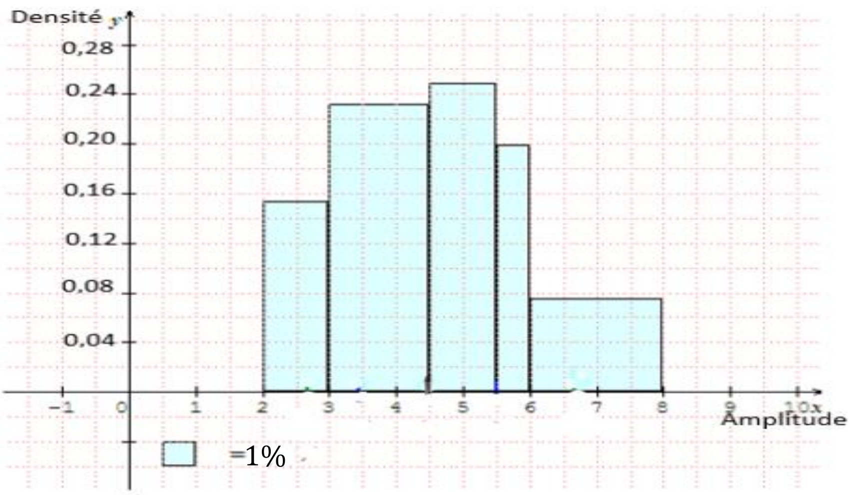
a- Complète le tableau
b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

**Solution**

a- Complétons le tableau

| Modalité | [2 ; 3[ | [3 ; 4,5[ | [4,5 ; 5,5[ | [5,5 ; 6[ | [6 ; 8[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0,15 |
| Amplitude | 1 | 1,5 | 1 | 0,5 | 2 |
| Centre | 2,5 | 3,75 | 5 | 5,75 | 7 |
| Densité | 0,15 | 0,23 | 0,25 | 0,2 | 0,075 |

b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistiquE




La surface d'un petit carreau est $0,5 \times 0,02 = 0,01$ soit 1%

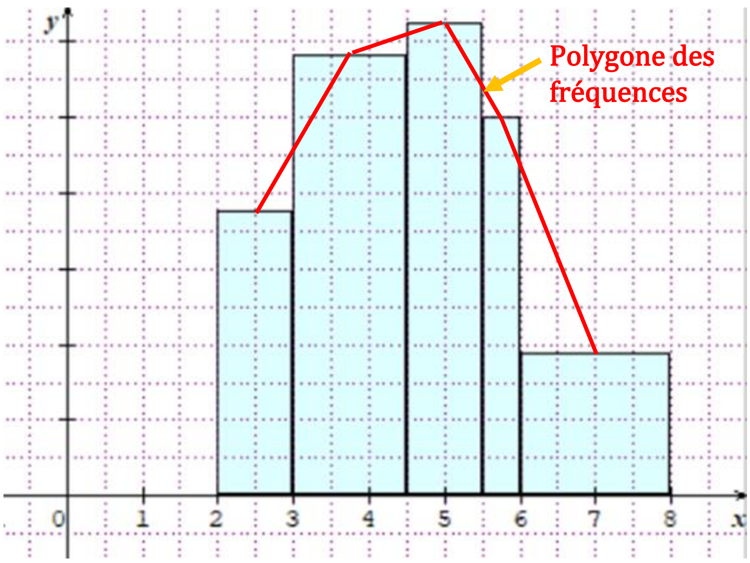
## 2. Polygones des effectifs et des fréquences

Le polygone des effectifs (resp. fréquences) est obtenu en joignant les milieux successifs des côtés les plus hauts de chaque rectangle de l'histogramme.

**Exercice de fixation**

Construis le polygone des fréquences de la série statistique dont l'histogramme des fréquences est donné ci-dessous.


**Solution**




## 3. Courbes cumulatives

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de la fonction F définie sur IR et à valeurs dans l'intervalle [0 ; N] telle que :

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}[$, F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i) = N_i$ et $g(x_{i+1}) = N_{i+1}$, où $N_i$ est l'effectif cumulé croissant de $[x_i; x_{i+1}[$ et $N_{i+1}$ celui de $[x_{i+1}; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = N$.

La courbe cumulative des fréquences est la représentation graphique de la fonction F définie sur IR et à valeurs dans l'intervalle [0 ;1] telle que :

- Si $x \leq x_1$, alors $\mathrm{F}(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_1; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i)=F_i$ et $g(x_{i+1}) = F_{i+1}$, où $F_i$ est la fréquence cumulée croissante de $[x_i; x_{i+1}[$ et $F_{i+1}$ celle de $[x_i ;x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $\mathrm{F}(x) = 1$.

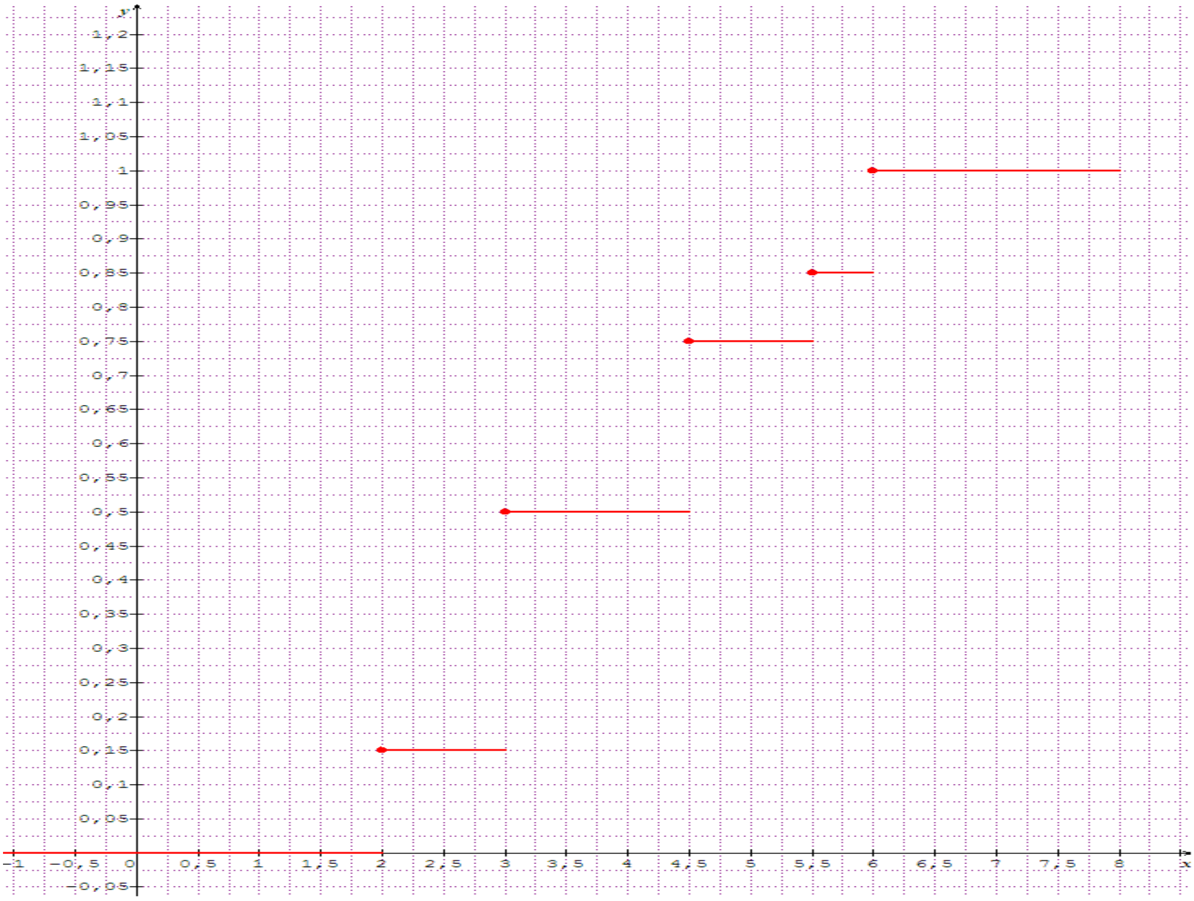
**<u>Exercice de fixation</u>**

On donne la série statistique suivante :

| Classes | [2 ; 3[ | [3 ; 4,5[ | [4,5 ; 5,5[ | [5,5 ; 6[ | [6 ; 8[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquences | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0,15 |
| Fréquences cumulées | 0,15 | 0,5 | 0,75 | 0,85 | 1 |

Construis la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

**<u>Réponse attendue</u>**



## IV. <u>CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIQUE REGROUPEES EN CLASSES</u>

### 1. <u>Variance</u>

La variance d'une série statistique regroupée en classe, notée V, est donnée par la formule :

$$V = \frac{1}{N}\left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_p\left(c_p - \bar{x}\right)^2\right]$$

Autre formule :

$$V=\frac{1}{N}\left(n_1c_1^2+n_2c_2^2+\cdots+n_pc_p^2\right)-\bar{x}^2$$

**<u>Exercice de fixation</u>**

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |

a- Justifions que la moyenne est 39,84
b- Calcule la variance de cette série.

**<u>Solution</u>**

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |
| Centre | 10 | 30 | 50 | 80 | 120 | 170 |

a/ <u>la moyenne $\bar{x}$</u>

$$\bar{x}=\frac{35\times10+41\times30+30\times50+12\times80+5\times120+2\times170}{125}=39{,}84$$

b/ <u>la variance V</u>

$$V=\frac{35\times10^2+41\times30^2+30\times50^2+12\times80^2+5\times120^2+2\times170^2}{125}-(39{,}84)^2=988{,}77$$

## 2. <u>Ecart type</u>

L'écart type d'une série statistique, noté $\sigma=\sqrt{V}$.

**<u>Exercice de fixation</u>**

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |

Calcule l'écart type de cette série

**Solution**

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |
| Centre | 10 | 30 | 50 | 80 | 120 | 170 |

On trouve $V=988{,}77$

L'écart type $\sigma$

$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{988{,}77}=31{,}44.$

## 3. <u>Ecart absolu moyen</u>

L'écart absolu moyen, noté $e_m$, est le réel : $\frac{1}{N}(n_1 \times |c_1 - \bar{x}| + n_2 \times |c_2 - \bar{x}| + \ldots + n_p \times |c_p - \bar{x}|)$.

**Exercice de fixation**

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |

Calcule l'écart absolu moyen de cette série.

**Solution**

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |
| Centre | 10 | 30 | 50 | 80 | 120 | 170 |
| $\lvert c_i - \bar{x}\rvert$ | 29,84 | 9,84 | 10,16 | 40,16 | 80,16 | 130,16 |
| $n_i\lvert c_i - \bar{x}\rvert$ | 1044,4 | 403,44 | 304,8 | 481,92 | 400,8 | 260,32 |

On trouve la moyenne $\bar{x} = 39{,}84$

L'écart absolu moyen

$e_m = \frac{1}{125}(35 \times |10 - 39{,}84| + 41 \times |30 - 39{,}84| + 30 \times |50 - 39{,}84| + 12 \times |80 - 39{,}84| + 5 \times |120 - 39{,}84| + 2 \times |170 - 39{,}84|)$

$e_m = \frac{2895{,}68}{125} = 23{,}17$

## 4. Ecart interquartile

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est le nombre $Q_3 - Q_1$.

**Exercice de fixation**

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |

Calcule l'écart interquartile de cette série

**Solution**

| Temps en (min) | [0 ; 20[ | [20 ; 40[ | [40 ; 60[ | [60 ; 100[ | [100 ; 140[ | [140 ; 200[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 |
| Effectifs cumulés croissants | 35 | 76 | 106 | 118 | 123 | 125 |

- On a $125 \times \frac{25}{100} = 31{,}25$.

31,25 est plus petit que la $35^e$ valeur. Donc $Q_1 \in [0\ ;\ 20[$.

$\frac{Q_1 - 0}{20 - 0} = \frac{31{,}25 - 0}{35 - 0}$ donc $\boldsymbol{Q_1 = 17{,}86}$

- On a $125 \times \frac{75}{100} = 93{,}75$.

93,75 est compris entre la $76^e$ et la $106^e$ valeur. Donc $Q_3 \in [40\,;\,60[$.

$\frac{Q_3-40}{60-40} = \frac{93,75-76}{106-76}$ donc $Q_3 = 51,83$

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$ =51,83-17,86=33,97

## C. SITUATION COMPLEXE

Au cours de la dernière campagne agricole, une centrale d'achat d'anacarde dans la ville de Bondoukou a acheté plusieurs quantités de noix de cajou auprès des coopératives qui lui sont affiliées. Les données sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

| Quantités achetées en tonnes | [2 ; 4[ | [ 4 ; 6[ | [ 6 ; 8[ | [8 ; 10[ | [ 10 ; 12[ | [ 12 ; 14[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombres de coopératives | 16 | 12 | 8 | 7 | 5 | 2 |

Le gérant de cette centrale négocie un crédit bancaire pour augmenter son capital afin d'attirer plusieurs coopératives agricoles.

La banque fixe deux conditions auxquelles la centrale doit satisfaire pour l'obtention du crédit :

**Condition 1** : le tonnage moyen acheté par cette centrale doit être au moins 6 tonnes au cours de cette campagne.

**Condition 2** : le tonnage médian doit être supérieur à 5 tonnes.

Membre de cette centrale d'achat, ton papa t'explique les conditions de la banque et te demande ton avis sur l'obtention du crédit bancaire.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, donne ton avis.

**Solution**

Pour donner mon avis, je vais utiliser la leçon sur les Statistiques. Pour cela je vais :

-Compléter le tableau de cette série statistique en ajoutant les centres des classes et les effectifs cumulés croissants

-Calculer la moyenne de cette série statistique

- Calculer la médiane de cette série statistique.

- Je complète le tableau

| Modalités | [2 ; 4[ | [ 4 ; 6[ | [ 6 ; 8[ | [8 ; 10[ | [ 10 ; 12[ | [ 12 ; 14[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 16 | 12 | 8 | 7 | 5 | 2 | 50 |
| Centre de la classe | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | |
| Effectifs cumulés croissants | 16 | 28 | 36 | 43 | 48 | 50 | |

- Je calcule la moyenne de cette série.

$$\bar{x} = \frac{16 \times 3 + 12 \times 5 + 8 \times 7 + 7 \times 9 + 5 \times 11 + 2 \times 13}{50} = 6,16$$

- Je calcule la médiane de cette série.

$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$ ; 25 est compris entre le $16^e$ rang et le $28^e$ rang. On a Me $\in [4\,;\,6[$

Alors $\frac{Me-4}{6-4} = \frac{25-16}{28-16}$, donc $Me = 4 + 2 \times \frac{25-16}{28-16} = 5,5$

On a : $\bar{x} > 6$ et $M_e > 5$.

Comme les deux conditions sont satisfaites, alors la centrale pourra bénéficier du prêt bancaire.

## D. EXERCICES

### Exercices de Fixation

### Exercice 1

On donne la série statistique suivante d'effectif total 100.

| Modalité | [ 3 ; 5[ | [5 ; 6,5[ | [6,5 ; 7[ | [ 7 ; 10[ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,25 | 0,35 | 0,3 | 0,1 |
| Amplitude | | | | |
| Centre | | | | |
| Densité | | | | |
| Effectif | | | | |

Complète le tableau.

### Solution

| Modalité | [ 3 ; 5[ | [5 ; 6,5[ | [6,5 ; 7[ | [ 7 ; 10[ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,25 | 0,35 | 0,3 | 0,1 |
| Amplitude | 2 | 1,5 | 0,5 | 3 |
| Centre | 4 | 5,75 | 6,75 | 8,5 |
| Densité | 0,125 | 0,23 | 0,6 | 0,03 |
| Effectif | 25 | 35 | 30 | 10 |

### Exercice 2

On donne la série statistique suivante.

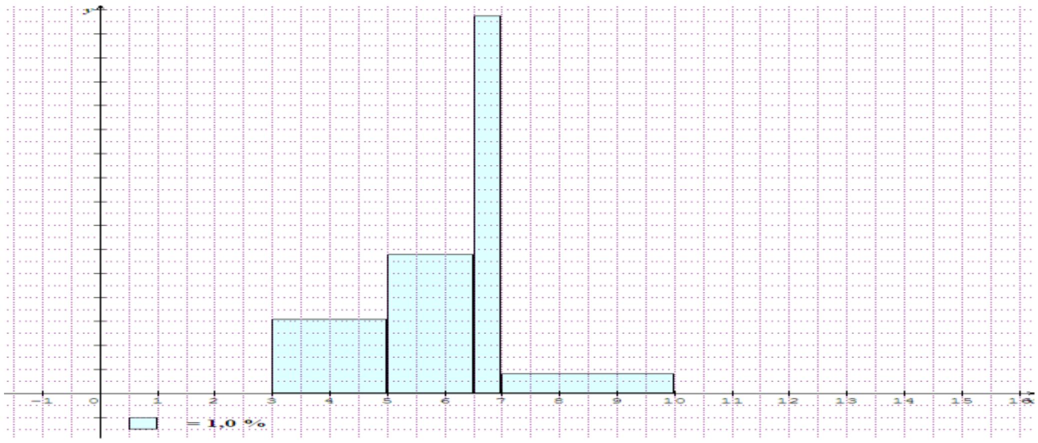
| Modalité | [ 3 ; 5[ | [5 ; 6,5[ | [6,5 ; 7[ | [ 7 ; 10[ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,25 | 0,35 | 0,3 | 0,1 |

1/ Construis l'histogramme des fréquences en pourcentage de la série.

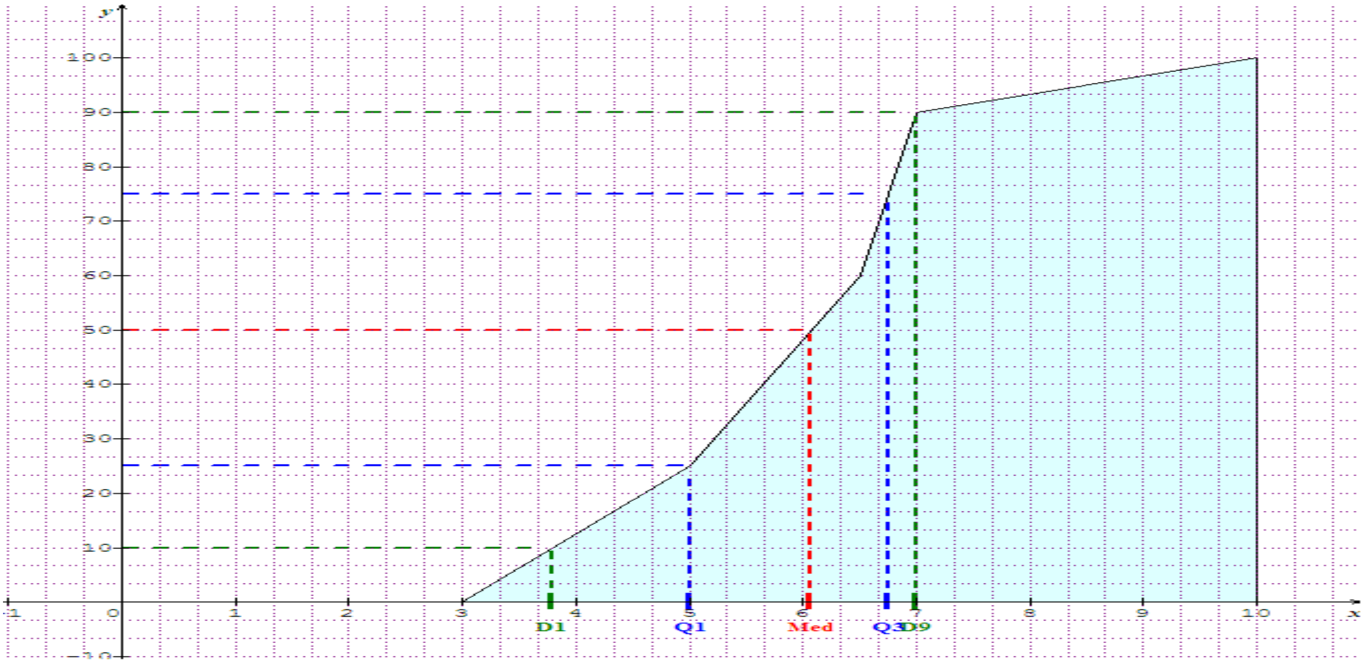
2/ Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série.

### Réponse attendue

1/ Construisons l'histogramme des fréquences en pourcentage de la série.




2/ Construisons le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série.




**Exercice de renforcement**

**Exercice 3**

On considère la série statistique ci-dessous

| Notes | [ 0 ; 5[ | [ 5 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 25 | 86 | 69 | 20 |

1/ Détermine la classe modale de cette série.

2/ Calcule la médiane de cette série. Donne une interprétation de ce résultat.

3/ a) Détermine le premier quartile et le troisième quartile de cette série.

b) Détermine l'écart interquartile.

**Réponse attendue**

1/ Déterminons la classe modale de cette série.

Etablissons le tableau des densités.

| Notes | [ 0 ; 5[ | [ 5 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 25 | 86 | 69 | 20 |
| Amplitudes | 5 | 4 | 3 | 8 |
| Densités | 5 | 21,5 | 23 | 2,5 |

La classe modale de cette série est la classe [9 ; 12[.

2/ Calcule la médiane de cette série. Donne une interprétation de ce résultat.

Etablissons le tableau des effectifs cumulés croissants

| Notes | [ 0 ; 5[ | [ 5 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 25 | 86 | 69 | 20 |
| Effectifs cumulées croissants | 25 | 111 | 180 | 200 |

$\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$ ; 100 est compris entre le 25e rang et le 111e rang. On a Me ∈ [5 ; 9[

Alors $\frac{Me-5}{9-5} = \frac{100-25}{111-25}$,

Donc $Me = 5 + 4 \times \frac{100-25}{111-25} = 8{,}48$

Interprétation

50% des élèves ont une note inferieure à 8,48

3/ a) Détermine le premier quartile et le troisième quartile de cette série.

- Déterminons le premier quartile $Q_1$

$\frac{N}{4} = \frac{200}{4} = 50$ ; 50 est compris entre le 25e rang et le 111e rang. On a $Q_1 \in [5 ; 9[$

Alors $\frac{Q_1-5}{9-5} = \frac{50-25}{111-25}$,

Donc $Q_1 = 5 + 4 \times \frac{50-25}{111-25} = 6{,}12$

- Déterminons le troisième quartile $Q_3$

$N \times \frac{75}{100} = \frac{200 \times 3}{4} = 150$ ; 150 est compris entre le 111e rang et le 180e rang. On a : $Q_3 \in [9 ; 12[$

Alors $\frac{Q_3-9}{12-9} = \frac{150-111}{180-111}$ ,

Donc $Q_3 = 9 + 3 \times \frac{150-111}{180-111} = 10{,}69$

b) Déterminons l'écart interquartile.

$Q_3 - Q_1 = 10{,}69 - 6{,}12 = 4{,}57$

**Exercice 4**

On considère la série statistique ci-dessous

| Notes | [ 0 ; 5[ | [ 5 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 25 | 86 | 69 | 20 |

1/ Calcule la note moyenne

2/ Calcule la variance et l'écart type de la série statistique.

3/ Calcule l'écart absolu moyen de la série statistique.

**Réponse attendue**

1/ Calculons la note moyenne

Etablissons le tableau des centres des classes

| Notes | [ 0 ; 5[ | [ 5 ; 9[ | [9 ; 12[ | [12 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 25 | 86 | 69 | 20 |

| Centre des classe | 2,5 | 7 | 10,5 | 16 |
|---|---|---|---|---|

$$m = \frac{25 \times 2,5 + 86 \times 7 + 69 \times 10,5 + 20 \times 16}{200} = 8,545$$

Donc la note moyenne est 8,545

2/ Calcule la variance et l'écart type de la série statistique.

- La variance V

$$V=\frac{25\times2.5^2+86\times7^2+69\times10,5^2+20\times16^2}{200} - (8,545)^2 = 12,47$$

- L'écart type $\sigma$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{12,47} = 3,53.$$

3/ Calcule l'écart absolu moyen de la série statistique.

$$e_m = \frac{25 \times |2.5 - 8,545| + 86 \times |7 - 8,55| + 69 \times |10,5 - 8,545| + 20 \times |16 - 8,545|}{200} = 2,839$$

**Exercices d'approfondissement**

**Exercice 5**

La série suivante donne la répartition de PME en fonction de leur chiffre d'affaires en millions de francs CFA.

| Chiffres d'affaires | [0 ; 2,5[ | [2,5 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 25[ | [25 ; 50[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'entreprises | 137 | 106 | 112 | 154 | 100 |

1/ Calcule les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.

2/ a) Trace la courbe cumulative croissante des fréquences.

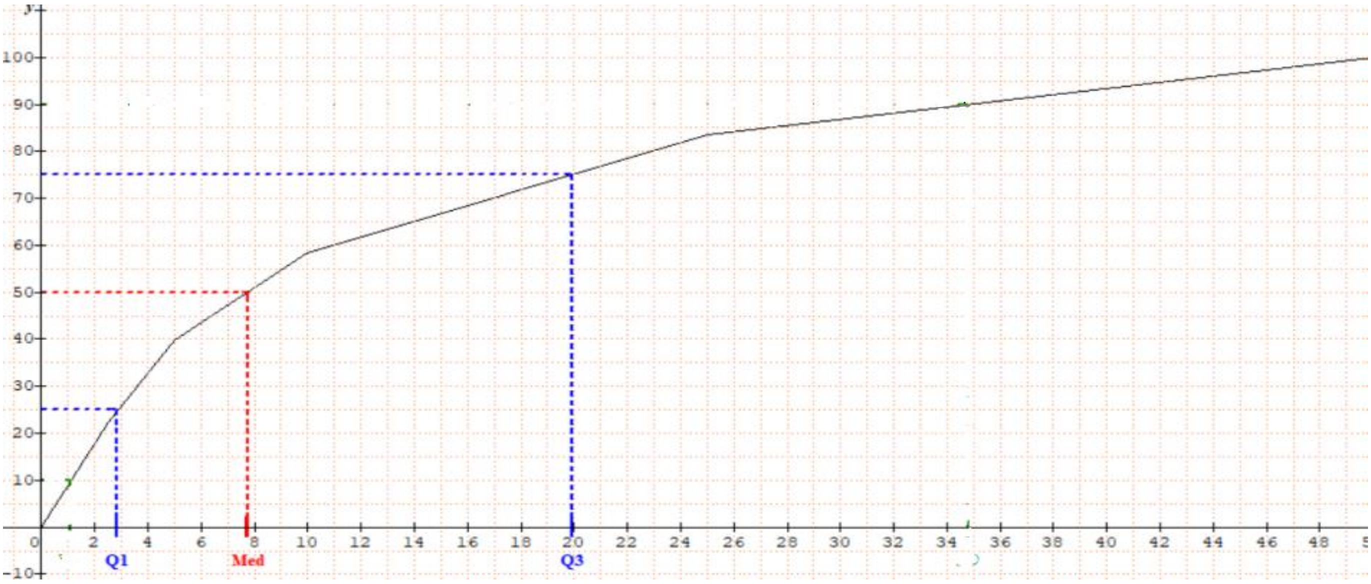
b) Détermine graphiquement la médiane, le premier quartile et le troisième quartile .

**Solution**

1/ Calcul des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.

| Chiffres d'affaires | [0 ; 2,5[ | [2,5 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 25[ | [25 ; 50[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'entreprises | 137 | 106 | 112 | 154 | 100 | 609 |
| Fréquences | 0,24 | 0,17 | 0,18 | 0,25 | 0,16 | 1 |
| Fréquences cumulées croissantes | 0,22 | 0,39 | 0,57 | 0,82 | 0,98 | |

2/ a) La courbe cumulative croissante des fréquences.




b) Détermination graphique de la médiane, du premier quartile et du troisième quartile.

D'après la courbe cumulative des fréquences, on a :

$Q_1=3$ ; $M_e=7,8$ ; et $Q_3=20$.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

-----------------------------------

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

# MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
$2^{nde}$ C
MATHÉMATIQUES

## CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

# Durée : 8 heures                Code :

## Compétence 1 Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

## Thème2 : Fonctions

# Leçon : SYSTEMES D'INEQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

## A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

En raison du jeûne de ramadan un père de famille veut faire des provisions de vivres. Il achète du riz et du sucre dont la masse totale est inférieure à $72\ kg$ .Il déclare avoir dépensé au maximum la somme de 45 600 FCFA où le kilogramme du riz coûte 600 FCFA et celui du sucre 800 FCFA. Curieuse, sa fille en classe de première A souhaitant connaitre la masse totale correspondante à chaque article acheté, sollicite l'aide de ses camarades de classe qui décident d'en savoir plus sur les méthodes de résolutions des systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## B- CONTENU DE LA LECON

## 1. Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1-1. Définition

Soit $a$, $b$ et $c$ des nombres réels non tous nuls. Une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ se présente sous la forme : . $ax + by + c < 0$ ; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$

**Exemple**

a) $3x + y \leq 7$ ; b) $-x + 5y = 9$ ; c) $x^2 + 3y < 5$ ; d) $3y \leq 0$ ; e) $6x \leq 9$ ; f) $x + y = 8$

parmi les expressions ci-dessous celles qui sont des inéquations du premier degré dans ℝ×ℝ. sont

a ; d ; e

mais b et f ne sont pas des inéquations dans ℝ×ℝ ; ce sont des équations du premier degré dans ℝ×ℝ.

**Méthode de résolution d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

Soit l'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $ax + by + c < 0$.

●Un couple $(x_0; y_0)$de nombres réels est solution d'une inéquation $(I)$

s'il vérifie l'inéquation . $ax + by + c < 0$ c'est-à-dire.$ax_0 + by_0 + c < 0$.

● la représentation graphique de l'ensemble des solutions de $(I)$dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$est un demi plan de frontière la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ ;ne contenant pas la droite (D)

**Remarque** : si l'inégalité est large alors la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.est contenu dans

l'ensemble des solutions

**Exercice de fixation 1**

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | Le couple $(1; -5)$ est une solution de l'inéquation $x + y + 6 > 0$ | |
| 2 | Le couple $(1; 1)$ n'est pas une solution de l'inéquation $2x - y + 2 > 0$ | |
| 3 | Le couple$(12; 3)$ est une solution de l'inéquation $x - y - 5 > 0$ | |

**SOLUTION :**

**1- vrai ; 2- faux ; 3-faux**

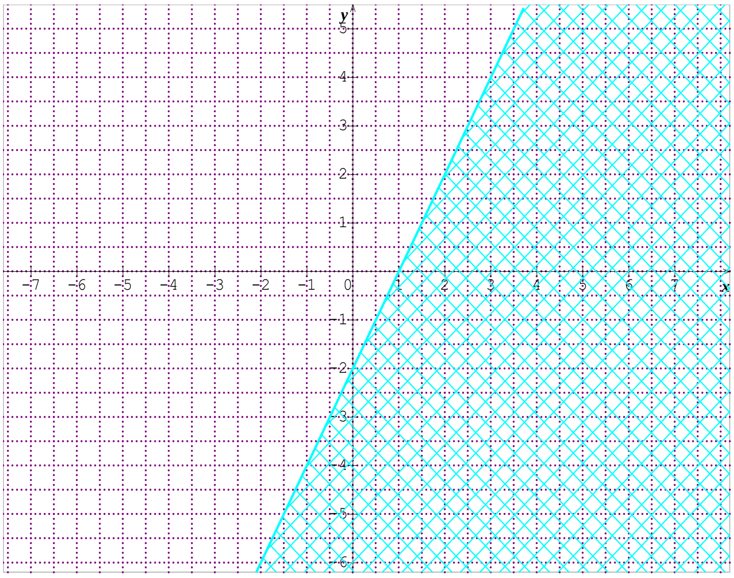
**Exercice de fixation 2**

On donne l'inéquation du premier dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant : $(I)$: $2x - y + 2 > 0$. Représente graphiquement les solutions de cette inéquation dans le plan muni d'un repère$(O; I; J)$.

**SOLUTION**

▪Le couple $(0; O)$n'est pas solution de l'inéquation $(I)$ car Le couple $(0; O)$ ne vérifie pas l'inégalité de l'inéquation $(I)$ ; en effet$2 \times 0 - 0 = -2$. ET $-2 < 0$

▪Le couple $(0; O)$n'étant pas solution de4, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I)$ est représenté graphiquement dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ par le demi plan ouvert limité par la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ ne contenant pas le point O.




## 2. Système d'inéquations du premier dégré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 2.1. Définition

Un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est composé d'au moins deux inéquations du premier degré qui contiennent chacune les deux mêmes inconnues.

**Exemple :**

le système $\begin{cases} .ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 2.2. Méthode de résolution d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit le système $(S)$ d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} .ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$.

●Un couple $(x_0; y_0)$de nombres réels est solution du système $(S)$ si et seulement si $(x_0; y_0)$est slution de chacune des inéquations du systhème c'est-à-dire

$.ax_0 + by_0 + c < 0$ et $a'x_0 + b'y_0 + c' > 0$

●L'ensemble des solutions de ce système est représenté graphiquement dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$par l'intersection des deux demi-plans limités par les droites (D) et (D')d'équations respectives $.\, ax + by + c = 0$ et $.\, a'x + b'y + c' = 0$

## Exercice de fixation

On donne le système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant :

$$(S)\begin{cases} .x + y - 2 < 0 \\ -x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$$

a-Justifie que le couple est $(-1; 1)$solution du système $(S)$.

b-Détermine graphiquement les solutions du système $(S)$.

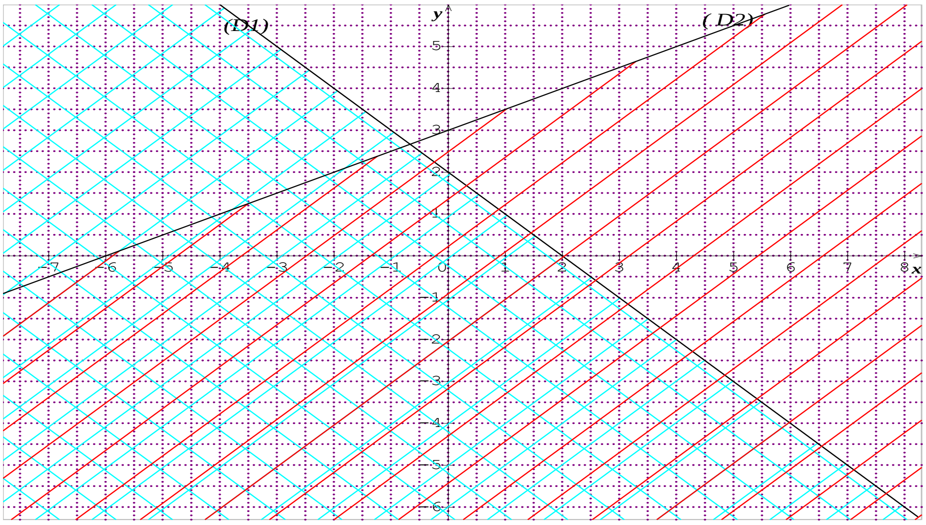
## SOLUTION

a- le couple $(-1;1)$ vérifie chacune des inéquations : . $x+y-2<0$ et $-x+2y-6<0$ .
Donc le couple $(-1;1)$ est solution du système $(S)$.

b- Je détermine graphiquement les solutions du système $(S)$.

On pose (D) : . $x+y-2=0$ et $-x+2y-6=0$ .
.

Le demi plan $(P_1)$privé de la droite $(D_1)$contenant le point de coordonnées $(-1;1)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+y-2<0$.
Le demi plan $(P_2$privé de la droite $(D_2)$contenant le point de coordonnées $(-1;1)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+y-2<0$.
En conclusion : l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans$(P_1)$ et $(P_2)$.




## C- SITUATION COMPLEXE

En prélude au pèlerinage enfants dans une paroisse de Bondoukou, un père de famille dispose de 10 mètres de tissus pour la confection de chemises et de pantalons pour ces enfants.
Le chef de l'atelier de couture informe le père qu'une chemise pour enfant nécessite 1 mètre de tissus et un pantalon nécessite 1,2 mètre de tissus.

Certains enfants ayant des pantalons neufs, le père voudrait coudre plus de chemises que de pantalons. Ce père te demande de l'aider à déterminer les nombres possibles de chemises et de pantalons à commander en tenant compte aussi des indications données par le couturier si ce dernier fait un minimum de déchets de tissus.

Réponds à la préoccupation du père

### SOLUTION

Pour répondre à la préoccupation du père, on doit résoudre un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pour y parvenir, je détermine les inéquations linéaires en fonction des variables : x le nombre de chemises à commander et y le nombre de pantalons à commander.

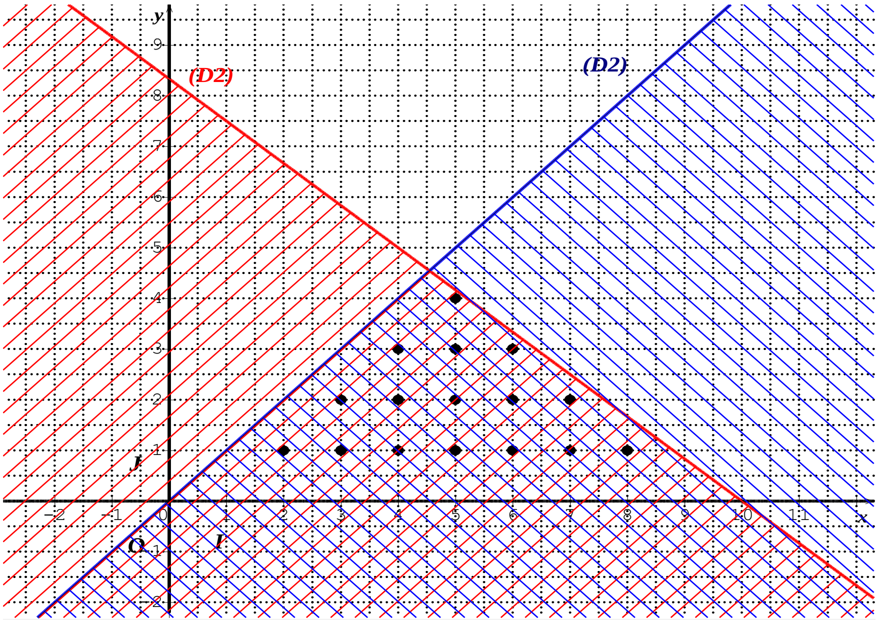
Ensuite je résous le système obtenu

Je détermine l'ensemble des couples solutions possibles etant donné que les valeurs sont des entiers naturels

Pour minimiser les déchets je détermine le couple qui utilise plus de tissus

Résolvons le système : $(S)\begin{cases} .x + 1{,}2y < 1 \\ y < x \end{cases}$

Traçons les droites (D$_1$) :$x + 1{,}2y = 10$ et (D$_2$) : $y - x = 0$




Les couples solutions du système d'inéquations sont : (2 ; 1) ; (3 ; 1) ; (4 ; 1) ; (5 ; 1) ; (6 ; 1) ; (7 ; 1) ; (8 ; 1)

(3 ; 2) ; (4 ; 2) ; (5; 2) ; (6 ; 2) ; (7 ; 2) ; (4 ; 3) ; (5 ; 3) ; (6 ; 3) ; (5 ; 4).

Pour le couple (5 ; 4), on a : $5 + 1{,}2 \times 4 = 9{,}8$ et 9,8 est très proche de 10.

Donc le couple (5 ; 4) est le couple pour lequel il y moins de déchets. Donc le nombre de pantalons est 5 et le nombre de chemises est 4.

# - EXERCICES

## 1- Exercices de fixation

### Exercice 1

On donne l'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant: $(I)$: $2x - y - 2 > 0$
Justifie que le couple $(2; 1)$est solution de l'inéquation. : $(I)$:

### SOLUTION

On a : $2 \times 2 - 1 - 2 = 1$ et $1 > 0$ donc le couple $(2; 1)$est solution de l'inéquation$(I)$.

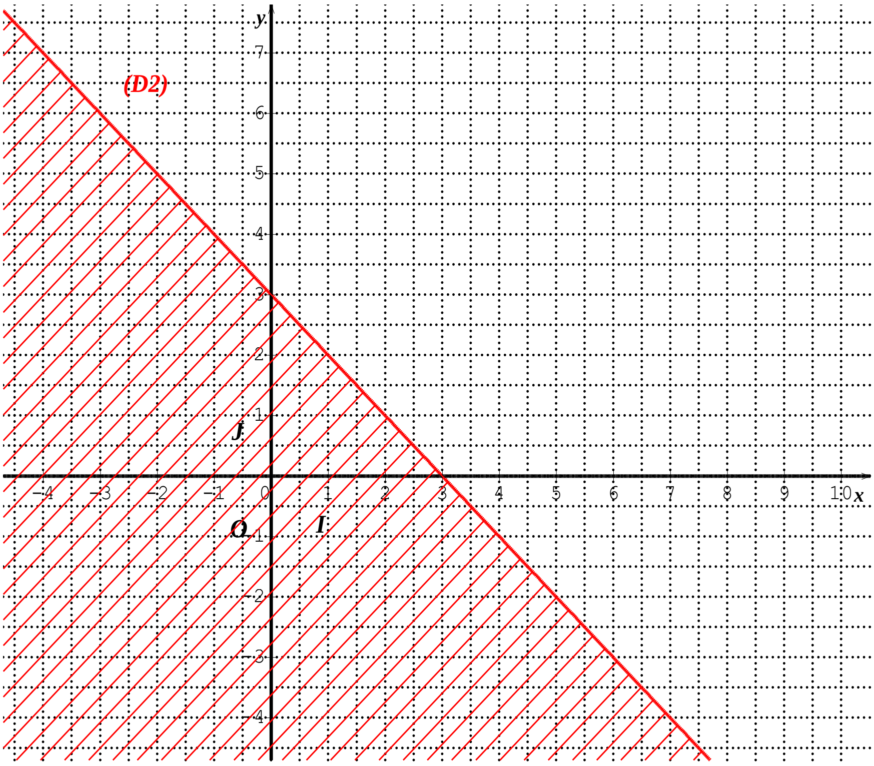
### Exercice 2

Détermine graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $x + y < 3$

### SOLUTION

Résolvons l'inéquation $x + y < 3$ .

Traçons la droite (D$_2$) : $x + y = 3$




Le demi plan $(P_2)$ privé de la droite $(D_2)$ contenant le point de coordonnées (0 ;0) représente l'ensemble des solutions de l'inéquation . C'est-à-dire la partie du plan hachurée en rouge.

# D.Exercices de renforcement

## Exercice 3

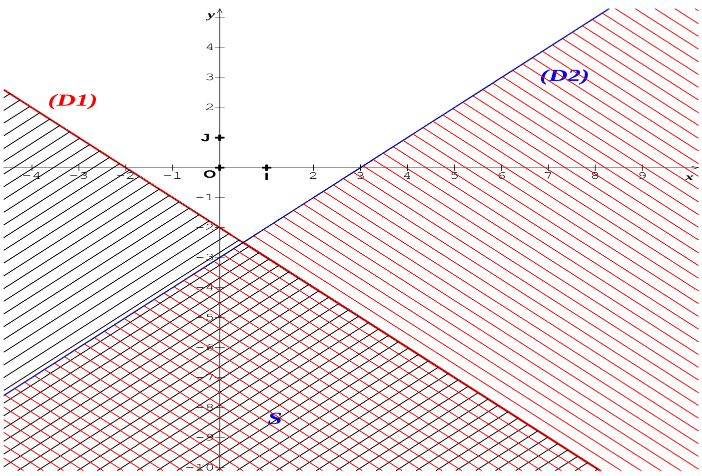
Détermine graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations

$$(S)\begin{cases} x + y < -2 \\ x - y > 3 \end{cases} \qquad (S): \begin{cases} 2x - y - 3 > 0 \\ -x + 3y - 1 < 0 \end{cases}$$

## SOLUTION

- Résolvons le système $(S): \begin{cases} x + y < -2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

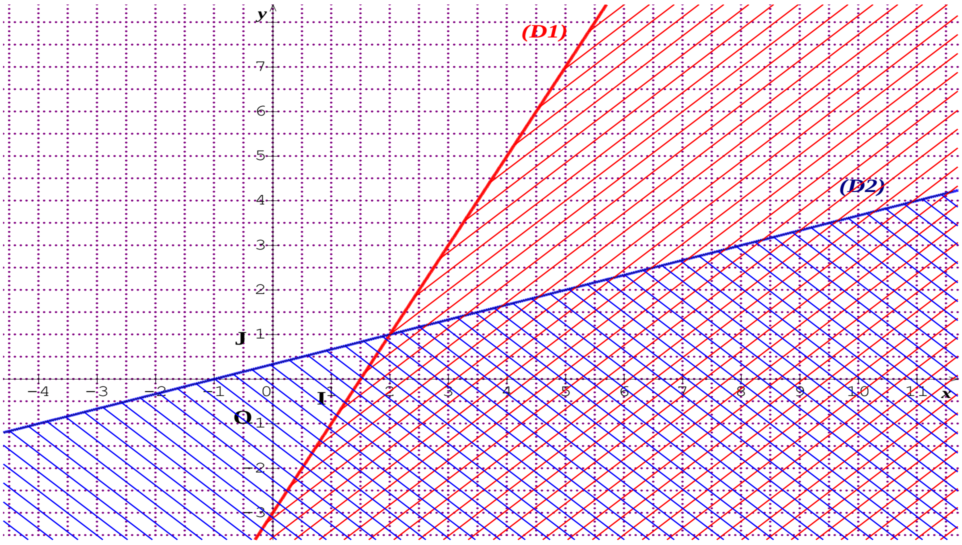
Traçons les droites (D$_1$) :$x + y = -2$ et (D$_2$) : $y - x = 3$



*Le demi plan* $(P_1)$ *privé* de la droite (D1) contenant le point de coordonnées $(0;-3)$représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+y<-2$.
Le demi plan $(p_2)$ privé de la droite $(D_2)$ ne contenant pas le point de coordonnées (-1 ;1) représente l'ensemble des solutions de l'inéquation. $x-y>3$
Donc l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans $(p_1)$ et$(p_2)$.

- Résolvons le système $(S)$:$\begin{cases} 2x-y-3\geq 0 \\ -x+3y-1<0 \end{cases}$

Traçons les droites ($D_2$) :$2x-y-3=0$ et ($D_1$) : $-x+3y-1=0$




Le demi plan $(p_1)$privé de la droite $(D_1)$contenant le point de coordonnées $(0;-3)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x+3y-1<0$.
Le demi plan $(p_2)$contenant la droite $(D_2)$ne contenant pas le point de coordonnées (1 ;1)représente l'ensemble des solutions de l'inéquation. $2x-y-3\geq 0$
Donc l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans $(P_1)$et$(P_2)$.

## Exercice 4

Deux amis Seka et Ali jouent aux billes. Seka demande à son ami de trouver le nombre de billes dont il dispose à partir des informations suivantes :

- Le double du nombre de mes billes dépasse 8
- Le nombre de mes billes augmenté de 3 n'atteint pas 10
- Le nombre de mes billes n'est pas pair

Trouve le nombre de billes dont dispose Seka

## SOLUTION

Soit $x$ le nombre de billes. Donc $x$ est solution du système : $\begin{cases} 2x>8 \\ x+3<10 \end{cases}$

On a : $x>4$ et $x<7$. Donc $x\in\{5;6\}$. Comme $x$ n'est pas pair. Par conséquent $x=5$

Le nombre de billes de Séka est 5

## Exercice 5

Traduire les données suivantes par une inéquation à deux inconnues, puis représente les couples solutions dans un repère orthogonal

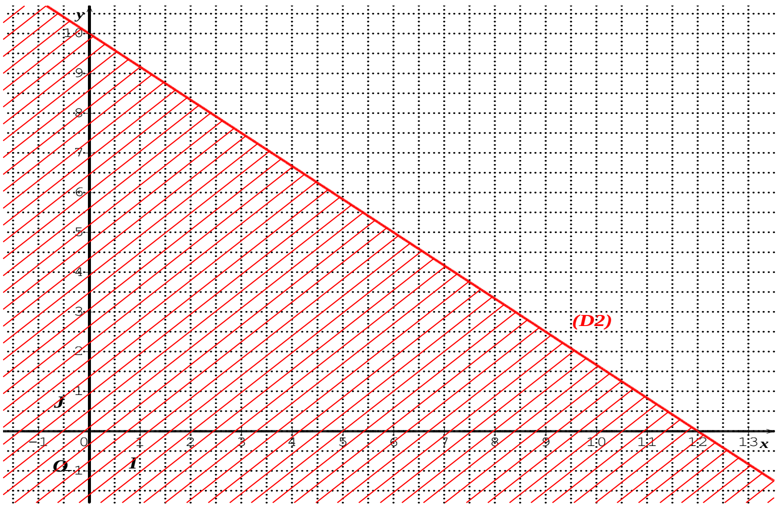
Maud achète x livres à 25F et y bandes dessinées à 30F pour une dépense maximale de 300F.

## SOLUTION

On a : $25x + 30y \leq 300$

Résolvons l'inéquation : $25x + 30y \leq 300$.

Traçons la droite ($D_2$) : $25x + 30y = 300$.




Donc les couples solutions du système sont les coordonnées entières des points de la partie du plan délimité par la droite ($D_2$) , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, contenant le point de coordonnées (1 ; 1).

# E .Exercices d'approfondissement

## Exercice 6

Lors de son anniversaire, Karim veut faire un cocktail de jus de fruits.

Elle achète x litres de jus d'oranges à 600F le litre et y litres de jus d'ananas à 400F le litre.

Karim veut avoir au moins 10 litres de ce cocktail de jus de fruit, mais elle dispose pour cela que de 6000F.

1. Montre que les contraintes du problème conduisent au système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.
2. Détermine graphiquement cinq possibilités d'achat de jus de fruits pour l'anniversaire de Karim

## SOLUTION

1. Montrons que les contraintes du problème conduisent au système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

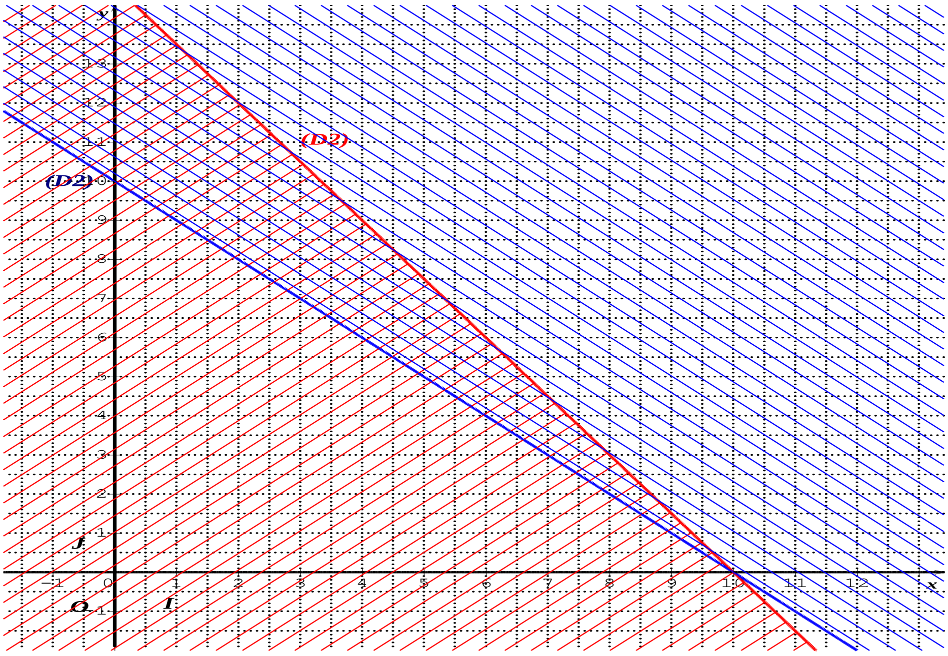
On a : $600x + 400y \leq 6000$ et $x + y \geq 10$, donc le couple (x ; y) est solution du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 600x + 400y \leq 600 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

D'où le système $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

2. <u>Déterminons cinq possibilités d'achats.</u>

Représentons l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

Traçons les droites ($D_1$) :$3x + 2y - 30 = 0$ et ($D_2$) : $x + y - 10 = 0$




Les couples (1 ; 10) ; (1 ; 11) ; (1 ; 12) ; (2 ; 9) ; (2 ; 10) ; (2 ; 11) ; (2 ; 12) sont des solutions du système $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

Donc les achats possibles sont :

- 1L de jus de fruit et 10L de jus d'ananas.
- 1L de jus de fruit et 11L de jus d'ananas.
- 1L de jus de fruit et 12L de jus d'ananas.
- 2L de jus de fruit et 9L de jus d'ananas.
- 2L de jus de fruit et 10L de jus d'ananas.

## Exercice 7

Une entreprise dispose d'un budget maximal de 2500000F pour acheter des ordinateurs de bureau à 70000F pièce et des ordinateurs portables à 120000F chacun.

Elle souhaite acquérir au moins 20 ordinateurs parmi lesquels doivent figurer au moins 5 portables.

1- Montre que les contraintes du problème posé conduit au système suivant :

2- Détermine graphiquement des nombres possibles d'ordinateurs de chaque type que l'entreprise peut acheter.

## SOLUTION

1. <u>Montrons que les contraintes du problème conduisent au système suivant</u> : $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$.

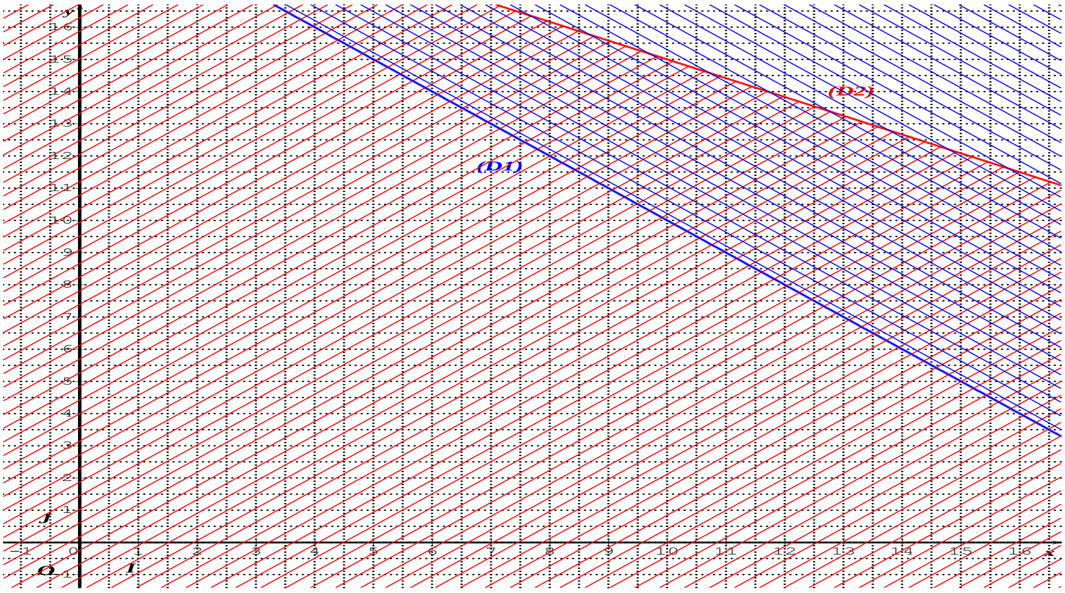
On a : $70000x + 120000y \leq 2500000$ ; $x + y \geq 20$ et $y \geq 5$, donc le couple (x ; y) est solution du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 70000x + 120000y \leq 2500000 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$ ; où $x > 0$ et $y \geq 5$.

D'où le système $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$ où $x > 0$ et $y \geq 5$.

2. Déterminons cinq possibilités d'achats.

Représentons l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$.

Traçons les droites ($D_1$) : $7x + 12y - 250 = 0$ et ($D_2$) : $x + y - 20 = 0$




Donc des nombres possibles d'ordinateurs de chaque type est :

- 12 ordinateurs de bureau et 12 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 11 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 10 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 9 ordinateurs portables