

MATHÉMATIQUES 1re.C

Ecole Numérique

R.C.1

edby0h



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs
algébriques et aux fonctions**

Thème 1

Calculs algébriques

LEÇON 1 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND

DEGRÉ DANS IR

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève en classe de première, décide de faire un jardin de tomates dans la grande cour familiale. Pour l'encourager, son père lui offre 20 mètres de grillage pour la clôture qu'elle décide d'utiliser entièrement. Elle décide de réaliser son jardin de forme rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous, laissant sans clôture un de ses côtés dans le sens de la longueur. Elle veut que l'aire du jardin soit de 48 m^2 . Devant la difficulté à déterminer les dimensions de ce jardin, elle explique sa préoccupation à ses camarades de classe. Ensemble, ils décident

de déterminer les dimensions du jardin.



B- CONTENU DE LA LECON

I- EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

1- Discriminant d'un polynôme du second degré

a) Définition

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
On appelle discriminant du polynôme P le nombre réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple

Soit le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Dans ce cas on a : $a = 3$; $b = 2$ et $c = -4$

Son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 52$

b) Propriété

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$,
et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, P admet un zéro double $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
Dans ce cas la forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de zéro et P n'est pas factorisable.

Exercice de fixation

Calcule les zéros éventuels des polynômes P, Q et R ci-dessous, puis factorise si possible chacun d'eux.

$$P(x) = -2x^2 + x - 3, \quad Q(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ et } R(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

Solution

- Pour le polynôme P : $\Delta = -23$, $\Delta < 0$ donc P n'admet pas de zéro. P n'est pas factorisable.
- Pour le polynôme Q : $\Delta = 0$, donc Q admet un zéro double x_0 et on a :
$$x_0 = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

Q est factorisable et on a : $Q(x) = (x - 2)^2$
- Pour le polynôme R : $\Delta = 49$, $\Delta > 0$ donc R admet deux zéros distincts x_1 et x_2 et on a :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 1$$

$$R \text{ est factorisable et on a : } R(x) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right) (x - 1)$$

2-- Equations du second Degré

a) Définition

On appelle équation du second degré, toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b , et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Exemple

L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $-3x^2 + x + 4 = 0$ est une équation du second degré.

b) Résolution d'une équation du second degré

➤ Résolution algébrique

Résoudre l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} l'équation suivante : $-x^2 + x + 2 = 0$.

Solution :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 \quad \Delta > 0 \text{ donc l'équation admet deux solutions distinctes.}$$

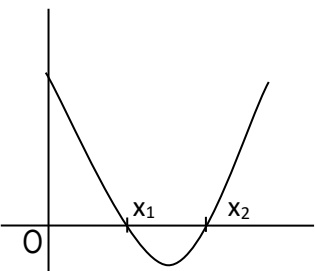
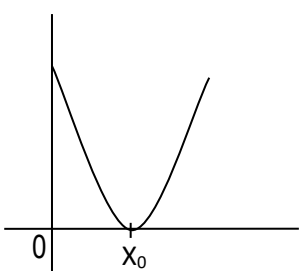
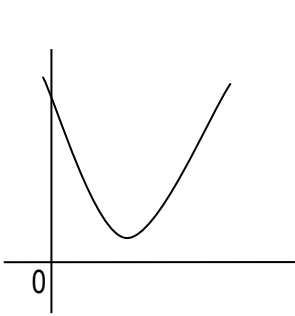
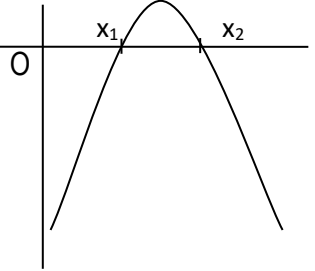
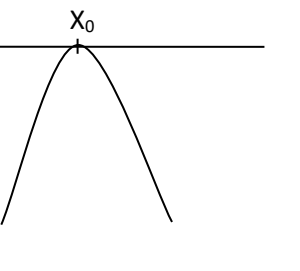
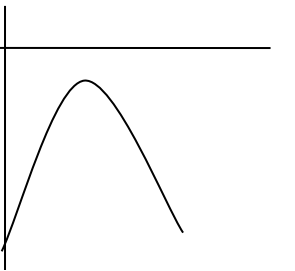
$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \{-1; 2\}.$$

Remarque

Si l'équation du second degré (E) : $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ est telle que a et c sont de signes contraires, (le discriminant est positif dans ce cas), alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.

➤ **Résolution graphique**

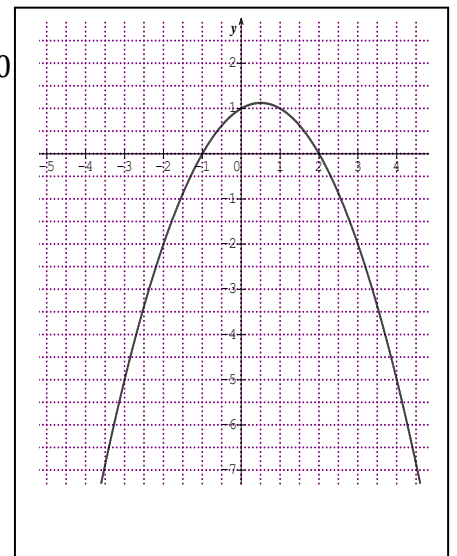
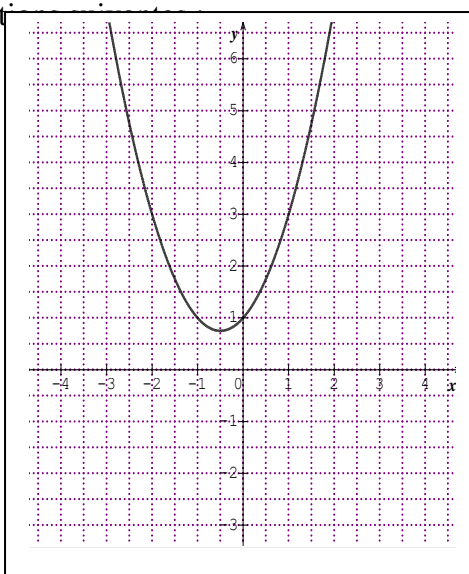
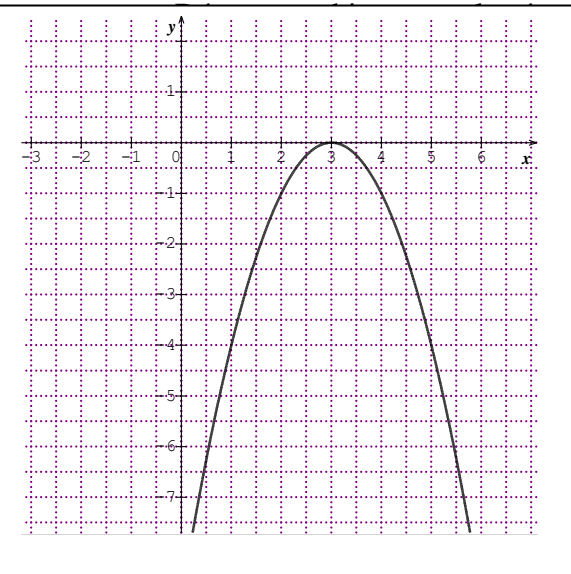
Pour résoudre graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$, on peut utiliser le tableau récapitulatif suivant.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$

(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2	(E) admet une solution unique x_0	(E) n'admet pas de solutions	

Exercice de fixation

Les courbes (C_f) , (C_g) et (C_h) ci-dessous sont les représentations graphiques respectives des fonctions polynômes du second degré f , g et h .



Résous graphiquement les équations du second degré suivantes :

- a) $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$; b) $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$; c) $x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$.

Solution

- a) La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3. Par suite l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ est : $S = \{3\}$.

b) La courbe (C_g) ne coupe pas l'axe des abscisses. Par suite l'ensemble des solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ est : $S = \emptyset$.

c) La courbe (C_h) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 2 . Par suite l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$ est : $S = \{-1; 2\}$.

c) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Si l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 , (distinctes ou non) alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Exercice de fixation

L'équation (E): $x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 4 = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 .

Détermine l'autre solution de (E).

Solution

Soit $x_1 = -1$ et x_2 l'autre solution de (E).

- On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
 $-1 + x_2 = -\frac{5}{1}$; donc : $x_2 = -5 + 1 = -4$

- On peut aussi utiliser la formule suivante : $x_1x_2 = \frac{c}{a}$
 $-1 \times x_2 = \frac{4}{1}$; donc : $x_2 = -4$.

Propriété 2

Soit S et P deux nombres réels.

Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors il existe deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P.

Ces deux nombres sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Point méthode

Pour déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme S et le produit P, on peut procéder de la manière suivante :

- on vérifie que : $S^2 - 4P \geq 0$;
- on résout l'équation $x^2 - Sx + P = 0$;
- les nombres réels recherchés sont les solutions de l'équation précédente.

Exercice de fixation

Détermine deux nombres réels s'ils existent dont leur somme est -3 et leur produit est -4

Solution

Soit $S = -3$ et $P = -4$

On a : $S^2 - 4P = 9 + 16 = 25$; $S^2 - 4P \geq 0$.

Ces deux nombres existent et sont solutions de l'équation $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Delta = 25, \text{ donc : } x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 ; x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

Ces deux nombres sont : 1 et - 4.

3- Inéquations du second degré

a) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P le polynôme du second degré définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P a deux zéros distincts x_1 et x_2 . (on suppose que $x_1 < x_2$)

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a		Signe de $-a$	Signe de a

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet un zéro double x_0 ; on obtient le tableau :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a		Signe de a

- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de zéro ; on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
-----	-----------	-----------

$P(x)$	Signe de a
--------	--------------

Exercice de fixation

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants, connaissant leurs zéros éventuels :

- 1) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros de P sont 1 et 3 ;
- 2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ;
- 3) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5.

Solution

- 1) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros P sont 1 et 3, le discriminant Δ de P est positif ($\Delta > 0$).

Le coefficient de x^2 est $a = 2$, $a > 0$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

- Pour $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $P(x) > 0$,
- Pour $x \in]1; 3[$, $P(x) < 0$
- Pour $x \in \{1; 3\}$, $P(x) = 0$.

- 2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ; $\Delta < 0$.

Le coefficient a de x^2 est $a = -2$ et $a < 0$.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q(x)$	-	

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) < 0$

- 3) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5. $\Delta = 0$

Le coefficient a de x^2 est $a = -1$ et $a < 0$.

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$R(x)$	-	0	-

- Pour $x \in]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$, $R(x) < 0$,
- Pour $x \in \{5\}$, $R(x) = 0$.

b) Définition d'une inéquation du second degré

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, et c$ sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.

$$x \in \mathbb{R}, P(x) > 0 ; x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0 ; x \in \mathbb{R}, P(x) < 0 ; x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0.$$

Exemple

L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, -3x^2 + 5x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré.

c) Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre dans \mathbb{R} une inéquation de l'un des types ci-dessus revient à étudier le signe du polynôme $P(x)$, puis trouver l'intervalle ou les intervalles correspondants à l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :

$$1) 2x^2 - 5x + 3 < 0 ; 2) -x^2 - 4x - 4 \geq 0 ; 3) x^2 + x + 2 > 0$$

Solution

1) Résolution de l'inéquation $2x^2 - 5x + 3 < 0$

On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

On calcule le discriminant du polynôme P.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$$

Le polynôme P admet deux zéros : $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

Pour $x \in]1; \frac{3}{2}[$, $P(x) < 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \left] 1; \frac{3}{2} \right[$$

2) Résolution de l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$;

On considère le polynôme Q tel que : $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$.

On calcule le discriminant du polynôme Q.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$$

Le polynôme Q admet un zéro double : $x_0 = \frac{4}{-2} = -2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$-$

Pour $x \in \{-2\}$, $Q(x) \geq 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$$

3) Résolution de l'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$;

On considère le polynôme R tel que : $R(x) = x^2 + x + 2$.

On calcule le discriminant du polynôme R.

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$$

Le polynôme R n'admet pas de zéro .

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$R(x)$	$+$	

Pour $x \in \mathbb{R}$, $R(x) > 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE DANS \mathbb{R}

1-Équations bicarrées

a) Définition

On appelle équation bicarrée une équation du type : $x \in \mathbb{R}$, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, où a , b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemple

L'équation : $x \in \mathbb{R}, -3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ est une équation bicarrée.

b) Résolution d'une équation bicarrée

Point méthode

Pour résoudre une équation du type : $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$). On peut procéder de la façon suivante :

-on pose : $X = x^2$;

- on résout l'équation du second degré : $aX^2 + bX + c = 0$;

- on résout, s'il y a lieu, les équations d'inconnue x du type $x^2 = X$.

(X étant solution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$)

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

Solution :

Posons : $X = x^2$. L'équation devient : $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$, les solutions de l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1; X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On obtient : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$$S_{\mathbb{R}} = \{1; -1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$$

2. Equations et inéquations irrationnelles

a) Résolution d'une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$

Point méthode

Pour résoudre une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$ on peut

Utiliser l'équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} , l'équation $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$.

Solution

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 1} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; +\infty[\\ x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; +\infty[\\ x = -\frac{5}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\cap \left\{-\frac{5}{4}\right\}. \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{4}\right\}.\end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}.$$

b) Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$.

Point méthode

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$ on peut utiliser l'équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$

Solution

$$\sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 5x + 3 < (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left] -\infty; \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\\ x \in \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right[\cup] 1; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\\ x \in \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right[\cup] 1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in] 1; +\infty[$$

Donc $S_{\mathbb{R}} =] 1; +\infty[$

c) Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

Point méthode

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ on peut utiliser l'équivalence suivante :

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \right)$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{R} , l'inéquation : $\sqrt{2-x} \geq x+4$

Solution

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} \geq x+4 &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq (x+4)^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+4 \leq 0 \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in [-4; +\infty[\\ x \in [-7; -2] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty; 2] \\ x \in]-\infty; -4] \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow (x \in [-4; -2] \text{ ou } x \in]-\infty; 2] \cap]-\infty; -4]) \\ &\Leftrightarrow x \in [-4; -2] \cup]-\infty; -4] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $] -\infty; -2]$.

C. SITUATION COMPLEXE

Lors d'une visite d'entreprise, les élèves d'une classe de 1^{ère} scientifique ont été informés que dans cette entreprise, le coût de production de q objets et les frais d'entretien sont donnés en milliers de francs CFA par la formule $c(q) = 0,1q^2 + 10q + 1500$ et que chaque objet est vendu à 87.000 F. Un agent de cette entreprise affirme que pour maintenir le bénéfice supérieur ou égal à 12.832.500 F, le nombre d'objets q à produire doit être compris entre 310 et 460.

En utilisant leurs acquis mathématiques, les élèves doivent vérifier si l'agent a raison ou pas. A l'aide d'une production argumentée, dis si l'agent a raison.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon équations et inéquations dans \mathbb{R} pour cela nous allons :

- le bénéfice en fonction du nombre d'objets fabriqué
- déterminer le nombre d'objet pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 12.832.500 F
- puis conclure

Le bénéfice est : $87.000q - c(q)$ en milliers de FCFA

On résout donc l'inéquation : $87.000q - (0,1q^2 - 10q + 1500) \times 1000 \geq 12.832.500$

$$\Leftrightarrow -0,1q^2 + 77q - 14332,5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 - 770q + 143325 \leq 0$$

$$\Delta = (-770)^2 - 4 \times 143325 = 140^2 \text{ et } q_1 = \frac{770+140}{2} = 455 \text{ et } q_2 = \frac{770-140}{2} = 315$$

L'inéquation devient : $(q - 315)(q - 455) \leq 0$ d'où $q \in [315 ; 455]$

Pour que le bénéfice soit supérieur à 12.832.500 FCFA il faut que le nombre d'objets q soit compris entre 315 et 455 or $[315; 455] \subset [310; 460]$.

Donc l'agent de l'entreprise a raison

D-EXERCICES

EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Écris le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Polynôme du 2 nd degré	Discriminant		
		a	b	c

1.	$2x^2 - 3x + 1$	15	1	-15
2.	$x^2 + x - 2$	-7	3	9
3.	$4x^2 - 5x + 3$	3	13	-23
4.	$15x^2 - 27x + 10$	129	49	9
5.	$x^2 - 2x + 1$	0	-1	5

Corrigé

1- b 2-c 3-c 4- a 5-a

Exercices 2 : Complète le tableau suivant :

Polynôme P(x)	Valeur du discriminant	Nombres de racines du polynôme
$x^2 - 3x + 2$	$\Delta =$
$x^2 - x + 1$	$\Delta =$
$-5x^2 + 10x - 5$	$\Delta =$
$x^2 - 4x + 4$	$\Delta =$
$3x^2 - 4x + 2$	$\Delta =$
$2x^2 - x - 3$	$\Delta =$

corrigé

Polynôme P(x)	Valeur du discriminant	Nombres de zéros du polynôme
$x^2 - 3x + 2$	$\Delta =$...1.....2.....
$x^2 - x + 1$	$\Delta =$0.....

-3.....	
$-5x^2 + 10x - 5$	$\Delta =$...0.....1.....
$x^2 - 4x + 4$	$\Delta =$0.....1.....
$3x^2 - 4x + 2$	$\Delta =$...-8.....0.....
$2x^2 - x - 3$	$\Delta =$...25.....2.....

Exercice 3

Par la méthode du discriminant, résous dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

- 1) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ 2) $9x^2 + 4x + 5 = 0$
 = 3) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Corrigé

- 1) $\Delta = 49$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-1}{2}; 3 \right\}$
 2) $\Delta = -164$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ 3) $\Delta = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \right\}$

. Exercices de renforcement

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, détermine deux nombres réels s'ils existent, dont on connaît la somme S et le produit P.

- 1) $S = 28 ; P = 195$
 2) $S = 2\sqrt{5} ; P = 3$

Corrigé

- 1) $S^2 - 4P = 4 \geq 0$ donc il existe deux nombres $x_1 = 12$ et $x_2 = 16$ solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$
 2) $S^2 - 4P = 8 \geq 0$ donc il existe deux nombres $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Exercice 5

Détermine deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est 41.

Corrigé

Soit n un entier relatif on a $n^2+(n+1)^2=41$ on obtient $n = -5$ et $n=4$ donc on aura :

-5 et -4 OU 4 et 5

Exercice 6

Résous dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

(I₁): $x^2 - 2x + 3 > 0$

(I₂): $-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$

Corrigé

• Résolvons (I₁): soit $p(x) = x^2 - 2x + 3$ étudions le signe de p
 $\Delta = -8$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) > 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

• Résolvons (I₂): soit $Q(x) = -3x^2 + 2x + 5$ étudions le signe de Q
 $\Delta = 64$ donc $x_1 = \frac{5}{3}$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0		$-$	0	$+$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left[-1, \frac{5}{3}\right]$

Exercice 7

Résous dans \mathbb{R} l'équation suivante : $x^2 + 1 = \sqrt{5 - x^2}$

Corrigé

$$x^2 + 1 = \sqrt{5 - x^2} \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 5 - x^2 \text{ car } x^2+5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{posons } X=x^2 \text{ l'équation devient :}$$

$$X^2+3X-4=0 ; \Delta= 25; X_1 = -4 ; X_2 = 1 \text{ on a}$$

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = -1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1, 1\}$$

Exercices d'approfondissement

Exercice 8

Détermine les nombres x et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Corrigé

$$\begin{cases} x + y = 2 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 34 \quad (2) \end{cases}$$

En élevant l'équation (1) au carré on obtient :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre on obtient :

$$xy = -15 \text{ on a}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \quad (s) \\ xy = -15 \quad (p) \end{cases}$$

x et y sont solutions de $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64$ et donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -3$ On a $x = 5$ ou $y = -3$ ou $x = -5$ ou $y = 3$

Exercice 9

a) Vérifie que : $\mathbf{A} = \sqrt{3} + 2$ et $\mathbf{B} = -\sqrt{3} + 2$ sont inverses l'un de l'autre.

b) Vérifie que $A + B = 4$

c) Dédus-en (sans calcul mais en justifiant) les solutions de l'équation (E) : $x^2 = 4x - 1$

corrigé

a) $A \times B = (\sqrt{3} + 2)(-\sqrt{3} + 2) = -3 + 4 = 1$ alors A et B sont inverses l'un de l'autre

b) $A + B = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 = 4$

c) $A + B = 4$ et $A \times B = 1$ donc A et B sont solutions de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 10

L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m^2 .

Si on augmente sa longueur L de 6m et sa largeur I de 6m , alors l'aire est alors égale à 630m^2 .

Détermine les dimensions de ce jardin.

Corrigé

$$L \times \ell = 360 \text{ et } (L+6)(\ell + 6) = 630 \Leftrightarrow L \times \ell + 6(L+\ell) + 36 = 630$$

On a $L+\ell = 39$ Soit $S=39$ et $P= 360$ donc L et ℓ sont solutions de l'équation $x^2-39x+360=0$

$$\Delta = 81 \text{ et } L = 24 \text{ et } \ell = 14$$



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

COMPÉTENCE 3 :

Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

Thème 1 :

Géométrie du plan.

LEÇON 2 : BARYCENTRE

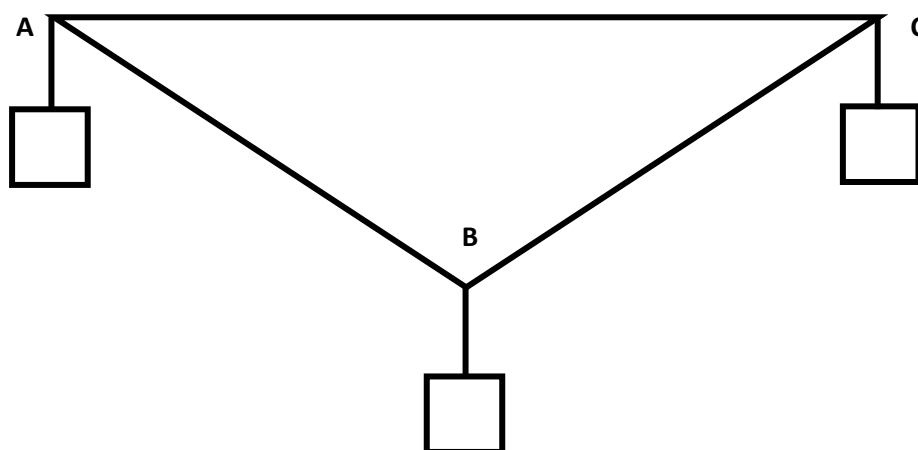
A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Au cours d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de première scientifique découvrent le dispositif ci-dessous.

Ce dispositif est une plaque triangulaire ABC de masse négligeable. On suspend à chacun de ses sommets des solides de masse ($m_A = 2g$) ; ($m_B = 5g$) et ($m_C = 3g$).

Les élèves veulent déterminer en quel point G, accrocher le fil pour que la plaque reste en équilibre.

L'un des élèves affirme que le point G cherché doit vérifier la relation : $2\vec{GA} + 5\vec{GB} + 3\vec{GC} = \vec{0}$, mais n'arrive pas à justifier son affirmation. Ils décident de s'organiser pour déterminer la position exacte de G.



B- RESUME DE COURS

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Point pondéré

Définition

Soit A est un point du plan et a un réel non nul, on appelle point pondéré, le couple (A, a) .

Exemple : les couples $(A, 2)$; $(B, -5)$. Sont des points pondérés

2. Propriété et Définition

A et B sont deux points du plan, a et b sont deux nombres réels tels que : $a + b \neq 0$.

Il existe un point G et un seul tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

Notation

Le barycentre G de deux points pondérés (A, a) et (B, b) se note :

$$G = \text{bar} \{(A, a) ; (B, b)\}$$

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$$

Exercice de fixation

Soient A, B et G trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

Solution

$2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc G est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$. On note $G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 3)\}$

a. Conséquence

$$G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

Exemple

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (B, -3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2+(-3)} \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

De même

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (B, -3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{2+(-3)} \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{BA}$$

b. Théorème : Le barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB)

Exercice de fixation

Soient A, B et K trois points du plan tels que : $-2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Justifie que K appartient à la droite (AB).

Solution

$$\begin{aligned}
\text{On a : } -2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} &\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -5\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KA} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow K = \text{bar} \{(A, 3); (K, -5)\} \Leftrightarrow K \in (CD)
\end{aligned}$$

Remarque

- Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre $G \in [AB]$
- Si les coefficients sont de signes contraires, alors le barycentre $G \in (AB) \setminus [AB]$
- Si les coefficients sont égaux, alors le barycentre G est le milieu de $[AB]$

3. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et deux points pondérés (A, a) et (B, b) .

G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) équivaut à G est barycentre des points pondérés (A, ka) et (B, kb) .

Exercice de fixation

On donne $G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 7)\}$

Détermine le nombre réel a tel que $G = \text{bar} \{(A, a); (B, 21)\}$

Solution

On a $G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 7)\}$. Comme $21 = 3 \times 7$, alors $a = 2 \times 7 = 14$.

Donc $G = \text{bar} \{(A, 14); (B, 21)\}$

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé l'isobarycentre des points A et B , c'est le milieu de $[AB]$.

Exemple : $G = \text{bar} \{(A, 3); (B, 3)\}$ équivaut à G est l'isobarycentre des points A et B

G est le milieu du segment $[AB]$.



c. Conservation du barycentre par projection

Propriété

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces points affectés des mêmes coefficients.

Exercice de fixation

Soit $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\}$ et P une projection tel que : $P(A) = A'$, $P(B) = B'$ et $P(G) = G'$. Quel est le barycentre des points pondérés (A', a) et (B', b) .

Solution

Comme $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\}$ et que $P(A) = A', P(B) = B', P(G) = G'$, alors:
 $G' = \text{bar} \{(A', a); (B', b)\}$

d. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

Exercice de fixation

Soit le barycentre K des points pondérés $(C, 3)$ et $(D, 1)$. Pour tout point M du plan exprime $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de \overrightarrow{MK} .

Solution Pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}$

Remarque Lorsque $a + b = 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{MA} - a\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = a\overrightarrow{BA}$.

e. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) , alors $G(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}, \frac{ay_A + by_B}{a+b})$

Exercice de fixation

Soit $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2)\}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solution : $G(\frac{-1 \times 1 + 2 \times (-1)}{-1 + 2}; \frac{-1 \times 2 + 2 \times 3}{-1 + 2})$; $G(-3; 4)$

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

Notation : $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

Exercice de fixation

Soient A, B, C et G quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

Solution

$$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

Donc $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ car $1 + 2 + 1 \neq 0$

Consequence

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Exemple

$-2\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

2. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

G est barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) équivaut à G est barycentre des points pondérés (A, ka) , (B, kb) et (C, kc) .

Exercice de fixation

On donne $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, -7); (C, -4)\}$

Détermine les nombres réels a et c tels que $G = \text{bar} \{(A, a); (B, \frac{14}{3}); (C, c)\}$

Solution

On a $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, -7); (C, -4)\}$. Comme $\frac{14}{3} = -\frac{2}{3} \times (-7)$,

alors $a = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}$ et $c = -\frac{2}{3} \times (-4) = \frac{8}{3}$

Donc $G = \text{bar} \{(A, -\frac{2}{3}); (B, \frac{14}{3}); (C, \frac{8}{3})\}$

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, α) et (C, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé L 'isobarycentre des trois points A , B et C .

Exemple

$-4\overrightarrow{GE} - 4\overrightarrow{GH} - 4\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ équivaut à G est l'isobarycentre de E , F et H .

Remarque

L'isobarycentre de trois points non alignés A , B et C est le centre de gravité du triangle ABC .

c. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$

Exercice de fixation

Soit le barycentre E des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 4)$ et $(C, -7)$.

Pour tout point M du plan exprime $-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}$ en fonction de \overrightarrow{ME} .

Solution

$$-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} = -4\overrightarrow{ME}$$

Remarque

Lorsque $a + b + c = 0$, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Exemples $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + (-a - b)\overrightarrow{MC} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$

$$-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

d. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et si G est le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) , alors

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$$

Exercice de fixation

Soit $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ et $C(0, -2)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solution : $G\left(\frac{-3}{4}; \frac{-2}{4}\right)$

3. Barycentre partiel

Propriété et définition

Soient (A, a) ; (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Si G est le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et H le barycentre du système $\{(A, a); (B, b)\}$ alors G est le barycentre du système $\{H, (a + b); (C, c)\}$.

H est appelé barycentre partiel des points pondérés (A, a) ; (B, b) .

Exercice de fixation

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

Exprime G comme l'isobarycentre de deux points.

Solution

Soit $H = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

Comme $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$ alors $G = \text{bar}\{(H, 3); (C, 3)\}$. G est donc l'isobarycentre de H et C .

Remarque

On ne change pas le barycentre de trois points pondérés en remplaçant deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux coefficients à condition que cette somme soit non nulle.

III. Barycentre de quatre points pondérés

1. Définition et propriété

Soit $(A, a), (B, b), (C, c)$ et (D, d) quatre points pondérés tels que $a + b + c + d \neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$ et (D, d) .

Notation: $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$

Remarque : L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Exercice de fixation

Soient A, B, C, D et G des points du plan tels que : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

Solution

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 4); (D, -2)\}$$

car $1 - 1 + 4 - 2 \neq 0$

2. Conséquence

Si $a + b + c + d \neq 0$ et $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$, alors pour tout point M du plan,
 $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD} = (a + b + c + d)\overrightarrow{MG}$.

Exemple

Soit $H = \text{bar}\{(A, 4); (B, -2); (C, 4); (D, -5)\}$

Pour tout point M du plan, on a : $4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MH}$

IV. Ligne de niveau d'une application f :

1. Définition

Soit f une application du plan dans \mathbb{R} et k un nombre réel.
la ligne de niveau k de l'application f est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

Exemple

Soit O un point du plan et f l'application du plan dans \mathbb{R} qui à tout point M associe la distance OM .

La ligne de niveau 3 de f est l'ensemble des points M tels que $OM = 3$; C'est donc le cercle de centre O et de rayon 3.

2. Ligne de niveau de l'application $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan, a et b deux nombres réels tous non nuls. f l'application du plan dans \mathbb{R} tel que : $f(M) \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Si $a + b \neq 0$, on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

la ligne de niveau k de l'application f est : soit l'ensemble vide, soit le point G , soit un cercle de centre G .

Exercice de fixation

On donne deux points A et B tels que $AB = 12$.

Soit l'application $f: M \mapsto MA^2 + MB^2$

Détermine la ligne de niveau 122 de f .

Solution

Soit G l'isobarycentre de A et B .

La ligne de niveau 122 de f est l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 122$.

$$MA^2 + MB^2 = 122 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 122$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + GA^2 + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}) + MG^2 + GB^2 + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}) = 122$$

$$\Leftrightarrow 2MG^2 + GA^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = 122$$

$$\Leftrightarrow 2MG^2 + GA^2 + GB^2 = 122 \text{ car } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Comme G est le milieu du segment $[AB]$, alors $GA = GB = 6$

$$\text{Donc } 2MG^2 + GA^2 + GB^2 = 122 \Leftrightarrow 2MG^2 + 36 + 36 = 122$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow MG = 5$$

la ligne de niveau 122 de f est le cercle de centre G et de rayon 5.

3. Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan \mathcal{P} et f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ dans \mathbb{R} tel que : $f(M) \mapsto \frac{MA}{MB}$

la ligne de niveau k de l'application f est :

- La médiatrice de $[AB]$ si $k = 1$
- Un cercle de centre G si $k \neq 1$

Exercice de fixation

Soit A et B deux points du plan tels $AB = 6$

Détermine la ligne de niveau 3 de l'application $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Solution

La ligne de niveau 3 de l'application $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$$

Soit $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, -9)\}$

$$\begin{aligned}
MA^2 - 9MB^2 = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 9(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow MG^2 + GA^2 + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}) - 9MG^2 - 9GB^2 - 18(\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow -8MG^2 + GA^2 - 9GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} - 9\overrightarrow{GB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow -8MG^2 + GA^2 - 9GB^2 = 0 \text{ car } \overrightarrow{GA} - 9\overrightarrow{GB} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{GA} - 9\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{GA} = 9\overrightarrow{GB}$ donc $GA^2 = 81GB^2$
On a donc $-8MG^2 + GA^2 - 9GB^2 = 0 \Leftrightarrow -8MG^2 + 72GB^2 = 0$
 $\Leftrightarrow MG^2 = 9GB^2$
 $\Leftrightarrow MG = 3GB$

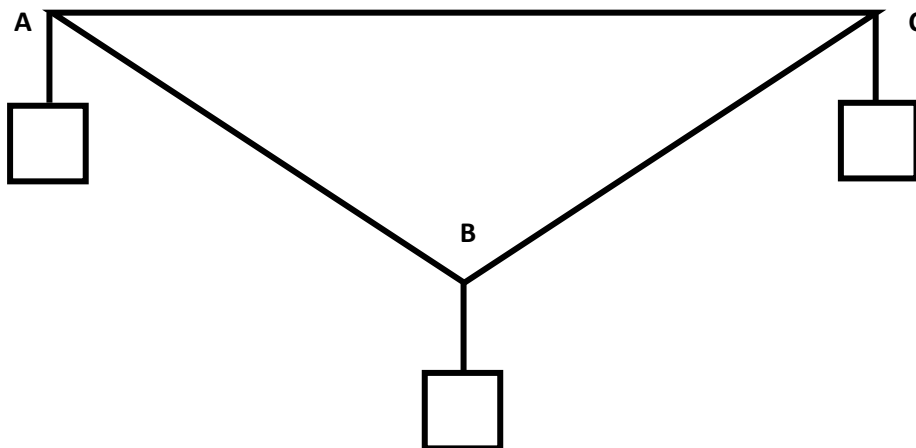
la ligne de niveau 0 de f est le cercle de centre G et de rayon $3GB$.

C- SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de première scientifique découvrent le dispositif ci-dessous.

Ce dispositif est une plaque triangulaire ABC de masse négligeable. On suspend à chacun de ses sommets des solides de masse ($m_A = 2g$) ; ($m_B = 5g$) et ($m_C = 3g$).

Les élèves veulent déterminer en quel point G, accrocher le fil pour que la plaque reste en équilibre. Détermine la position exacte du point G, en expliquant ta démarche.



Solution

Pour déterminer la position du point G , je vais utiliser des notions de barycentre.

Pour cela, je vais :

- Déterminer H, le barycentre partiel du système $\{(A, 2); (C, 3)\}$
- Déterminer le point G, barycentre du système $\{(A, 2); (B, 5); (C, 3)\}$
- Préciser la position de G.

Déterminons H, le barycentre partiel du système $\{(A, 2); (C, 3)\}$

$$\text{On a : } 2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0} \text{ donc } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

Déterminons le point G, barycentre du système $\{(A, 2); (B, 5); (C, 3)\}$

$$\text{On a : } G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 5); (C, 3)\} \text{ donc } G = \text{bar} \{(H, 5); (B, 5)\}$$

G est l'isobarycentre des point H et B.

Donc la position exacte du point G est le milieu de [BH].

D- EXERCICES

Exercice 1

Soient A, B et H trois points tels que : $5\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$. Complète les pointillés pour que la phrase soit vraie.

H est le barycentre des points pondérés

Solution

H est le barycentre des points pondérés (A ;5) (B ; 2)

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts.

- 1) Justifie qu'il existe un point G barycentre des points (A, 3) et (B, 2).
- 2) Exprime \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AB} , puis place G.
- 3) Soit M un point du plan. Ecris en fonction de \overrightarrow{MG} , $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$.

Solution

- 1) Justifions qu'il existe un point G barycentre des points (A, 3) et (B, 2).

On a $2 + 3 = 5 \neq 0$ alors le barycentre des points (A, 3) et (B, 2) existe.

- 2)Exprimons \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AB} , puis place G.

Comme $G = \text{bar} \{(A, 3); (B, 2)\}$; alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

- 3) Soit M un point du plan. Ecris en fonction de \overrightarrow{MG} , $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Comme $G = \text{bar} \{(A, 3); (B, 2)\}$; alors $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, on donne les points A, B et G alignés sur une droite régulièrement graduée. Ecris G comme barycentre des points A et B avec des coefficients à préciser.



Solution

On a: G est le barycentre des points pondérés (A,2) ; (B, 1)

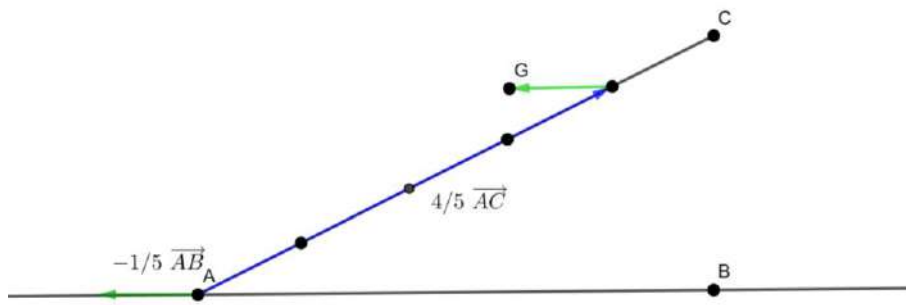
Exercice 4

Construis le barycentre de (A, 2) ; (B, -1) et (C, 4) où BC = 6 cm.

Solution

Soit G le barycentre de (A, 2) ; (B, -1) et (C, 4)

Alors on a : $\vec{AG} = \frac{-1}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC}$.



Exercice 5

ABC est un triangle et G est le barycentre de (A,1) ; (B, 4) ; (C, -3).

- 1) Construis le barycentre de H de (B, 4) et (C, -3)
- 2) Justifie que G est l'isobarycentre de points A et H.
- 3) Construis le point G.
- 4) Soit A (1, -2) , B (-3, -2) et C (-1,0) dans le repère (O ; \vec{i} , \vec{j}), détermine les coordonnées du barycentre G.

Solution

- 1) Construisons le barycentre de H de (B, 4) et (C, -3)

On a $\vec{BH} = \frac{-3}{1}\vec{BC} = -3\vec{BC}$

- 2) Justifions que G est l'isobarycentre de points A et H.

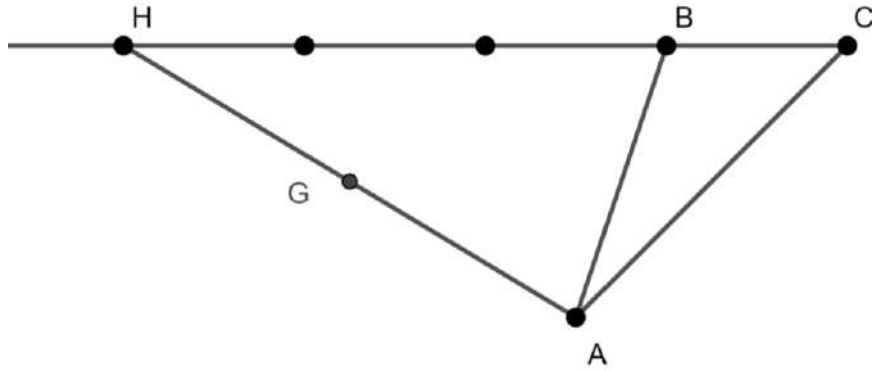
$G = \text{bar} \{(A, 1); (B, 4); (C, -3)\}$;

Comme $H = \text{bar} \{(B, 4); (C, -3)\}$

Alors $G = \text{bar} \{(H, 1); (A, 1)\}$ d'après la propriété du barycentre partiel.

Par suite G est le milieu de[HA]

- 3) Construction du point G.



$$4) G\left(\frac{1-12+3}{2}, \frac{-2-8}{2}\right), G(-4, -5)$$

Exercice 6

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 8$ (l'unité est le centimètre).

H est le milieu de [BC].

a) Construis le barycentre G des points pondérés (A,2); (B,1) et (C,1).

b) Quel est l'ensemble (D_1) des points M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à \overrightarrow{BC} et de même sens que \overrightarrow{BC} ?
Construis (D_1).

c) Quel est l'ensemble (D_2) des points M tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Construis (D_2).

d) Quel est l'ensemble (C_1) des points M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Construis (C_1).

e) Quel est l'ensemble (C_2) des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 8\sqrt{7}$.

Construis (C_2). Montre que (C_2) contient le point B.

Solution

a) Construisons le barycentre G des points pondérés (A,2); (B,1) et (C,1).

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$$

Comme H est le milieu de [BC]. Alors par application du barycentre partiel

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (H, 2)\} \text{ donc } G \text{ est le milieu de [AH].}$$

b) Déterminons l'ensemble (D_1)

$$\text{Soit } M \text{ un point du plan ; } M \in (D_1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \lambda \overrightarrow{BC} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = \lambda \overrightarrow{BC} ;$$

Si $\lambda = 0$; $\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow M = G$

Si $\lambda \neq 0$ alors (D_1) est la demi-droite passant par G parallèle à (BC) dirigée dans le sens du vecteur \overrightarrow{BC}

c) Déterminons l'ensemble (D_2)

Soit M un point du plan ; $M \in (D_2) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

Comme H est le milieu de [BC] ; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MH}$

D'où $M \in (D_2) \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = 2\|2\overrightarrow{MH}\|$.

D'où $M \in (D_2) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$.

D'où $M \in (D_2) \Leftrightarrow MG = MH$.

Donc (D_2) est la médiatrice du segment [GH]

d) Déterminons l'ensemble (C_1)

Soit M un point du plan ; $M \in (C_1) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$$\Leftrightarrow (8\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MH}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$$

Donc (C_1) est le cercle de diamètre le segment [GH]

e) déterminons l'ensemble (C_2)

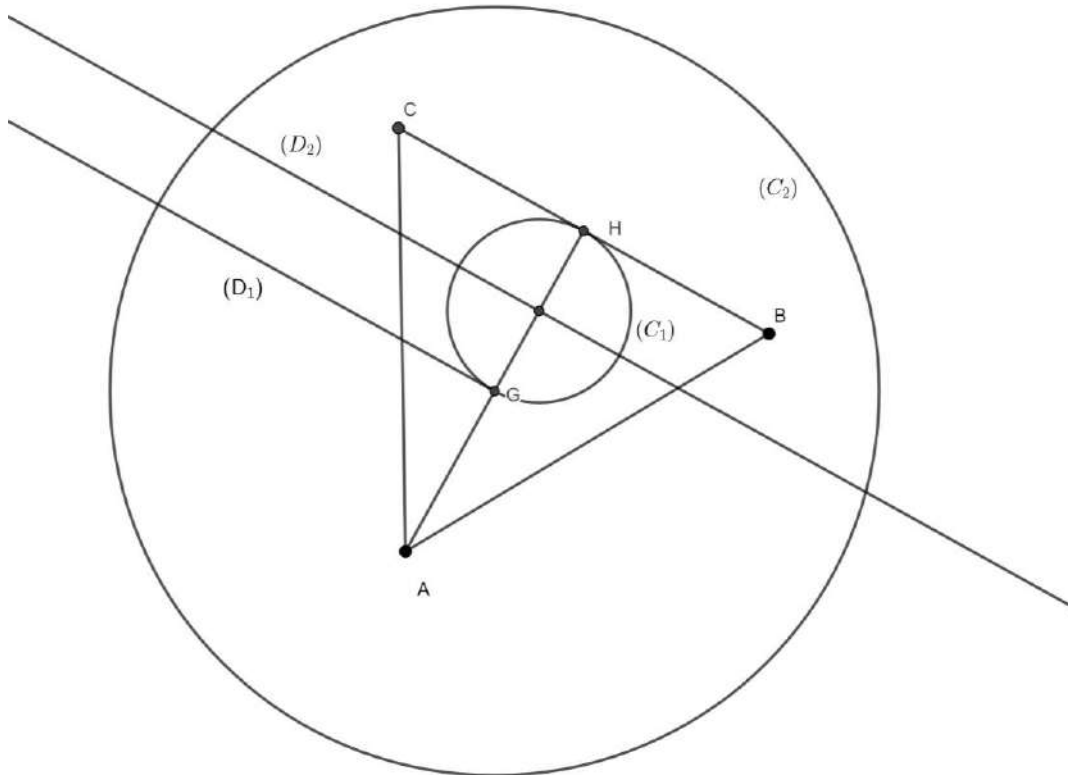
Soit M un point du plan ; $M \in (C_2) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 8\sqrt{7}$.

$$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = 8\sqrt{7}$$

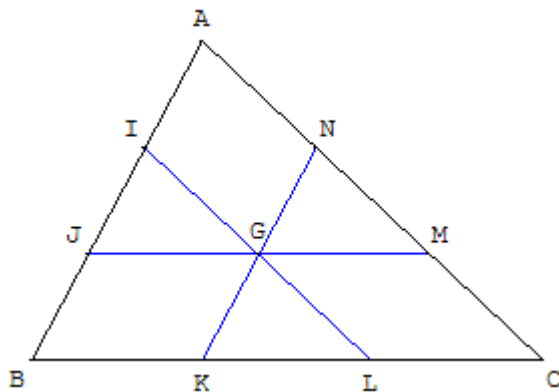
$$\Leftrightarrow MG = 2\sqrt{7}$$

Donc (C_2) est le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{7}$

FIGURE



Exercice 7



Chacun des côtés d'un triangle ABC est partagé en trois segments de même longueur grâce aux points : I et J sur [AB], K et L sur [BC], M et N sur [CA]. Démontrer que les droites (IL), (JM) et (KN) sont concourantes.

Solution

On a : $I = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$; $J = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$; $N = \text{bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$

$M = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$; $K = \text{bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$; $L = \text{bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$

Soit $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 2)\}$

On a : $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (B, 1); (C, 2)\} = \text{bar}\{(I, 3); (L, 3)\}$ donc $G \in (IL)$

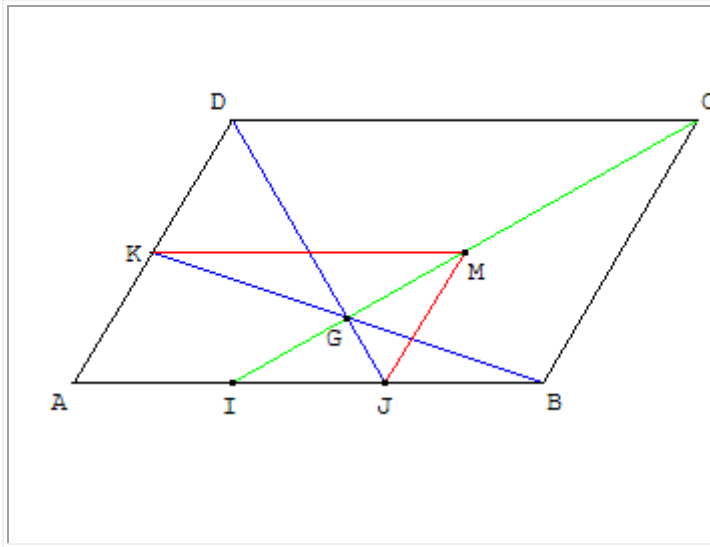
$G = \text{bar}\{(A, 2); (C, 1); (B, 1); (C, 1)\} = \text{bar}\{(N, 3); (K, 3)\}$ donc $G \in (NK)$

$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (A, 1); (C, 2)\} = \text{bar}\{(J, 3); (M, 3)\}$ donc $G \in (JM)$

Par conséquent, $G \in (IL) \cap (NK) \cap (JM)$

Exercice 8

On considère un parallélogramme ABCD. K est le milieu de [AD], L le milieu de [BC] et les points I et J partagent [AB] en trois parties égales.



Soit M est le quatrième sommet du parallélogramme JAKM.

Le but de l'exercice est de montrer que les points C, M, G et I sont alignés.

- Exprime I, J, K, M et C comme barycentre des points A, B et D.
- Montrer que les droites (BK), (DJ) et (CI) sont concourantes au point G, barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(D, 1)$.
- Conclure en montrant que G et M sont des barycentres de I et C.

Solution

a)

$$I = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1)\}; J = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}; K = \text{bar}\{(A, 1); (D, 1)\}$$

Soit H le milieu de [DB]. On a : $H = \text{bar}\{(D, 1); (B, 1)\}$ et $C = \text{bar}\{(A, -1); (H, 2)\}$, donc $C = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\} = \text{bar}\{(A, -3); (B, 3); (D, 3)\}$

Soit E le milieu de [KJ]. On a : $E = \text{bar}\{(K, 2); (J, 2)\}$ et $M = \text{bar}\{(A, -2); (E, 4)\}$, donc $M = \text{bar}\{(A, -2); (K, 2); (J, 2)\} = \text{bar}\{(A, -2); (A, 1); (D, 1); (J, 2)\} = \text{bar}\{(A, -1); (D, 1); (J, 2)\} = \text{bar}\{(A, -3); (D, 3); (J, 6)\} = \text{bar}\{(A, -3); (D, 3); (A, 2); (B, 4)\} = \text{bar}\{(A, -1); (D, 3); (B, 4)\}$

b)

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (D, 1)\} = \text{bar}\{(K, 2); (B, 2)\}. \text{ Donc } G \in (KB)$$

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (D, 1)\} = \text{bar}\{(J, 3); (D, 1)\}. \text{ Donc } G \in (JD)$$

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (D, 1)\} = \text{bar}\{(A, 2); (A, -1); (B, 1); (B, 1); (D, 1)\} = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (A, -1); (B, 1); (D, 1)\} = \text{bar}\{(I, 3); (C, 1)\}. \text{ Donc } G \in (IC)$$

Par conséquent, $G \in (KB) \cap (JD) \cap (IC)$

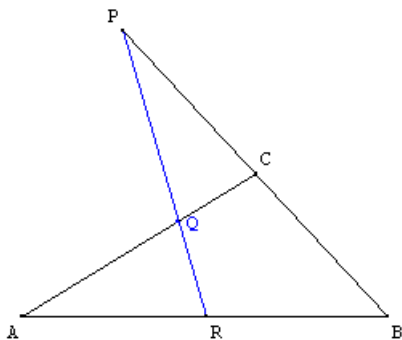
c)

$$\text{On sait que : } M = \text{bar}\{(A, -1); (D, 3); (B, 4)\}$$

Donc $M = \text{bar}\{(A, -3); (B, 3); (D, 3); (A, 2); (B, 1)\} = \text{bar}\{(C, 3); (I, 3)\}$, alors les points M, C et I sont alignés.

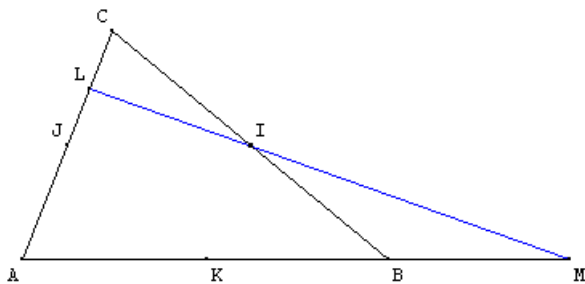
De plus $G \in (IC)$, donc les points M, C, G et I sont alignés.

Exercice 9



Soit ABC un triangle, P le symétrique de B par rapport à C , Q le point défini par $\vec{CQ} = \frac{1}{3} \vec{CA}$ et R le milieu de $[AB]$. Prouver que P, Q et R sont alignés.

Exercice 10



Soit un triangle ABC ; I, J et K les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$, L est le milieu de $[JC]$ et M le symétrique de K par rapport à B .

- Écris L comme barycentre et calcule $4 \vec{IL}$.
- Écris M comme barycentre et calcule $2 \vec{IM}$.
- Écris I comme barycentre. Conclue à l'alignement de I, L et M .



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques
et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

Leçon 3: **GENERALITES SUR LES FONCTIONS**

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une Petite et Moyenne Entreprise (PME) emploie 6 personnes. Le Directeur est payé à 200 000 F CFA, le comptable à 150 000 F CFA et les 4 autres employés à 70.000 CFA chacun. Vu l'accroissement des activités de la PME, le propriétaire décide d'embaucher de nouveaux employés qu'il veut aussi payer à 70 000F chacun. La condition fixée par les bailleurs de fonds est que le salaire moyen de tous ceux qui travaillent doit être supérieur à 80 000 F CFA. Le propriétaire veut savoir le nombre de personnes qu'il peut embaucher sans changer les salaires. Il en parle à son fils qui est en classe de première

scientifique. Ce dernier, soucieux d'aider son père, pose le problème à son professeur de mathématiques qui affirme qu'il est possible de résoudre ce problème

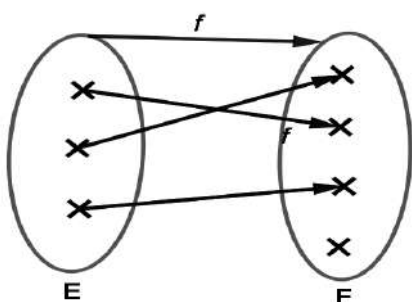
B- CONTENU DE LA COURS

I- Applications

1. Définition

Une application, d'un ensemble E dans un ensemble F (ou de E vers F) est une correspondance, qui à tout élément x de E associe un élément y de l'ensemble F. y est appelé l'image de x par f et se note : $f(x)$; x est un antécédent de y par f ; E est l'ensemble de départ, et F est l'ensemble d'arrivée.

Exemple



f est une application.

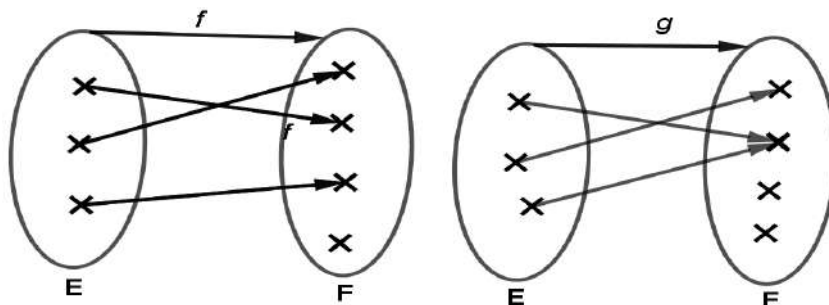
2 Applications injectives

Définition

Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection ou une application injective lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Exemple et contre-exemple

On donne les applications f et g de E vers F



L'application f est injective, par contre l'application g n'est pas injective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est injective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet au plus une solution, (c'est-à-dire soit 0 solution, soit une unique solution).

Exemple

L'application f de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \sqrt{x}+1$ est injective car :

Soit y un nombre réel,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y-1$$

$$\text{Si } y \geq 1 \text{ alors } x = (y-1)^2$$

Pour tout nombre réel y , l'équation $f(x) = y$, admet au plus une unique solution.

Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection si et seulement si pour tous a et b éléments de E , $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Exercice de fixation

On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Justifie que l'application f est injective.

Solution

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+1}{a-1} = \frac{2b+1}{b-1}$$

$$\Rightarrow 2ab - 2a + b - 1 = 2ab + a - 2b - 1$$

$$\Rightarrow 3a = 3b$$

$$\Rightarrow a = b$$

D'où, f est injective.

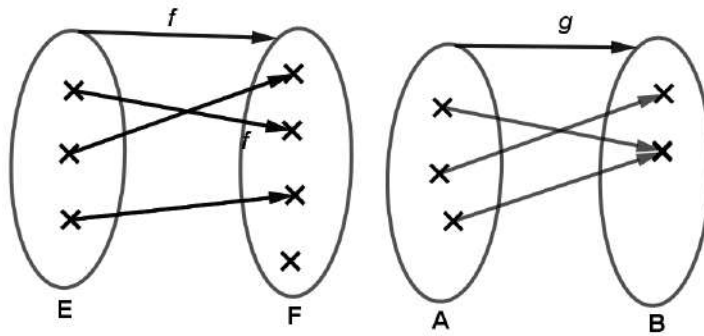
3. Applications surjectives

Définition

Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une surjection ou une application surjective lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E .

Exemple et contre-exemple

Soit les applications f de E vers F et g de A vers B



L'application g est surjective et l'application f n'est pas surjective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est surjective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet au moins une solution dans E , (c'est-à-dire soit une unique solution, soit plusieurs solutions).

Exercice de fixation

On considère l'application f de \mathbb{R} vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2 + 1$.
Justifie que l'application f est surjective

Solution

$D_f = \mathbb{R}$

Soit y un élément de $[1; +\infty[$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1$$

Or $y - 1 \geq 0$ donc $x = \sqrt{y - 1}$ ou $x = -\sqrt{y - 1}$.

Tout nombre réel y , l'équation $f(x) = y$, admet au moins unique solution.
D'où, l'application f est surjective.

4. Applications bijectives

a) Définition

Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection ou une application bijective lorsque tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E .

Exemple

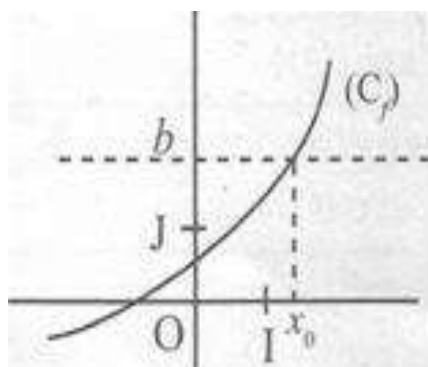
Soit f l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x + 1$.

L'application f est bijective.

Point méthode

- Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet une unique solution dans E .
- Soit f une application d'un intervalle K dans un intervalle L et (C_f) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) .

Pour vérifier graphiquement que f est une bijection, il suffit de vérifier que toute droite d'équation : $y = b$ coupe (C_f) en un unique point dont l'abscisse x_0 appartient à K où $b \in f(K)$.



b) Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice de fixation

On considère l'application f de $]-\infty ; 0]$ vers $[0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2$.
Justifie que l'application f est bijective.

Solution

$D_f =]-\infty ; 0]$

Soit y un nombre réel de $[0 ; +\infty[$

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{y} \text{ ou } x = \sqrt{y}$$

$$x = -\sqrt{y} \text{ car } x \in]-\infty ; 0]$$

Tout élément y de $[0 ; +\infty[$ admet un unique antécédent. Par conséquent, f est injective et surjective.

D'où, f est bijective.

5. Bijection réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une bijection de E dans F . On appelle bijection réciproque de f , l'application de F dans E , notée f^{-1} qui, à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E .

Exemple

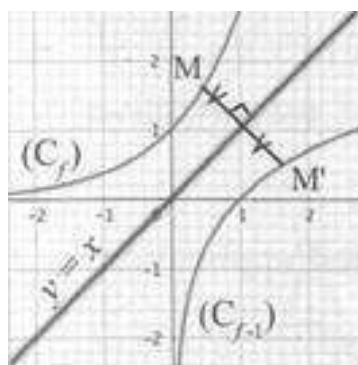
On considère l'application f de $] -\infty ; 0]$ vers $[0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2$. f est bijective, alors sa bijection réciproque est tel que :
 $f^{-1}: [0 ; +\infty[\rightarrow] -\infty ; 0]$ et $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Remarque

Si f est une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque alors f est la bijection réciproque de f^{-1} .

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$. (la première bissectrice)



Exercice de fixation

Soit l'application bijective $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

Représenter dans un même repère la courbe représentative de la fonction f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} .

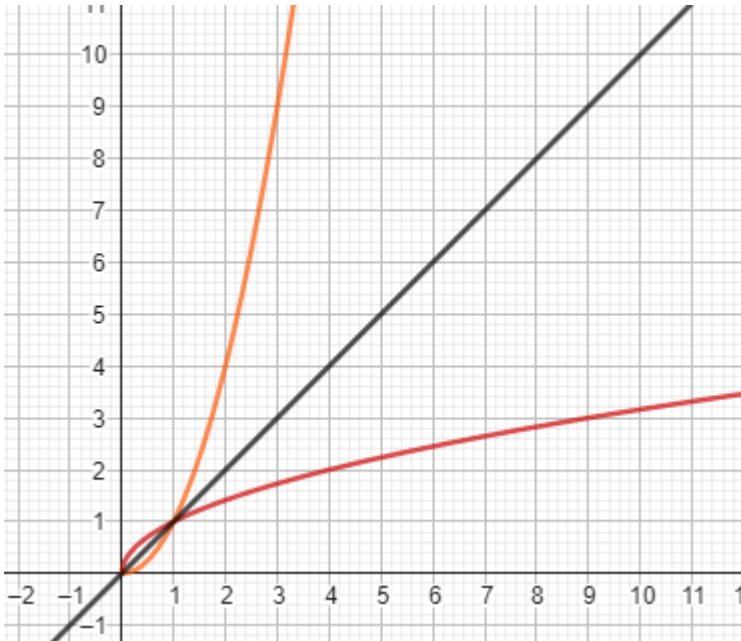
Proposition de réponse

Soit $b \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = b$

$\sqrt{x} = b$ alors $x = b^2$. On a donc :

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$



NB :

(Cf) en rouge, (Cf⁻¹) en orange et la première bissectrice en noir.

II – Compléments sur les Fonctions

1. Restriction d'une fonction

Définition

Soit f une fonction d'un ensemble E vers l'ensemble F et A une partie non vide de l'ensemble de définition de f . On appelle restriction de f à A l'application

$$g : A \rightarrow F \\ x \mapsto f(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x + 3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction g définie sur $]-\infty ; 1]$ par : $g(x) = x + 1$ est la restriction de f sur $]-\infty ; 1]$

La fonction h définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $h(x) = \sqrt{x + 3}$ est la restriction de f sur $]1 ; +\infty[$

2. Opérations sur les fonctions numériques

Définition

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

On note D l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $g(x) \neq 0$, D_f et D_g les ensembles de définition respectifs de f et g . On a :

Fonction	Ensemble de définition	Expression
Somme $f + g$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit fg	$D_{fg} = D_f \cap D_g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient $\frac{f}{g}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = x-1$.

On a :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ et } D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fg} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Et pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$= \frac{x+1}{x-1}(x-1)$$

$$= x + 1$$

3. Comparaison de deux fonctions

Définitions et notations

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , f et g deux fonctions données sur un intervalle I .

- f est inférieure ou égale à g sur I , lorsque pour tout élément x de I ,
 $f(x) \leq g(x)$.

On note : $f \leq g$ sur I .

- f est supérieure ou égale à g sur I , lorsque pour tout élément x de I ,
 $f(x) \geq g(x)$.

On note : $f \geq g$ sur I .

Point méthode

- Pour comparer deux fonctions f et g données par leurs formules explicites sur un intervalle I , on peut :

- calculer, pour tout $x \in I, f(x) - g(x)$;

- étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur I :

➤ Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $f \leq g$ sur I;

➤ Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors $f \geq g$ sur I.

- Pour comparer deux fonctions f et g dont on connaît les représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) sur un intervalle I dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on peut procéder comme suit :

➤ si (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I, alors $f \leq g$ sur I ;

➤ si (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I, alors $f \geq g$ sur I.

Exercice de fixation

Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$.

Solution

Pour tout nombre réel x ,

$$\begin{aligned}x^2 + 1 - 2x &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x - 1)^2\end{aligned}$$

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

$$x^2 + 1 - 2x \geq 0$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$

4. Composition de fonctions

- Soient E, F et G trois parties de \mathbb{R} , f une fonction de E vers F et g une fonction F vers G. On appelle composée de f par g la fonction de E vers G notée $g \circ f$ et définie par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.
- D_f, D_g et $D_{g \circ f}$ sont les ensembles de définition respectifs de f, g et $g \circ f$.
 $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exercice de fixation

Soit f et g les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) Détermine l'ensemble de définition E de $g \circ f$.

b) Pour tout x élément de E, explicite $g \circ f(x)$.

Proposition de réponse

Soit f et g les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) $D_f = \mathbb{R}^* \text{ et } D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Dgof} &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x^2} \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x^2 \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1
 \end{aligned}$$

$$E = \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$$

b) Pour tout x élément de $\mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$

$$\begin{aligned}
 \text{gof}(x) &= g(f(x)) \\
 &= \frac{f(x)+2}{f(x)-1} \\
 &= \frac{\frac{1}{x^2}+2}{\frac{1}{x^2}-1} \\
 &= \frac{1+2x^2}{1-x^2} \\
 \text{gof}(x) &= -\frac{2x^2+1}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

Propriété

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque, alors :

- $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de E .
- $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de F .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \overbrace{f^{-1} \circ f} \\ \left[\begin{array}{cc} f & f^{-1} \end{array} \right] \downarrow \\ E \longrightarrow F \longrightarrow E \end{array} & & \begin{array}{c} \overbrace{f \circ f^{-1}} \\ \left[\begin{array}{cc} f^{-1} & f \end{array} \right] \downarrow \\ F \longrightarrow E \longrightarrow F \end{array}
 \end{array}$$

Exercice de fixation

On considère la bijection $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque : $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto x^2$$

Détermine $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$

Proposition de réponse

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x \text{ et } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

5. Représentations graphiques de fonctions associées

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

a et b sont deux nombres réels.

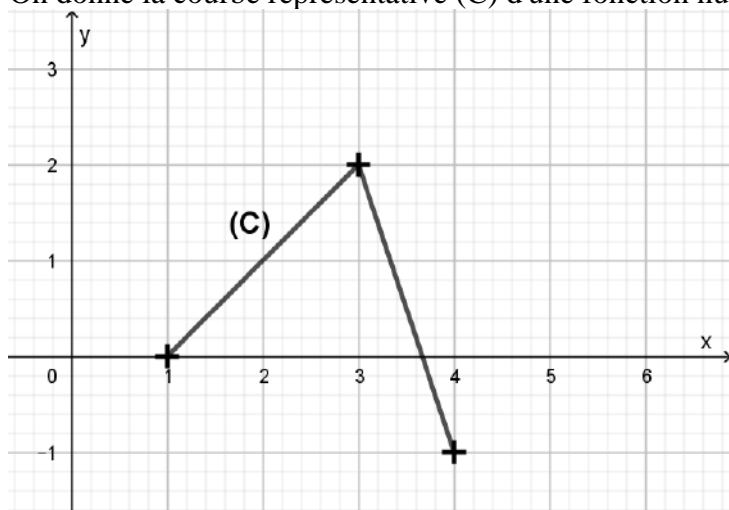
On note (C_f) la représentation graphique de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Fonction g	Représentation graphique (C_g) de g
$x \mapsto f(x - a)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur $a\vec{OI}$
$x \mapsto f(x) + b$	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur $b\vec{OJ}$
$x \mapsto f(x - a) + b$	(C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur directeur $a\vec{OI} + b\vec{OJ}$
$x \mapsto f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OJ)}$ d'axe (OJ)
$x \mapsto -f(x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OI)}$ d'axe (OI)
$x \mapsto -f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie centrale $S_{(O)}$ de centre O

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique le centimètre.

On donne la courbe représentative (C) d'une fonction numérique définie sur $[1 ; 4]$.



On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = f(x-3)+1$.

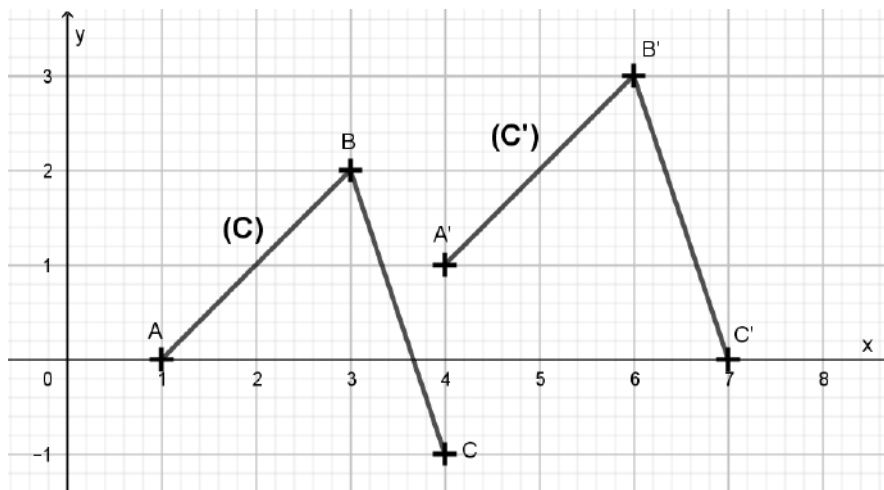
On note (C') la courbe représentative de g dans le plan.

Construis (C') à partir de (C) .

Solution

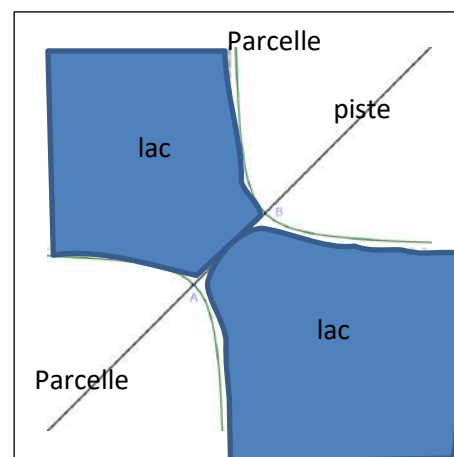
(C') est l'image de (C) dans la translation t de vecteur $\vec{u}(3 ; 1)$.

$t(A) = A'$, $t(B) = B'$ et $t(C) = C'$



C- SITUATION D'ÉVALUATION

Un monsieur cède une parcelle de terrain cultivable à ses deux enfants avec les mêmes conditions d'accessibilité et de superficie. Un grand lac traverse la parcelle. Un pont $[AB]$ et une piste (AB) permettent de traverser aisément la parcelle. Les contours du lac s'apparent à la courbe de la fonction inverse et la piste s'identifie à la première bissectrice dans un repère orthonormé naturel comme l'indique la figure ci-contre. Les deux parts sont séparées par la piste. Le plus jeune pense qu'il est lésé et menace de ne plus s'adresser à son père. Ayant assisté à cette scène, élève de 1^{ère} C et amis du jeune fils, rassure le en utilisant tes connaissances mathématiques.



Proposition de solution

Pour rassurer le jeune fils, nous allons utiliser la leçon généralités sur les fonctions.

Nous utiliserons les notions de :

- de restriction ;
- d'application ;
- composée de fonctions ;
- bijection et sa réciproque
- de représentation de la bijection réciproque.

Les contours du lac s'apparent à la courbe de la fonction inverse. Soit la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $(x) = \frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère la restriction g de f définie de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc g est une application.

Composons g par g .

$g \circ g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Donc $g \circ g = id_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$. Par suite g est une application bijective et

sa bijection réciproque est g .

Symétrie de (\mathcal{C}_g)

$g^{-1} = g$ donc $(\mathcal{C}_{g^{-1}}) = (\mathcal{C}_g)$ et (AB) est la première bissectrice de repère orthonormé dans lequel est représenté (\mathcal{C}_g) . Donc $s_{(AB)}(\mathcal{C}_g) = (\mathcal{C}_g)$.

La parcelle cultivable cédée par le père présente une parfaite symétrie par rapport à la piste (AB) .

En conséquence les parts situées des deux côtés de la piste ont la même aire.

D-EXERCICES

Exercice 1

On considère l'application f de $]-\infty ; 1]$ vers $[-4 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Justifie que f est une bijection.
- Explicite la bijection réciproque f^{-1} de f .

Correction de l'exercice 1

On considère l'application f de $]-\infty ; 1]$ vers $[-4 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Soit y un élément de $[-4 ; +\infty[$ et x un élément de $]-\infty ; 1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = y \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 - 4 = y \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 = y + 4 \\ &\Rightarrow x - 1 = -\sqrt{y + 4} \quad \text{ou} \quad x - 1 = \sqrt{y + 4} \\ x \leq 1 &\Rightarrow x - 1 \leq 0 \text{ d'où} \\ &x - 1 = -\sqrt{y + 4} \\ &\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y + 4} \end{aligned}$$

Tout élément y de $[-4 ; +\infty[$ admet un unique antécédent : $1 - \sqrt{y + 4}$.

Par conséquent, f est une bijection.

- De ce qui précède :

$$\forall y \in [-4 ; +\infty[, f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y + 4}$$

$$\text{Ou encore, } \forall x \in [-4 ; +\infty[, f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 4}$$

Exercice 2

On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$.

- L'application f est-elle injective ? (Justifie ta réponse).
- L'application f est-elle surjective ? (Justifie ta réponse).
- Justifie que f n'est pas bijective.

Correction de l'exercice 2

On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$.

- Soit y un élément de \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}
 x \in \mathbb{R}, f(x) = y &\Rightarrow \frac{5x+3}{x+2} = y \\
 &\Rightarrow x(-y + 5) = 2y - 3 \\
 &\Rightarrow x = -\frac{2y-3}{y-5}
 \end{aligned}$$

5 n'a pas d'antécédent.

Et, tout nombre réel distinct de 5 a un unique antécédent.

D'où, f est injective.

b) 5 n'a pas d'antécédent.

D'où, f n'est pas surjective.

f n'est pas surjective.

Donc, f n'est pas bijective.

Exercice 3

Soit f l'application de \mathbb{R} vers $] -\infty; 1]$ définie par : $f(x) = 1 - x^2$.

Démontrez que f est surjective.

Correction de l'exercice 3

Soit $b \in] -\infty; 1]$ tel que $f(x) = b \Rightarrow 1 - x^2 = b$ alors $x = \sqrt{1-b}$ ou $x = -\sqrt{1-b}$ par conséquent f est une application surjective.

Exercice 4

Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ qui à x associe $\frac{2x-3}{x-1}$.

1. Démontrez que g est une bijection.
2. Déterminez g^{-1} .

Correction de l'exercice 4

1. Soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $f(x) = b$
 $\frac{2x-3}{x-1} = b$ on a donc $x = \frac{3-b}{2-b}$. Par conséquent, g est une bijection.
2. On en déduit que :
 $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{3-x}{2-x}$

Exercice 5

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = 3 - |2 - x|$.

Détermine la restriction f de h à l'intervalle $] -\infty; 2]$.

Correction de l'exercice 5

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	 ○	$-$
$ 2 - x $	$2 - x$	 ○	$x - 2$

Alors la restriction de h à l'intervalle $] -\infty; 2]$ est $f(x) = x + 1$.

Exercice 6

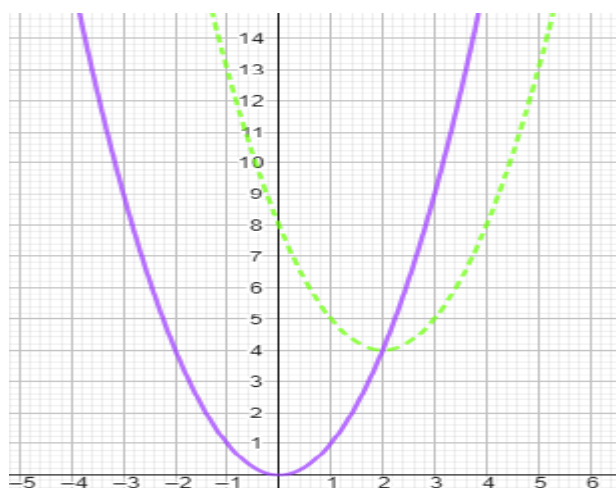
On considère les fonctions f et g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = x^2 - 4x + 8.$$

1. Démontre que, pour tout nombre réel x , $g(x) = f(x - 2) + 4$.
2. On désigne par (C_f) et (C_g) les représentations graphiques de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
 - a) Détermine la transformation du plan t telle que $(C_f) = (C_g)$.
 - b) Construis (C_f) et (C_g) dans le même repère.

Correction de l'exercice 6

1. $f(x - 2) + 4 = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$
2. a) On a $g(x) = f(x - 2) + 4$ alors (C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur directeur $2\vec{OI} + 4\vec{OJ}$.
- b)



Exercice 7

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = 2 - x^2 + 2x$.

1. Justifie que pour tout nombre réel x , $f(x) = 3 - (x - 1)^2$.

2. Justifie que pour tout nombre réel x , $f(x) \leq 3$.

Correction de l'exercice 7

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= -x^2 + 2x + 2 \\ &= -(x^2 - 2x - 2) \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1 - 2) \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 3) \\ &= -[(x - 1)^2 - 3] \\ &= 3 - (x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$2. \quad f(x) - 3 = 3 - (x - 1)^2 - 3 = -(x - 1)^2$$

Pour tout nombre réel x , $(x - 1)^2 \geq 0$ donc $-(x - 1)^2 \leq 0$ alors $f(x) - 3 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 3$.

Exercice 8

f et g sont deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \text{ et } g(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x - 1}}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f + g; f - g; f \times g \text{ et } \frac{f}{g}$$

2) Détermine $(f + g)(x)$; $(f - g)(x)$ et $(\frac{f}{g})(x)$.

Exercice 9

f et g sont deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 + x - 2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

a) Détermine D_f ; $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$.

b) Détermine $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Exercice 1

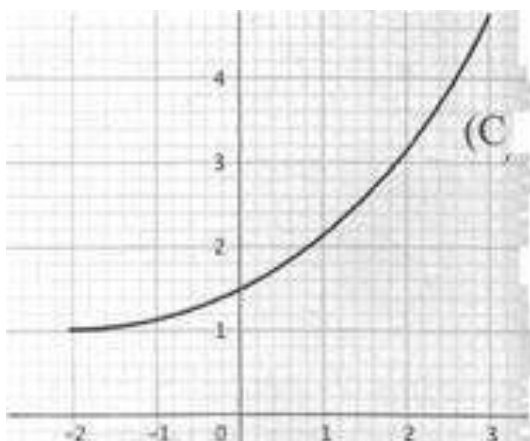
Soit f la fonction de \mathbb{R}^* vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x^2$.

Démontre que f est injective.

Exercice 11

La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique d'une application bijective f dans un repère orthonormé.

Construis $(C_{f^{-1}})$, la représentation graphique de f^{-1} dans le même repère.





MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

Compétence 2

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 2

Modélisation de phénomènes aléatoires

Leçon 4 :

DENOMBREMENT

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des compétitions de l'OISSU, un sponsor a remis un lot de maillots au Chef d'un établissement. Le professeur d'EPS de la classe de 1^{ère} scientifique a fourni à ce Chef d'établissement les informations suivantes :

Sur les 25 élèves régulièrement inscrits en 1^{ère} scientifique :

15 jouent au Handball ;

10 jouent au Basketball ;

5 pratiquent les deux sports.

Le premier lot de maillots parvenu n'étant pas suffisant pour tous les élèves, le Chef d'établissement décide de dénombrer les élèves de 1^{ère} scientifique qui ne pratiquent aucun sport. Il se rend dans la classe afin de procéder au comptage. Malheureusement, ayant terminé leur cours du jour, la plupart des élèves des élèves sont rentrés chez eux. Vu l'urgence et dans le souci d'avoir le nombre exact de maillots restants pour cette classe, il sollicite les élèves de la classe présents. Ceux-ci s'organisent pour répondre à la préoccupation du Chef d'établissement.

B-RESUME DE COURS

1. ENSEMBLE FINI

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de E.

On note : **Card (E)**.

Exemple : $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$\text{Card}(A) = 4$

1.2 Réunion et intersection de deux ensembles

Définitions

- Soit A et B deux ensembles.
On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
On note $A \cup B$ et on lit : A union B.
- Soit A et B deux ensembles.
On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
On note $A \cap B$ et on lit : A inter B.

Exemple

On donne $A = \{3 ; h ; * ; 5\}$ et $B = \{8 ; * ; 1\}$

On a alors : $A \cup B = \{3; h; * ; 5; 8; 1\}$ et $A \cap B = \{*\}$

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Exercice de fixation

On considère les ensembles E et F tels que $\text{Card}(E) = 30$, $\text{Card}(F) = 25$ et $\text{Card}(E \cap F) = 15$

Détermine $\text{Card}(E \cup F)$

Solution

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$$

$$\text{On a : } \text{Card}(E \cup F) = 30 + 25 - 15 = 40$$

1.3 Complémentaire d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.

On appelle complémentaire ou partie complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

On note : C_E^A ou \bar{A} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple

Soit A et E deux ensembles tels que $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8\}.$$

le complémentaire de A dans E est :

$$\bar{A} = C_E^A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

Propriété 1

Soit E un ensemble et A une partie de E. On a :

$$A \cup C_E^A = E$$

$$A \cap C_E^A = \emptyset$$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \bar{A}$ et

$A = \{2 ; 3 ; 6\}$ et $B = \{t ; 4 ; v ; y\}$.

Ecris l'ensemble E.

Solution

$A \cup B = A \cup C_E^A = E$ alors $E = \{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; t ; v ; y\}$

Propriété 2

Soit A une partie d'un ensemble E et \bar{A} le complémentaire de A dans E.

On a : $card(E) = card(A) + card(\bar{A})$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \bar{A}$ et

$A = \{2 ; 3 ; 6\}$ et $card(E) = 12$

Trouve le cardinal de l'ensemble B.

Solution

$card(E) = card(A) + card(B)$ donc $card(B) = card(E) - card(A) = 12 - 3 = 9$.

1.4 Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soit A et B deux ensembles.

On appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples (a ; b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

Notation : Le produit cartésien de A par B se note : $A \times B$

(et se lit : A croix B).

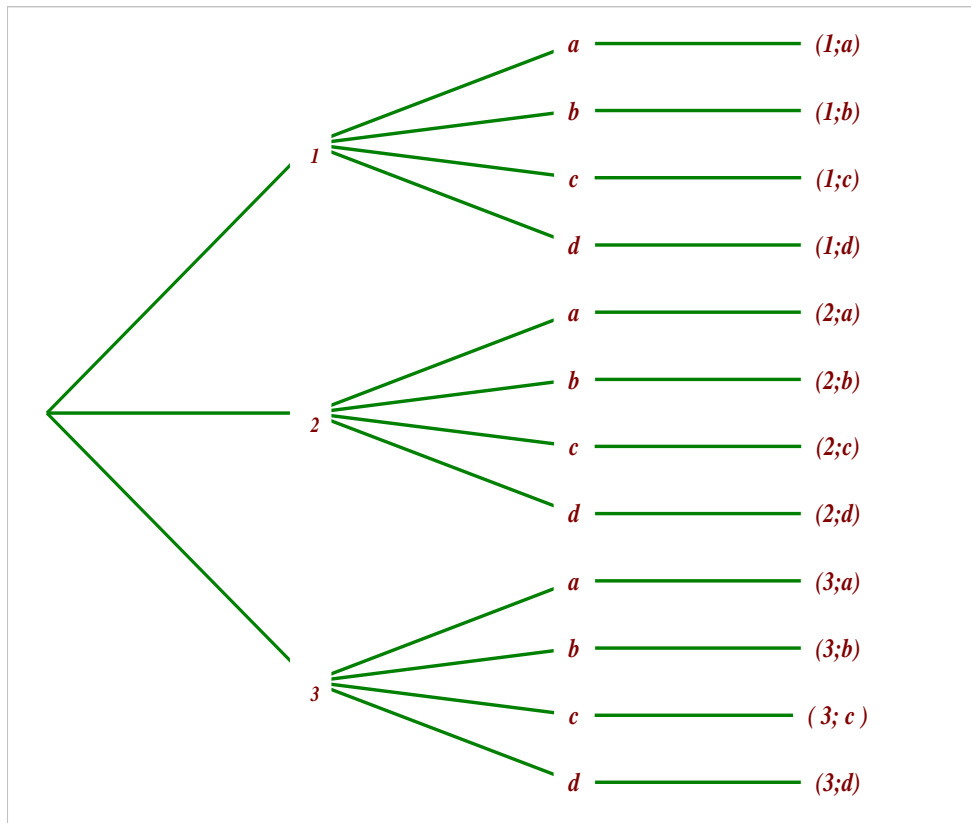
Exemple

Soit A et B des ensembles telle que $A = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $B = \{a ; b ; c ; d\}$

Les éléments du produit cartésien de $A \times B$ sont :

(On pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrées)

- Arbre de choix



- Tableau à double entrées

A \ B	a	b	c	d
1	(1 ;a)	(1 ;b)	(1 ;c)	(1 ;d)
2	(2 ;a)	(2 ;b)	(2 ;c)	(2 ;d)
3	(3 ;a)	(3 ;b)	(3 ;c)	(3 ;d)

$A \times B = \{ (1 ; a); (1 ; b); (1 ; c); (1 ; d); (2 ; a); (2 ; b); (2 ; c); (2 ; d); (3 ; a); (3 ; b); (3 ; c); (3 ; d) \}$.

Remarques

- De la même manière, on définit $A \times B \times C$ l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in A, b \in B$ et $c \in C$.
- $A \times A$ se note A^2 , $A \times A \times A$ se note A^3 .
- Soit n est un entier supérieur ou égal à 2

$A \times A \times \dots \times A = A^n$ (A apparaît n fois dans le produit)

Les éléments de A^n sont n éléments $x_1 ; x_2 ; \dots$ et x_n de A totalement ordonnés. On les note $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$.

x_1 est premier ; x_2 est deuxième ; ... x_n est n-ième.

Lorsque $x_1 \neq x_2$ on a : $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n) \neq (x_2 ; x_1 ; \dots ; x_n)$ en particulier : $(a ; b) \neq (b ; a)$ ainsi, dans un couple l'ordre des éléments est très important.

Propriété

Pour tous ensembles finis A et B, on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Exercice de fixation

Soit E et F deux ensembles tels que : $\text{card}(A) = 5$ et $\text{card}(F) = 8$.
Détermine $\text{Card}(E \times F)$.

Solution

$$\text{Card}(E \times F) = 5 \times 8 = 40$$

Conséquence

Pour tout ensemble fini A, pour tout entier naturel p non nul,

$$\text{Card}(A^p) = [\text{Card}(A)]^p.$$

Exercice de fixation

On lance au hasard trois fois de suite un dé parfait en notant à chaque lancer le numéro de la face supérieure.
Détermine le nombre de résultats possibles.

Solution

Posons $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\text{Card}(E) = 6$.

Chaque résultat est un élément de E^3 .

Soit N le nombre résultats possibles.

$$\begin{aligned} N &= 6^3 \\ &= 216 \end{aligned}$$

2. P-UPLETS, ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS

2.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

On appelle p -uplet de E tout élément de l'ensemble E^p .

Cas particuliers

$p = 2$: On parle de couple ;

$p = 3$: On parle de triplet ;

$p = 4$: On parle de quadruplet.

Exemple

On donne $E = \{0 ; 5 ; 6\}$.

$(0 ; 0 ; 1) ; (0 ; 5 ; 6)$ sont des 3-uplets ou triplets de l'ensemble E^3 .

2.1 Propriété

Le nombre de p -uplet(s) d'un ensemble à n éléments est égal à n^p .

Remarque : Dans les p -uplets, un élément peut apparaître plusieurs fois (répétition possible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation

Détermine le nombre de numéros de téléphones de 8 chiffres puis de 10 chiffres qu'on peut former avec les nombres du système décimal.

Solution

Le système décimal étant composé des chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 soit 10 chiffres.

- Pour 8 chiffres : Chaque chiffre pouvant être répété, le nombre de numéros de téléphone de 8 chiffres est un 8-uplet dans 10 soit 10^8 numéros
- Pour 10 chiffres : Chaque chiffre pouvant être répété, le nombre de numéros de téléphone de 10 chiffres est un 10-uplet dans 10 soit 10^{10} numéros.

3 Arrangements

3.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple

$E = \{a ; 1 ; 4 ; b ; 9 ; c\}$

$(1 ; a ; 4 ; 9) ; (b ; c ; 9 ; 1) ; (9 ; a ; 4 ; 1)$ sont trois arrangements de 4 éléments de E .

Par contre $(b ; 4 ; b) ; (9 ; b ; 9)$ sont des triplets qui ne sont pas des arrangements de E.

3.2 Propriété

n et p sont deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal à A_n^p .

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$$

NB : Le nombre d'arrangement de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal au produit de p nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est n .

Remarque : Dans les arrangements, un élément ne peut apparaître qu'au plus une fois (répétition impossible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation

Calcule A_{10}^4 et A_7^5

Solution

$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$ (Produit de 4 nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est 10)

$$A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

(Produit de 5 nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est 7)

Cas particulier : $A_n^1 = n$; Par convention $A_n^0 = 1$;

4 Permutation

4.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Exemple

$(0 ; 1 ; 6) ; (6 ; 0 ; 1) ; (0 ; 6 ; 1)$ sont des permutations de l'ensemble $A = \{0 ; 1 ; 6\}$.

4.2 Propriétés

Propriété 1

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est A_n^n .

$$A_n^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$$

Exercice de fixation

Détermine le nombre de mots ayant un sens ou non, que l'on peut former à partir des lettres du nom KENDAL.

Solution

Il s'agit d'une permutation des 6 lettres du nom KENDAL. Le nombre de mot est donc : $A_6^6 = 720$

Notation factorielle

$n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ se note $n!$ On lit factorielle n .

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$$

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Propriété2

- Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $1 \leq p \leq n$. On a

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- $n! = A_n^n$

Exercice de fixation

Calcule le nombre de 4 arrangements dans 10.

Solution

$$\text{On a : } A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

5 COMBINAISONS

5.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Exemple

Les ensembles $\{0 ; e ; u\}$, $\{v ; e\}$ sont des combinaisons de l'ensemble

$$A = \{0 ; 1 ; e ; v ; u\}$$

Remarque

L'ensemble $\{d ; a ; c\}$ possède les mêmes éléments que l'ensemble $\{a ; d ; c\}$. Ils sont donc égaux.

Par conséquent, contrairement aux listes, l'ordre d'écriture des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Cette absence d'importance de l'ordre est marquée par l'utilisation de l'écriture avec accolades, écriture réservées aux ensembles.

Par ailleurs, chaque élément ne peut apparaître qu'au plus une fois (répétition impossible).

5.2 Propriétés

Propriété 1

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercice de fixation

Calcule le nombre de combinaisons de 5 dans 11.

Solution

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 3 \times 7 = 231$$

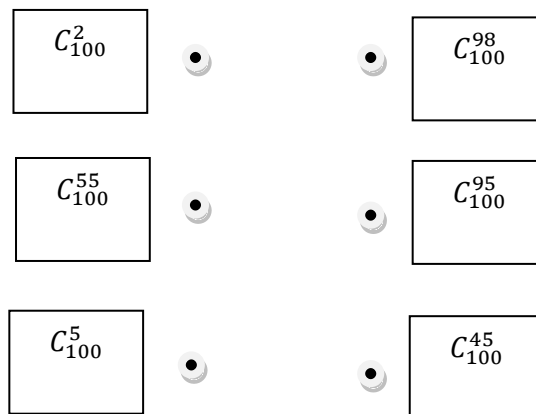
Propriété 2

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$.

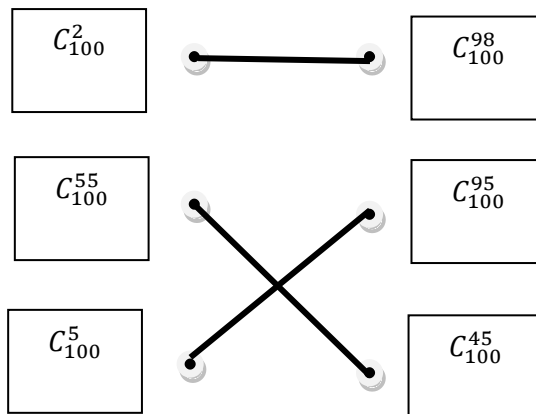
- On a : $C_n^{n-p} = C_n^p$.
- Si de plus $0 < p < n$, alors on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Exercice de fixation

Relie ceux qui sont égaux entre eux.



Solution



5.3 Tirages simultanés, tirages successifs sans remise, tirages successifs avec remise

TIRAGES	SIGNIFICATION	MODELES
Simultanés de p parmi n ($0 \leq p \leq n$)	Tirer en même temps des p éléments dans n	C_n^p
Successifs sans remise de p parmi n ($0 \leq p \leq n$)	Tirer élément après élément sans remettre	A_n^p
Successifs sans remise de n parmi n	Tirer élément après élément sans remettre jusqu'à tirer les n éléments	$n!$
Successifs avec remise de p parmi n	Tirer élément le remettre et ainsi de suite	n^p

Vocabulaire

- Tirer au moins n éléments, c'est tirer un nombre plus grand ou égal à n . Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au plus $n - 1$ »
- Tirer au plus n éléments, c'est tirer un nombre plus petit ou égal à n . Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au moins $n + 1$ »

5.4 Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^p a^{p-1} b^p + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$n=0 \quad 1$$

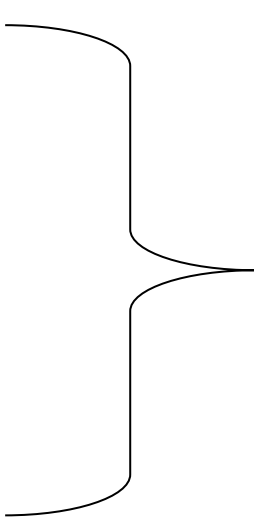
$$n=1 \quad 1 \quad 1$$

$$n=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$n=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$n=5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$



Les nombres 1 ; 2 ; 3 ; etc.....
sont les coefficients C_n^p

Exemples

$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$$

$$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$$

$$(3 + b)^4 = 1 \times 3^4 + 4 \times 3^3 b^1 + 6 \times 3^2 b^2 + 4 \times 3^1 b^3 + 1 \times b^4$$

$$(a - b)^5 = 1.a^5 - 5.a^4 b^1 + 10.a^3 b^2 - 10.a^2 b^3 + 5.a^1 b^4 - 1.b^5$$

C- SITUATION D’EVALUATION

Les élèves d’un lycée souhaitent participer à la kermesse organisée par une société de la place.

Pour gagner des tee-shirts, il faut miser la somme de 20.000F avant de faire le tirage de deux cartons dans une urne contenant quatre cartons numérotés de 1 à 4. Le nombre de résultats possibles de chaque tirage correspond au nombre de tee-shirts gagnés. Les organisateurs de ce jeu proposent alors trois tirages au choix :

- “Tirer simultanément deux cartons de cette urne ” ;
- “Tirer successivement sans remise deux cartons de cette urne” ;
- “Tirer successivement avec remise deux cartons de cette urne”.

Après être informés, les élèves décident de connaître le tirage le plus avantageux

Mais ne savent pas comment procéder. Il te sollicite.

Elève de première C , utilise tes connaissances mathématiques pour déterminer le tirage le plus avantageux.

Proposition de réponse

Pour résoudre cet exercice, je vais utiliser les dénombrements.

Je vais déterminer le type la formule appropriée pour chacun des trois tirages.

Je vais calculer le nombre de tee-shirts que propose chaque formule.

Je vais comparer ses différents résultats entre eux afin de trouver le tirage le plus avantageux.

- “Tirer simultanément deux cartons de cette urne ” est une combinaison de 2 dans 4.
 - “Tirer successivement sans remise deux cartons de cette urne “ est un arrangement de 2 dans 4.
 - “Tirer successivement avec remise deux cartons de cette urne” est un 2-liste.
- Pour le tirage 1, le nombre de tee-shirts est : $C_4^2 = 6$
 - Pour le tirage 2, le nombre de tee-shirts est: $A_4^2 = 12$
 - Pour le tirage 3, le nombre de tee-shirts est : $4^2 = 16$

$16 > 12$ et $16 > 6$ alors :

Le tirage successif avec remise de deux cartons de cette urne est le plus avantageux.

D- EXERCICES

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Compléter par : \in ou \notin .

$(0, 1) \dots \dots A \times B$; $(1, 3) \dots \dots B \times A$; $(6, 0) \dots \dots B \times A$

$(3, 6) \dots \dots B \times B$; $(2, 3) \dots \dots A \times B$; $(3, 4) \dots \dots B \times A$

Correction de l'exercice 1

$(0; 1) \notin A \times B$; $(1; 3) \notin B \times A$; $(6; 0) \in B \times A$;

$(3; 6) \in B \times B$; $(2; 3) \in A \times B$; $(3; 4) \in B \times A$

Exercice 2

Soit A et B, deux ensembles non-vides. On donne $\text{Card}(A \times B) = 12$

Complète le tableau suivant :

Card (A)	1	6		3	6	
Card (B)			4			12

Correction de l'exercice 2

Card (A)	1	6	3	3	6	1
Card (B)	12	2	4	4	2	12

Exercice 3

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	AFFIRMATION	Réponses
1	Tout p-uplet d'éléments d'un ensemble E est un élément de E^P	

2	$(0, 1, 2, 3, 4)$ est un quadruplet d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$	
3	$(0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 0)$ est un élément de E^5 où $E=\{0, 1, 2\}$	
4	$(0, 1, 0)$ est un couple d'éléments de $\{0, 1\}$	
5	L'ordre des éléments d'un p-uplet n'est pas important	
6	Un p-uplet peut contenir plusieurs fois le même élément.	

Correction de l'exercice 3

N°	AFFIRMATION	Réponses
1	Tout p-uplet d'éléments d'un ensemble E est un élément de E^p	Vrai
2	$(0, 1, 2, 3, 4)$ est un quadruplet d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$	Faux
3	$(0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 0)$ est un élément de E^5 où $E=\{0, 1, 2\}$	Vrai
4	$(0, 1, 0)$ est un couple d'éléments de $\{0, 1\}$	Faux
5	L'ordre des éléments d'un p-uplet n'est pas important	Faux
6	Un p-uplet peut contenir plusieurs fois le même élément.	Vrai

Exercice 4

Le code secret d'un téléphone portable est composé de 4 chiffres tapés sur un clavier numérique comportant les chiffres 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 et 9.

Détermine le nombre de codes possibles.

Correction de l'exercice 4

Méthode 1

Les chiffres sont en ordre avec la possibilité de répétition d'un même chiffre.

Soit N le nombre cherché.

N est le nombre de quadruplets d'un ensemble à 10 éléments.

D'où, $N = 10^4$

$$= 10\ 000$$

Méthode 2

Pour le premier chiffre du code, on a 10 choix possibles;

Pour le 2ème chiffre du code, on a 10 choix possibles;

Pour le 3ème chiffre du code, on a 10 choix possibles;

Pour le 4ème chiffre du code, on a 10 choix possibles.

Soit N le nombre cherché.

$$N = 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= 10^4$$

$$= 10\ 000$$

Exercice 5

Un parking comprend cinq (5) places disponibles. Trois automobilistes se présentent au parking et doivent stationner au hasard l'un après l'autre. Chaque véhicule ne peut occuper qu'une seule place.

Détermine le nombre de rangements possibles.

Correction de l'exercice 5

Méthode 1

Il s'agit de prendre 3 pistes parmi 5 sans prendre une même plus d'une fois.

D'où, un rangement des 3 véhicules est un arrangement de 3 parmi 5.

Soit N le nombre cherché.

$$N = A_5^3$$

$$= 60$$

Méthode 2

Pour le premier véhicule, on a 5 choix possibles ;

Pour le 2ème véhicule, on a 4 choix possibles ;

Pour le 3ème véhicule, on a 3 choix possibles ;

Soit N le nombre cherché.

$$N = 5 \times 4 \times 3$$

$$= 60$$

Exercice 6

Dans un jeu de 32 cartes, chaque joueur reçoit 8 cartes.

Détermine le nombre de "main" que l'on peut obtenir à partir de 32 cartes.

Une "main" est un sous ensemble de huit cartes prises parmi 32.

Correction de l'exercice 6

Une "main" est un sous ensemble de huit cartes prises parmi 32, ici l'ordre n'est pas important. On a donc affaire à un tirage simultané.

Le nombre de "main" possible est donc une combinaison de 8 parmi 32 : $C_{32}^8 =$

Exercice 7

Une urne contient cinq (5) boules indiscernables au toucher et de couleurs différentes (noire, blanche, verte, rouge, bleue). On tire simultanément trois boules.

Détermine le nombre de tirage possibles.

Correction de l'exercice 7

On tire simultanément trois boules parmi 5, alors c'est une combinaison de 3 dans 5 :

$$C_5^3 = 10$$

Exercice 8

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».

a) Combien y a-t-il de mains différentes ?

Dénombrer les mains qui contiennent :

- b) Exactement deux as.
- c) Aucun as.
- d) Au moins un as.
- e) Au plus deux as.
- f) Exactement deux cœurs et trois piques.
- g) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Correction de l'exercice 8

Le modèle mathématique utilisé est la combinaison

- a) Le nombre de mains est une combinaison de 8 cartes dans 32 soit $C_{32}^8 = 10.518.300$ mains.
- b) Il y a 4 as. Donc le nombre de mains contenant exactement deux as est :
 $C_4^2 \times C_{28}^6 = 6 \times 26 \times 23 \times 14 \times 9 \times 5 = 2.260.440$
- c) Il n'y pas d'as, donc le tirage se fait dans 28 cartes soit $C_{28}^8 = 3.108.105$ mains.
- d) Le complémentaire, c'est aucun as, donc le nombre de mains est :
 $C_{32}^8 - C_{28}^8 = 10.518.300 - 3.108.105 = 7.410.195$ mains
- e) Soit zéro as, soit un as, soit deux as, donc le nombre de mains est

$$C_{28}^8 + C_4^1 \times C_{28}^7 + C_4^2 \times C_{28}^6 = 3.108.105 + 4 \times 1.184.040 + 6 \times 376.740 = 10.104.705$$

- f) Il y a 8 cœurs et 8 piques, donc le nombre de mains est
 $C_8^2 \times C_8^3 \times C_{16}^3 = 28 \times 168 \times 280 = 1.317.120$
- g) Il y a 8 cœurs, 8 piques et 8 trèfles, donc le nombre de mains est
 $C_8^2 \times C_8^3 \times C_8^1 \times C_8^2 = 28 \times 56 \times 8 \times 28 = 351232.$



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE



Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 8 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs
algébriques et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

Leçon 5 : LIMITES ET CONTINUITÉ

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

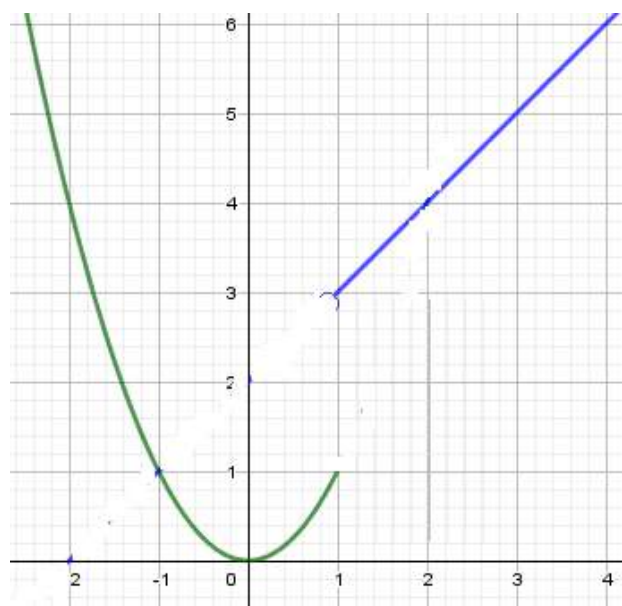
Pendant une séance de cours en informatique qu'organise le club scientifique, les élèves d'une classe de première D apprennent à tracer des courbes à l'aide de l'ordinateur de leur salle multimédias.

Ainsi pour la fonction f définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = x + 2 \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Ils observent sur l'écran de leur ordinateur une figure morcelée en deux parties au point d'abscisse 1 (*voir figure*). Cherchant à expliquer cette particularité de la courbe, un professeur de mathématiques encadreur du club scientifique les renvoie aux notions de continuité d'une fonction.

Désireux de comprendre le comportement de la courbe de la fonction f en 1, les élèves décident d'approfondir les connaissances sur les fonctions.



B--RESUME DE COURS

I. LIMITES

1- Notion de limites

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$.

On constate par le calcul que lorsque l'on choisit « x suffisamment proche de 2 », on obtient « $f(x)$ suffisamment proche de 4 ».

On dit alors que : $f(x)$ tend vers 4, lorsque x tend vers 2
ou bien : **la limite, lorsque x tend vers 2, de $f(x)$ égale 4.**

On dit aussi que : **4 est la limite de f en 2.**

On note : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 1$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte

- 1) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 8$ 2) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5$ 3) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 9$

Corrigé

- 1) Faux 2) Faux 3) Vrai

2- Notion de continuité

Propriété

Soit f une fonction définie en a .

Si f admet une limite en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

2) La fonction f admet une limite en -2

3) La fonction f admet une limite en 0

Corrigé

- 1) Faux 2) Vrai 3) Faux

Définition

Soit f une fonction et a un élément de l'ensemble de définition de f

On dit que la fonction f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a .

(c'est – à – dire : **f est continue en a** signifie que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

- La fonction f est continue en 2 car f est définie en 2 et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{5}{2}$.

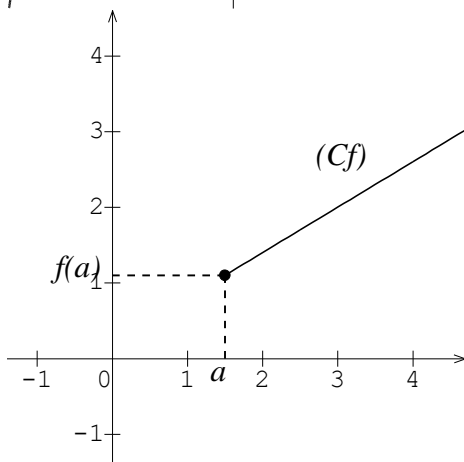
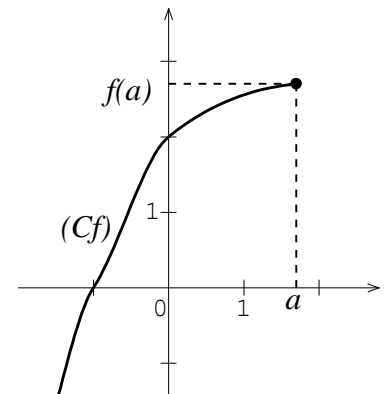
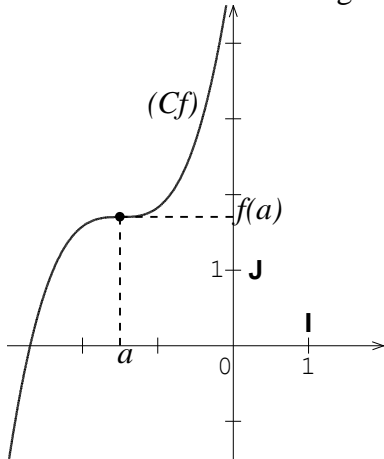
- La fonction f n'est pas continue en 0 car f n'est pas défini en 0

Remarque

- On démontre et on admet que : lorsqu'une fonction admet une limite en a , cette limite est unique.
- Pour qu'une fonction f soit continue en a , il est nécessaire qu'elle soit définie en a .

Illustration graphique de la continuité d'une fonction en un point

Dans chacun des cas de figures ci – dessous, (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f .



Dans chacun de ces trois cas, la fonction f est continue en a .

Exercice de fixation

Sur chacune des figures ci – dessous, la courbe donnée est la représentation graphique d'une fonction f et a désigne un nombre réel. Indique dans quels cas la fonction f est continue en a .

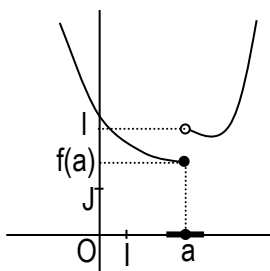


Figure 1

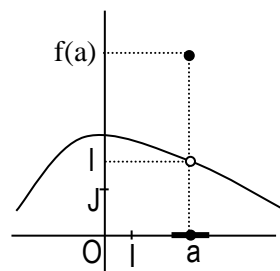


Figure 2

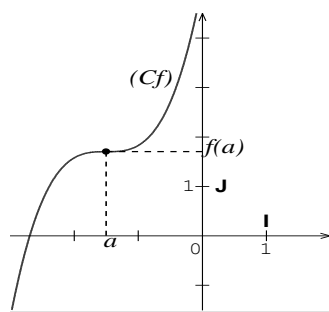


Figure 3

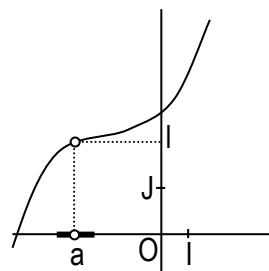


Figure 4

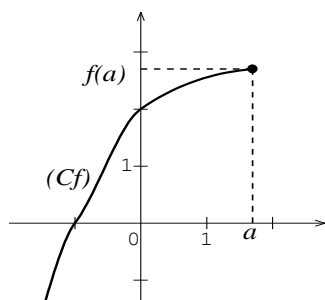


Figure 5

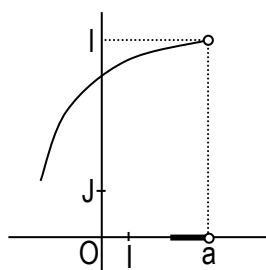


Figure 6

Corrigé

Les figures qui présentent une courbe de fonction continue en a sont Figure 3 et Figure 5

3- Continuité en a de fonctions élémentaires

a) Propriété 1

Les fonctions élémentaires définies respectivement par : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) ; $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout élément a de leurs ensembles de définition respectifs.

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 15} \cos x = \dots ; \lim_{x \rightarrow -2} (3) = \dots ; \lim_{x \rightarrow -3} (x^2) = \dots ; \lim_{x \rightarrow 49} (\sqrt{x}) = \dots ; \lim_{x \rightarrow -1,8} |x| = \dots ; \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x}\right) = \dots$$

Corrigé

Comme les fonctions élémentaires sont continues en tout élément de leur ensemble de définition alors :

$$\lim_{x \rightarrow 15} \cos x = \cos(15) ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x^2) = (-3)^2 = 9 ; \quad \lim_{x \rightarrow 49} (\sqrt{x}) = \sqrt{49} = 7 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1,8} |x| = |-1,8| = 1,8 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3} .$$

b) Propriété 2

f et g étant deux fonctions continues en a :

- Les fonctions $f + g$, fg , kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues en a .
- Si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a .
- Si f est positive alors la fonction \sqrt{f} est continue en a .

Exercice de fixation

Soit f et g deux fonctions continues en 5

Justifie que chacune des fonctions f^2 ; $f - g$ et $4f$ est continue en 5.

Corrigé

- f est continue en 5 donc la fonction $f \times f = f^2$ est continue en 5.
- g est continue en 5 donc $-g$ est continue en 5.
 f et $-g$ sont continues en 5 donc $f + (-g) = f - g$ est continue en 5
- f étant continue en 5 alors $4f$ est aussi continue en 5

Remarque

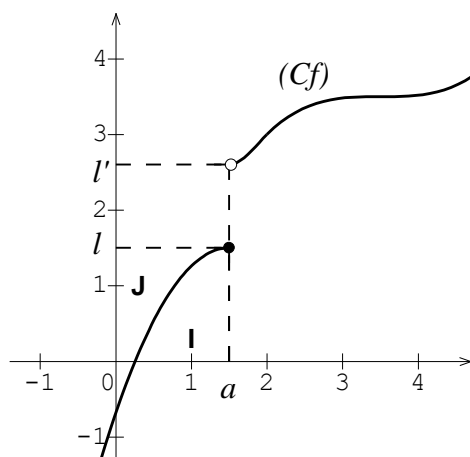
Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE

1) Présentation

Sur la figure ci – dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f et a est un nombre réel.

- Lorsqu'on choisit x dans $] -\infty; a[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l . On dit alors que l est la limite de f à gauche en a et on note : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$
- Lorsqu'on choisit x dans $]a; +\infty[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l' . On dit alors que l' est la limite de f à droite en a et on note : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l'$



Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 3] \\ f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \in]3; +\infty[\end{cases}$$

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) La limite de f à gauche en 3 se note $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

2) La limite de f à droite en 3 est égale à 9

3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$

Corrigé

1) FAUX

2) FAUX

3) VRAI

4) FAUX

2) Propriétés

a et l sont des nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a .

- f n'est pas définie en a .

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a , une limite à gauche et une limite à droite égales à l .

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = l\right)$$

- f est définie en a .

La fonction f admet une limite en a si et seulement si f admet en a , une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = f(a)\right)$$

Exercice de fixation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ telle que : $\lim_{x \rightarrow 1}^> f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 1}^< f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 4}^> f(x) = -2$,

$\lim_{x \rightarrow 4}^< f(x) = -2$ et $f(1) = 3$.

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) f admet une limite en 1

2) f admet une limite en 4

Corrigé

1) FAUX

2) VRAI

Remarque

f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) = f(a)$

III- CALCUL DE LIMITES

1- Opérations sur les limites

Propriétés

a, l et l' désignent des nombres réels.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = ll'$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' (l' \neq 0)$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

Exercice de fixation

f et g sont deux fonctions telles que : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$.

Calcule chacune des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Corrigé

Comme $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ alors :

- $\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x) = -5 + 2 = -3$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) = -5 \times 2 = -10$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-5}{2}$

remarque

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a) \neq 0$, est une fonction continue en a .

C - - SITUATION COMPLEXE

Deux frères, élèves d'une classe de 1^{ère}C, souhaitent communiquer avec leur oncle résidant à Paris en France.

Ils se rendent dans une cabine téléphonique et le gérant de la cabine leur propose le contrat suivant :

- 150F CFA la minute de 0 à 5 minutes de communication,
- 750F CFA forfaitaire entre 5 minutes et 10 minutes de communication,
- 100F CFA la minute, de 10minutes à 30 minutes de communication,
- Au – delà de 30 minutes, 3000F CFA de forfait plus 50F CFA pour chaque minute de communication supplémentaire.

Dans leurs échanges l'ainé affirme que le contrat proposé par le gérant de la cabine traduit une fonction continue en 5 et discontinue en 30 mais son petit frère soutient que cette fonction est continue en 5 et en 30. Ils ont présenté cette situation à leurs camarades de classe qui n'ont pu départager. En tant qu'élève de 1^{ère}C, ils te

sollicitent. A l'aide d'une production argumentée, en utilisant tes connaissances mathématiques, indique lequel des deux frères a raison.

Corrigé

Pour départager les deux frères nous allons utiliser la leçon limite et continuité pour cela nous allons :

- Déterminer la fonction f qui a chaque minute de communication associe son coût
- Etudier la continuité de f en 5 et en 30
- départager les deux frères

Soit x la durée en minutes de communication et f la fonction qui à x associe le coût de la communication en franc CFA. On a :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in [0;5] \text{ alors } f(x) = 150x \\ \text{Si } x \in]5;10[\text{ alors } f(x) = 750 \\ \text{Si } x \in [10;30] \text{ alors } f(x) = 100x \\ \text{Si } x \in]30;+\infty[\text{ alors } f(x) = 3000 + 50(x-30) \end{cases}$$

- On a : $f(5) = 150 \times 5 = 750$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (150x) = 750$ et $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (750) = 750$

Comme $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5)$ alors f est continue en 5 (1)

- On a : $f(30) = 100 \times 30 = 3000$, $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^-} (100x) = 3000$ et

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} (3000 + 50(x-30)) = 3000$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = f(30)$ alors f est continue en 30 (2)

(1) et (2) impliquent que f est continue en 5 et en 30 donc le petit frère a raison.

D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \otimes \sqrt{3}} (2 - \sqrt{7}) \quad ; \quad \lim_{x \otimes -5} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad ; \quad \lim_{x \otimes -\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Corrigé

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2 - \sqrt{7}) = 2 - \sqrt{7} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \right) = \frac{(-5)^2 - 2 \times (-5) + 3}{-5 - 2} = -\frac{38}{7} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{6})}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 2

f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x^2 + 3$.

Etudie la continuité de f en 2.

Corrigé

La fonction f est définie sur \mathbb{R} car f est une fonction polynôme.

f est définie en 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 7$ et $f(2) = 2^2 + 3 = 7$.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} \text{Pour } x < 1, f(x) = 3x - 1 \\ \text{Pour } x \geq 1, f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$$

1) Calcule la limite de f à gauche en 1 et la limite de f à droite en 1.

2) Justifie que la fonction f n'admet pas limite en 1.

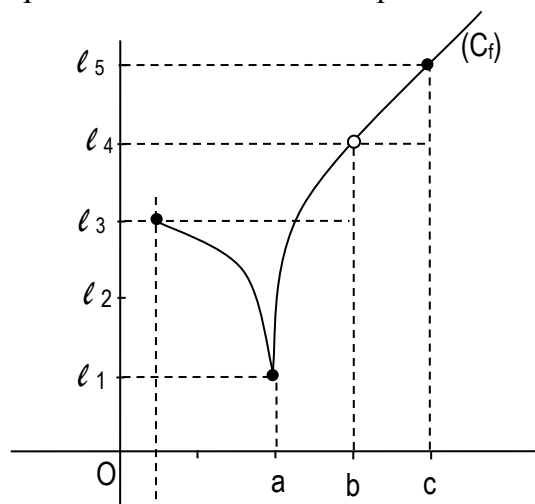
Corrigé

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow 1}^- (3x - 1) = 3 \times 1 - 1 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x) = \lim_{x \rightarrow 1}^+ \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

2) On a $\lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4

(C_f) est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



A l'aide de ce graphique:

- donne la limite de f en a , en b et en c .
- dis si f est continue en a , en b et en c .

Corrigé

- La limite de f en a est ℓ_1 ; la limite de f en b est ℓ_4 et la limite de f en c est ℓ_5 .
- f est continue en a et en c . f n'est pas continue en b car f n'est pas définie en b .

Exercices d'approfondissement

Exercice 5

Calcule chacune des limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$$

Corrigé

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2-2 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Etudie la continuité de f en a .

- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$; $a = 1$
- $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 3}$; $a = -3$
- $\begin{cases} \text{Pour } x \neq -2, f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 2} \\ f(-2) = 0 \end{cases}$; $a = -2$

Corrigé

1) f est une fonction polynôme donc f est continue sur \mathbb{R} en particulier f est continue en 1

2) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ donc f ne peut être continue en -3

3) f est définie sur \mathbb{R} .

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (-x+1) = 3$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$ alors f n'est pas continue en -2 .



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 12 heures

Code :

Compétence 3

Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 1

Géométrie du plan

Leçon 06 : Angles orientés et trigonométrie

Dans cette leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

(C) est le cercle trigonométrique, I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J . (T) est la tangente à (C) en I . L'unité de mesure d'angle est le radian.

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 1^{ère} C d'un lycée Moderne fait des recherches sur les équations et inéquations dans \mathbb{R} dans la salle multimédia de son établissement. Il découvre des équations de types :

$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$); $a \cos x + b \sin x + c = 0$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Il présente ses recherches à ces camarades de classe. Ceux-ci constatent que ces équations ne sont pas habituelles. Ils décident d'approfondir leurs connaissances sur la trigonométrie afin de résoudre ces équations.

B- RESUME DE COURS

I) ANGLES ORIENTES

1) Mesures d'un angle orienté

a) Définition

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , tout nombre réel de forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $mes(\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi$.

Exemple

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}.$$

$\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{11\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

Remarques

A tout nombre réel x correspond un unique point M de (C) ; donc un unique angle orienté (\vec{OI}, \vec{OM}) dont une mesure est x .

- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle orienté sont les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$)
- Toutes les mesures d'un même angle orienté ont le même point image M sur (C) .

Notations

- L'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle plat seront notés respectivement $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$.

b) Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α , $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre réel $x \in]-\pi ; \pi]$ tel que $Mes(\hat{\alpha}) = x$.

Méthode

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure x est connue, consiste à écrire $\alpha = x + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$;
- Puis l'on détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$.

Exercice de fixation

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

α vérifie les deux conditions suivantes :

$$(1) -\pi < \alpha \leq \pi ; \quad (2) \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \alpha = -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi.$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$-\pi < -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi, \text{ en divisant par } 2\pi \text{ on obtient : } -\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2};$$

$$\text{par la suite : } \frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8} \quad ; \quad \text{d'où : } k = 15.$$

$$\text{donc } \alpha = -\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi ; \text{ ce qui donne : } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

2) Somme et différence de deux angles orientés

Définitions

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β .

- On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté dont une mesure est $\alpha + \beta$.
- Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$, il a pour mesure $-\alpha$.
- La différence des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, noté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté $\hat{\alpha} + (-\hat{\beta})$ dont une mesure est $\alpha - \beta$.

Exemple :

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-2\pi}{5}$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{5}$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}$

Remarque

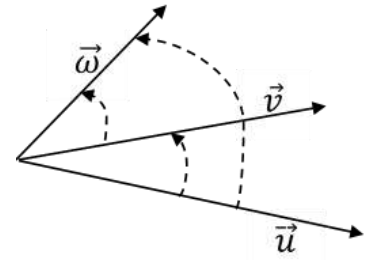
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$$

II) PROPRIETES DES ANGLES ORIENTES

1) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} : $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$.



EXERCICE DE FIXATION

A, B, C et D sont quatre points distincts. Choisis l'égalité correcte :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}})$

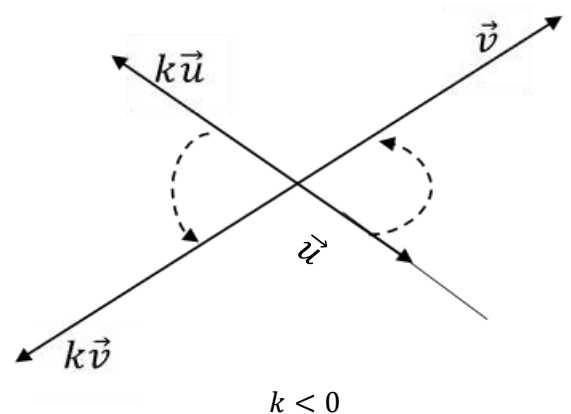
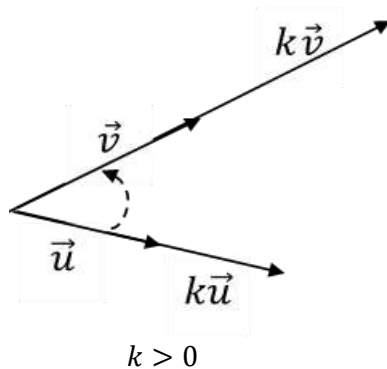
SOLUTION

L'égalité correcte est b)

Conséquences

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul on a :

- 1) $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- 2) Si $k > 0$ alors $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- 3) Si $k < 0$ alors $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- 4) $(\widehat{k\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$



EXERCICE DE FIXATION

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Ecris le numéro de l'égalité suivi de VRAI si l'égalité est juste ou de FAUX si l'égalité n'est pas juste.

N°	Égalités
1	$(-2\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
2	$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \hat{\pi}$
3	$(7\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, 7\vec{v})$
4	$(-5\vec{u}, -5\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
5	$(\vec{u}, 4\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \hat{\pi}$

SOLUTION

1- FAUX ; 2- VRAI ; 3- VRAI ; 4- VRAI ; 5- FAUX

2) Double d'un angle orienté

Définition

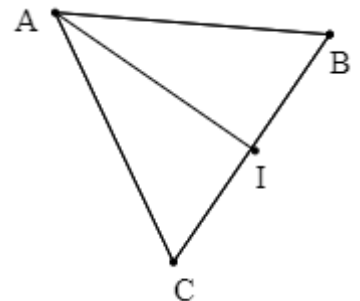
Soit (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté.

On appelle double de (\vec{u}, \vec{v}) et on note $2(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté défini par : $2(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v})$

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et I le milieu de [BC]

$$2(\vec{AC}, \vec{AI}) = (\vec{AC}, \vec{AI}) + (\vec{AC}, \vec{AI}) = (\vec{AC}, \vec{AI}) + (\vec{AI}, \vec{AB}) = (\vec{AC}, \vec{AB})$$



Remarques

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α .
- Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\frac{\hat{\pi}}{2}$ l'angle orienté droit direct. On a :

- 1) $2\hat{\alpha} = \hat{\delta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\delta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\pi})$
- 2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi})$
- 3) $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2} \text{ ou } \hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2})$

EXERCICES DE FIXATION

A, B et C sont trois points distincts tels $2(\vec{AB}, \vec{AC}) = \hat{0}$.

Démontrez que les points A, B et C sont alignés.

CORRIGÉ

$$2(\widehat{AB, AC}) = \hat{\alpha} \Leftrightarrow ((\widehat{AB, AC}) = \hat{\alpha} \text{ ou } (\widehat{AB, AC}) = \hat{\alpha} + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

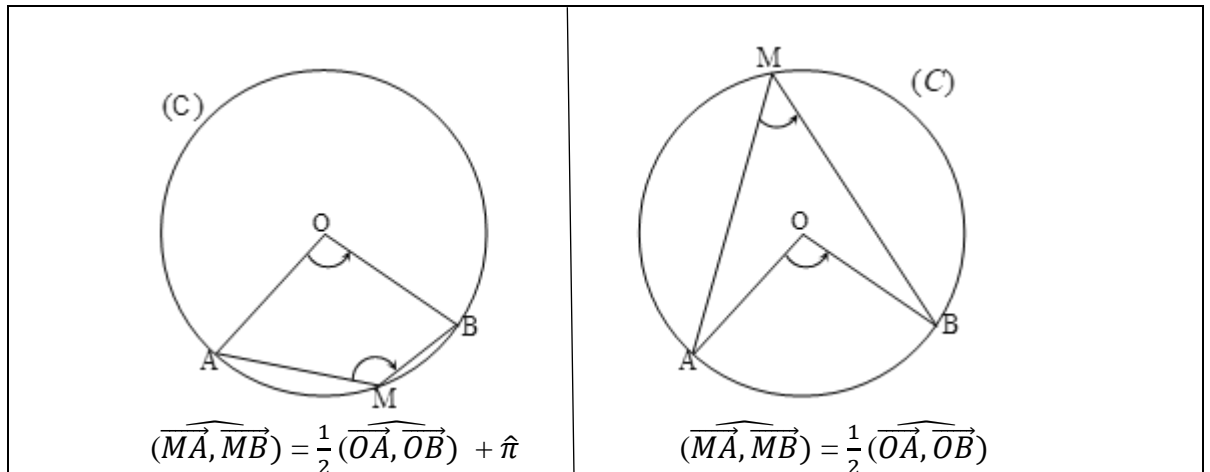
$$\Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$

3) Angles orientés et cercle

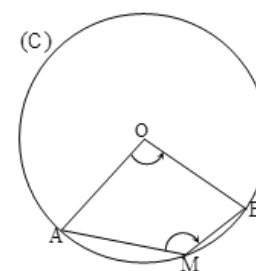
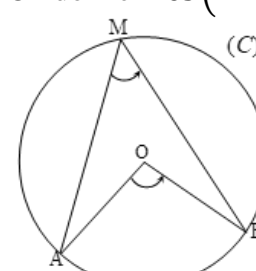
a) Angles orientés inscrits dans un cercle.

Propriété

Soit (C) un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Soit M un point de (C) distinct de A et B



Exercice de fixation

1) On donne $\text{Mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{2\pi}{3}$.  Calcule $\text{Mes}(\widehat{MA, MB})$	2) On donne $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{\pi}{4}$.  Calcule $\text{Mes}(\widehat{OA, OB})$.
--	--

Solution

$$1) (\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA, OB}) + \hat{\alpha} \text{ donc } \text{mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2} \text{mes}(\widehat{OA, OB}) + \text{mes } \hat{\alpha} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Donc } \text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$2) (\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA, OB}) \text{ donc } \text{mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2} \text{mes}(\widehat{OA, OB})$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \text{mes}(\widehat{OA, OB}) \text{ donc } \text{mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Par suite } \text{Mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{\pi}{2}.$$

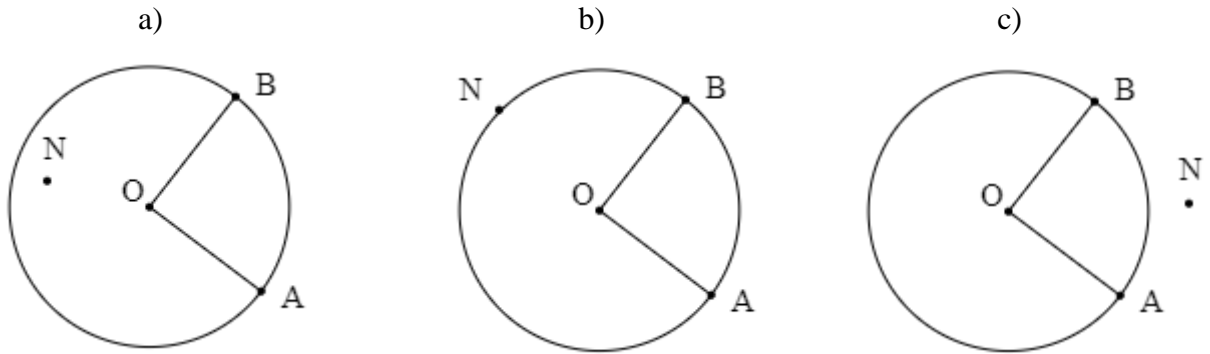
b) Caractérisation d'un cercle

Soit (C) un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M du plan distinct de A et B on a :

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$$

EXERCICE DE FIXATION

Observe les figures ci-dessous et indique dans quel cas on a : $2(\widehat{NA}, \widehat{NB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$



Solution

Figure b)

c) Points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = 2(\widehat{DA}, \widehat{DB})$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit ABC un triangle rectangle en C et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) .

Démontrez que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution

Les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et en D

On a : $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = \hat{\pi}$ et $2(\widehat{DA}, \widehat{DB}) = \hat{\pi}$ donc $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = 2(\widehat{DA}, \widehat{DB})$. Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

III) TRIGONOMETRIE

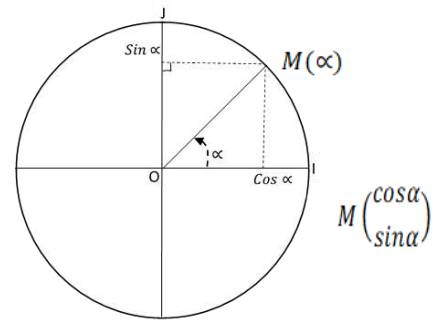
1) Lignes trigonométriques d'un angle orienté

a) Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Définition

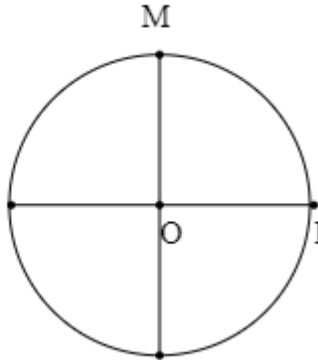
Soit (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C) .

- Le cosinus de (\vec{u}, \vec{v}) ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de (\vec{u}, \vec{v}) ou de α est l'ordonnée de M.



Exemple

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $M\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$



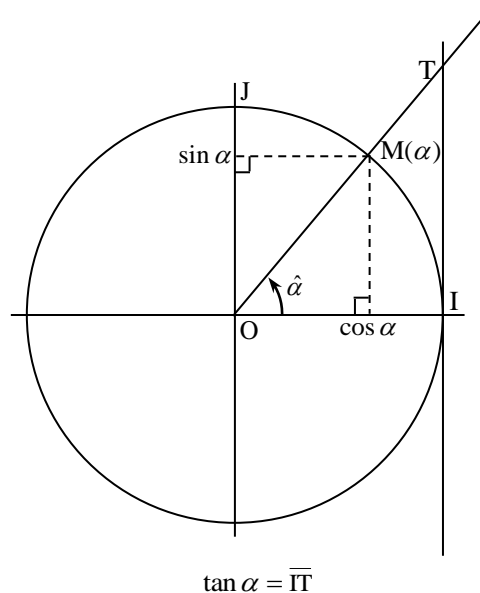
b) Tangente d'un angle orienté

Définition

Soient (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté non droit de mesure α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

La tangente du (\vec{u}, \vec{v}) ou de α est le nombre réel noté $\tan(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

$$\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Exemple

$$\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

Remarques

- $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α . Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- \tan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α .

Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dit associés à $\hat{\alpha}$

Propriété

Pour tout nombre réel α on a :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

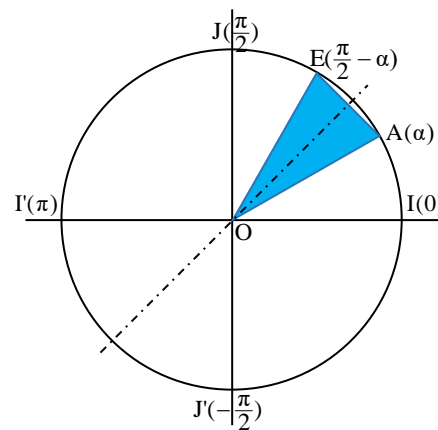
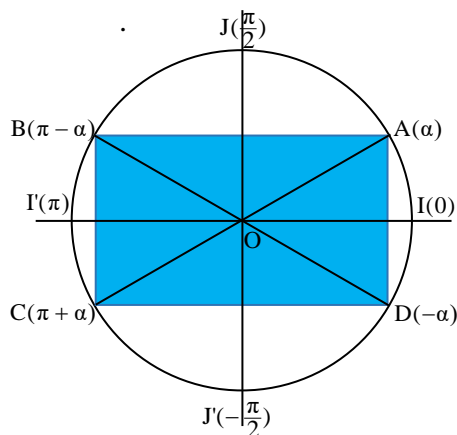
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$



EXERCICE DE FIXATION

Détermine $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

2) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$

$$4) \alpha = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Solution

$$1) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Remarque

Les tangentes des angles associés, non droits, se déduisent des formules précédentes.

Exemple : Pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

2) Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- 1) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- 2) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- 3) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- 4) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

EXERCICE DE FIXATION

En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, détermine $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Solution

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) Formules de duplication et de linéarisation

Propriété

Pour tout nombre réel a , on a :

Formules de duplication	Formules de linéarisation
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$	$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte. Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		A	B	C
1	$\cos^2 a - \sin^2 a$ est égale à	1	$\cos 2a$	$\sin 2a$
2	$\sin 2a$ est égale à	$2 \sin a$	$1 - 2 \sin^2 a$	$2 \cos a \sin a$
3	$2 \sin^2 a$ est égale à	$1 - \cos 2a$	$1 + \cos 2a$	$4 \sin a$
4	$1 + \cos 2a$ est égale à	$2 \cos^2 a$	$1 - 2 \sin^2 a$	$1 - 2 \cos^2 a$

CORRIGÉ

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-A

3) Fonctions circulaires

a) Fonctions cosinus ; fonctions sinus

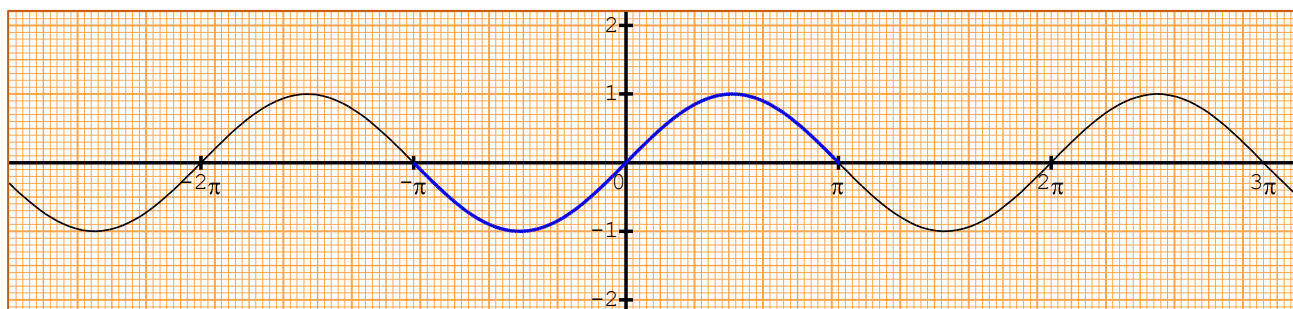
Définitions

- On appelle fonction sinus, la fonction notée $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$
- On appelle fonction cosinus, la fonction notée $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$

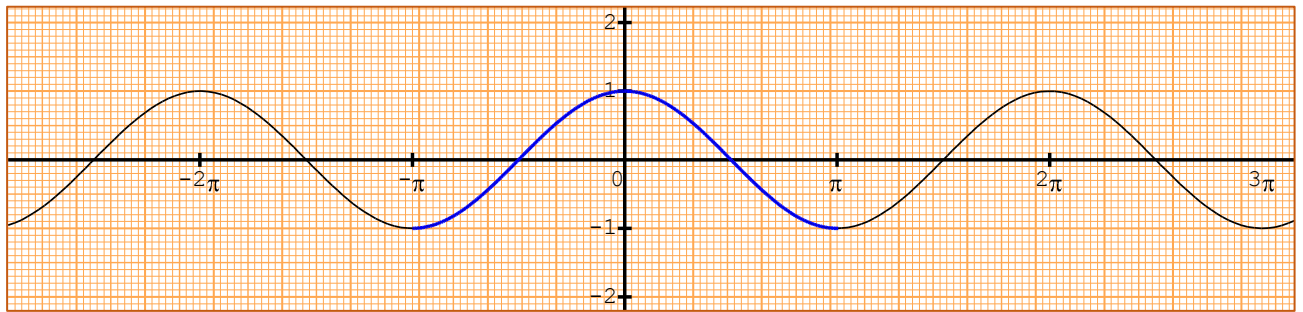
b) Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

Pour construire les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$, on construit les courbes sur $]-\pi, \pi]$ puis on complète en utilisant les translations de vecteurs $2\pi\vec{OI}$ et $-2\pi\vec{OI}$.

Représentation graphique de la fonction sin



Représentation graphique de la fonction cos



b) Fonction tangente

La fonction tangente notée \tan est la fonction : $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

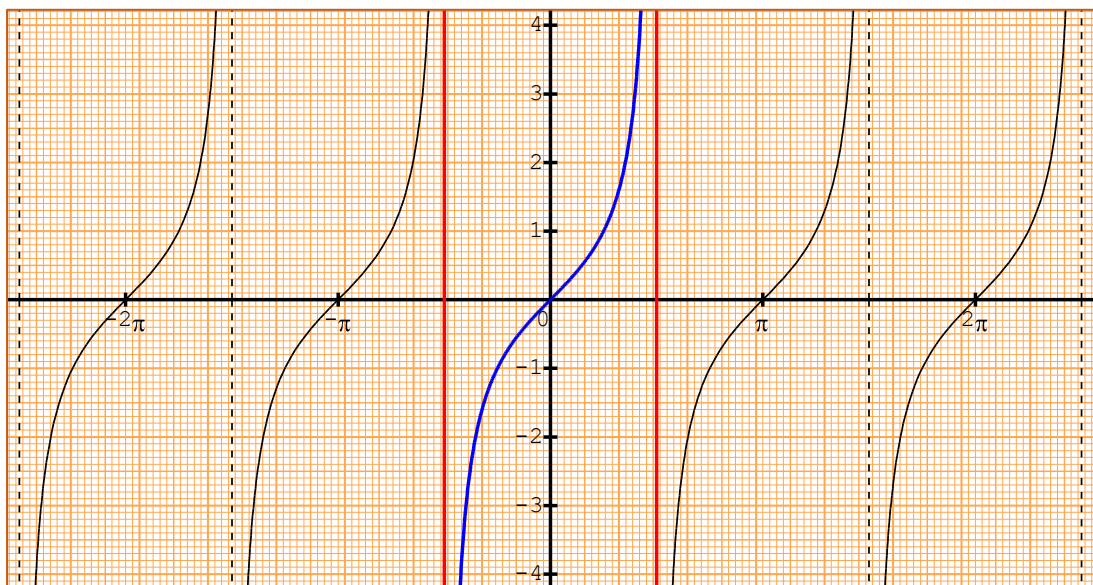
L'ensemble de définition de la fonction \tan est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Cette fonction est continue en tout élément de son ensemble de définition

On construit sa courbe représentative sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ puis on complète en utilisant les translations de vecteur $\pi \times \overrightarrow{OI}$ et $-\pi \times \overrightarrow{OI}$.

Exemple

Représentation graphique de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthonormé



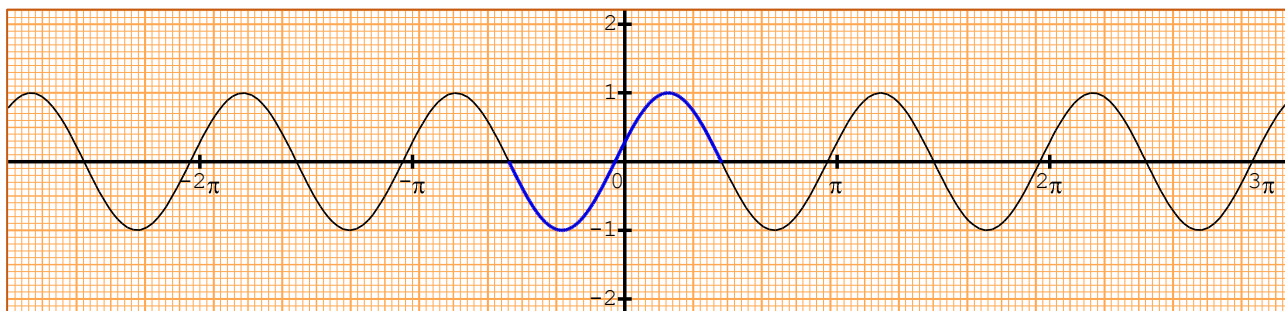
EXERCICE DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Représente graphiquement la fonction :

$$f: x \mapsto \cos(2x + 5)$$

CORRIGÉ

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos(2x + 5)$



IV) EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Equations du type : $\cos x = \cos a$; $\sin x = \sin a$ et $\tan x = \tan a$

Propriétés

Pour tous nombres réels x et a , on a :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pour x et a différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans \mathbb{R} chacune des équations :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$.

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan x = 1$

SOLUTION

a) On a : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$S_R = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) On a : $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Remarques : cas particuliers d'équations trigonométriques

1) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ 4) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 5) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 6) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Equations du type : $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a \cos x + b \sin x$, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$

- On détermine un nombre réel α tel que :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

- On écrit ensuite : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$

- Donc : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$

- On résout l'équation : $\cos(x - \alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans \mathbb{R} l'équation (E) : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$

Solution

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

V) INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées sous forme d'exercices.

EXERCICE DE FIXATION

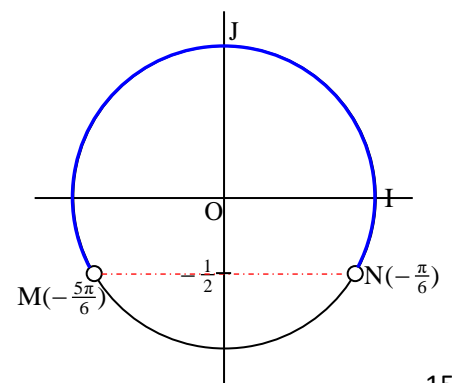
- Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $(I_1) : \sin x > -\frac{1}{2}$.
- Résous dans $[0, 2\pi]$, l'inéquation $(I_2) : \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $(I_3) : \tan x < 1$.

Solution

Résolution de l'inéquation $(I_1) : \sin x > -\frac{1}{2}$

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$ sont les points du grand arc \widetilde{MN} , M et N étant exclus.



Dans $]-\pi, \pi]$ M et N sont les images respectives de $\frac{-5\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6}$.

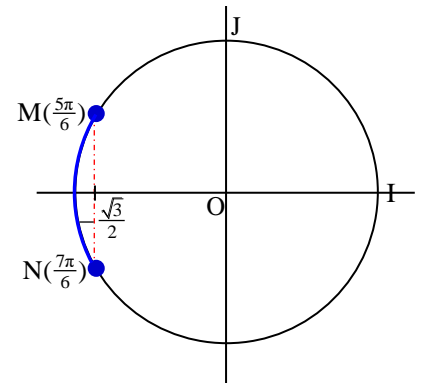
$$\text{Donc : } S_{]-\pi, \pi]} =]-\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}; \pi].$$

Résolution de l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soient les points M et N du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points du cercle trigonométrique ayant une abscisse inférieure ou égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points du petit arc \widehat{MN} , les points M et N étant inclus.

Dans $[0; 2\pi]$, M et M' sont les images respectives de $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

$$\text{Donc : } S_{[0, 2\pi]} = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$$



Résolution de l'inéquation (I_3) : $\tan x < 1$

Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

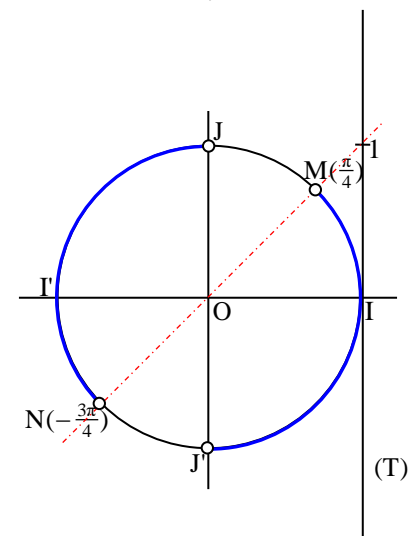
Dans $]-\pi; \pi]$, $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

Désignons par N et M les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des petits arcs JN et $J'M$; J, N, J' et M étant exclus.

Dans $]-\pi; \pi]$, l'ensemble des solutions de (I_3) est donc :

$$\left] -\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi\right].$$



C- SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une séance de travaux dirigés en Physique chimie, des élèves de 1^{ère} C découvrent la figure ci-contre :

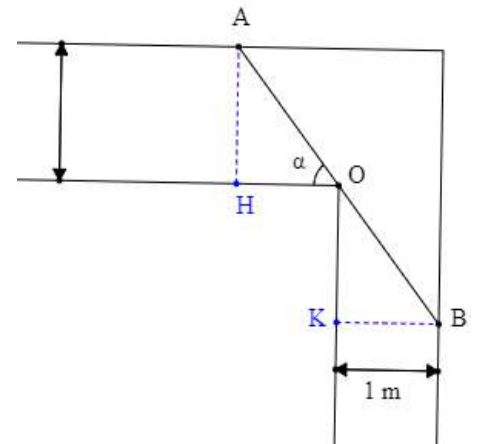
Cette figure représente un couloir de largeur $\sqrt{3}$ m qui tourne à l'angle droit et cette largeur n'est plus alors que de 1 m

Sur la figure, une droite passe par O fait avec l'un des murs un angle α et coupe les deux autres murs en A et

B ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $AB = 4$). L'unité de longueur est le mètre

En observant la figure, Séri, le chef de classe, affirme que l'angle α admet deux valeurs $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$. Par contre, son voisin affirme que α n'a qu'une seule valeur égale à $\frac{\pi}{3}$. Tu es sollicité pour les départager.

Dis, en le justifiant par une production argumentée, qui de Séri ou de son voisin a raison.



SOLUTION

Pour départager Séry et son voisin, nous allons utiliser nos connaissances mathématiques sur la leçon angles orientés et trigonométrie.

Pour ce faire, Nous allons :

- En fonction des données connues, obtenir une
- équation contenant une ligne trigonométrique de α .
- Résoudre l'équation obtenue pour trouver (si possible) les valeurs de α .

Déterminer une ligne Soit H le projeté orthogonal de A orthogonal de B sur le bord du mur opposé à B.

Le triangle AHO est rectangle en H.

$$\text{On a : } \sin \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{OA};$$

$$\text{donc } OA = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha}$$

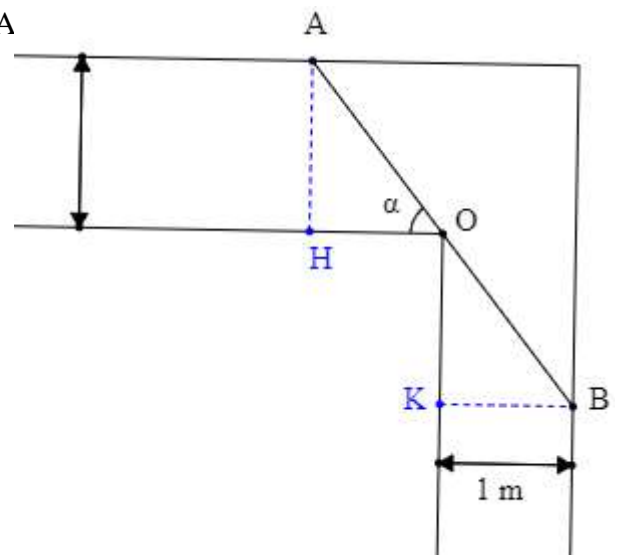
Le triangle BKO est rectangle en K.

$$\text{On a : } \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{OB}$$

$$\text{Donc : } OB = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{On a : } AB = OA + OB = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Comme $AB = f(\alpha) = 4$, on déduit l'équation (E) : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4$



Réolvons l'équation (E) : $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 4$.

- Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\alpha \neq 0$ et $\sin\alpha \neq 0$ par suite $\cos\alpha \cdot \sin\alpha \neq 0$. Donc le domaine de validité de (E) est : $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha$

Or : $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ et $4\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin 2\alpha$

Donc : $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 4 \Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 2\alpha \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$ donc $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\alpha \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha - \frac{\pi}{6} = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme α appartient à $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a deux valeurs de α qui correspondent : $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C'est donc Seri qui a raison.

D- EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{149\pi}{3}$ et place sur le cercle trigonométrique le point M $\left(\frac{149\pi}{3}\right)$.

SOLUTION

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{149\pi}{3} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$$-\pi < \frac{149\pi}{3} + k2\pi \leq \pi, \text{ en divisant par } 2\pi \text{ on obtient : } -\frac{1}{2} < \frac{149}{6} + k \leq \frac{1}{2};$$

par la suite : $-\frac{152}{6} < k \leq -\frac{146}{6}$; d'où : $k = -25$.

donc $\alpha = \frac{149\pi}{3} - 25 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Soit $(\widehat{u, v})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

Parmi les nombres ci-dessous indique ceux qui sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$:

$$\frac{\pi}{12} + 3\pi ; \quad \frac{\pi}{12} - 6\pi ; \quad ; \quad \frac{\pi}{12} + 2020\pi ; \quad \frac{\pi}{12} - 2021\pi$$

SOLUTION

Les mesures de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$ sont : $\frac{\pi}{12} - 6\pi$ et $\frac{\pi}{12} + 2020\pi$

Exercice 3

Relie chaque élément du tableau A à l'élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A		Tableau B
$\sin(a - b)$	•	$\cos b \cos a - \sin a \sin b$
$\cos(a + b)$	•	$\sin a \sin b + \cos a \cos b$
$\sin(a + b)$	•	$\sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a - b)$	•	$\sin b \cos a + \cos b \sin a$

SOLUTION

Tableau A		Tableau B
$\sin(a - b)$	•	$\cos b \cos a - \sin a \sin b$
$\cos(a + b)$	•	$\sin a \sin b + \cos a \cos b$
$\sin(a + b)$	•	$\sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a - b)$	•	$\sin b \cos a + \cos b \sin a$

Exercice 3

Calcule la tangente de l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUTION

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine le sinus et le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$ de mesure α

a) $\alpha = \pi$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

SOLUTION

a) $\cos\pi = -1$; $\sin\pi = 0$
b) $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$
c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Exercice 6

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Indique les égalités justes :

a) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

b) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{\pi}$

c) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{0}$

SOLUTION

Les égalités justes sont : a) et c)

car $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \hat{\pi}$ et $(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{\pi}$

Exercice 7

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont deux angles orientés. Recopie et complète le tableau suivant :

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$				
Une mesure de $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$				

SOLUTION

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{43\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{57\pi}{6}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est :

a) $\frac{2021\pi}{6}$.

b) $-\frac{37\pi}{3}$

SOLUTION

a) α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \frac{2021\pi}{6} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$$-\pi < \frac{2021\pi}{6} + k2\pi \leq \pi, \text{ en divisant par } 2\pi \text{ on obtient : } -\frac{1}{2} < \frac{2021}{12} + k \leq \frac{1}{2};$$

$$\text{par la suite : } -\frac{2027}{12} < k \leq -\frac{2015}{12} \quad ; \quad \text{d'où : } k = -168.$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{2021\pi}{6} - 168 \times 2\pi \quad ; \quad \text{ce qui donne : } \alpha = \frac{5\pi}{12}.$$

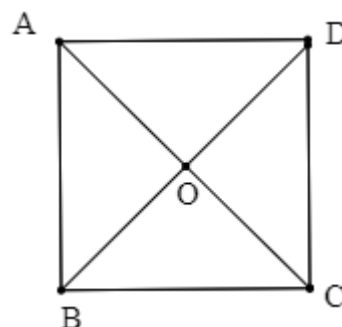
$$\text{b) } -\frac{37\pi}{3} = \frac{-36\pi - \pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 6 \times 2\pi \quad ; \quad \text{donc } \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. Relie chaque élément du tableau A à un élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A	
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$	•
$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$	•
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$	•
$2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD})$	•

Tableau B	
$\hat{\pi}$	•
$\hat{0}$	•
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$	•
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$	•



SOLUTION

Tableau A		Tableau B	
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$	•	$\hat{\pi}$	•
$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$	•	$\hat{0}$	•
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$	•	$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$	•
$2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD})$	•	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$	•

Exercice 10

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , trois vecteurs non nuls.

Sachant que $-\frac{\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont des mesures respectives des angles orientés (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{u}, \vec{w}) ,

complète les phrases suivantes :

1) Une mesure de $(2\vec{u}, \vec{v})$ est

2) Une mesure de $(\vec{u}, -3\vec{v})$ est

3) Une mesure de (\vec{w}, \vec{u}) est

Une mesure de (\vec{v}, \vec{w}) est car $(\vec{v}, \vec{w}) = \dots + \dots$

SOLUTION

- 1) Une mesure de $(\widehat{2\vec{u}, \vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7}$
- 2) Une mesure de $(\widehat{\vec{u}, -3\vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7} + \pi = \frac{6\pi}{7}$
- 3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$ est $-\frac{\pi}{4}$
- 4) Une mesure de $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ est $\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4}$ car $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$

B) Exercices de renforcement

Exercice 11

1. Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2\sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$
2. Soit A le nombre réel défini par : $A = 2\sin \frac{\pi}{11} (\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11})$
 - a) Démontre que : $A = \sin \frac{10\pi}{11}$
 - b) Déduis-en que : $A = \sin \frac{\pi}{11}$
 - c) Démontre que : $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

SOLUTION

1. on a : $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Donc : $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b$

$$2. \text{ a) On a : } A = \left(2\sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11}\right) + \left(2\sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11}\right) + \left(2\sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}\right) + \left(2\sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11}\right) + \left(2\sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{9\pi}{11}\right)$$

$$A = \left(\sin \frac{2\pi}{11} + \sin 0\right) + \left(\sin \frac{4\pi}{11} + \sin \frac{-2\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{-4\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{8\pi}{11} + \sin \frac{-6\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{10\pi}{11} + \sin \frac{-8\pi}{11}\right)$$

$$A = \sin \frac{2\pi}{11} + \left(\sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{4\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{8\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{10\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11}\right)$$

$$\text{D'où : } A = \sin \frac{10\pi}{11}$$

$$\text{b) On a : } \frac{10\pi}{11} = \pi - \frac{\pi}{11} ; \text{ donc } A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{11}\right) = \sin \frac{\pi}{11}$$

$$\text{c) On a : } A = 2\sin \frac{\pi}{11} (\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}) \text{ et } A = \sin \frac{\pi}{11}$$

On en déduit que : $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$ car $\sin \frac{\pi}{11} \neq 0$

Exercice 12

- 1) Démontre pour tout nombre réel x , $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2) a) Résous dans \mathbb{R} l'équation (E) : $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -1$.

b) Représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Donne les solutions de (E) appartenant à $\left] -\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$.

SOLUTION

$$\begin{aligned} 1) \text{ Pour tout nombre réel } x, \text{ on a : } \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \cos 2x + \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \sin 2x \right) \\ &= 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$2) \text{ a) } (E) \Leftrightarrow 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{On a : } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

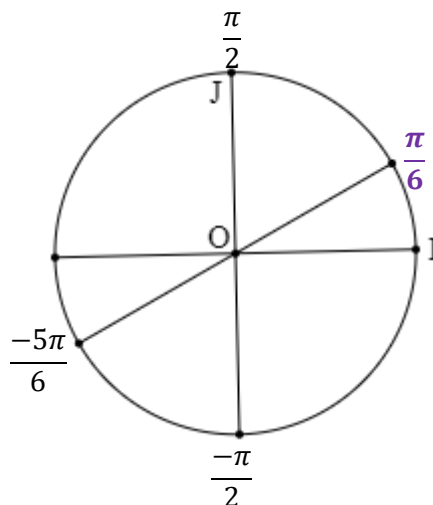
$$\text{Donc : } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b)



c)

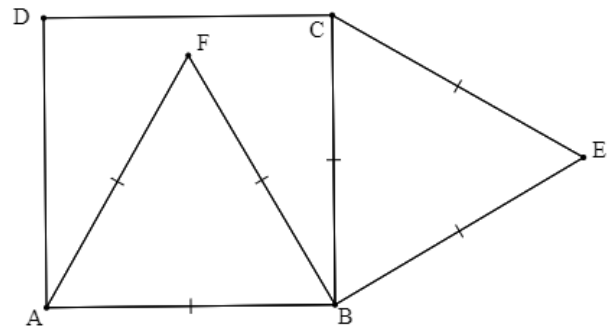
- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi$
 $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{10}{6} < k \leq \frac{11}{6}$. Trois valeurs de k conviennent : -1 ; 0 et 1 .
 Il leur correspond les solutions : $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$
- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$
 $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq \frac{5}{2}$. Trois valeurs de k conviennent : 0 ; 1 et 2 .
 Il leur correspond les solutions : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$
 Les solutions de l'équation (E) appartenant à $]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ sont : $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$
 et $\frac{7\pi}{6}$

C) EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

ABCD est un carré de sens direct. ABF et CBE sont des triangles équilatéraux directs

1. Justifie que : $Mes(\widehat{DA, DF}) = \frac{5\pi}{12}$
2. Démontre que : $Mes(\widehat{DF, DC}) = \frac{\pi}{12}$
3. a) Donne une mesure de l'angle orienté $(\widehat{CD, CE})$.
 b) Déduis-en que : $Mes(\widehat{DC, DE}) = -\frac{\pi}{12}$
4. Démontre que les points D, E et F sont alignés.



SOLUTION

1) Le triangle AFD est isocèle en A et de sens direct. On a : $Mes(\widehat{AF, AD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Comme $(\widehat{AF, AD}) + (\widehat{DA, DF}) + (\widehat{FD, FA}) = \hat{\pi}$ et $(\widehat{DA, DF}) = (\widehat{FD, FA})$

on déduit que : $Mes(\widehat{DA, DF}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{12}$

2) On a : $(\widehat{DF, DC}) = (\widehat{DF, DA}) + (\widehat{DA, DC})$ (relation de Chasles)

Donc : $mes(\widehat{DF, DC}) = mes(\widehat{DF, DA}) + mes(\widehat{DA, DC})$

$mes(\widehat{DF, DC}) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$. D'où $Mes(\widehat{DF, DC}) = \frac{\pi}{12}$

$$3) a) (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}}) \text{ donc } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}}).$$

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Le triangle CDE est isocèle en C et de sens direct.

$$\text{On a : } (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}) + (\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}}) = \hat{\pi} \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}) = (\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}}).$$

$$\text{Donc : } (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}. \text{ On en déduit que : } \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}) = -\frac{\pi}{12}$$

$$c) \text{ On a : } (\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}}) = (\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}) = \hat{0} \text{ car } (\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}})$$

Par suite, les points D; E et F sont alignés.



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 9 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques
et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

Leçon 7 : EXTENSION DE LA NOTION DE LA LIMITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans la perspective d'aborder le prochain cours dans ta classe de 1^{ère} C, ton professeur de mathématiques présente la courbe suivante qui décrit dans un repère orthonormé, la trajectoire de deux projectiles à l'aide de l'équation horaire suivante :

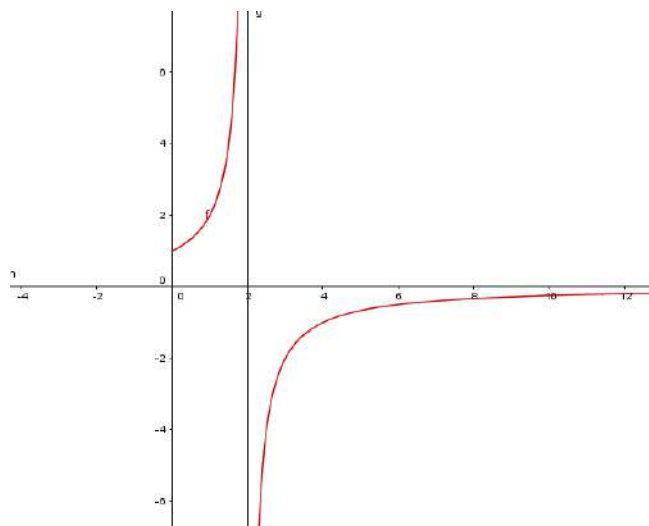
$$y(t) = \frac{2}{2-t}, \quad t \in [0; +\infty[$$

où pour le premier projectile,

$t \in [0; 2[$ et pour le deuxième,

$t \in]2; +\infty[$.

Tes amis et toi constatez que sur $]2; +\infty[$ lorsque t tend vers $+\infty$, la trajectoire du projectile se rapproche de la droite d'équation $y = 0$ comme l'indique le graphique ci-contre. Dans le but d'expliquer ce résultat le professeur



vous organise en groupe afin de traduire ce résultat en limite de la fonction.

B- RESUME DE COURS

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Limite infinie d'une fonction en a (a est un nombre réel)

Propriété

Soit a un nombre réel.

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est pair
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est impair ou pair
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = -\infty$ si n est impair

Cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Exercice d'application

Complète chacune des égalités suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} \right) = \dots \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \dots \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-4)^5} \right) = \dots \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = \dots$$

Corrigé

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} \right) = +\infty \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-4)^5} \right) = -\infty \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

2) Asymptote verticale

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a est un nombre réel et f est une fonction de représentation graphique (C_f)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est infinie, on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .

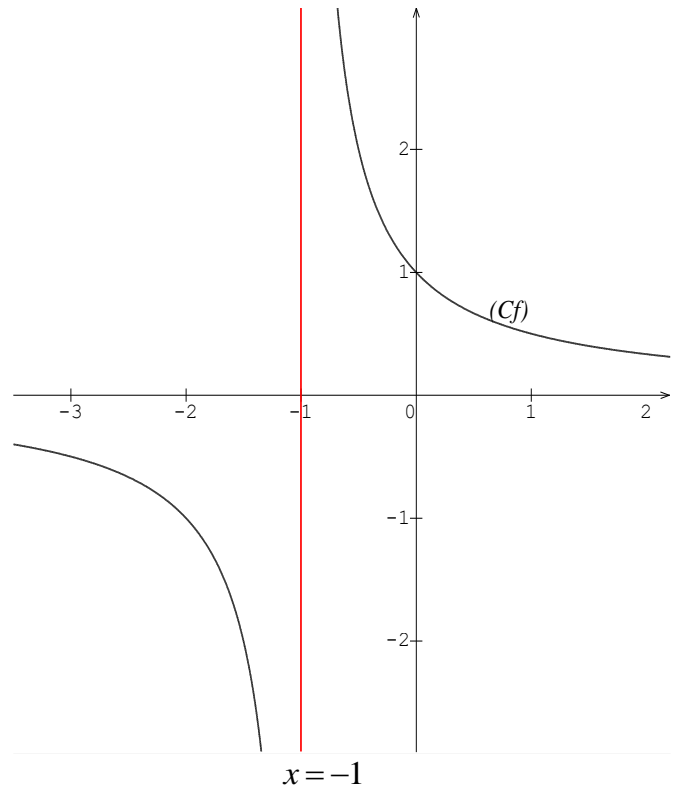
Exemple

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation

$x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .



II – LIMITE A L'INFINI D'UNE FONCTION

1) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

Propriétés

On a :

- Pour tout nombre réel c :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (c) = c$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (c) = c$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$
- Pour tout nombre entier naturel non nul n :
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = +\infty$ si n est pair
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = -\infty$ si n est impair
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes:

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^5}) = \dots$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6) = \dots$ | c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{15}) = \dots$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^4}) = \dots$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7) = \dots$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^3}) = \dots$ | | |

Corrigé

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^5}) = 0$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6) = +\infty$ | c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{15}) = -\infty$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^4}) = 0$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7) = +\infty$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^3}) = 0$ | | |

2) Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

III – Opérations sur les limites

1) Limite de la somme de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 + x^3)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^5} + \sqrt{x}\right)$

Corrigé

1) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 + x^3) = -\infty$

2) On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5}) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (\sqrt{x}) = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5} + \sqrt{x}) = +\infty$

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Résultat pas immédiat

Exemples

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-10) = -10$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-10x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7(x^3)) = +\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} (\frac{1}{x-2} (3x-5))$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3(-2 + \frac{1}{x^7}))$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((6 + \frac{1}{x})(-2 + \frac{1}{x^7}))$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}(x^3))$

Corrigé

On a :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} (\frac{1}{x-2}) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} (3x-5) = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} ((\frac{1}{x-2})(3x-5)) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 + \frac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3(-2 + \frac{1}{x^7})) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6 + \frac{1}{x}) = 6$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \frac{1}{x^7}) = -2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((6 + \frac{1}{x})(-2 + \frac{1}{x^7})) = 6 \times (-2) = -12$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$ donc il est impossible de conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}x^3)$ sans transformation.

On peut remarquer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^7}{x^8}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-1}) = 0$$

3) Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

l désigne un nombre réel non nul et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right)$

Corrigé

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3) = 4$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right) = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right) = 0$

4) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l' non nul	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat	

Exercice de fixation

f et g sont deux fonctions. Complète les égalités suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -6$ donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

Corrigé

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -6$ donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{15}{-3} = -5$

Remarque

Pour calculer la limite du quotient d'une fonction f par une fonction g , on peut écrire le quotient comme produit de f par l'inverse de g . $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right)\right)$.

5) Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme f est la limite en l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

NB : a_n est un nombre réel non nul

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x + 8)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x^7 + 8x - 9)$

Corrigé

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x + 8) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3) = -\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x^7 + 8x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-6x^7) = +\infty$

6) Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite en l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus hauts degrés de $p(x)$ et de $q(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

NB : a_n et b_p sont des nombres réels non nuls

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^5 - 6x + 8}{5x^3 + 2x^2 - x + 7} \right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 8}{2x^2 - x + 7} \right)$$

Corrigé

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^5 - 6x + 8}{5x^3 + 2x^2 - x + 7} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^5}{5x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{3}{5} x^2 \right) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 8}{2x^2 - x + 7} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2x} \right) = 0$$

7) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

- S'il existe une fonction g telle que $g \leq f$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Corrigé

Pour tout nombre réel x , $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$ donc $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.

Comme $f(x) \leq 2x + 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Comme $2x - 1 \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

C-Situation complexe

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première scientifique d'un lycée découvrent une ville d'Afrique créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une

fonction croissante f telle que : $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$ est exprimée en dizaines de milliers d'habitants.

Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra jamais dépasser 600000 habitants mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux. En tant que major de ta classe en mathématiques, utilise tes connaissances mathématiques pour les départager.

Corrigé

Pour départager ces élèves nous allons utiliser :

- la notion d'extension de limite
- Calculer la limite de la fonction quand x tend vers $+\infty$
- Et comparer à 60000

Comme la fonction définissant l'évolution de la population est croissante alors lorsque x devient de plus en plus grand, la population de cette ville est aussi de plus en plus élevée. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ déterminera la population limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60x+40}{x+10} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (60) = 60$$

La population limite est : $60 \times 10000 = 600000$ habitants

L'élève qui a fait l'affirmation a raison.

D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé

(O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C) et $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = +\infty$.

Interprète graphiquement la limite de f à gauche en 6.

Corrigé

On a $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 6$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

Exercice 2

Calcule chacune des limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{3x}{x+4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (9 - 7x^2 + 6x - 8x^4) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9 - 7x^2 + 6x}{x^3 + 2x - 4} \right)$$

Corrigé

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{3x}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow -4^+} (3x) \times \left(\frac{1}{x - (-4)} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4^+} (3x) = -12 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{1}{x - (-4)} \right) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (9 - 7x^2 + 6x - 8x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x^4) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9 - 7x^2 + 6x}{x^3 + 2x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-7x^2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-7}{x} \right) = 0$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ et de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- 1) Justifie que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).
- 2) Justifie que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Corrigé

1) On a : $\lim_{x \rightarrow -2}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow -2}^> \frac{1}{(x+2)^3} = \lim_{x \rightarrow -2}^> \frac{1}{(x - (-2))^3} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).

2) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)^3} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Exercices de renforcement

Exercice 4

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est juste et réponds par Faux si elle est incorrecte

1) Si $\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -7$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

2) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 2x - 8) = \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2)$

3) $\lim_{x \rightarrow 8}^< \left(\frac{1}{(x-8)^4} \right) = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x+9}{3x-8} \right) = -\frac{1}{3}$

Corrigé

- 1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux

Exercice 5

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté au repère (O, I, J) .

(OI) , (D) et (D') sont asymptotes à (C_f) .

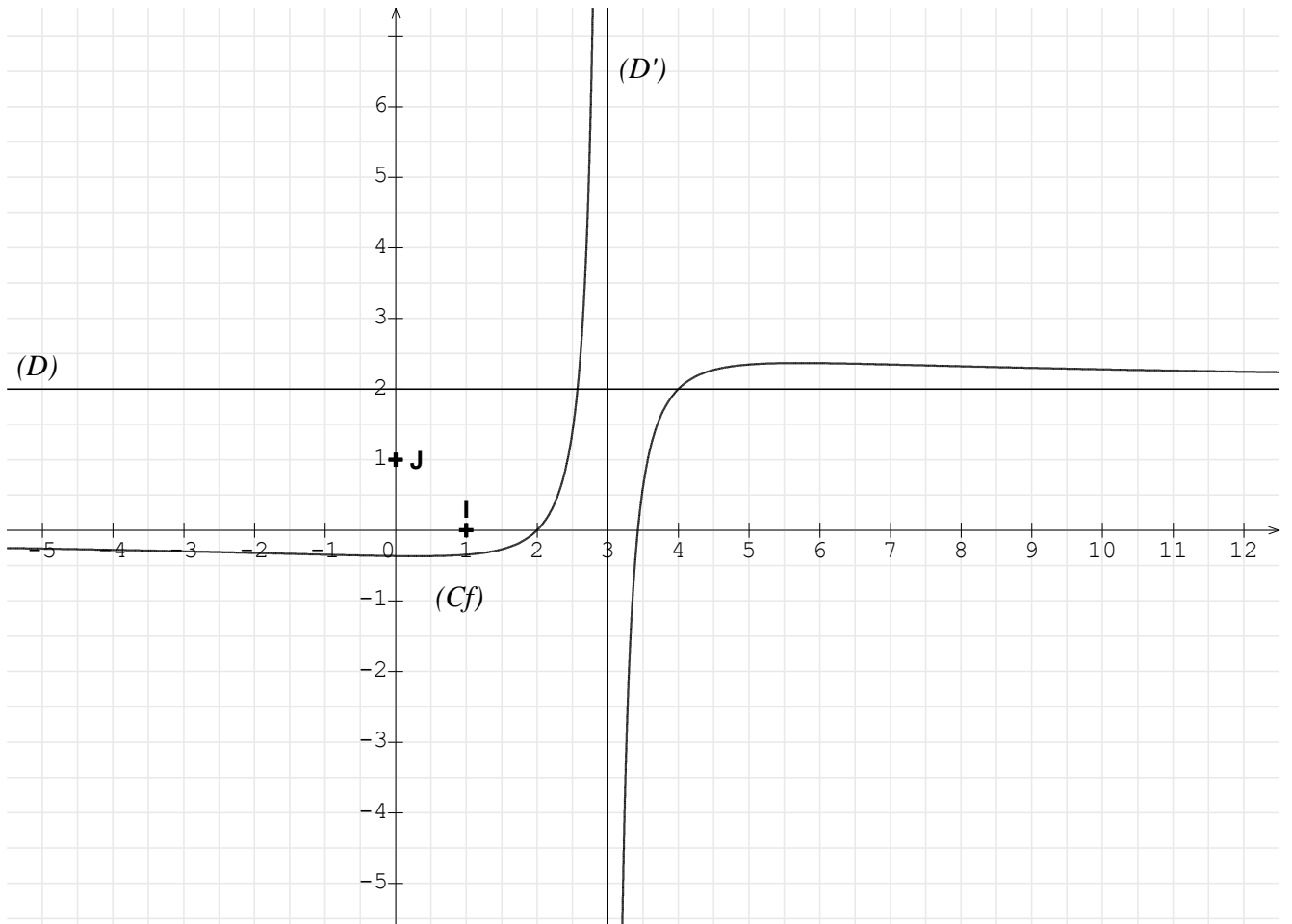
Observe attentivement la figure et donne chacune des limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3}^> f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3}^< f(x)$.

Corrigé

On a :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3}^> f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3}^< f(x) = +\infty$



Exercices d'approfondissement

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}} \right)$

Corrigé

a) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right) = \frac{0}{2} = 0$

b) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$

c) Posons $X = \sqrt{x}$.

On a $x = X^2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{2X^2+3}{1-X} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2X^2}{-X} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2X) = -\infty$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{5x-2}{3-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Calcule $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

Corrigé

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x-2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left((-5x+2) \times \frac{1}{x-3} \right) = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-5x+2) = -13 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .

2) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2}{3-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5) = -5$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$ alors la droite d'équation $y = -5$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 12 heures

Code :

Compétence 3

**Traiter une situation relative à la géométrie du plan,
à la géométrie de l'espace et aux transformations du
plan**

Thème 1

Géométrie du plan

Leçon 8 : COMPOSÉES DE TRANSFORMATIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

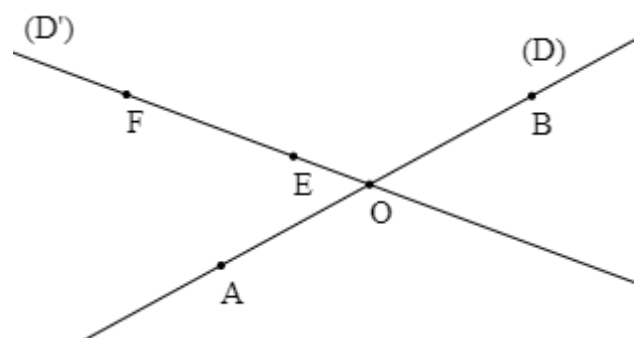
Des élèves de 1^{ère}C d'un lycée revenus d'un jeu de cracks sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre :

Sur la figure ci-contre, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O.

Il existe une homothétie h_A de centre A qui transforme O en B et il existe une homothétie h_O de centre O qui transforme F en E.

Les points A, O, B, E et F sont tels que : $\frac{AB}{AO} \neq \frac{OF}{OE}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$.



Ensemble les élèves de la classe veulent relever le défi. Pour cela ils décident de faire des recherches sur les composées d'homothéties.

B. Contenu du cours

I- COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS

1) Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et f est une application du plan dans lui-même.

Dans chacun des cas suivants, dis si f est une translation

1) $f(A) = C$ et $f(D) = B$

2) $f(A) = B$ et $f(D) = C$

3) $f(C) = B$ et $f(D) = A$

Corrigé

Comme ABCD est un parallélogramme alors :

1) On a $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$ donc f n'est pas une translation

2) On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc f est une translation

3) On a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ donc f est une translation

2) Composée de deux translations

Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(2; 1)$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

Corrigé

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Remarques

1) On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

2) Toute translation est une transformation (une bijection) du plan ; La transformation réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$

3) Expression analytique d'une translation

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. On a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

On dit que l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Exercice de fixation

Soit $A(-1; 4)$ un point du plan et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

Détermine les coordonnées du point A' , image de A par la translation de vecteur \vec{u} .

Corrigé

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ donc :

$$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + 2 \\ y_{A'} = y_A + 3 \end{cases}$$

On en déduit que : $A'(1; 7)$

II- COMPOSEE DE DEUX ROTATIONS

1) Composée de deux rotations de même centre

Propriété

Soient $r(O, \alpha)$ et $r'(O, \theta)$ deux rotations de même centre O et d'angles respectifs α et θ .
La composée $r(O, \alpha) \circ r'(O, \theta)$ est la rotation $R(O, \alpha + \theta)$.

Exercice de fixation

I est un point du plan, r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$; r' est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée : $r \circ r'$.

Corrigé

ror' est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Remarques

- 1) Etant donné deux rotations r et r' de même centre, on a : $r \circ r' = r' \circ r$.
- 2) Toute rotation est une transformation (une bijection) du plan. La transformation réciproque de la rotation $r(O, \alpha)$ est la rotation $r(O, -\alpha)$.

2) Composée de deux rotations de centres différents.

Propriété

Soient r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et θ .

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une translation**.

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} \neq \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une rotation** d'angle orienté $\alpha + \theta$.

Exercice de fixation

A et B sont deux points distincts du plan. r est la rotation de centre A et d'angle α , r' est la rotation de centre B et d'angle θ

Détermine la nature de $r \circ r'$ dans les cas suivants :

a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$ b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Corrigé

a) On a $(\frac{2\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3} = 2\pi = \hat{0}$: donc $r \circ r'$ est une translation

b) On a $(\frac{\pi}{3}) + \frac{-\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \neq \hat{0}$: or donc $r \circ r'$ est une rotation.

Remarques

1) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une translation alors son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par la rotation $r(A, \alpha)$.

2) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une rotation alors :

- on construit le point B' image du point B par la rotation $r(A, \alpha)$

- on marque un point E et on construit son image E' par $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$

- Si les segments $[BB']$ et $[EE']$ n'ont pas la même médiatrice alors le point d'intersection de leurs médiatrices est le centre de $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ sinon le centre est le point d'intersection des droites (EB) et $(E'B')$.

Exercice de fixation

ABCD est un carré de sens direct. On considère les rotations suivantes :

$$r_A = r(A, \frac{\pi}{2}), \quad r_B = r(B, -\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad r_D = r(D, \pi)$$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de :

a) $r_B \circ r_A$

b) $r_D \circ r_A$

Corrigé

a) On a $(\frac{\pi}{2}) + \frac{-\pi}{2} = \hat{0}$ donc $r_B \circ r_A$ est une translation

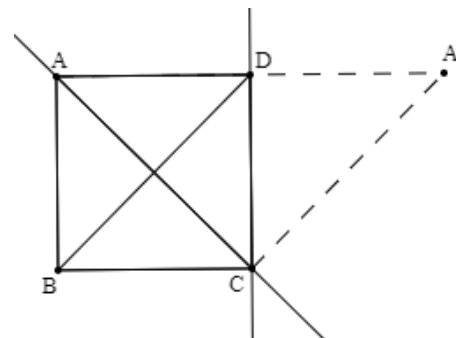
$r_A(A) = A$ et $r_B(A) = C$ donc $r_B \circ r_A(A) = C$ d'où $r_B \circ r_A = t_{\overrightarrow{AC}}$

b) On a : $(\frac{\pi}{2}) + \hat{\pi} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ or $-\frac{\pi}{2} \neq \hat{0}$ donc $r_D \circ r_A$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On a : $r_D \circ r_A(A) = A'$ telle que D est le milieu de $[AA']$ (voir figure) et $r_D \circ r_A(B) = D$.

La médiatrice du segment $[AA']$ est la droite (CD) et la médiatrice du segment $[BD]$ est la droite (AC) . $(CD) \cap (AC) = \{C\}$ donc

$$r_D \circ r_A = r(C, -\frac{\pi}{2}).$$



Remarques

- En général, la composée de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative ($r(A, \alpha) \circ r(B, \theta) \neq r(B, \alpha) \circ r(A, \theta)$).
- Toute rotation d'angle π est une symétrie centrale

III- COMPOSEE DE DEUX HOMOTHETIES

1- Composée de deux homothéties de même centre

Propriété

Soient h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' .

La composée $h \circ h'$ est l'homothétie de centre O et de rapport kk' .

Remarques.

On a : $h \circ h' = h' \circ h$

On dit que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les affirmations ci-dessous, indique celle qui est correcte.

A est un point du plan. La composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est :

- Une rotation de centre A
- L'homothétie de centre A et de rapport $\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2}\right)$
- L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

solution

L'affirmation correcte est c)

Exercice 2

I est un point du plan

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée : $h\left(I, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(I, -\frac{2}{3}\right)$.

Solution

$h\left(I, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(I, -\frac{2}{3}\right)$ est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{3}$

2 Composée de deux homothéties de centres différents

Propriété

Soient $h(A, k)$ et $h'(B, k')$ deux homothéties de centres différents A et B.

- Si $kk' = 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une translation**.
- Si $kk' \neq 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une homothétie** de rapport kk' .

On dit que la composée de deux homothéties de centres différents est soit une homothétie, soit une translation.

Remarques

On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :

- 1) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par $h(A, k)$.
- 2) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) des centres A et B est globalement invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O. Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE').

Exercice de fixation

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées

Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses
1	O et O' sont deux points distincts du plan. La composée de l'homothétie de centre O et rapport -2 et de l'homothétie de centre O' et de rapport 4 est :	a) une translation
		b) une homothétie de rapport -8
		c) une rotation
2	A et B sont deux points distincts du plan. La composée $h(A, 3) \circ h(B, \frac{1}{3})$ est :	a) une homothétie
		b) une rotation
		c) une translation

Corrigé

1-b) ; 2- c)

Exercice 2

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs 2 et $\frac{3}{5}$

Justifie que $h \circ h'$ est une homothétie et précise son rapport

Corrigé

$h \circ h'$ est la composée de deux homothéties de centres distincts B et C et de rapports respectifs 2 et $\frac{3}{5}$

On a : $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \neq 1$ donc $h \circ h'$ est une homothétie de rapport $\frac{6}{5}$

Remarques

- De manière générale, $h(A, k) \circ h(B, k') \neq h(B, k') \circ h(A, k)$
- On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{MM'}$ où M' est l'image d'un point quelconque M par $h(A, k) \circ h(B, k')$.
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) est invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O . Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE') .

IV- COMPOSEE DE DEUX SYMETRIES ORTHOGONALES

1-composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites parallèles, $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ des symétries orthogonales d'axes respectives (D) et (D')

La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2OO'}$ où O est un point de (D) et O' le projeté orthogonal de O sur (D') .

Remarque

La composée $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2O'O}$

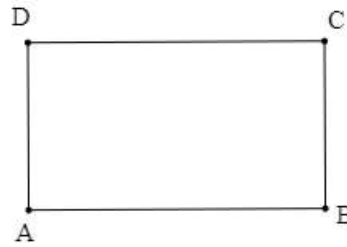
On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.

Exercice de fixation

ABCD est un rectangle

Donne la nature et l'élément caractéristique de chacune des composées suivantes :

- a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$
- b) $S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$
- c) $S_{(AD)} \circ S_{(BC)}$



Corrigé

- a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{CB}$
- b) $S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$
- c) $S_{(AD)} \circ S_{(BC)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$

2-composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v}

La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation

Cas particulier : lorsque les axes (D) et (D') sont perpendiculaires en O, la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la symétrie centrale de centre O. On a $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_O$

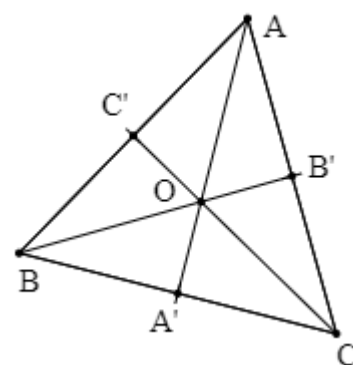
Exercice de fixation

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O .

On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Donne la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes :

- a) $S_{(AA')} \circ S_{(AB)}$
- b) $S_{(AA')} \circ S_{(BB')}$
- c) $S_{(CC')} \circ S_{(AB)}$



Corrigé

- a) (AA') et (AB) sont sécantes en A donc : $S_{(AA')} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}})$

Une mesure de $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})$ est $\frac{\pi}{3}$

$s_{(AA')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) (AA') et (BB') sont sécantes en O donc : $s_{(AA')} \circ s_{(BB')}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$. Une mesure de $2(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$ est $\frac{2\pi}{3}$. $s_{(AA')} \circ s_{(BB')}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

c) (CC') et (AB) sont sécantes en C' donc : $s_{(CC')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre C' et d'angle $2(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C})$. Une mesure de $2(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C})$ est π . $s_{(CC')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre C et d'angle π

SITUATION COMPLEXE

Des élèves de 1^{ère}C d'un lycée revenus d'un jeu de cracks, organisé par le conseil municipal, sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre:

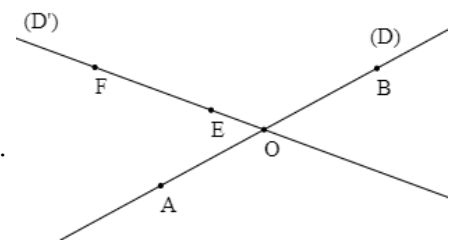
« Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O. Il existe une l'homothétie h_A de centre A qui transforme O en B et il existe une l'homothétie h_O de centre O qui transforme F en E.

Les points A, O, B, E et F sont tels que : $\frac{AB}{AO} \neq \frac{OF}{OE}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$. »

Tu fais partie des trois élèves du groupe compétiteur et tu veux relever le défi.

Donne la solution l'exercice proposé au jeu.



Corrigé

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la composée de deux homothéties.

Pour cela, je vais :

- Noter Ω le centre de l'homothétie $h = h_A \circ h_O$
- Construire l'image F' de F par h
- Le point Ω est alors l'intersection des droites (FF') et (OB) car $h(O) = B$

• Justifions que $h(O) = B$

$h_O(O) = O$ et $h_A(O) = B \Rightarrow h(O) = B$. Le point Ω appartient à la droite (OB) .

• Construction de F'

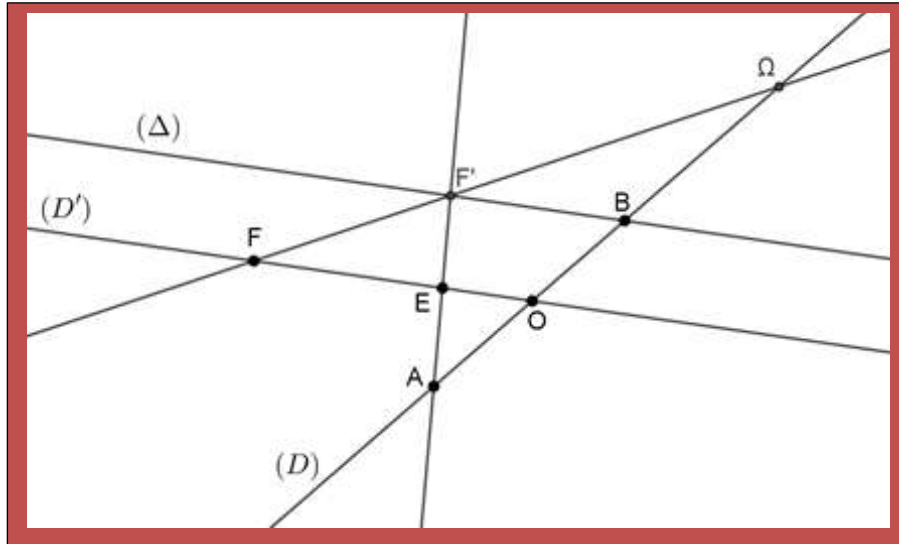
On a : $F' = h_A \circ h_O (F) = h_A(h_O(F)) = h_A(E)$. Donc $F' \in (EA)$

$h(OF) = (BF')$, donc F' à la droite (Δ) parallèle à (OF) passant par B.

F' est le point d'intersection de (AE) et (Δ)

• **Programme de construction de Ω**

- Je trace la droite (Δ) parallèle à (EO) passant par B.
- Je trace la droite (AE) .
- Je note F' le point d'intersection de (Δ) et (AE)
- Je trace la droite (FF') ; elle coupe la droite (OA) en un point qui est le centre Ω de $h_A \circ h_O$



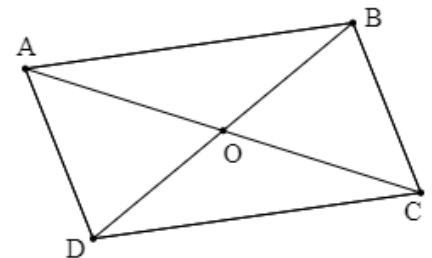
EXERCICES

Exercice de fixation

Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. Justifie que $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)$ est une translation.
2. a) Déterminer $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)(B)$
 b) Détermine le vecteur de la translation $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)$.



Corrigé

1) $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)$ est la composée de deux homothéties de centres distincts et de rapports respectifs 2 et $\frac{1}{2}$. On a : $2 \times \frac{1}{2} = 1$ donc $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)$ est une translation.

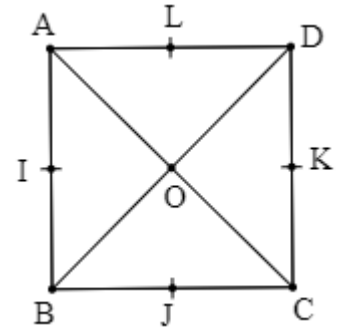
2) a) On a : $h\left(D, \frac{1}{2}\right)(B) = O$ car $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ et $h(A, 2)(O) = C$ car $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$; donc

$$h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)(B) = C$$

b) On a : $h(A, 2) \circ h\left(D, \frac{1}{2}\right)(B) = C$. Donc le vecteur de la translation est \overrightarrow{BC} .

Exercice 2

Soit ABCD un carré de sens direct, de centre O. On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB]; [BC]; [CD] et [DA].



1. Justifie que $S_{(LJ)} \circ S_{(DC)}$ est une translation et précise son vecteur.
2. Démontre que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation et détermine son angle orienté.

Corrigé

1) Les droites (LJ) et (DC) sont parallèles et J est le projeté orthogonal de C sur la droite (LJ) ; donc $S_{(LJ)} \circ S_{(DC)}$ est la translation de vecteur \overrightarrow{CB} . (car $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$)

2) Les droites (AC) et (AB) sont sécantes en A ; donc $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation de centre A.

L'angle orienté de cette rotation est $2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ dont une mesure π

Exercices de renforcement

Exercice 3

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations suivantes :

$$r_1 = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right), \quad r_2 = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad r_3 = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$$

- 1) a) Détermine l'image du point C par $r_2 \circ r_1$.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$
- 2) Détermine l'image de la droite (BD) par $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

Corrigé

1) a) ABCD est un carré de sens direct donc $r_1(C) = A$. Or $r_2(A) = A$ donc $r_2 \circ r_1(C) = A$.

b) On a : $\left(\frac{\hat{\pi}}{2}\right) + \left(\frac{\hat{\pi}}{2}\right) = \hat{\pi}$ or $\hat{\pi} \neq \hat{0}$ donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle π c'est - à - dire une symétrie centrale. Comme $r_2 \circ r_1(C) = A$ alors $r_2 \circ r_1$ est la symétrie centrale de centre le milieu O du segment $[AC]$.

2) On a : $t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{CB}} = t_{\overline{AB+CB}}$.

Or $\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB}$ donc $t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{CB}} = t_{\overline{DB}}$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J).

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-2; 3)$.

1) Détermine l'expression analytique la translation t.

2) Soit le point $E(4, -5)$. Détermine les coordonnées du point E' image de E par la translation t.

3) Soit (D) la droite d'équation : $-x + 3y + 2 = 0$

Détermine une équation de la droite (D') image de (D) par la translation t.

Corrigé

1) L'expression analytique de la translation t est :
$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

2) On a : $x_{E'} = x_E - 2 = 4 - 2 = 2$ et $y_{E'} = y_E + 3 = -5 + 3 = -2$ donc $E'(2; -2)$.

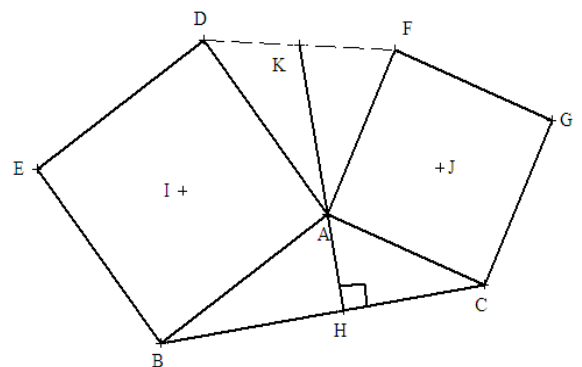
3) Soit $M(x; y)$ un point du plan et $M'(x'; y')$ son image par t. On a alors :
$$\begin{cases} x' + 2 = x \\ y' - 3 = y \end{cases}$$

$M \in (D) \Leftrightarrow -x + 3y + 2 = 0$. On en déduit que : $-(x' + 2) + 3(y' - 3) + 2 = 0$ donc $-x' + 3y' - 9 = 0$ est une équation de la droite (D').

Exercice 5

Sur la figure ci-contre

- ABC est un triangle de sens direct ;
- ABED et ACGF sont les carrés construits extérieurement à ABC sur les côtés [AB] et [AC].
- H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
- K est le milieu du segment [FD]
- I et J sont les centres respectifs des carrés ABED et ACGF.



1. On considère les rotations r et r' de centres respectifs I et J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a) Détermine $r \circ r'(F)$ et $r'^{-1} \circ r^{-1}(D)$
- b) Démontre que $r \circ r' = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$ où S_K est la symétrie centrale de centre K.
2. a) Justifie que l'image de la droite (AH) par $r'^{-1} \circ r^{-1}$ est la droite (AH).
- b) Dédus-en que les points K, H et A sont alignés.
3. Soit A' l'image de A par S_K .
 - a) Démontre que $A' = r(C) = r'^{-1}(B)$.
 - b) Détermine l'image de E par r et l'image de G par r'^{-1} .
 - c) Justifie que $(EC) \perp (A'B)$ et $(BG) \perp (A'C)$.
4. Dédus des questions 2-b et 3-c) que les droites (EC), (BG) et (AH) sont concourantes..

Corrigé

1) a) $r \circ r'(F) = r[r'(G)] = r(A) = D$

$$r'^{-1} \circ r^{-1}(D) = r'^{-1}[r^{-1}(D)] = r'^{-1}(A) = F$$

b)

➤ $r \circ r'$ est la composée de deux rotations de centres distincts et de même angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $r \circ r'$ est

une rotation. Une mesure de l'angle orienté de $r \circ r'$ est : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$r \circ r'$ est une rotation d'angle π donc une symétrie centrale. Comme $r \circ r'(F) = D$ alors le centre de cette symétrie est le point K, milieu du segment [FD]

➤ $r'^{-1} \circ r^{-1}$ est la composée de deux rotations de centres distincts et de même angle $-\frac{\pi}{2}$. Donc

$r'^{-1} \circ r^{-1}$ est une rotation. Une mesure de l'angle orienté de $r'^{-1} \circ r^{-1}$ est : $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

$r'^{-1} \circ r^{-1}$ est une rotation d'angle π donc une symétrie centrale. Comme $r'^{-1} \circ r^{-1}(D) = F$ alors le centre de cette symétrie est le point K, milieu du segment [FD]

On déduit de ce qui précède que : $r \circ r' = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$

2) a) $r'^{-1} \circ r^{-1}[(AH)] = r'^{-1}(r^{-1}[(AH)])$. On a $r^{-1}(A) = B$ donc l'image de (AH) par r^{-1} est la droite passant par B et perpendiculaire à (AH) ; c'est-à-dire la droite (BC)

On a donc : $r'^{-1} \circ r^{-1}[(AH)] = r'^{-1}[(BC)]$. Or $r'^{-1}[(BC)] = (AH)$ Car $r'^{-1}(C) = A$ et $(AH) \perp (BC)$.

Par suite l'image de (AH) par $r'^{-1} \circ r^{-1}$ est (AH)

b) L'image de (AH) par S_K est (AH) ; donc : $K \in (AH)$

Les points A, H et K sont donc alignés.

3) a) On a : $A' = S_K(A) = r \circ r'(A) = r(r'(A)) = r(C)$ et

$$A' = S_K(A) = r'^{-1} \circ r^{-1}(A) = r'^{-1}(r^{-1}(A)) = r'^{-1}(B)$$

b) $r(E) = B$; $r'^{-1}(G) = C$

c) On a : $r(E) = B$ et $r(C) = A'$; donc l'image de la droite (EC) par r est la droite (A'B). On en déduit que : $(EC) \perp (A'B)$ car l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$

De même on : $r'^{-1}(G) = C$ et $r'^{-1}(B) = A'$; donc l'image de la droite (BG) par r'^{-1} est la droite (A'C). On en déduit que : $(BG) \perp (A'C)$ car l'angle de r'^{-1} est $-\frac{\pi}{2}$

3) Considérons le triangle A'BC.

- La droite (BG) est une hauteur de $A'BC$ car $(BG) \perp (A'C)$
- La droite (EC) est une hauteur de $A'BC$ car $(EC) \perp (A'B)$
- La droite $(A'H)$ est une hauteur de $A'BC$ car $(A'H) \perp (BC)$. En effet $(A'H) = (AH)$ car les points A' , A , H et K sont alignés.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. D'où le résultat.



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs
algébriques et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

Leçon 9 : DERIVATION

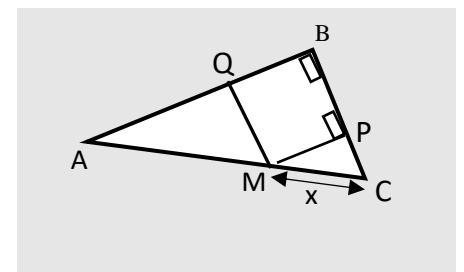
A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors de la préparation du concours d'excellence de sa région, un élève de première scientifique découvre dans ses recherches la figure ci-contre.

Cette figure est un triangle ABC rectangle en B tel que :
 $AB = 8$; $BC = 6$ et $AC = 10$. À l'intérieur de ce triangle, on a construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$; $P \in]BC[$ et on a posé $MC = x$.

En faisant varier M de C à A, il constate que l'aire du rectangle croît puis décroît par la suite.

Il veut déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle BPMQ est maximale sans passer par la forme canonique. Après plusieurs tentatives sans succès, il présente la situation à toute la classe à un cours de Mathématiques.



Le professeur de mathématiques propose d'étudier ce problème d'optimisation en utilisant les dérivées de fonctions. Ensemble les élèves font des recherches sur la dérivation.

B. RESUME DE COURS

I. DERIVATION D'UNE FONCTION EN UN POINT

1. Nombre dérivé d'une fonction dérivable en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0 .

Cette limite finie est appelée le **nombre dérivé de f en x_0** et est notée $f'(x_0)$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 1

Soit la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

En utilisant la définition, montrons que f est dérivable en 3.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2) - 7}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6 \text{ et } 6 \in \mathbb{R}$$

Donc, la fonction f est dérivable en 3 et le nombre dérivé de f en 3 est : $f'(3) = 6$.

Exemple 2

Soit la fonction g de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ n'est pas un nombre réel, donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.

2. Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et A un point de (C_f) d'abscisse x_0 .

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet en son point A une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit la fonction f définie et dérivable en 2 telle que $f(2) = -4$ et $f'(2) = -3$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

CORRIGÉ

Une équation de (T) est donc : $y = f'(x)(x - 2) + f(2) = -3(x - 2) - 4 = -3x + 2$

On a donc : (T) : $y = -3x + 2$.

3. Dérivabilité et continuité

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Remarque

Réciproquement, f continue en x_0 n'implique pas que f dérivable en x_0 .

En effet la fonction g de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. (Voir exemple 2 ci-dessus)).

EXERCICE D'APPLICATION

Réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux sinon.

1- Toute fonction continue en x_0 est dérivable en x_0

2- Toute fonction qui n'est pas continue en x_0 n'est pas dérivable en x_0

3- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0

SOLUTION

1-Faux ; 2-Vrai ; 3-Vrai

II. FONCTION DERIVEE

1. Définitions

• **Fonction dérivable sur un intervalle**

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert K lorsqu'elle est dérivable en chaque élément de K .

• **Fonction dérivée**

Soit f une fonction numérique et K un intervalle ouvert sur lequel f est dérivable.

L'application qui à chaque élément x de K , associe le nombre dérivé de f en x est appelée

fonction dérivée de f sur K et notée f' . $f' : \begin{matrix} K & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{matrix}$

Exemple

Déterminons la fonction dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3$.
Soit x_0 un nombre réel.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2. \end{aligned}$$

On a donc : $g'(x_0) = 3x_0^2$.

On conclut que la fonction dérivée de g est la fonction : $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x^2$

Remarques

- On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction f , l'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f . Elle est notée f'
- Les fonctions élémentaires (constante, puissance, inverse), polynômes, rationnelles et trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle ouvert inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions élémentaires racine carrée et valeur absolue sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Dérivées de fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	\mathbb{R}
$x \mapsto ax + b \ (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n ; \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

EXERCICE DE FIXATION

Relie chaque fonction à sa fonction dérivée

Fonction f		Fonction dérivée f'
$x \mapsto -3$	•	$x \mapsto 0$
$x \mapsto -3x$	•	$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto x^4$	•	$x \mapsto -3$
$x \mapsto \cos x$	•	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	•	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	•	$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto \tan x$	•	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \sin x$	•	$x \mapsto -\sin x$

SOLUTION

Fonction f		Fonction dérivée f'
$x \mapsto -3$	•	$x \mapsto 0$
$x \mapsto -3x$	•	$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto x^4$	•	$x \mapsto -3$
$x \mapsto \cos x$	•	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	•	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	•	$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto \tan x$	•	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \sin x$	•	$x \mapsto -\sin x$

3. Dérivées et opérations

Propriété

On suppose que u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K de \mathbb{R} .

Fonction f	Fonction dérivée f'
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
$x \mapsto u(x)v(x)$	$x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$x \mapsto a u(x), (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a u'(x)$
$x \mapsto \frac{1}{u(x)}, (u \neq 0 \text{ sur } K)$	$x \mapsto \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$
$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}, (v \neq 0 \text{ sur } K)$	$x \mapsto \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$x \mapsto \cos(ax + b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$
$x \mapsto \sin(ax + b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \sqrt{ax + b}, (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$

SOLUTION

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \sin(x)$$

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \quad g'(x) = \frac{2x(x+5) - x^2}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}$$

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$.

h est dérivable sur $] -2 ; +\infty[$

On a : $h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

III. APPLICATIONS DE LA DERIVABILITE

1. Dérivée et sens de variation

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K

f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K

f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

f est strictement croissante sur K si et seulement si f' est strictement positive sur K

f est strictement décroissante sur K si et seulement si f' est strictement négative sur K

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = x^3 - 3x$.

1- Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x .

2- Détermine les sens de variation de f .

SOLUTION

1) f est dérivable sur \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$;

2) **Signe de $f'(x)$**

Soit x un nombre réel

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
- $\forall x \in]-1 ; 1[, f'(x) < 0$;
- $\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) > 0$

Variation de f

$\forall x \in]-1 ; 1[, f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $] -1 ; 1[$,

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

Remarques

- Si f' est positive sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement croissante sur K

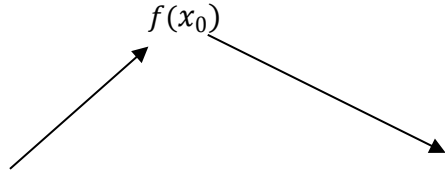
- Si f' est négative sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement décroissante sur K

2. Extremums relatifs d'une fonction

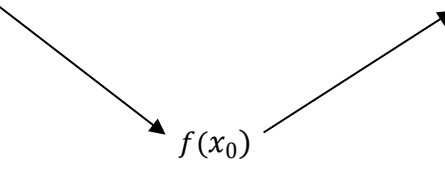
Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de \mathbb{R} et x_0 un élément de K .

Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f .

x	x_0		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$f(x_0)$ est un maximum relatif de f

x	x_0		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$f(x_0)$ est un minimum relatif de f

EXERCICE DE FIXATION

On donne le tableau de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^3}{x-1}$

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	-	-	0	+
$g(x)$	↘			↙	↗	
				$27/4$		

Indique l'extremum relatif de g

SOLUTION

La dérivée de g s'annule en $\frac{3}{2}$ en changeant de signe. Donc, la fonction g admet en $\frac{3}{2}$ un minimum relatif égal $\frac{27}{4}$.

C. SITUATION COMPLEXE

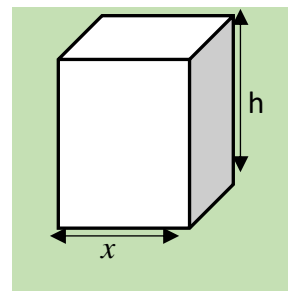
Monsieur Moussa est un menuisier. Il veut confectionner une caisse en bois semblable à un pavé droit tel que représenté sur la figure ci-contre.

Cette caisse doit avoir les caractéristiques suivantes :

- Son volume est égal à 8 m^3 ;
- Sa base est un carré.

Monsieur Moussa se demande quelles dimensions doivent avoir la base et la hauteur de cette caisse afin d'utiliser le moins de bois possible pour minimiser les dépenses. Ne sachant comment effectuer ses calculs, il te sollicite.

En utilisant tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Moussa dans une production écrite.



SOLUTION

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser nos connaissances sur les fonctions et particulièrement la leçon dérivation.

Pour cela, je vais :

- exprimer l'aire de la surface totale du solide en fonction de x ,
- étudier la fonction obtenue pour trouver ses éventuelles extremums
- conclure

- Notons V le volume de la caisse et S sa surface de base.

$$\text{On a : } h = \frac{V}{S} = \frac{8}{x^2}$$

- La caisse à deux faces carrées qui ont pour aire est : $2x^2$
- La caisse a 4 faces rectangulaires qui ont pour aire : $4 \times \left(x \times \frac{8}{x^2}\right) = \frac{32}{x}$

$$\text{L'aire de la surface totale est : } f(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}.$$

- La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4}{x^2}(x^3 - 8)$

$$\forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]2; +\infty[, f'(x) > 0$$

f est strictement décroissante sur $]0; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

16 est le minimum de f

Moussa utilisera moins de bois lorsque
L'aire de la surface totale est minimale
c'est-à-dire lorsque la longueur x du côté
de la base mesure 2 m et la hauteur de la
caisse mesure également 2 m.

D-EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0 .
Indique dans quel cas la fonction f est dérivable en x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$;
- La limite en x_0 de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'existe pas ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -3$.

Solution

f est dérivable dans le cas d)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule, en utilisant la définition, le nombre dérivé de f en x_0

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $x_0 = 2$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+2x-3)+4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$

donc $f'(-1) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1$

donc $f'(0) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{7}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{7})(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$;

donc $f'(2) = \frac{3\sqrt{7}}{14}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative.

Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -2 .

Solution

Les calculs donnent : $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ et $f(-2) = -\frac{1}{2}$.

Une équation de (T) est donc : $y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2}$ ou encore (T): $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle K

a) $f(x) = \sqrt{x}$; $K =]0; +\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $K =]-1; +\infty[$

Solution

a) Soit x_0 un élément de $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction dérivée de f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Soit x_0 un élément de $]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x_0+1}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0-x}{(x+1)(x_0+1)}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{(x+1)(x_0+1)} = \frac{-1}{(x_0+1)^2}$$

La fonction dérivée de f sur $]-1; +\infty[$ est définie par : $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Exercice 5

Recopie le tableau puis réponds par Vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par Faux (F) sinon

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = +\infty$.	
Si $f(x) = (-2x + 5)^6$ alors $f'(x) = -12(-2x + 4)^5$.	
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a .	
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K .	

Solution

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = +\infty$.	F
Si $f(x) = (-2x + 5)^6$ alors $f'(x) = -12(-2x + 4)^5$.	V
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	F
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a .	F
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K .	F

Exercice 6

Détermine la fonction dérivée de f dans chacun des cas suivants :

(Tu préciseras l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chaque cas)

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$

b) $f(x) = (25x - 1)^4$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x + \pi)$

Solution

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$

f est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

b) $f(x) = (25x - 1)^4$

f est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 100(25x - 1)^3$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et on a: $\forall x \in] -\infty; 1[, f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x + \pi)$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et on a:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = 1 + \tan^2(2x + \pi)$

B) Exercices de renforcement

Exercice 7

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

1. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$
 b) Etudie les variations de h .
2. a) Dresse le tableau de variation de h .
 b) Déduis-en les extrema de la fonction h .
3. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de h au point d'abscisse 0

Solution

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = x^2 - 2x - 3$. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

donc: $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$

b) $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et $]3; +\infty[$

$\forall x \in [-1; 3], h'(x) \leq 0$ donc h est strictement décroissante sur $[-1; 3]$

2) a)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗ $\frac{11}{3}$		↘ -7 ↗		

b) $\frac{11}{3}$ est un maximum relatif de h

-7 est un minimum relatif de h

3) $h(0) = 2$; $h'(0) = -3$. Une équation de (T) est : $y = -3x + 2$

Exercice 8

Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$; On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1) Détermine les nombres réels a et b sachant que :

- (Γ) passe par le point $A(2; 2)$
- $f'(2) = 0$

2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

3. Dans la suite, on prend : $a = -1$ et $b = 3$

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, g'(x) = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$

b) Etudie les variations de g .

Solution

1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, g'(x) = a + \frac{1}{(3-x)^2}$. On a : $g'(2) = a + 1$; donc $g'(2) = 0 \Leftrightarrow a = -1$

On : $g(2) = 2a + b + 1 = b - 1$; or $g(2) = 2$ donc $b = 3$

2) $g(2) = 2$ et $g'(2) = 0$. Une équation de (T) est : $y = 2$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, g'(x) = -1 + \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1-(3-x)^2}{(3-x)^2} = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$

b) $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[, g'(x) < 0$

$\forall x \in]2; 3[\cup]3; 4[, g'(x) > 0$. On en déduit que :

- g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et $]4; +\infty[$
- g est strictement croissante sur $]2; 3[$ et $]3; 4[$

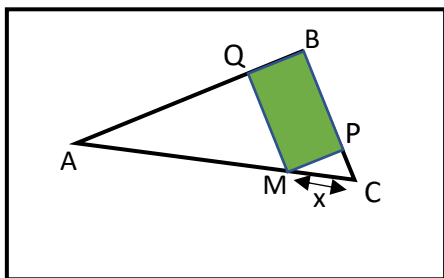
C) Exercice d'approfondissement

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AB = 8$; $BC = 6$ et $AC = 10$.

A l'intérieur de ce triangle, on construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$
 $P \in]BC[$ et on pose : $MC = x$.



1. Exprime MQ et MP en fonction de x .
2. On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $]0; 10[$ et représentant l'aire du rectangle BPMQ. On a donc $f(x) = MQ \cdot MP$
 - a) Justifie que $f(x) = \frac{12}{5}x \left(2 - \frac{1}{5}x\right)$.
 - b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
3. Dédus-en la valeur de x pour que l'aire du rectangle BPMQ soit maximale et calcule alors cette aire.

Solution

1) Considérons le triangle ABC ; M est point de (AC) , Q est un point de (AB) et (MQ) parallèle à (BC) ; donc on a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{MQ}{BC}$ ce qui donne : $\frac{10-x}{10} = \frac{AQ}{8} = \frac{MQ}{6}$
 D'où : $MQ = 6 - \frac{3x}{5}$

Le triangle CMP est rectangle en P. D'après la propriété de Pythagore on a : $CM^2 = MP^2 + PC^2$ donc : $MP^2 = CM^2 - PC^2 = x^2 - (BC - MQ)^2$

On en déduit que : $MP = \frac{4x}{5}$

2a) $f(x) = MP \times PQ = \frac{4x}{5} \left(6 - \frac{3x}{5}\right) = \frac{12x}{5} \left(2 - \frac{x}{5}\right)$

b) $\forall x \in]0; 10[, f'(x) = \frac{24}{5} \left(1 - \frac{x}{5}\right) = \frac{24}{25}(5 - x)$

$\forall x \in]0; 5[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]5; 10[, f'(x) < 0$

f est strictement croissante sur $]0; 5[$ et strictement décroissante sur $]5; 10[$

3)

x	0	5	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

L'aire du rectangle est maximum pour x égal à 5 . L'aire du rectangle est alors de 12 cm^2



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

**1^{ère}C
MATHÉMATIQUES**

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 06 heures

Code :

Compétence 2

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 2

Modélisation de phénomènes aléatoires

Leçon 10: PROBABILITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

M. Konan a oublié le code secret de son compte bancaire. Après deux essais infructueux, il appelle son épouse pour de l'aide. Celle-ci lui communique les quatre chiffres mais pas dans le bon ordre !

Ne disposant que d'un dernier essai, il joue la carte de la prudence en envisageant tous les cas et en quantifiant la chance qu'il a, de retirer l'argent, à l'ultime essai.

B –CONTENU DE LA LECON

I. VOCABULAIRES ET PROPRIETES

1- Vocabulaires et définition

a) Expérience aléatoire

Une expérience ou une épreuve aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas d'avance le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.

Exemples

1.

Expérience 1 : Le lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré.

Expérience 2 : Le lancer d'une pièce de monnaie.

2.

Soit les expériences suivantes :

1. *Trois bouteilles de limonade : Fanta, Coca et Sprite sont posées sur une table.*

« Choisir la bouteille de Fanta » n'est pas une expérience aléatoire.

2. *'Cinq boules numérotées de 1 à 5 sont placées dans un carton non transparent. Les boules ont la même taille et sont indiscernables au toucher.*

« Choisir une boule parmi elles » est une expérience aléatoire.

b) Univers-Eventualité

\mathcal{E} est une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles.

Chaque résultat possibles est appelé **éventualité**.

L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers** des éventualités de \mathcal{E} .

On le note **U** ou **Ω** .

Exemple

EXPERIENCE ALEATOIRE	EVENTUALITES	UNIVERS
Lancer d'un dé	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	{1; 2; 3; 4; 5; 6}
Lancer d'une pièce	Pile (P) ou face (F)	{P; F}

Exemple2

En considérant le lancer de deux pièces de monnaie. Tous les résultats possibles (on dit qu'on écrit l'univers en extension) sont :

Soit U l'univers de toutes les éventualités.

$$U = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$$

c) Evènement

Définition

U étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle **évènement** de U , toute partie de U .

- Lorsque cette partie de U est un singleton, on l'appelle **évènement élémentaire** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble vide, on l'appelle **évènement impossible** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble U , on l'appelle **évènement certain**.

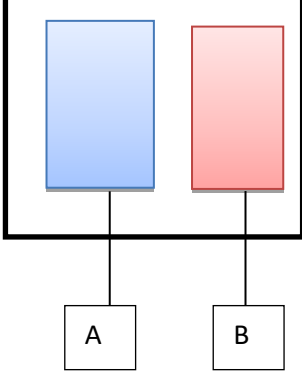
Exemple

- Lors d'un lancer de pièce de monnaie, le résultat obtenu est un évènement élémentaire : "soit pile" ou "face".

- Lors d'un lancer de Dé (parfaitement équilibré et dont les faces sont numéroté de 1 à 6), obtenir le chiffre 7 est un événement impossible.
- Pour une femme qui porte une grossesse, "accouché d'un garçon ou d'une fille" est un événement certain.

TABLEAU RECAPITULATIF

	Langage des ensembles	Langage des probabilités	Illustrations
Univers	<p>U est un ensemble</p> <p>$e_i \in U$</p>	<p>U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.</p> <p>e_i est une éventualité</p>	
Évènement	<p>$A \subset U$</p> <p>$e_i \in A$</p> <p>$\{e_i\} \subset U$</p> <p>$A = \emptyset$</p> <p>$A = U$</p>	<p>A est un évènement .</p> <p>e_i réalise l'évènement A.</p> <p>$\{e_i\}$ est un évènement élémentaire.</p> <p>L'évènement A est impossible.</p> <p>L'évènement A est certain.</p>	
Intersection de deux évènements	<p>$A \cap B$</p> <p>$e_i \in A \cap B$</p>	<p>L'évènement (A et B)</p> <p>e_i réalise l'évènement A et e_i réalise l'évènement B.</p>	
Réunion de deux évènements	<p>$A \cup B$</p> <p>$e_i \in A \cup B$</p>	<p>L'évènement (A ou B)</p> <p>e_i réalise l'évènement A ou e_i réalise l'évènement B.</p>	
Contraire d'un évènement	<p>$\bar{A} = C_U^A \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup \bar{A} = U \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$</p> <p>$e_i \in A \Leftrightarrow e_i \notin \bar{A}$</p>	<p>\bar{A} est l'évènement contraire de A.</p> <p>A et \bar{A} sont des évènements disjoints.</p> <p>e_i réalise l'évènement A si et seulement si, e_i ne réalise pas l'évènement \bar{A}.</p>	

Evènement incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints	L'évènement (A et B) est impossible. L'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	
--------------------------------	---	---	---

Exemple

Lors du lancer de deux pièces de monnaie, deux évènements de cette expérience sont :

A : « obtenir Pile (P) au 1^{er} lancer » : on a $A = \{(P, P), (P, F)\}$

B : « obtenir Pile au 2nd lancer » : on a $B = \{(F, P), (P, P)\}$

II. NOTION DE PROBABILITE

1. Probabilité d'un évènement

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Une probabilité P sur l'univers U est une application de l'ensemble des parties de U vers l'intervalle $[0;1]$, qui à chaque évènement A , associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $P(U) = 1$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple

Lors d'un lancer de dé non truqué, l'univers est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Soit A l'évènement 'avoir un nombre pair'. $A = \{2 ; 4 ; 6\}$;

$$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriétés

- Pour tout évènement A , on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si A est évènement tel que : $A = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_k\}$
alors $P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_k\})$.
- Pour tous évènements A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice de fixation

On lance un dé truqué tel que :

$$P(\{1\}) = \frac{1}{16} ; P(\{2\}) = \frac{3}{16} ; P(\{3\}) = \frac{5}{16} ; P(\{4\}) = \frac{2}{16} ; P(\{5\}) = \frac{3}{16} \text{ et } P(\{6\}) = \frac{2}{16}.$$

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « le résultat du lancer est un nombre pair »

B : « le résultat est un nombre multiple de 3 ».

C : « le résultat est un nombre différent de 6 ».

Proposition de réponse

$$1) A = \{2; 4; 6\}. \text{ Donc } P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3+2+2}{16} = \frac{7}{16}, P(A) = \frac{7}{16}$$

$$2) B = \{3; 6\}. \text{ Donc } P(B) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{5+2}{16} = \frac{7}{16}, P(B) = \frac{7}{16}$$

$$3) C = \{1; 2; 3; 4; 5\}. \text{ Donc } P(C) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{5\}) = \frac{1+3+5+2+3}{16} = \frac{14}{16}$$

$$P(C) = \frac{7}{8}.$$

Equiprobabilité

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur U.

On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des événements élémentaires lorsque tous les événements élémentaires de U ont la même probabilité.

Exemple

Un lancer de dé non truqué est une situation d'équiprobabilité. Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître lors du lancer.

Propriété1

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $\text{card}(U) = n$.

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Exercice de fixation

On lance un dé parfaitement équilibré. Détermine la probabilité d'apparition de chaque face.

Proposition de réponse

Soit Ω l'univers, on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et donc $\text{card}(\Omega) = 6$. Le dé étant équilibré, toutes les faces ont la même chance d'apparition, on a donc $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) =$

$$p(6) = \frac{1}{6}$$

Propriété2

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}U}$$

Exercice de fixation

On lance un dé équilibré à 6 faces.

1) Justifie que nous sommes en présence d'une situation d'équiprobabilité.

2) Détermine la probabilité de l'évènement E suivant « on obtient un multiple de 3 »

Proposition de réponse

1) *Le fait que le dé soit équilibré, toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. On est donc dans une situation d'équiprobabilité.*

2) *Soit Ω l'univers des éventualités. On a : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $\text{Card}(\Omega) = 6$*

Ensuite $E = \{3; 6\}$; on a $\text{card}(E) = 2$ donc $P(E) = \frac{2}{6}$ soit $P(E) = \frac{1}{3}$

Remarque

Dans certains exercices de probabilité, il est dit clairement que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée. Cependant, voici quelques mots clés qui permettent de reconnaître une situation d'équiprobabilité.

- « Equitable »
- « Equilibré »
- « Parfait »
- « Uniforme »
- « Même chance »
- « Indiscernable au toucher »

Remarque 2

Il n'est pas évident d'écrire un évènement en extension avant de déterminer son cardinal. Les formules de dénombrement permettent de déterminer directement le cardinal d'un évènement.

C- SITUATION COMPLEXE

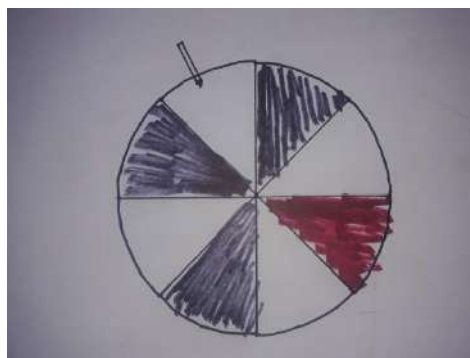
Une loterie consiste à tourner une roue partagée en huit secteurs. On admet que chaque secteur a autant de chance d'être désignée. (Voir figure ci-dessous)

Lorsque le secteur désigné par la flèche est :

- Le blanc, on perd 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on remet 2 000FCFA aux organisateurs) ;
- Le noir, on gagne 1 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 1 000FCFA des organisateurs) ;
- Le rouge, on gagne 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 2 000FCFA des organisateurs) ;

Un groupe d'élèves qui assistent à cette loterie affirment qu'un joueur a autant de chance de gagner que de perdre.

Par des calculs appropriés dis si ce groupe a raison ou pas.



Proposition de réponse

Pour répondre à cette question, je vais utiliser les probabilités.

Je vais définir chaque événement en fonction de l'apparition de couleur.

Je vais définir l'événement « gagner » et l'événement « perdre ».

Je vais déterminer la probabilité de perdre et celle de gagner.

Je vais comparer ses deux probabilités afin de justifier si le groupe a raison ou pas.

Soient les évènements suivants :

B : « on perd 2 000FCFA » ; $\text{card}(B)=4$

N : « on gagne 1 000FCFA » ; $\text{card}(N)=3$

R : « on gagne 2 000FCFA » $\text{card}(R) 1$

G : « on gagne »

Le contraire de G est l'évènement B .

On a $G = N \cup R$ avec R et N incompatibles.

Soit Ω l'univers des possibilités. On a $\text{card}(\Omega) = 8$

$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0,5$; $P(N) = \frac{\text{card}(N)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0,375$; $P(R) = \frac{\text{card}(R)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{8} = 0,125$. Donc

$P(G) = P(N) + P(R)$; $P(G) = 0,375 + 0,125 = 0,5$.

On a : $P(B) = P(G)$. Les deux évènements ont la même probabilité c'est-à-dire qu'il y a autant de chance de gagner que de perdre.

Le groupe d'élèves a donc raison.

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit A et B deux évènements quelconques.

Complete par vrai ou faux les propositions suivantes

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Correction de l'exercice 1

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$...**FAUX**...
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$...**VRAI**...
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$...**VRAI**...

Exercice 2

Soient deux événements A et B tels que $P(A) = 0,33$; $P(B) = 0,15$ et $P(A \cap B) = 0,09$.
Détermine $P(A \cup B)$.

Correction de l'exercice 2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \text{ On a donc : } P(A \cup B) = 0,33 + 0,15 - 0,09 = 0,39$$

Exercice 3

Une coopérative comprend sept hommes et trois femmes. Le couple Zamblé fait également partie de cette coopérative.

La coopérative choisit au hasard une délégation de quatre membres pour la représenter à une cérémonie.

- 1) Détermine le nombre de délégations possibles.
- 2) Calcule la probabilité que le couple Zamblé en fasse partie.
- 3) Calcule la probabilité que monsieur ou madame fasse partie de la délégation.

Correction de l'exercice 3

- 1) Une délégation est ici un sous-ensemble de quatre membres pris parmi les 10 membres de la coopérative. Il y a donc : $C_{10}^4 = 210$ délégations possibles.

Les choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.

2)

Le couple Zamblé faisant partie de la délégation, il suffit alors de choisir deux membres parmi les 8 restants pour avoir les quatre membres. Il y a donc $C_8^2 = 28$ façons possibles de constituer une telle délégation. Le choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.

La probabilité cherchée est donc $\frac{28}{210}$ soit $\frac{2}{15}$.

3) **Méthode 1**

Il y a trois cas à examiner :

1^{er} cas : monsieur Zamblé fait partie de la délégation mais son épouse n'en fait pas partie ; Mr Zamblé étant déjà choisi, l'on doit choisir les trois autres personnes parmi 8. il y a $C_8^3 = 56$ délégations possibles.

2nd cas : Mme Zamblé fait partie de la délégation mais son époux n'en fait pas partie ; on fait le même calcul que dans le cas 1 ; il y a donc 56 délégations possibles.

3^{ème} cas : le couple fait partie de la délégation . Cela revient à la question 2. Il donc 28 délégations possibles.

Au total, il y a $56+56+28=140$ délégations possibles.

La probabilité est donc : $\frac{140}{210}$ soit $\frac{2}{3}$.

Méthode 2

L'événement contraire de Mr ou Mme Zamblé font partie de la délégation est soit

B : « « Mr et Mme Zamblé ne font pas parti de la délégation » ». Alors on va choisir les 4 membres de la délégation parti 8 membres, soit : $C_8^4 = 70$ délégations possibles.

$$p(B) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

$$\text{On a donc : } p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Exercice 3

Associe chaque expérience aléatoire à son univers.

Expérience aléatoire	Univers
1) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.	a) L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.
2) Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25	b) L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.
3) Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.	c) L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.
4) Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.	d) L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.

Correction de l'exercice 3

<i>Expérience aléatoire</i>	<i>Univers</i>
1) <i>On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.</i>	a) <i>L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.</i>
2) <i>Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25</i>	b) <i>L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.</i>
3) <i>Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.</i>	c) <i>L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.</i>
4) <i>Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.</i>	d) <i>L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.</i>

Exercice 4

On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Détermine la probabilité que les deux nombres soient supérieurs ou égaux à quatre.

Correction de l'exercice 4

Un résultat de cette expérience est un couple de deux nombres entiers naturels compris en 1 et 6. Il y a donc 36 résultats possibles. Les couples dont les composants sont supérieurs ou égaux à 4 sont : (4 ; 4) ; (4 ; 5) ; (4 ; 6) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6) ; (6 ; 4) ; (6 ; 5) et (6 ; 6).

Il y a équiprobabilité : donc la probabilité cherchée est $\frac{9}{36}$ soit 0,25.



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 12 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs
algébriques et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

Leçon 11 : ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation suivante : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.

Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.

Par solidarité, toute la classe décide de t'aider à répondre à la préoccupation de ta tante en étudiant la fonction V .

B. CONTENU DU COURS

I – PARITE

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. Fonction paire

a) Définition

Une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos x$ sont paires.

la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{2}{1+|x|}$ est paire car l'ensemble de définition D_f de la fonction f est \mathbb{R} et donc pour tout x de D_f , on a $-x \in D_f$.

Ensuite pour tout x de D_f , $f(-x) = \frac{2}{1+|-x|}$; $|-x| = |x|$; donc $f(-x) = f(x)$.

b) Interprétation graphique

Propriété

La fonction f est paire si et seulement si la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).

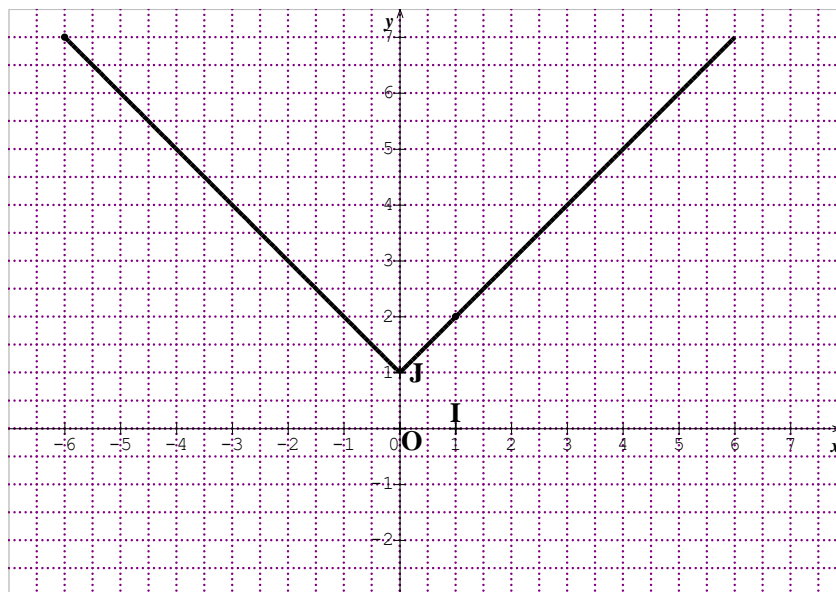
Exemple

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2$ admet la droite des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie dans un repère orthogonal (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction f de $[-6; 6]$ dans \mathbb{R} dans un repère orthonormé (O, I, J). Cette représentation graphique admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Justifie que la fonction f est paire.



SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet la droite (OJ) comme axe de symétrie dans repère orthonormé (O, I, J). Donc la fonction f est paire.

2. Fonction impaire

a) Définition

Une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont impaires.

La fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est impaire car l'ensemble de définition D_f de la fonction f est \mathbb{R} et donc pour tout x de D_f , on a $-x \in D_f$.

Ensuite pour tout x de D_f , $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+(x)^2}$. il en résulte que : $f(-x) = -f(x)$.

b) Interprétation graphique

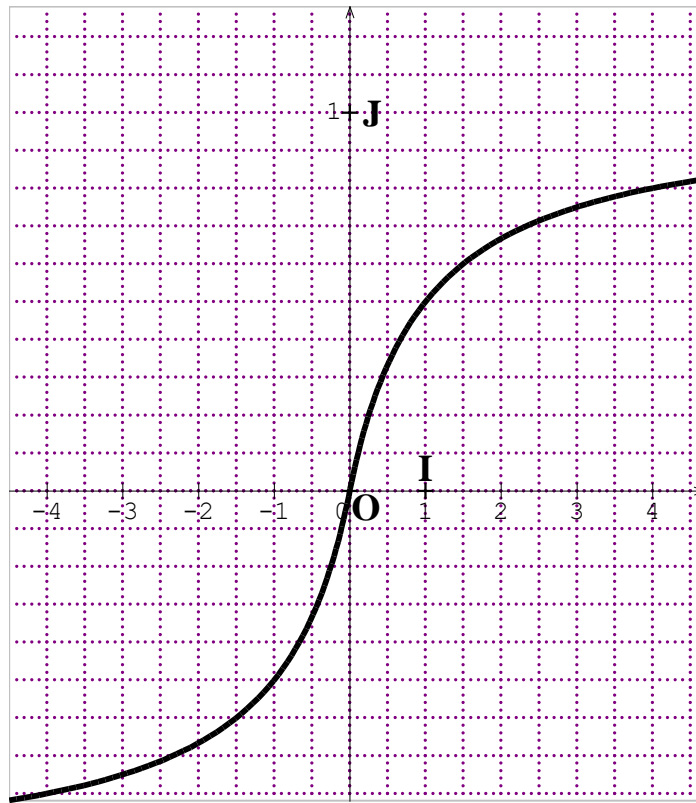
Propriété

La fonction f est impaire si et seulement si le point O est un centre de symétrie de (C_f) dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-4; 4]$ dans \mathbb{R} dans un repère (O, I, J).

Cette représentation graphique admet le point O comme centre de symétrie.



Justifie que la fonction f est impaire.

SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet le point O comme centre de symétrie dans repère (O, I, J) . Donc la fonction f est impaire.

Remarques

- Un sous-ensemble E de \mathbb{R} est dit symétrique par rapport à zéro lorsqu’il vérifie la propriété suivante : $\forall x \in E$, on a $-x \in E$.

Exemples : Les ensembles \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$, $[-1 ; 1]$ et $]-3 ; 3[$ sont symétriques par rapport à 0.

- Lorsque la fonction f est paire ou impaire, il suffit de l’étudier sur l’ensemble $D_f \cap [0 ; +\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à la droite (OJ) si f est paire ou par symétrie par rapport au point O si f est impaire.

II-ELEMENTS DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Propriété

Le plan est muni d’un repère orthogonal (O, I, J) .

Soit une droite (D) d’équation : $x = a$ et une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d’ensemble de définition D_f .

La droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x).$$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = 3$ et une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = -2(x - 3)^2 + 5.$$

Démontrez que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f .

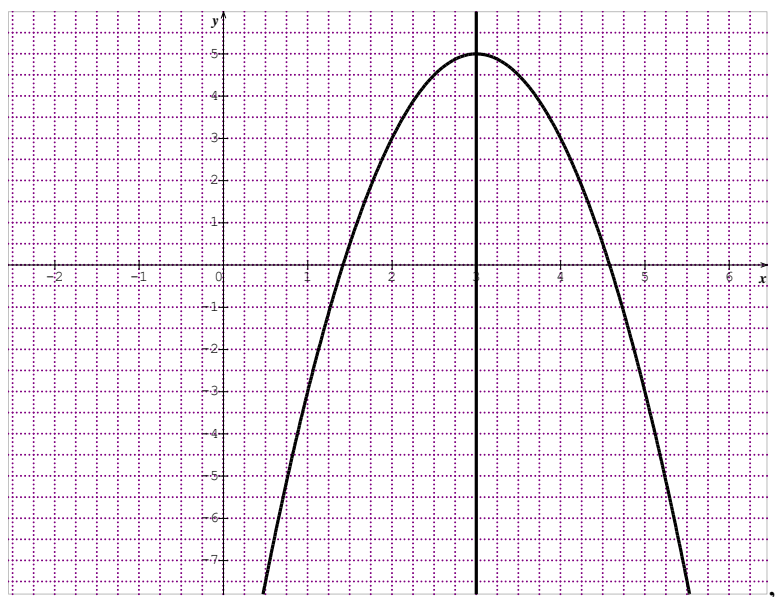
SOLUTION

L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. Donc pour tout x de D_f on a $6 - x$ appartient à D_f .

Ensuite $f(6 - x) = -2(6 - x - 3)^2 + 5 = -2(x - 3)^2 + 5$. Donc $f(6 - x) = f(x)$.

D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de f et de son axe de symétrie.



Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci-dessous

La droite (D) : $x = a$ est un axe de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $f(a + h) = f(a - h)$

2. Centre de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit un point A de couple de coordonnées (a, b) et une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'ensemble de définition D_f .

Le point A est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit A de coordonnées (2 ;3) et une fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = (x - 2)^3 + 3.$$

Démontrez que le point A est un centre de symétrie de la courbe de g .

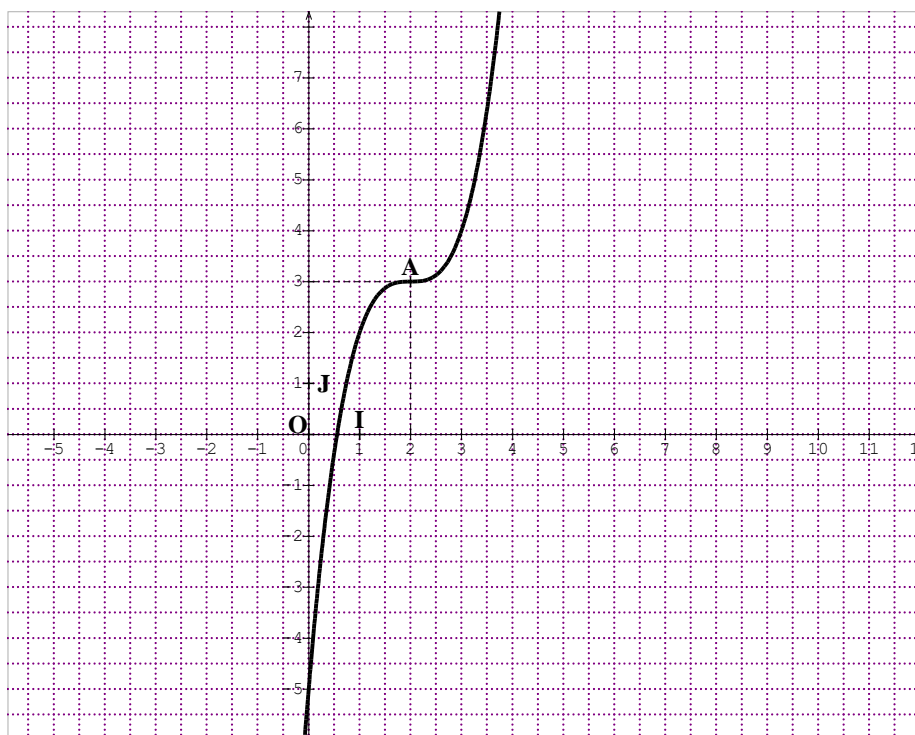
réponse

L'ensemble de définition de g est $Dg = \mathbb{R}$. Donc pour tout x de Dg on a $4 - x$ appartient à Dg .

Ensuite : $g(4 - x) + g(x) = (4 - x - 2)^3 + 3 + (x - 2)^3 + 3 .$

$g(4 - x) + g(x) = (-x + 2)^3 + (x - 2)^3 + 6$. Sachant que $(-x + 2)^3 = -(x - 2)^3$, on obtient finalement : $g(4 - x) + g(x) = 6$. D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de g et de son centre de symétrie.



Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci-dessous

La droite $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $\frac{f(a+h)f(a-h)}{2} = b$

3. Fonction périodique

Définition

Soit T un nombre réel strictement positif.

Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$:

$$x + T \in D_f, \quad x - T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Remarque

on dit souvent qu'une fonction f est T -périodique pour exprimer qu'elle est périodique de période T .

Exemple

- Les fonctions : $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π .
- La fonction : $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π .

La fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \sin(2x)$ est π -périodique

- car l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} ; et donc pour tout x de \mathbb{R} , $x + \pi$ et $x - \pi$ appartiennent à \mathbb{R} .
- Ensuite $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ car la fonction sinus est 2π -périodique.

Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarques

- Si T est une période de f alors $\forall (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) f(x + kT) = f(x)$.
- Si f est périodique de période T , il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + T[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par les translations de vecteurs $T\vec{OI}$ et $-T\vec{OI}$.

III- ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

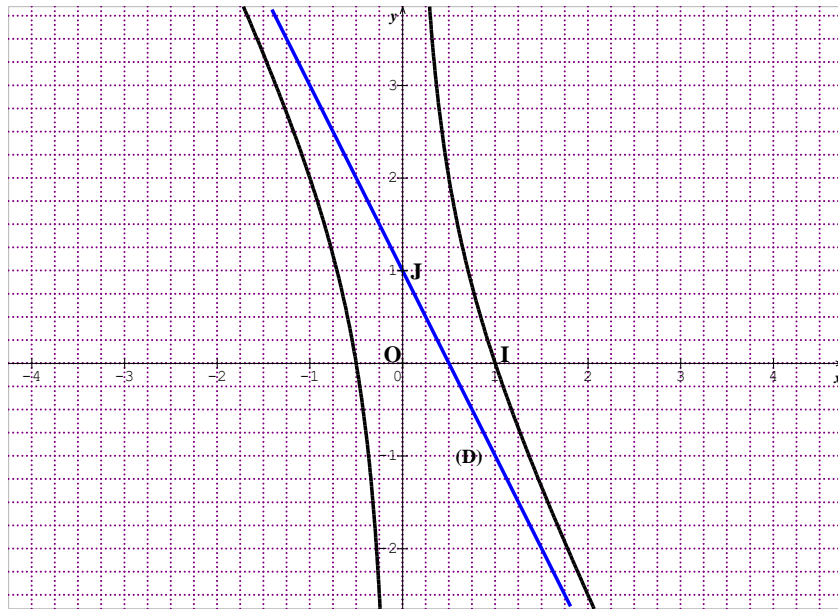
f est une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Soit a et b des nombres réels ($a \neq 0$).

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exemple

Sur la représentation ci-dessous, la droite (D) est une asymptote (oblique) à la courbe en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.



C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de 1^{ère} D ont découvert le texte suivant dans une revue. « Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite ``économique de 20 watts''. Chaque ampoule est vendue à 100 francs CFA. Il a été établi que le coût de production de x ampoule(s) est donné par la fonction suivante : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[10 ; 100]$. Le Directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal ».

Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, tu cherches à répondre aux préoccupations du Directeur.

Réponds, à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques aux préoccupations du Directeur.

SOLUTION

Pour répondre à la préoccupation du Directeur, je vais faire une étude de fonction.

Je vais faire l'étude de la fonction U afin de déterminer son minimum, le point auquel ce minimum sera atteint correspondra au nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production pour avoir un bénéfice maximal.

$$D_U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$U'(x) = x' - 10' + \left(\frac{900}{x}\right)' = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$

$$\forall x \in D_U, x^2 > 0; U' \text{ a le signe de } (x - 30)(x + 30).$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		30		30		$+\infty$	
$x^2 - 900$		+		0	-		0	+

x	10		30		100
$U'(x)$			-		+
U		↘		50	↗

50 est le minimum de la fonction U est 50 et il est atteint en 30.

Le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal est 30.

D. EXERCICES

Exercice1

f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Dans chacun des cas suivants, étudie la parité de f .

1) $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 8$.

1) SOLUTION

2) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$$f(-x) = 3(-x)^4 - |-x| + 1 = 3x^4 - |x| + 1 = f(x) \text{ donc la fonction est paire.}$$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x), \text{ alors la fonction est impaire.}$$

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D_f n'est pas symétrique par rapport à 0 car $-1 \in D_f$; et $1 \notin D_f$. La fonction n'est ni paire ni impaire.

5) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = (-x)^2 + 4 \times (-x) - 8 = x^2 - 4x - 8$; $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$; par conséquent, la fonction n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Démontrez que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

SOLUTION

on pose $g(x) = f(x + 2)$ alors $g(x) = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 7 = x^2 + 3$.

$D_g = \mathbb{R}$. Donc D_g est symétrique par rapport à 0.

$g(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = g(x)$, alors la fonction g est paire, d'où la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Exercice 3

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+1}$. On note (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

Démontrez que le point $A(-1 ; 3)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

SOLUTION

On pose $f(-2 - x) + f(x) = \frac{x^2-x-7}{-x-1} + \frac{x^2+5x-1}{x+1} = \frac{6(x+1)}{x+1} = 6 = 2 \times 3$; alors le point $A(-1 ; 3)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{5})$.

Démontrez que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

SOLUTION

$D_f =] - \pi ; \pi [$; alors $\forall x \in D_f, x + \frac{2\pi}{3} \in D_f$ et $x - \frac{2\pi}{3} \in D_f$.

$f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos[3(x + \frac{2\pi}{3}) - \frac{\pi}{5}] = \cos(3x + 2\pi - \frac{\pi}{5}) = \cos(3x - \frac{\pi}{5} + 2\pi) = \cos(3x - \frac{\pi}{5})$ car \cos est périodique de période 2π .

On a donc $f(x + \frac{2\pi}{3}) = f(x)$, par conséquent, f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 5

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$. On note (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

- 1) Démontre que pour tout x de D_f , $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$
- 2) Démontre que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

SOLUTION

- 1) En effectuant la division euclidienne de $2x^2 + 3x - 1$ par $x-1$, on a $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$
- 2) $f(x) - 2x + 5 = \frac{4}{x-1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$, alors la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Dans les exercices suivants, f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Exercice 6

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- 1-Justifie que le point $A(0 ; -1)$ est un centre de symétrie de (C) .
- 2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3-a) Calcule la dérivée de f .
 - b) Etudie les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.
- 4-a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 - b) Etudie la position de (C) par rapport (T) .
- 5- Trace la droite (T) et construis (C) sur $[0 ; +\infty[$ puis sur \mathbb{R} dans le plan muni du même repère orthonormé (O, I, J) tel que : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

1- SOLUTION

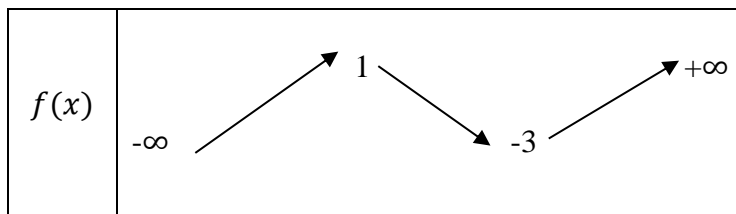
- 2- On pose $g(x) = f(x+0) + 1 = x^3 - 3x - 1 + 1 = x^3 - 3x$
 $D_g = \mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.
 $g(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$, alors g est impaire ; par conséquent le point $A(0 ; -1)$ est un centre de symétrie de (C) .
- 3- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- 4- a) $f'(x) = (x^3 - 3x - 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
 b) Tableau de signe de f'

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$; alors f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$
 $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) \leq 0$; alors f est strictement décroissante sur $]-1; 1[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+



5- a) $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

$y = -1 - 3 \times x$

(T): $y = -3x - 1$

b) Position de (C) par rapport à (T)

$$f(x) - y = x^3 - 3x - 1 - (-3x - 1)$$

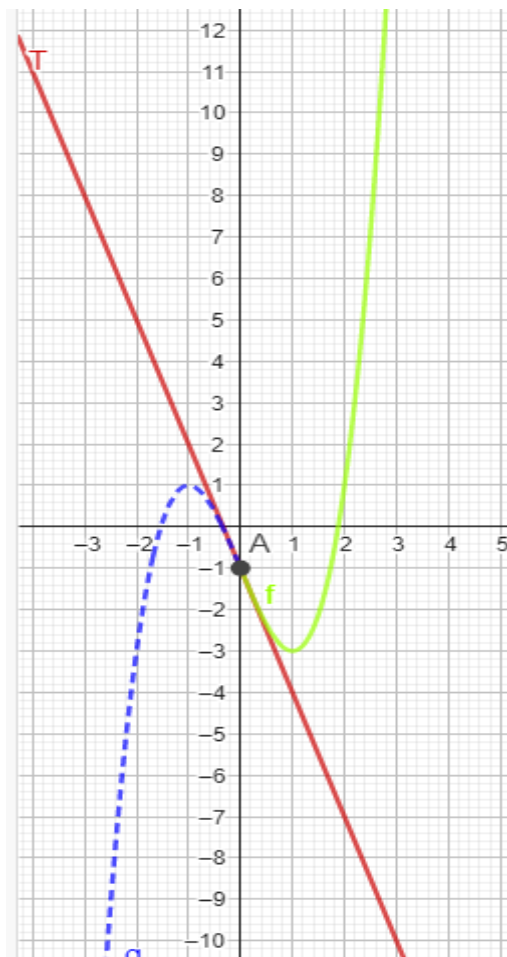
$$= x^3 - 3x - 1 + 3x + 1$$

$$f(x) - y = x^3$$

$x^3 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ et $x^3 \leq 0$ sur $] -\infty; 0]$; alors :

- Sur $] -\infty; 0]$, (T) est au-dessus de (C)
- Sur $[0; +\infty[$, (C) est au-dessus de (T).

6- Construction



Exercice 7

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

1- Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule : $\lim_{x \rightarrow -1}^- f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1}^+ f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3-a) Calcule la dérivée de f .

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4-Justifie que le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$. Alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

3- $\lim_{x \rightarrow -1}^- f(x) = -3 \times (-\infty) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1}^+ f(x) = -3 \times (+\infty) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale en $+\infty$ et $-\infty$.

4- a) $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

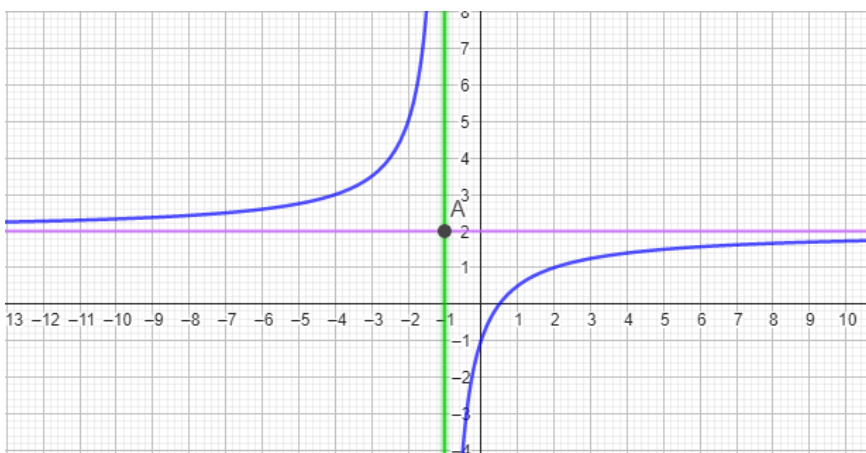
b) $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$; $\forall x \in D_f, (x+1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$; alors f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $] - 1; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

On pose $g(x) = f(x - 1) - 2 = -\frac{3}{x}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. $g(-x) = \frac{-(-x)}{3} = -g(x)$ donc g est une fonction impaire ; alors le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5- Construction



Exercice 8

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ par : } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}.$$

1-Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier les positions de (C) par rapport à (D).

4-a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5-Démontrer que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

6-Construire la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

1- SOLUTION

2- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$; alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale en l'infini à (C).

3- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

4- a)

en effectuant la division euclidienne de $x^2 - 3x + 3$ par $x - 2$ on obtient

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2} \text{ alors } a = 1 ; b = -1 \text{ et } c = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{x-2} - (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$; la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Position de (C) et (D).

$$f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-2}$$

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$x - 2$	-	$\left \begin{array}{c} 0 \\ \hline \end{array} \right.$	+

- Sur $] -\infty ; 2[$, (D) est au-dessus de (C)

- Sur $]2 ; +\infty[$, (C) est au-dessus de (D).

5- a) $f'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 3)'(x-2) - (x^2 - 3x + 3)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$; $\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ alors f' a le signe de $x^2 - 4x + 3$.

Déterminons le signe de $x^2 - 4x + 3$.

$\Delta = 4$; les deux racines du polynôme sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Alors :

pour $x \in [1; 2[\cup]2; 3]$, $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ et pour $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$, $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Par conséquent : $\begin{cases} f \text{ est décroissante sur } [1; 2[\text{ et sur }]2; 3] \\ f \text{ est croissante sur }]-\infty; 1] \text{ et sur } [3; +\infty[\end{cases}$

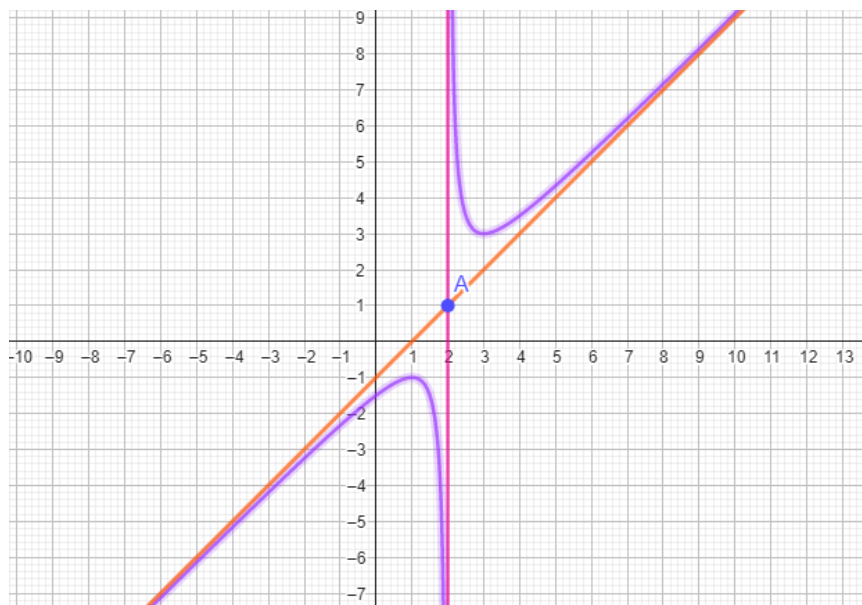
Tableau de variation

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	\nearrow -1 \searrow	$-\infty$	\searrow 3 \nearrow	$+\infty$	

6- On pose : $g(x) = f(x+2) - 1 = \frac{x^2+1}{x}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\forall x \in D_g, -x \in D_g$.

$g(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -g(x)$, la fonction g est donc impaire. Alors le point $A(2 ; 1)$ est un centre de symétrie de (C).

7- Construction



Exercice 9

Soit $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1-a) Démontre que f est impaire et périodique de période 2π .

b) Justifie que l'on peut limiter l'ensemble d'étude à l'intervalle : $I=[0 ; \pi]$.

2-Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

3-Etudie les variations de f sur l'intervalle I puis dresse son tableau de variation sur I .

4-Trace (C) sur I puis sur $\left[-\frac{7\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3}\right]$. Unité graphique : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

SOLUTION

1- a) f est définie sur \mathbb{R} , $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin(x) - \sin(2x) = -f(x)$, la fonction est donc impaire.

$$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 2 \times 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = 2\sin(x) + \sin(2x) = f(x) \text{ car la fonction sin est périodique de période } 2\pi .$$

b) f est périodique de période 2π , donc on peut l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + 2\pi]$ en prenant $a=0$; on restreint l'ensemble d'étude à $[0; 2\pi]$; la fonction étant impaire, on pourra donc l'étudier sur $[0; \pi]$ et compléter par la symétrie centrale de centre O .

$$2- f'(x) = 2\cos x + 2\cos(2x) \text{ comme } \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \text{ on obtient donc : } f'(x) = 2\cos x + 4\cos^2(x) - 2 = 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 2(\cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$

En posant $\cos(x) = X$ et en calculant le discriminant du nouveau polynôme, on obtient deux racines -1 et $\frac{1}{2}$. On a donc : $2(\cos^2(x) + \cos(x) - 1) = 2 \times 2(\cos x + 1) \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) =$

$$2(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

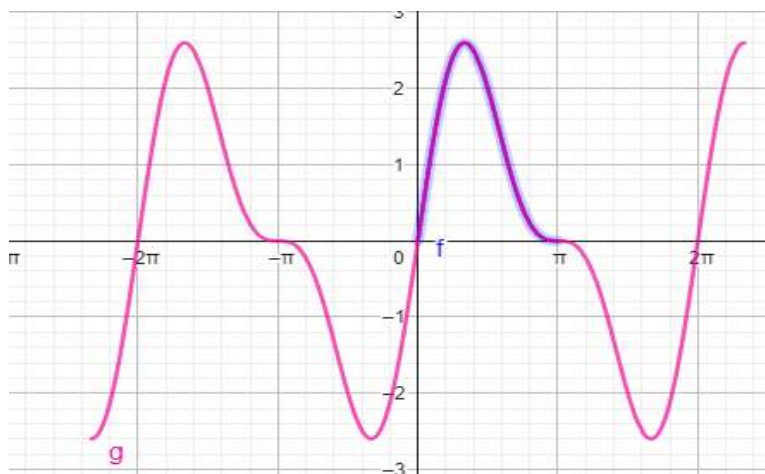
3- En résolvant l'équation $(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$ on a :

$$\cos x = -1 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ en résolvant sur } I, \text{ on a } x = \pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$2\cos x - 1$	+	○	-
$\cos x + 1$	+	○	+
$f'(x)$	+	○	-

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	○	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0



Exercice 10

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.

Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.

1-Démontre que le bénéfice global $B(x)$ réalisé par l'entreprise pour x jus produits et vendus est :

$$B(x) = -x^2 + 130x - 4125.$$

2-Dresse le tableau de variation de la fonction B .

3-Déduis le bénéfice maximal, puis indique pour quelle production elle est atteinte.

Exercice 11

Partie A

Soit p la fonction polynôme définie par : $p(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

1-Justifie que : $p(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 9)$.

2-Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ et on note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2 + 3}$.

b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + 3)^2}$.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre qu'il existe un unique point A de (C) tel que la tangente à (C) en A soit parallèle à (D).

6-a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 est :

$$y = 2x + 2.$$

b) Vérifie que : $\forall x \in D_f, f(x) - (2x + 2) = -\frac{(x+1)^3}{x^2 + 3}$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (T).

7-Trace les droites (D) et (T) et construis la courbe (C). Unité graphique : 1cm.



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

Compétence 3

Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 2

Géométrie de l'espace

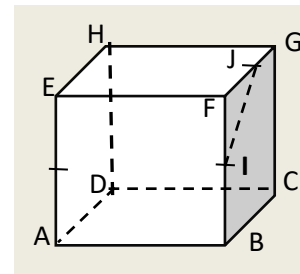
Leçon 12 : ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Hermann, un élève en classe 1^{ère} C ne comprend pas pourquoi son frère aîné affirme que dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (HG) et (IJ) sont orthogonales ; avec I et J milieux respectifs de [FB] et [FG].

Afin de comprendre cette affirmation, Son professeur de mathématiques lui demande de faire des recherches sur les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace.



B- CONTENU DE LA LEÇON

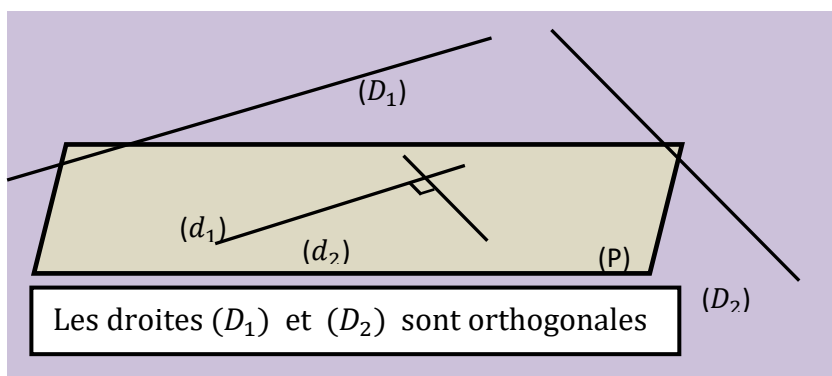
1. DROITES ORTHOGONALES DE L'ESPACE

a) Définition

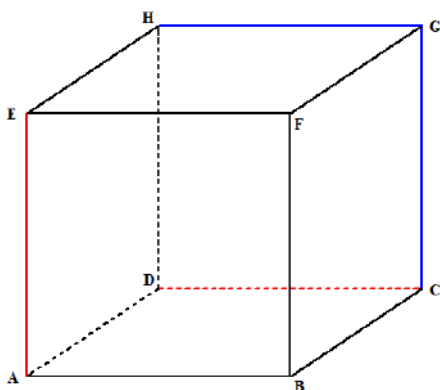
Dans l'espace (ε) , deux droites (D_1) et (D_2) sont dites orthogonales lorsqu'il existe deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) telles que (D_1) est parallèle à (L_1) et (D_2) est parallèle à (L_2) .

La droite (D_1) est orthogonale à la droite (D_2) se note : $(D_1) \perp (D_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_1) \text{ et } (L_2) \text{ perpendiculaires} \\ (D_1) \parallel (L_1) \\ (D_2) \parallel (L_2) \end{array} \right. \Rightarrow (D_1) \perp (D_2)$$



Exemple :



Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet, (GH) est perpendiculaire à (CG) . De plus $(GH) \parallel (DC)$ et $(CG) \parallel (AE)$.

Remarque : le terme perpendiculaire ne s'utilise que lorsque les droites sont orthogonales et sécantes. Autrement dit, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

b) Propriétés

Propriété 1 :

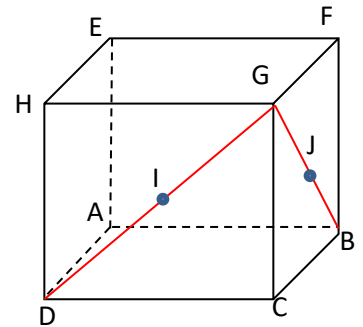
Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre :
ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et
J est le milieu de [BG].
Démontrez que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.



Solution

Dans le triangle BDG, I est le milieu de [DG] et J est le milieu de [BG],
D'après le théorème des milieux (IJ) et (DB) sont parallèles.
Comme ABCD est un carré, alors ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Puisque (IJ) et (BD) sont parallèles et (AC) est orthogonale à (BD), alors (AC) est orthogonale à (IJ).

Remarque :

Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

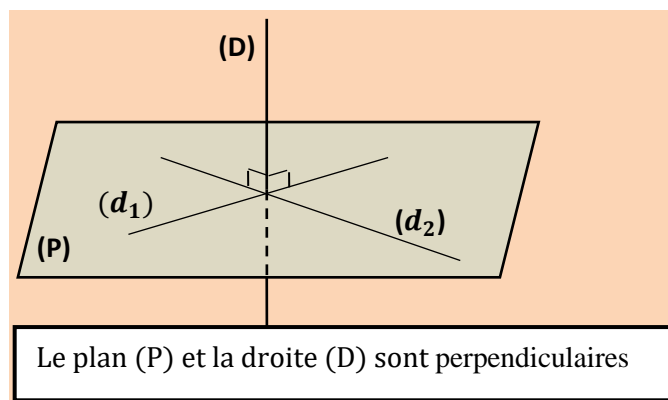
2. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

a) **Définition**

Dans l'espace, on dit qu'une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (P).

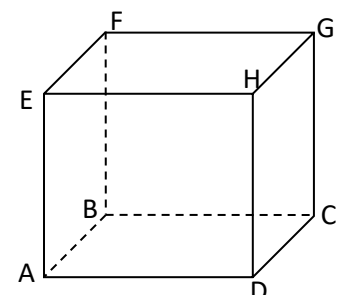
La droite (D) est perpendiculaire au plan (P) se note : $(D) \perp (P)$

$$\begin{cases} (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sécantes dans } (P) \\ (D) \perp (d_1) \\ (D) \perp (d_2) \end{cases} \Rightarrow (D) \perp (P)$$



Exemple

On donne la figure ci-contre : ABCDEFGH est un cube.
(DH) est perpendiculaire au plan (EGH). En effet, $(DH) \perp (HE)$
et $(DH) \perp (HG)$. La droite (DH) est orthogonale à deux droites



sécantes en H incluses du plan (EGH), alors (DH) est perpendiculaire au plan (EGH).

b) Propriétés

Propriété 1 (propriété fondamentale) :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, justifie que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.

Solution : Comme (DH) est perpendiculaire au plan (EGH), Or $(EG) \subset (EGH)$, donc $(DH) \perp (EG)$.

Propriété 2 :

Il existe une unique droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de droites passant par le point B et perpendiculaire au plan GCD ?

Solution : Il existe une seule droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (GCD), c'est la droite (BC).

Propriété 3 :

Il existe un unique plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de plans passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) ?

Solution : Il existe un seul plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) c'est le plan (ABE).

Propriété 4 :

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Solution : la droite (AE) est parallèle à la droite (DH) et (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Propriété 5 :

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Exercice de fixation

Justifie que les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

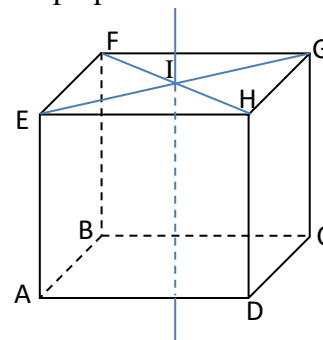
Solution : la droite (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). De même, on montre que (BF) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Propriété 6 :

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, la droite (D) est perpendiculaire aux droites (FH) et (EG) en I.
Justifie que (D) est perpendiculaire au plan (ABD).



Solution

La droite (D) étant perpendiculaire aux droites (FH) et (EG), alors elle est perpendiculaire au plan (FGH). Or les plans (ABD) et (FGH) sont parallèles. Donc la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

Propriété 7 :

Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

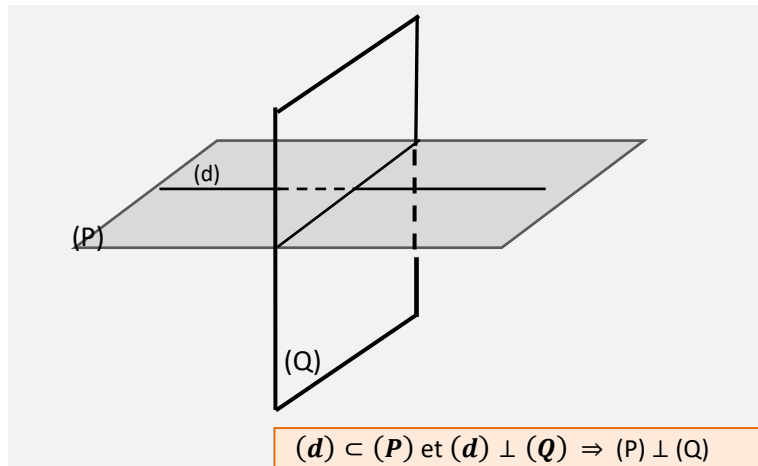
3. PLANS PERPENDICULAIRES DE L'ESPACE

a) Définition

Dans l'espace, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux est orthogonale à l'autre plan.

Le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) se note : $(P) \perp (Q)$

$$\begin{cases} (d) \text{ est une droite du plan } (P) \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

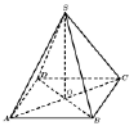


Exemple

On donne la pyramide régulière SABCD ci-dessous de hauteur [SO]

Démontrons que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

(AO) est une droite incluse dans le plan (ADB)
 (AO) est perpendiculaire au plan (SDB) donc les plans
 (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.



Conséquences

- * Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P), alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).
- * Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

b) Propriétés

Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

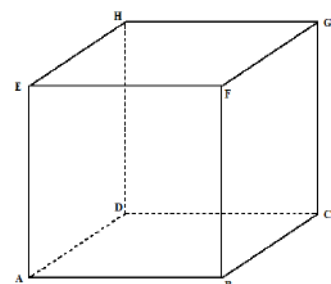
Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

Démontre que les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).



Solution

Les plans (ACE) et (DEH) sont sécants et leur droite d'intersection est la droite (AE).

$(AE) \perp (AD)$ et $(AE) \perp (AB)$. Comme (AD) et (AB) sont incluses (ABC), donc $(AE) \perp (ABC)$.

Par conséquent, les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).

4. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN, SUR UNE DROITE DE L'ESPACE

Définitions

- Soit A un point et (P) un plan de l'espace. Soit (D) l'unique droite passant par A et perpendiculaire à (P) en H.

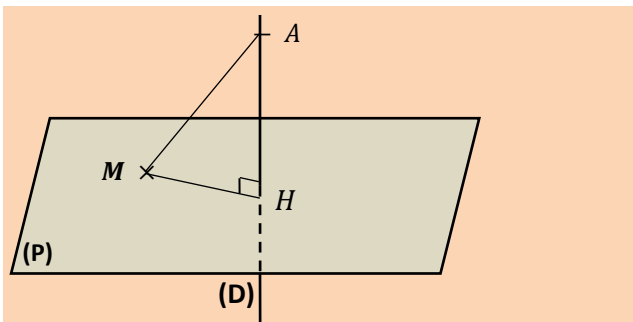
Alors le point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur le plan (P)

La distance AH est appelée **la distance du point A au plan (P)**

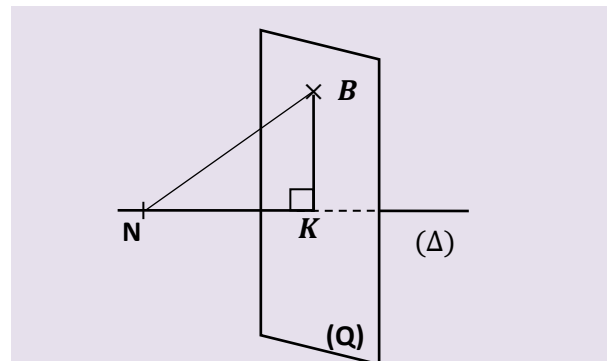
- Soit B un point et (Δ) une droite de l'espace. Soit (Q) l'unique plan passant par B et perpendiculaire à (Δ) en K.

Alors le point K est appelé le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (Δ) .

La distance BK est appelée **la distance du point B à la droite (Δ)** .



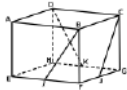
$M \in (P)$, H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; $AH < AM$



$N \in (\Delta)$, K est le projeté orthogonal de B sur la droite (Δ) ; $BK < BN$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont des points respectifs des arêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$. p est la projection orthogonale sur le plan (EHD)



Complétons le tableau ci-dessous.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
$p(M)$	A	A	D	D	E	E	H	H	E	H

b -Propriétés

Propriété 1

Par une projection orthogonale sur un plan (\mathcal{P}) , l'image d'une droite (D) est :

- un **singleton** si (D) est **perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .
- une **droite** si (D) n'est **pas perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .

Propriété 2

Par une projection orthogonale sur un plan (\mathcal{P}) , l'image d'un segment $[AB]$ est :

- un **singleton** si la droite (AB) est **perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .
- un **segment** si la droite (AB) n'est **pas perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .

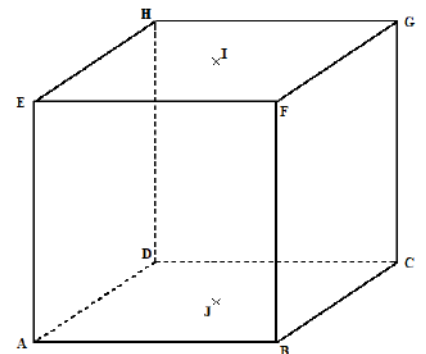
Propriété 3 (Projeté orthogonal du milieu d'un segment)

Par une projection orthogonale sur un plan (P) , l'image du milieu d'un segment $[AB]$ est le milieu de l'image du segment $[AB]$ si (AB) n'est pas perpendiculaire à (P) .

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. J est le centre du carré ABCD et I le centre du carré EFGH.

Détermine le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC) .
Justifie ta réponse.



Corrigé

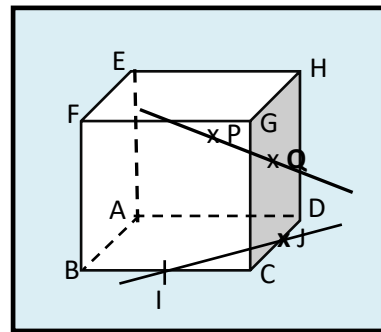
Soit I le milieu du segment $[HF]$.

Le projeté orthogonal de $[HF]$ sur le plan (ABC) est le segment $[DB]$.

Par conséquent, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC) est le milieu de $[DB]$ donc le point J .

C. SITUATION COMPLEXE

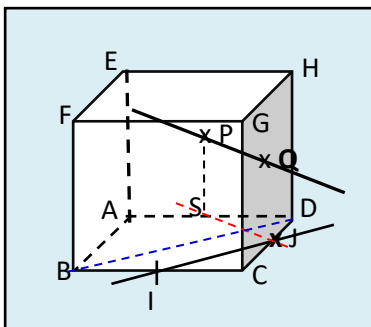
Soit $ABCDEFGH$ un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces $AEHD$ et $CDHG$. Lors du cours le professeur de Mathématiques d'une classe de 1^{ère} C affirme que : « les droites (PQ) et (IJ) sur la figure ci-contre sont orthogonales non sécantes ». Il donne la démonstration à faire en exercice en classe et accorde trois points en bonus au premier élève qui aura fait une démonstration correcte. Etant élève de cette classe et désireux d'obtenir les points bonus, justifie cette affirmation du professeur de Mathématiques



Solution

Pour répondre à la question, nous allons nous appuyer sur nos connaissances sur la leçon d'orthogonalité dans l'espace. Pour ce faire, nous allons :

- Justifier que les deux droites sont non sécantes
- Justifier que les deux droites sont orthogonales



Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont non sécantes

Soit (Π) le plan médiateur de l'arête [AE].

$(IJ) \subset (ABC)$ et $(PQ) \subset (\Pi)$ or, $(ABC) // (\Pi)$ (disjoints) les droites (IJ) et (PQ) sont disjointes car appartenant à des plans disjoints. Elles ne sont pas sécantes.

Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont orthogonales. Pour cela nous allons utiliser la définition de droites orthogonales.

Soit J est le projeté orthogonal de Q sur le plan (ABC). Soit S le projeté orthogonal de P sur le plan (ABC). Alors les droites (SJ) et (PQ) sont parallèles car $(ABC) // (\Pi)$.

I milieu de [BC] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle BCD, $(IJ) // (BD)$. Par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

Dns le triangle ACD, S milieu de [AD] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle ACD, $(SJ) // (AC)$. Or (AC) perpendiculaire à (BD), par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

En définitive, (SJ) perpendiculaire à (BD) ; $(SJ) // (PQ)$, $(BD) // (IJ)$ et donc $(PQ) \perp (IJ)$.

D-EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1



Sur la figure ci-dessous $ABCDEFGH$ est un cube.

Justifie que la droite (EF) est orthogonale au plan (BFG).

Corrigé

(BF) et (GF) sont deux droites sécantes du plan (BFG) or (EF) est orthogonale aux deux droites (BF) et (GF) ; on en déduit que la droite (EF) est perpendiculaire au plan (BFG).

Exercice 2

La figure ci-dessous représente un cube. Les points Q et R désignent les milieux respectifs des arêtes $[AE]$ et $[BF]$



- 1) Justifie que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.
- 2) Justifie que les droites (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

CORRIGÉ

- 1) $(AE) \parallel (BF)$ et $(DC) \parallel (AB)$ or (BF) et (AB) sont perpendiculaires en B, donc (AE) et (DC) sont orthogonales.
- 2) $(AR) \parallel (QF)$ et $(HG) \parallel (EF)$ or (QF) et (EF) ne sont pas perpendiculaires, donc (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

Exercices 3

Réponds par vrai (V) ou faux (F)

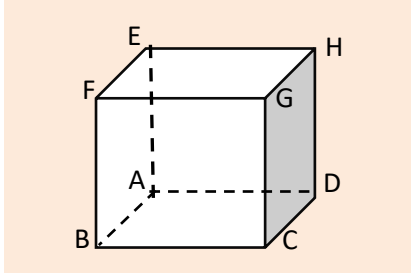
	Affirmations	V ou F
1	Deux droites perpendiculaires sont orthogonales	
2	Deux droites orthogonales sont perpendiculaires	
3	Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles	
4	Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles	
5	Toute droite orthogonale à deux droites parallèles d'un plan (P), est orthogonale à ce plan (P).	
6	Par un point donné, il passe une unique droite orthogonale à une droite donnée.	
7	Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles	

SOLUTION

1. V 2. F 3. V 4. F 5. F 6. V 7. V

Exercice 4

A partir du cube ABCDEFGH ci-dessous, et pour chaque affirmation, choisis la ou les bonnes réponses parmi les réponses A, B et C du tableau

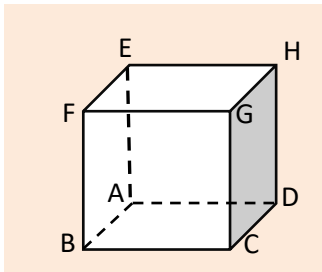


	AFFIRMATIONS	A	B	C
1	La droite (AB) est perpendiculaire à...	(AD)	(EH)	(GH)
2	La droite (AB) est orthogonale à...	(CG)	(CD)	(GH)
3	La droite (BD) est orthogonale à...	(AE)	(AEH)	(ACD)
4	Le projeté orthogonal de B sur la droite (EH) est ...	A	E	H
5	Le projeté orthogonal de G sur le plan (AED) est....	A	E	H
6	La distance de H au plan (AED) est...	HE	0	HD
7	La distance de F à la droite (HD) est...	FD	FH	FE
8	Le triangle ... est rectangle	EBG	HEC	AEC

Solution

1. A 2. A 3. A 4. E 5. C 6. B 7. B 8. B-C

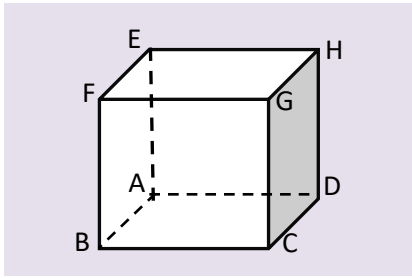
Exercice 5



La figure ci-dessus est le cube ABCDEFGH

1. Détermine le projeté orthogonal de G sur (ABF). F
2. Détermine la distance de B au plan (EGH).
3. Cite 3 droites perpendiculaires à la droite (EF).
4. Cite 3 droites orthogonales et non perpendiculaires à la droite (EF).
5. Cite 3 plans orthogonaux au droite (CD).
6. Cite 3 plans orthogonaux au plan (CDH).

On utilisera le cube $ABCDEFGH$ pour résoudre les exercices allant de Ex 6 à Ex10.



Exercice 6 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier que deux droites sont orthogonales

1. Démontre que : $(BC) \parallel (AD)$ et $(HD) \parallel (AE)$
2. Déduis-en que : $(BC) \perp (HD)$

Exercice 7 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre une droite et un plan.

1. Démontre que : $(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \perp (AE)$
2. Déduis-en que la droite (AB) est orthogonale au plan (AHD)

Exercice 8 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la propriété fondamentale pour justifier l'orthogonalité entre deux droites.

1. Démontre que : $(AB) \perp (AHD)$.
2. Déduis-en que : $(AB) \perp (HD)$.

Exercice 9 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre deux plans.

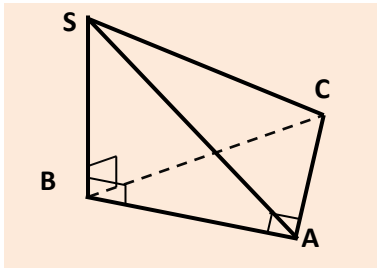
1. Démontre que : $(AB) \perp (AHD)$.
2. Déduis-en que : $(AEB) \perp (AHD)$.

Exercice 10 L'objet de cet exercice est de trouver le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan et de calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan

1. a) Justifie que E est le projeté orthogonal de A sur le plan (FHG) .
b) Déduis-en, la distance de H à la droite (HG)
2. a) Justifie que D est le projeté orthogonal de C sur le plan (EHA) .
b) Déduis-en, la distance de C au plan (EHA) .

D.2. EXERCICES DE RENFORCEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11



La figure ci-dessus est un tétraèdre $SABC$ tel que :

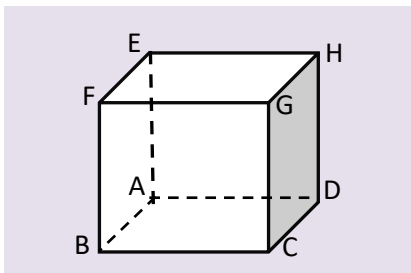
- La droite (SB) est orthogonale au plan ABC
 - Le triangle ABC est rectangle en A
1. Démontre que la droite (AC) est orthogonale à la droite (SB) .
 2. Déduis-en que les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires

CORRIGÉ

1. $(SB) \perp (ABC)$ et $(AC) \subset (ABC)$. Donc $(AC) \perp (SB)$.
2. $(AC) \subset (SAC)$; $(AB) \subset (SAB)$ et $(SB) \subset (SAB)$
 $(AC) \perp (SB)$; $(AC) \perp (AB)$; (AC) et (SB) sont sécantes en B donc $(AC) \perp (SAB)$.
Par conséquent les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires.

Exercice 12 Orthogonalité entre les plans

On donne ci-dessous le cube $ABCDEFGH$



1. Démontre que : $(ABC) \perp (AEC)$
2. Démontre que : $(AEC) \perp (HDB)$
3. Démontre que : $(FCH) \perp (AEG)$

Indications :

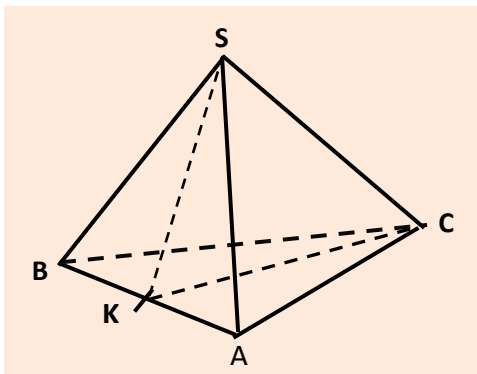
1. on étudiera l'orthogonalité entre (AE) et (ABC)
2. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (AC) et les droites (BD) et (HD)
3. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (FH) et les droites (EG) et (AE)

CORRIGE

- 1) $(AE) \perp (AD)$ et $(AE) \perp (AB)$ (AB et AD) sont incluses dans (ABC) donc (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) . La droite (AE) étant incluse dans le plan (AEC) on en déduit que les plans (ABC) et (AEC) sont perpendiculaires.
- 2) $(AC) \perp (BD)$ car $ABCD$ est un carré. (AC) et (HD) sont orthogonales car $\begin{cases} (AC) \perp (CG) \\ (CG) \parallel (HD) \end{cases}$
par conséquent (AC) est perpendiculaire au plan (HDB) et comme (AC) est incluse dans le plan (AEC) alors les plans (AEC) et (HDB) sont perpendiculaires.
- 3) $(FH) \perp (EG)$ car $EFGH$ est un carré. (FH) et (AE) sont orthogonales car $\begin{cases} (FH) \perp (FB) \\ (FB) \parallel (AE) \end{cases}$
par conséquent (FH) est perpendiculaire au plan (AEG) et comme (FH) est incluse dans le plan (FCH) alors les plans (FCH) et (AEG) sont perpendiculaires.

Exercice 13

La figure ci-dessous est un tétraèdre régulier $SABC$ c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux. On désigne par K le milieu de l'arête $[AB]$.

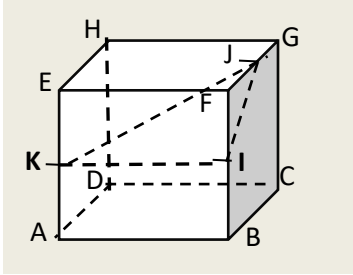


1. Démontrez que la droite (AB) est orthogonale à la droite (SC)
2. Soit G le centre de gravité du tétraèdre $SABC$ et H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .
 - a) Justifiez que H est le centre de gravité du triangle ABC
 - b) Justifiez que $3\vec{GH} + \vec{GS} = \vec{0}$

Solution

1. Pour cela, nous allons montrer que la droite (AB) est orthogonale à un plan contenant (SC) .
Considérons le triangle équilatéral SAB . K est milieu de $[AB]$ donc (SK) est perpendiculaire à (AB) .
De même en considérant le triangle équilatéral ABC , K est milieu de $[AB]$ donc (CK) est perpendiculaire à (AB) .
Donc la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (SKC) . Donc $(AB) \perp (SKC)$, d'où $(AB) \perp (SC)$.
2. a) (SH) est la hauteur du tétraèdre régulier $SABC$ et $G \in (SH)$. Donc H est le centre de gravité ABC .
b) G est le centre de gravité du tétraèdre $SABC$ alors $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GS} = \vec{0}$.
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GS} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GH} + \vec{HA} + \vec{GH} + \vec{HB} + \vec{GH} + \vec{HC} + \vec{GS} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\vec{GH} + \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} + \vec{GS} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\vec{GH} + \vec{GS} = \vec{0} \text{ car } H \text{ est le centre de gravité } ABC.$$

Exercice 14



Sur la figure ci-dessus, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[BF]$, $[FG]$ et $[AE]$

1. Démontrez l'orthogonalité entre les droites et les plans dans les cas suivants :

- (IK) et (ADE)
- (BE) et (ADG)
- (ED) et (IJK)

2. Démontrez l'orthogonalité entre les droites dans les cas suivants :

- (AC) et (BF)
- (IK) et (CF)
- (IJ) et (CD)

Indications :

1b. $(BE) \perp (AD)$ et $(BE) \perp (DG)$ et conclure

1c. $(ED) \perp (BG)$ et $(BG) \parallel (IJ)$ et conclure

Exercice 15 (Arêtes opposées orthogonales)

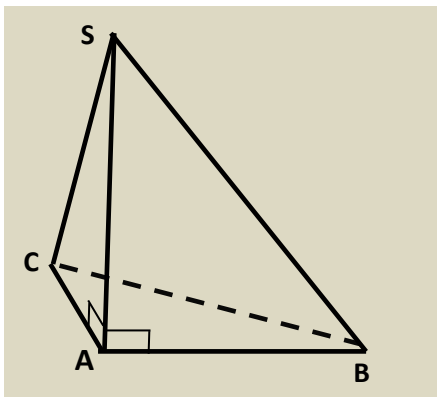
Dans un tétraèdre, on appelle arêtes opposées, deux arêtes qui n'ont aucun sommet commun.

La figure ci-dessous est un tétraèdre SABC tel que :

- La droite (SA) est orthogonale au plan ABC
- Le triangle ABC est rectangle en A

Démontrez que les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales. C'est à dire démontrez que:

1. $(SB) \perp (AC)$
2. $(SA) \perp (BC)$
3. $(SC) \perp (AB)$



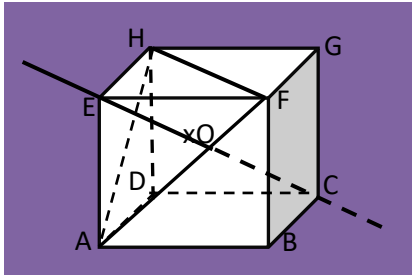
Indications :

1. Justifier que : $(AC) \perp (ABS)$ et conclure
2. Propriété fondamentale
3. Justifier que : $(AB) \perp (SCA)$ et conclure

Exercice 16

La figure ci-dessous est un cube $ABCDEFGH$ d'arête a

L'objet de cet exercice est de démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF) et de calculer la distance du point E au plan (AHF)



1. a) Démontre que la droite (AH) est orthogonale au plan (EDC)
b) Déduis-en que : $(EC) \perp (AH)$
2. a) Démontre que : $(AF) \perp (EB)$ et $(AF) \perp (BC)$
b) Déduis-en que : $(AF) \perp (EBC)$
3. Déduis-en que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF)
4. On suppose que (EC) et (AHF) se rencontrent en O .
a) Quelle est la nature du triangle AHF ?
b) Démontre que O est le centre de gravité du triangle AHF . (On pourra justifier que la droite (EC) est axe de symétrie du cercle circonscrit au triangle AHF)
5.
a) Justifie que
$$E = \text{bar}\{(F; 1), (H; 1), (A; 1), (C; -1)\}$$

b) En utilisant l'isobarycentre O de A , H et F , détermine la position de O sur $[EC]$.
c) Calcule la distance EC en fonction de l'arête a
d) Déduis-en que la distance du point E au plan (AHF) est égale à : $EO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C

MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 3 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques
et aux fonctions**

Thème 1

Calculs algébriques

LEÇON 13 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS \mathbb{R}^2 ET DANS \mathbb{R}^3

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Trois élèves d'une classe de première C font des recherches sur les hydrocarbures. Ils découvrent le texte suivant :

« Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume de 70 cm^3 . Après le passage d'une étincelle, il se produit une réaction. Au retour dans les conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène ».

Impressionnés par les résultats de cette expérience, ils veulent déterminer les volumes respectifs des gaz qui composent le mélange initial.

Pour cela, ils décident d'apprendre à résoudre des systèmes d'équations dans \mathbb{R}^3 .

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS \mathbb{R}^2

1) Définition

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

On appelle déterminant du système (S), le nombre réel $ab' - a'b$. On le note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Exemple

Le déterminant du système (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ est : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13$

2) Propriété

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0).$$

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarque

Le système (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacun des systèmes ci-dessous, détermine le nombre de solutions.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases} .$$

Solution

$$\det(S_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0, \text{ donc } (S_1) \text{ admet exactement un couple de solutions.}$$

$$\det(S_2) = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0 . \text{ Soit } (S_2) \text{ n'admet pas de couples solutions, soit } (S_2) \text{ admet une infinité de couples solutions.}$$

3) Résolution d'un système de deux équations linéaires dans \mathbb{R}^2

Méthode

Un système de deux équations linéaires dans \mathbb{R}^2 , peut se résoudre :

- Par le calcul à l'aide de la substitution, de la combinaison ou du déterminant.
- Graphiquement.

Exemple 1 : Par le calcul à l'aide du déterminant

Résous les systèmes d'inconnue $(x; y)$ dans \mathbb{R}^2 :

$$a) (S_1) : \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est :
 $D = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$

le couple $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ vérifie l'équation
 $3x + 15y + 2 = 0$ et ne vérifie pas l'équation

Donc le système (S_1) admet zéro solution ou plusieurs solutions.	$2x + 10y - 6 = 0$. Donc (S_1) n'admet aucun couple solution.
---	--

b) $(S_2): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7$ Donc le système (S_2) admet une seule solution.	$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17$ donc $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$. L'unique couple de solutions de (S_2) est $(\frac{1}{7}; \frac{17}{7})$.
---	---

Synthèse : Cas général

S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Lorsque le déterminant $D \neq 0$, le système admet une unique solution. On calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ puis $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Exemple 2 : Graphiquement, résous le système $(S): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y - 5 = 0$ et $x - y + 1 = 0$ puis on lit les coordonnées du point d'intersection des droites. (D) et (D') sont sécantes en A et $A(1; 2)$. La solution du système est $(1; 2)$.	
---	--

II. SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS \mathbb{R}^3

1) Définitions

• On appelle système linéaire de trois équations du premier degré à trois inconnues $(x; y; z)$, un système du

type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \\ a''x + b''y + c''z = m'' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', m, m'$ et m'' sont des nombres réels.

• Un système triangulaire d'équations dans \mathbb{R}^3 est un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ b'y + c'z = m' \\ c''z = m'' \end{cases}$

où $a, b, c, b', c', c'', m, m'$ et m'' sont des nombres réels.

Exemples

$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ (S) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$

2) Résolution d'un système de trois équations linéaires dans \mathbb{R}^3

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans \mathbb{R}^3 , on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

a) Par substitution

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de substitution : $(\Sigma_1) \begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 2(2y + 3z - 9) + 5y - 3z = 0 \\ 2y + 3z - 9 + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 9y + 3z = 18 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ 3y + 5(6 - 3y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ -12y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; 1; 3)\}$

b) Par la méthode du pivot de Gauss

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss : $(\Sigma_2) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ 5x + 3y + z = 3 (L_2) \\ 3x + y - 2z = -1 (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ 0 + 28y + 36z = -12 (L'_2) = (L_2) - 5(L_1) \\ 0 + 16y + 19z = -10 (L'_3) = (L_3) - 3(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ 14y + 18z = -6 (L'_2) \\ 16y + 19z = -10 (L'_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ 14y + 18z = -6 (L'_2) \\ 0 - 22z = -44 (L''_3) = 14(L'_3) - 16(L'_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; -3; 2)\}$

C- SITUATION COMPLEXE

On propose un jeu à trois groupes d'élèves d'une classe de première.

A ce jeu, les groupes peuvent solliciter une personne ressource. Le problème posé est le suivant : « un fermier élève des canards, des lapins et des dromadaires. Il compte le nombre de pattes de ses canards, de ses lapins et de bosses de ses dromadaires. Il trouve 130. Il compte le nombre de têtes de ceux-ci, et il trouve 46. Il compte ensuite le nombre d'oreilles des lapins et des dromadaires et trouve 38. Enfin, le fermier affirme avoir dénombré au moins 16 lapins et souhaite déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce. »

Tu es la personne ressource sollicitée, A L'aide de tes connaissances mathématiques aide ce fermier.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon : systèmes d'équations linéaires dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 pour cela nous allons :

- Traduire le problème en un système de 3 équations
- résoudre ce système et
- déterminer le nombre de canards de lapins et de dromadaire

Mise en équation : soit x le nombre de canards, y celui des lapins et z le nombre de lapins.

On a : $2x + 4y + z = 130$, $x + y + z = 46$, $2y + 2z = 38$ et $y \geq 16$

Ce qui nous conduit au système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 130 \\ x + y + z = 46 \\ y + z = 19 \\ y \geq 16 \end{cases}$$

On trouve $x = 27$, $y = 19$, $z = 0$

Donc ce fermier a 27 canards, 19 lapins et 0 dromadaire.

D- EXERCICES

Exercice 1

Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants, puis indique le nombre de solutions du système.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases} ; (S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases} ; (S_3) \begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = \sqrt{2} \\ 2x - 2\sqrt{2}y = -2 \end{cases}$$

Corrigé

- $\det(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1$ (S_1) a une solution unique.
- $\det(S_2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - 6 \times (-1) = -6 + 6 = 0$ (S_2) n'a pas de solution car $(1 ; -2)$ est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation.

- $\det(S_3) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ (S_3) n'a pas de solution car $(1; 0)$ est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation

Exercice 2

Résous dans \mathbb{R}^2 les systèmes ci-dessous en utilisant :

- 1) La méthode de substitution ;
- 2) La méthode de combinaison.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}; (S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}; (S_3) \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = \sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{2}y = -\sqrt{6} \end{cases};$$

Corrigé

$$1) (S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 & (L_1) \\ x + 2y = -3 & (L_2) \end{cases}$$

Résolution par substitution :

De (L_2) on a $x = -3 - 2y$ (L'_2). On remplace x par $-3 - 2y$ dans (L_1) on obtient

$$2(-3 - 2y) + 3y = 2 \text{ soit } y = -8 \text{ on calcule } x \text{ en remplaçant } y \text{ par } -8 \text{ dans } (L'_2) \text{ on trouve } x = 13.$$

La solution du système est le couple : $(13; -8)$

Résolution par combinaison :

$$(L'_2) = (L_1) - 2(L_2) : 3y - 4y = 2 + 6 \\ y = -8$$

On remplace y par -8 dans (L_1) ; on trouve $x = 13$.

La solution du système est le couple : $(13; -8)$

$$(S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 & (L_1) \\ 5x - 2y = -1 & (L_2) \end{cases}$$

Résolution par substitution

$$(S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x - 2(3x - 1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x - 2(3x - 1) = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

La solution du système est le couple : $(3, 8)$

Résolution par combinaison :

$$(L_3) = -2L_1 + L_2 \Leftrightarrow x = 3$$

On remplace x par 3 dans (L_1) ; on trouve $y = 8$.

La solution du système est le couple $(3, 8)$

$$(S_3) \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = \sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{2}y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$\det(S_3) = 0$ et le couple $(0, \sqrt{3})$ est solution de des deux équations donc (S_3) a une infinité de solution

Exercice 3

3) Résous dans \mathbb{R}^3 les systèmes a) b) c) ci-dessous en utilisant La méthode de substitution et d) e) et f) par la méthode du Pivot de Gauss ;

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y - 2z = -12 \\ -22z = -66 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} 2x + y - 4z = 4 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases} ; \quad e) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases} ; \quad f) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 7z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Corrigé

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y - 2z = -12 \\ -22z = -66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - z + 8 \\ -3y = 2z - 12 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 5 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \text{ Donc :} \\ S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(1; 2; 3)\}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y - 4z = 4 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4}(2x + y - 4) \\ y = \frac{1}{2}(-3x - 5) \\ 5x + 4(-3x - 5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4}(2x + y - 4) \\ y = -7 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-11}{4} \\ y = -1 \\ x = -3 \end{cases} \\ S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(-3; -1; -\frac{11}{4} \right) \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ z = 1 - y \\ 5 - y + 1 - y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ z = 1 - y \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -6 \\ y = 7 \\ x = -2 \end{cases} \\ S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-2; 7; -6)\}$$

$$d) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ 5x + 3y + z = 3 (L_2) \\ 3x + y - 2z = -1 (L_3) \end{cases}$$

$$\text{On élimine } x \text{ dans } (L_2) \text{ et } (L_3) \text{ on obtient } \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ -28y - 36z = 12 (5L_1 - L_2) (L_3) \\ -16y - 19z = 10 (3L_1 - L_3) (L_4) \end{cases}$$

On élimine y dans (L_3) et (L_4) on obtient

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 (L_1) \\ -7y - 9z = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases} \\ S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; -3; 2)\}$$

$$e) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = -1 (L_1) \\ 2x + 3y - z = 6 (L_2) \\ 2x + y + z = 1 (L_3) \end{cases}$$

On élimine x dans (L_2) et (L_3) on obtient $\begin{cases} -x + 2y + 2z = -1 (L_1) \\ 7y + 3z = 4 (2L_1 + L_2) (L_4) \\ 5y + 5z = -1 (2L_1 + L_3) (L_5) \end{cases}$

On élimine y dans (L_3) et (L_4) on obtient $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 1 (L_1) \\ 7y + 3z = 4 (L_4) \\ -20z = 27 (7L_5) - 5(L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{23}{20} \\ z = \frac{-27}{20} \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{3}{5}; \frac{23}{20}; -\frac{27}{20} \right) \right\}$$

$$f) \begin{cases} x + y - 2z = 1(L_1) \\ x - 2y + 7z = 1(L_2) \\ -2x + y + z = 1(L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1(L_1) \\ 3y - 3z = 0(L_1 - L_2) \\ 3y - 3z = 3(2L_1 - L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \text{ n'a pas de solution donc}$$

le système n'a pas de solution

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Détermine une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

L'équation de la parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + C$ et passe par les

points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ donc on a le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -5 \\ 9a + 3b + c = -12 \end{cases}$$

La résolution de ce système par substitution ou par pivot de Gauss nous donne $a = -1$. $b = -2$ et $c = 3$

Exercice 5

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On donne les points :

$$A(2; 6), B(-3; 1), C(7; -2); D(4; 0), E(-4; 4) \text{ et } F(11; -1).$$

Les droites (AB) , (CD) et (EF) sont-elles concourantes ? Justifie ta réponse.

Corrigé

$$(AB): x - y = -4; (CD): 2x + 3y = 8; (EF): x + 3y = 8$$

$$\left(-\frac{4}{5}; \frac{16}{5} \right) \text{ est solution de } (s_1) \begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}, \text{ mais pas solution de } (s_2): \begin{cases} x - y = -4 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \text{ par conséquent, les}$$

droites (AB) , (CD) et (EF) ne sont pas concourantes.

Exercice 6

Détermine un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme des chiffres est égale à 14 ;
- Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 180 ;
- Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 297.

Corrigé

Mise en équation : soit x le chiffre des unités, y celui des dizaines et z le chiffre des centaines.

- $x + y + z = 14$
- $y - z = 2$
- $-x + z = 3$

Les chiffres de ce nombre sont solution du système suivant : $(s) : \begin{cases} x + y + z = 14(L_1) \\ y - z = 2(L_2) \\ -x + z = 3(L_3) \end{cases}$

Résolution du système :

De (L_3) on a : $z = x + 3$ on remplace z par $x + 3$ dans (L_1) et (L_2) . On obtient le système suivant :

$(s_2) : \begin{cases} x - y = -5(L'_1) \\ 2x + y = 11(L'_2) \end{cases}$ on trouve : $x = 2$, $y = 7$, $z = 5$. Le nombre cherché est 572.



Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

**1^{ère}C
MATHÉMATIQUES**

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 9 heures

Code :

Compétence 1

**Traiter des situations relatives aux calculs
algébriques et aux fonctions**

Thème 2

Fonctions

LEÇON 15 : SUITES NUMÉRIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire veut monter un projet de construction de ferme. Pour ce fait le président encourage ses 45 membres à cotiser une somme de 1000 F par mois pendant 9 mois. Au bout de la première année, il compte ouvrir un compte et déposer cet argent dans une banque qui accorde un intérêt de 5% chaque année, sur tout montant resté immobilisé sur ce compte. Le budget primitif du projet s'élève à 623 000F.

Le président de la coopérative, en classe de première est curieux de savoir si pendant 4 années la coopérative pourra réunir ce montant grâce à la banque. Il recherche un procédé efficace pour effectuer les calculs nécessaires.

B-CONTENU DU COURS

I- GENERALITES

1- Définition

On appelle suite numérique toute fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{R} .

$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto U(n)$. L'image $U(n)$ de n est généralement notée U_n .

La suite numérique ainsi définie est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (U_n) .

U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite (U_n) .

Exemple

Parmi les fonctions suivantes, seule la fonction de la colonne C est une suite numérique

A	B	C
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto 2n - 1$	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n+3}$	$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n}$

2- Différentes présentations d'une suite

Une suite peut être définie par une formule explicite ou par une formule de récurrence.

a- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie dans \mathbb{R}^+ , pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) de terme général $U_n = f(n)$ est dite définie par une formule explicite.

Exemples :

- $U_n = 3n + 5$ et $V_n = \frac{2n^2+1}{n}$ sont des suites définies par des formules explicites.
- Soit la suite suivante : $W_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$. On a :

$$W_0 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 10 = 4 ; W_5 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 = \frac{157}{12} ; W_{10} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 = \frac{5117}{512}$$

b- Suite définie par une formule de récurrence

La suite (U_n) définie par la donnée :

- d'un terme (en général le 1^{er} terme)
- et d'une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

est dite suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 1 : $\begin{cases} P_1 = 3500 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n + 25 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence.

Soit la suite (V_n) définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 5 \end{cases}$$

On a :

$$V_1 = 2V_0 - 5 = 9;$$

$V_4 = 2V_3 - 5$. Il nous faut calculer V_3 .

$V_3 = 2V_2 - 5$; il nous faut calculer V_2 .

$$V_2 = 2V_1 - 5. \text{ On a donc } V_2 = 14; V_3 = 23 \text{ et enfin } V_4 = 41.$$

3- Représentation graphique d'une suite

a- Suite définie par une formule explicite

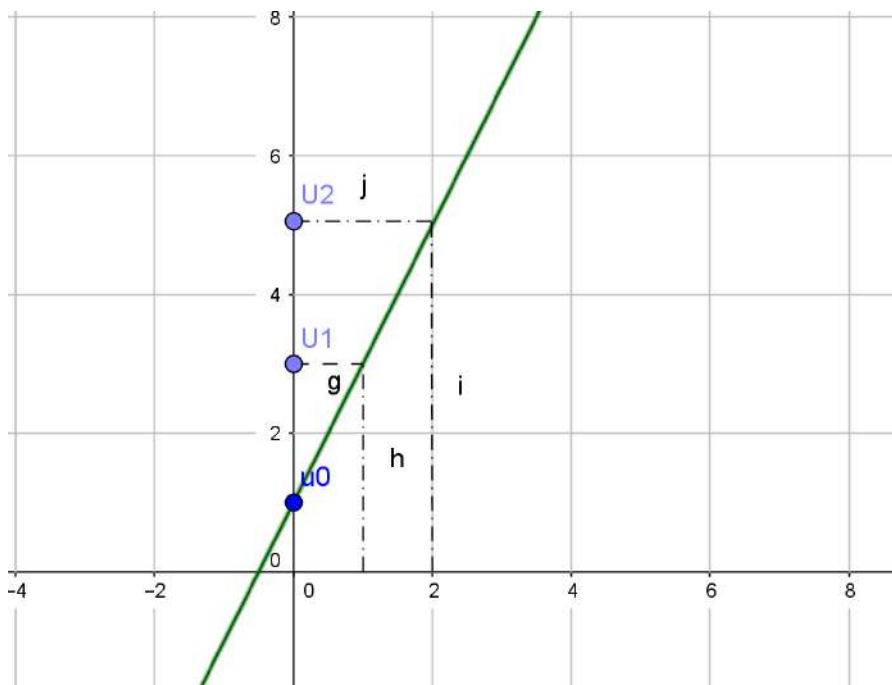
$$U_n = f(n).$$

Méthode :

- On représente (Cf) , la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n) .
- On détermine graphiquement $U_0=f(0)$; $U_1 = f(1)$; $U_2 = f(2)$; $U_3=f(3)$ etc.

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par : $U_n = 2n+1$.



b- Suite définie par une formule de récurrence : $U_{n+1}=f(U_n)$

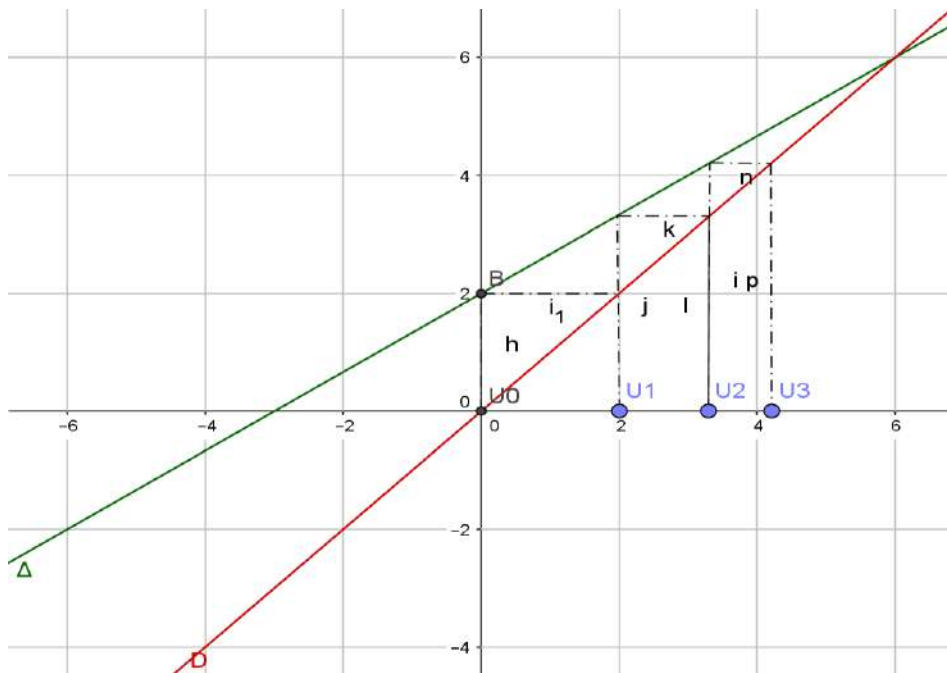
Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On trace la droite (Δ) d'équation : y = x (la première bissectrice)
- On marque U₀ sur l'axe des abscisses (OI).
- On Projette le point obtenu verticalement sur (Cf), on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI), on obtient U₁.
- Refaire ce même processus avec U₁ pour obtenir U₂.
- Et ainsi de suite...

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \end{cases}$$



II- SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

1- Suites arithmétiques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r.$$

* r est appelé la **raison** de la suite (U_n)

Exemples :

- Voici des exemples de suite arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 3 ; 3 \text{ est la raison et } U_0 \text{ le premier terme.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$ est la raison et V_1 le premier terme.

- On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2}n - 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) - 3 = \frac{1}{2}n - 3 + \frac{1}{2}$. Donc $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (U_n) est arithmétique. Sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme est : $U_0 = -3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit n et k des entiers naturels ; (U_n) une suite arithmétique de raison r , on a :

$$U_n = U_k + (n-k)r$$

Cette forme est appelée terme général de (U_n)

Cas particuliers:

$$U_n = U_0 + n r$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Exercice de fixation

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $U_0 = 5$.

Exprime U_n en fonction de n .

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + (-4)n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 5 - 4n$.

c- Somme des termes consécutifs

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes

Conséquences :

- Si $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) alors $S = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$
- Si $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_j$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) , alors $S = (j - k + 1) \times \frac{(U_k + U_j)}{2}$

Exemples

- $S = 1+2+3+\dots+2020 = 2020 \times \frac{(1+2020)}{2} = 2\,041\,210$

- $S = 2+4+6+\dots+2n = n \times \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$
- $S = 1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$

- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 9 et de premier terme $U_0 = -2$.

Alors : Si on pose

1) $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. De 0 à $n-1$, on additionne n termes.

Donc $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. Soit donc $S = \frac{n(9n-13)}{2}$

2) $T = U_3 + U_4 + \dots + U_{77}$; de 3 à 77, on additionne $77 - 3 + 1 = 75$ termes.

Donc $T = \frac{75}{2}(U_3 + U_{77})$ soit $T = 26\,850$.

2- Suites géométriques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q U_n$

* q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple :

- Soit la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{array} \right. \text{ est une suite géométrique.}$$

- On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$.

Donc la suite (V_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et k un entier naturel inférieur à n .

On a : $U_n = q^{(n-k)} U_k$

Cas particuliers :

- $U_n = q^n U_0$
- $U_n = q^{n-1} U_1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_1 = 3$.

Exprime V_n en fonction de n .

Solution

$\forall n \geq 1, V_n = V_1 3^{n-1}$. Donc $\forall n \geq 1, V_n = 3^n$

c-Somme de termes consécutifs

Propriété

La somme S des n termes consécutifs d'une suite géométrique de 1^{er} terme a et de raison q est :

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

- Si $q = 1$ alors $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = (\text{nombre de termes}) \times (1^{\text{er}} \text{ terme})$;
 $S = n \times U_1$

- De façon générale : $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$$U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times (p+1) \quad \text{si } q = 1$$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Calcule la somme T suivante: $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$.

Solution

$T = V_1 + V_2 + \dots + V_7$; d'après une formule du cours, $T = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} \right)$; soit $T = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \right)$

$$T = \frac{1093}{2187}$$

C-SITUATION COMPLEXE

Chaque année, depuis 2010 la production d'un article de l'usine citoyenne O.B.V en Côte d'Ivoire subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.

Une étude de marché a montré que la production de cet article n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 56 000 articles

Les premiers responsables de cette usine désirent savoir à partir de quelle année la production de cet article ne sera plus rentable.

Elève en classe de 1C, Ton professeur de mathématiques a son épouse qui travaille dans cette usine. Il présente la situation à la classe puis accorde un bonus de deux à chacun des trois premiers élèves qui trouveront la solution. Tu désires obtenir ce bonus.

Propose une solution argumentée à ce problème.

Proposition de solution

Pour aider à résoudre ce problème, je vais utiliser les suites numériques.

Je vais schématiser ce problème sous la forme d'une suite géométrique.

Je vais au fur et à mesure donner des valeurs à n afin de trouver une valeur inférieure à 56000.

La valeur qui me permettra de trouver une valeur inférieure à 56000 me permettra de trouver l'année et conclure.

Chaque année, la production subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée à ce problème. Alors le terme général de cette suite est :

$$U_{n+1} = U_n - \frac{3}{100}U_n = \frac{97}{100}U_n$$

Alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{97}{100}$ et de premier terme $V_0 = 65000$.

On a alors : $U_n = U_0 \times q^n = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^n$

En 2011, la production sera :

$$U_1 = 65000 \times \frac{97}{100} = 63050$$

En 2012, la production sera :

$$U_2 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^2 = 61158,5 \text{ Soit } 61159$$

En 2013, la production sera :

$$U_3 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^3 = 59323,7 \text{ Soit } 59324$$

En 2014, la production sera :

$$U_4 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^4 = 57544$$

En 2015, la production sera :

$$U_5 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^5 = 55817,7 \text{ Soit } 55818$$

$55818 < 56000$ Alors la production ne sera plus rentable à partir de 2015.

D- EXERCICES

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

- 1- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = -2n + 7$ est une suite arithmétique.
- 2- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{2}{n} + 1$ est une suite arithmétique.
- 3- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3(2^n) - 1$ est une suite géométrique.
- 4- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n$ est une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1

- 1- Vrai
- 2- Faux
- 3- Faux
- 4- Vrai

Exercice 2

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* V_{n+1} = -5V_n \end{cases}$

Exprime V_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 2

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = -2 \times (-5)^{n-1}$$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = -5n + n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

Calcule les 5 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 3

$$U_0 = -5 \times 0 + 0^2 = 0 ; U_1 = -5 \times 1 + 1^2 = -4 ; U_2 = -5 \times 2 + 2^2 = -6 ; \\ U_3 = -5 \times 3 + 3^2 = -6 ; U_4 = -5 \times 4 + 4^2 = -4$$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} U_2 = 5 \\ \forall n \geq 2, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

Exprime U_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 4

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_2 = 5$ et de raison $r = -3$, alors :

$$U_n = U_2 + (n - 2) \times (-3) = 5 + (n - 2) \times (-3) = -3n + 11$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que : $U_6 = -3$ et $U_9 = -6$.

Détermine la valeur de r .

Correction de l'exercice 5

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite arithmétique, on a : $U_{n+1} = U_n + r$.

Par conséquent : $U_7 = U_6 + r$; $U_8 = U_7 + r$, en remplaçant U_7 par sa valeur, on obtient ;

$U_8 = U_6 + 2r$ et donc ; $U_9 = U_6 + 3r = -3 + 3r = -6$ d'où $r = -1$.

Exercice 6

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que : $V_1 = -\frac{3}{2}$ et $V_3 = -\frac{27}{2}$.

Détermine les valeurs possibles de q .

Correction de l'exercice 6

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors $V_{n+1} = q \times V_n$ d'où $V_2 = q \times V_1$,

$V_3 = q \times V_2 = q^2 \times V_1$ par conséquent, on a $-\frac{27}{2} = q^2 \times (-\frac{3}{2})$; $q^2 = 9$. Conclusion $q = 3$ ou $q = -3$.

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 1$

- 1) Calcule les quatre premiers termes de cette suite.
- 2) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique.
- 3) Déduis-en le calcul de la somme des cents premiers nombres impaires.

Correction de l'exercice 7

- 1) $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$; $U_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$; $U_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$; $U_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
- 2) $U_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 1 + 2 = U_n + 2$ alors (U_n) est une suite arithmétique.
- 3) $S = \frac{(U_0 + U_{99})}{2} \times 100$. $U_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$; alors $S = 10000$.

Exercice 8

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* V_{n+1} = \frac{V_n}{1-V_n} \end{cases}$

Calcule les 3 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 8

$$V_1 = -2 ; V_2 = \frac{V_1}{1-V_1} = -\frac{2}{3} ; V_3 = -\frac{2}{5}$$

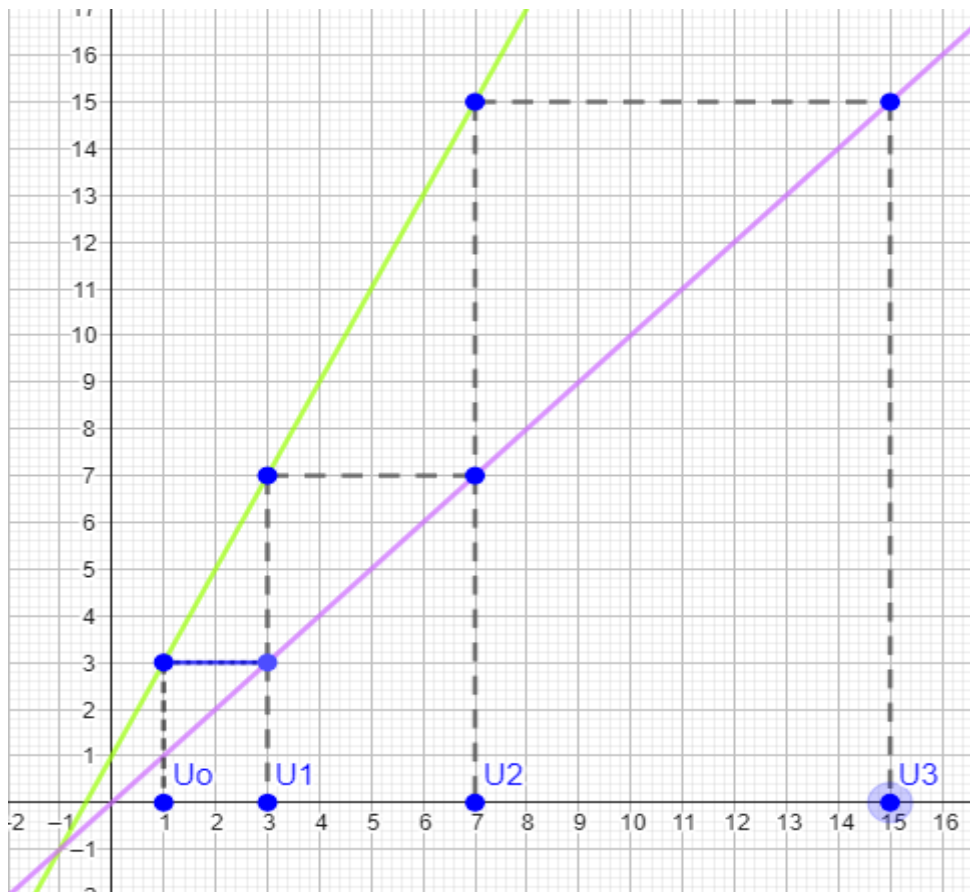
Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I, J)$.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Représente sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite

Correction de l'exercice 9



Exercice 10

Soit (t_n) la suite de terme général $t_n = -6n + 3$

Démontrez que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 10

$t_{n+1} = -6(n+1) + 3 = -6n - 6 + 3 = -6n + 3 - 6 = t_n - 6$, alors $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $t_1 = -6 \times 1 + 3 = -3$.

Exercice 11

Soit (P_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} P_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2P_{n+1} = 2P_n - 5 \end{cases}$

Démontrez que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 11

$2P_{n+1} = 2P_n - 5$ alors $P_{n+1} = P_n - \frac{5}{2}$; par conséquent $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $P_1 = P_0 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_n = 7 \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démontre que : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis précise le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 12

$U_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times 2 = 2U_n$; alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 7$.

Exercice 13

Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2V_{n+1} + 5V_n = 0 \end{cases}$

Démontre que : $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et précise le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 14

$2V_{n+1} + 5V_n = 0$ alors $2V_{n+1} = -5V_n$ d'où $V_{n+1} = -\frac{5}{2}V_n$ par conséquent $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $V_1 = -\frac{5}{2}V_0 = -5$.

Exercice 14

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 4$ et $U_{20} = 28$

- 1- Détermine la raison de cette suite
- 2- Calcule U_{18} puis en déduis U_{19}

Correction de l'exercice 14

- 1- (U_n) est une suite arithmétique, en utilisant la formule : $U_n = U_p + (n - p)r$ on a :
 $U_{20} = U_8 + (20 - 8)r$; $r = \frac{U_{20} - U_8}{(20 - 8)} = 2$
- 2- $U_{18} = U_{20} + (18 - 20)2 = 24$. En utilisant la formule $U_{n+1} = U_n + r$ on en déduit que : $U_{19} = U_{18} + 2 = 24 + 2 = 26$

Exercice 15

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

- 1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2
- 2- a) Démontre que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$
b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n
- 3- On pose $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
Exprime T_n en fonction de n

Correction de l'exercice 15

1- $U_1 = \frac{4U_0 - 9}{U_0 - 2} = \frac{4 \times 4 - 9}{4 - 2} = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{4U_1 - 9}{U_1 - 2} = \frac{10}{3}$; $V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = 1$; $V_1 = \frac{1}{U_1 - 3} = 2$;

$$V_2 = \frac{1}{U_2 - 3} = 3$$

$$2- a) V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{4U_n-9}{U_n-2}-3} = \frac{U_n-2}{U_n-3} = \frac{U_n-3+1}{U_n-3} = 1 + \frac{1}{U_n-3} = 1 + V_n ; \text{ alors } (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$.

$$b) V_n = V_0 + nr = 1 + n ; V_n = \frac{1}{U_n-3} \text{ alors } U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = \frac{1}{1+n} + 3 = \frac{4+3n}{1+n}$$

$$3- (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique alors : } T_n = \frac{(V_1+V_n) \times n}{2} = \frac{(2+1+n) \times n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$$

Exercice 16

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Exprime T_n puis S_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 16

$$1- U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = 5 ; U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{11}{3} ; V_0 = U_0 - 3 = 6 ; V_1 = U_1 - 3 = 2 ;$$

$$V_2 = U_2 - 3 = \frac{2}{3}$$

$$2- a) V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$$

Alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$.

b) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$, alors

$$V_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$V_n = U_n - 3 \text{ alors } U_n = V_n + 3 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$3- T_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times V_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \times 6 = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \text{ on a } V_n = U_n - 3 \text{ alors } U_n = V_n + 3$$

$$S_n = T_n + 3n = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n$$



MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 12 heures

Code :

Compétence 3

Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 2

Géométrie de l'espace

Leçon 16 : VECTEURS DE L'ESPACE

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un professeur des arts plastiques demande à ses élèves de faire le dessin d'un bâtiment qui les a le plus marqués.

Un de ces élèves va voir son frère en classe de première C pour lui demander de l'aider à reproduire la pyramide du plateau dont la photo est ci-contre.

Désireux d'avoir le plus beau dessin, les deux élèves décident d'utiliser des vecteurs de l'espace pour mieux reproduire cette image.



la « pyramide » d'Abidjan-Plateau.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I- VECTEURS, DROITES ET PLANS

L'ensemble des vecteurs du plan P est noté V . L'ensemble des vecteurs de l'espace ξ sera noté \mathcal{W}^o .

1- Vecteurs colinéaires

Propriété 1

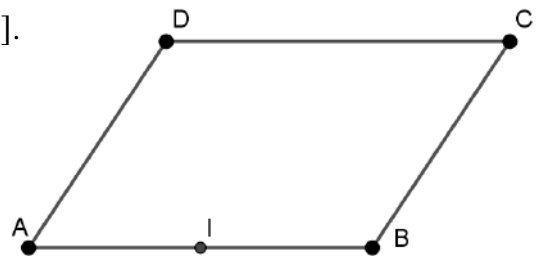
- Deux vecteurs sont colinéaires si l'un des deux est nul ou s'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \vec{u}$.

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$.

1) Justifie que \vec{AI} et \vec{DC} sont colinéaires.

2) Exprime \vec{AI} en fonction de \vec{DC}



Solution

1) ABCD est un parallélogramme donc $(AB) \parallel (DC)$. On a $I \in (AB)$. D'où $(AI) \parallel (DC)$. Alors \vec{AI} et \vec{DC} sont colinéaires.

2) I est le milieu de $[AB]$ alors $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ or $\vec{AB} = \vec{DC}$ par conséquent $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{DC}$

Propriété 2

Soit A un point de ξ et \vec{u} un vecteur non nul de \mathcal{W}^o .

L'ensemble des points M de ξ tels que $\vec{AM} = k\vec{u}$, ($k \in \mathbb{R}$) est la droite (D) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} (ou droite de repère (A, \vec{u})).

On la note : $D(A, \vec{u})$.

Exercice de fixation

Soit B un point de ξ et \vec{v} un vecteur non nul de \mathcal{W}^o .

Détermine l'ensemble des points M de ξ tels que $\vec{BM} = k\vec{v}$ avec k un réel.

Solution

\vec{v} est un vecteur non nul et B est un point de ξ . L'ensemble des points M tels que $\vec{BM} = k\vec{v}$ avec k un réel est donc la droite $D(B, \vec{v})$.

Remarques

Soit A et B deux points distincts de ξ .

- L'ensemble des points M de ξ tels que $\vec{AM} = k\vec{AB}$, ($k \in \mathbb{R}$) est la droite (AB).

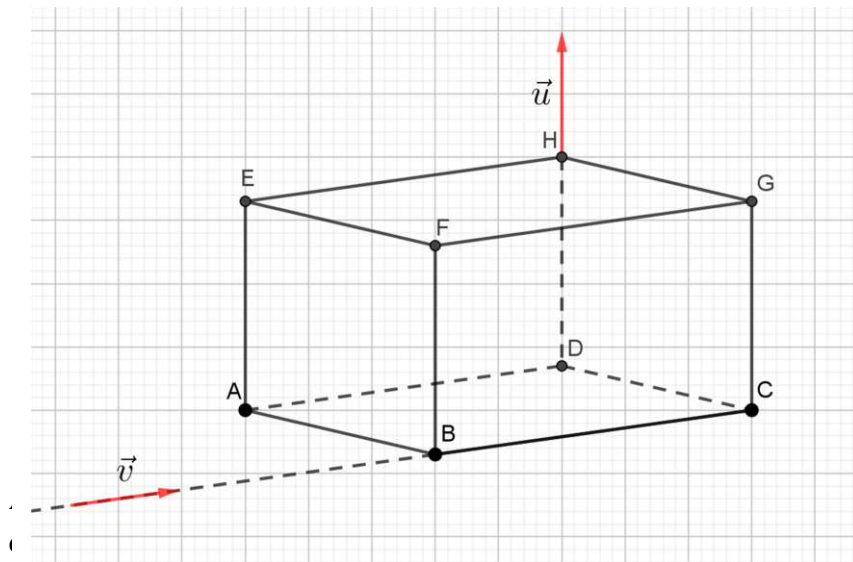
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, ($k \in [0; +\infty[$) est la demi-droite $[AB)$.
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, ($k \in [0; 1]$) est le segment $[AB]$.

2- Vecteurs orthogonaux

Définition et propriété

- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales. On écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux lorsqu'ils sont vecteurs directeurs respectifs de deux droites orthogonales.

Exercice de fixation



\vec{u} est un vecteur

Justifie que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Solution

ABCDEFGH est un pavé droit, donc (HD) est orthogonale à (ABC) .

Alors (HD) est orthogonale à (BC) . Or \vec{u} et \vec{v} sont vecteurs directeurs respectifs de (HD) et (BC) . Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3- Vecteurs coplanaires

Définition 1

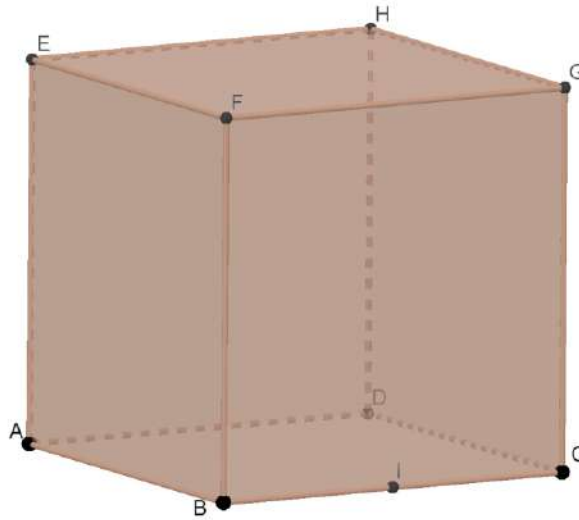
Soit A un point de ξ , \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{W}^2 .

L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$, est un plan de l'espace appelé plan de repère (A, \vec{u}, \vec{v}) .

C'est le plan passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

On le note : $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Exemple



ABCDEFGH est un cube et I est le milieu de $[BC]$.

On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$

Alors $I \in P(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{EF})$.

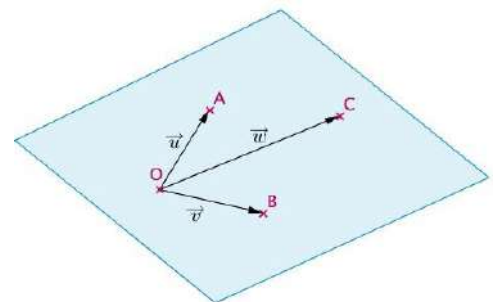
Remarque

$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que le vecteur \overrightarrow{AM} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Définition 2

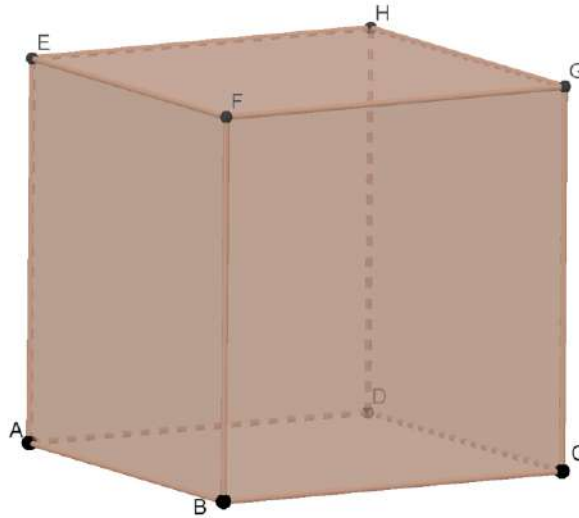
Les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont dits coplanaires si, étant donné un point O de l'espace et les points A, B et C définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, les points O, A, B et C sont coplanaires (ou appartiennent à un même plan).



Autrement dit :

Des vecteurs (au moins au nombre de trois) sont dits coplanaires s'il est possible de construire un représentant de chacun d'eux dans un même plan.

Exemple :



ABCDEFGH est un cube.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AF} sont coplanaires car ils sont situés dans le même plan (ABF).

Remarques

- Cette définition est indépendante du choix du point O.
- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont toujours coplanaires.
- Si deux des trois vecteurs de l'espace sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.
- Les vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} sont non coplanaires si et seulement si les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

Propriétés

- Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de \mathcal{W}^o tels que \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires.

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si \vec{w} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} (il existe des réels λ et μ tels que : $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$).

- Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs de \mathcal{W}^o .

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que ses coefficients soient tous nuls.

Ou

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, (\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$ et $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$.

- Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs de \mathcal{W}^o .

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (λ, μ, ν) de nombres réels tels que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Ou

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires $\Leftrightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube ; on pose :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} ; \overrightarrow{AD} = \vec{j} ; \overrightarrow{AE} = \vec{k}$$

Montre que les vecteurs \vec{i} ; $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

Solution

Soit 3 nombres réels α , β et γ tels que $\alpha\vec{i} + \beta(\vec{i} + \vec{j}) + \gamma(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$.

On obtient $(\alpha + \beta + \gamma)\vec{i} + (\beta + \gamma)\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$.

Or \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires par conséquent

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Par suite les vecteurs \vec{i} ; $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

II- BASES ET REPÈRES

1- Bases de \mathcal{W}^o

a) Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur \vec{u} de \mathcal{W}^o , il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Exercice de fixation :

ABCDEFGH est un cube.

Justifie que pour tout vecteur \vec{v} de \mathcal{W}^o ; il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$.

Solution

\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE} sont non coplanaires car les points A, B, D et E sont non coplanaires.

Donc il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que pour tout vecteur \vec{v} de \mathcal{W}^o ; $\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$.

Définitions

- Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires est appelé base de \mathcal{W}^o .
- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W}^o et \vec{u} un vecteur.

L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DH})$ est une base de \mathcal{W}^o .

Soit le vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{DH}$.

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DH})$

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W}^o , λ un nombre réel, \vec{u} et \vec{u}' deux vecteurs.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors : $(\vec{u} + \vec{u}') \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $(\lambda\vec{u}) \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W}^o . On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour chaque affirmation dans le tableau, une seule réponse est juste. Écris le numéro de l'affirmation et associe la lettre correspondant à la réponse juste.

Vecteur		Coordonnées		
		a	b	c
1	$\vec{u} + \vec{v}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2	$\vec{u} - 2\vec{v}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
3	$\vec{v} + 3\vec{u}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution

1-b 2-c 3-a

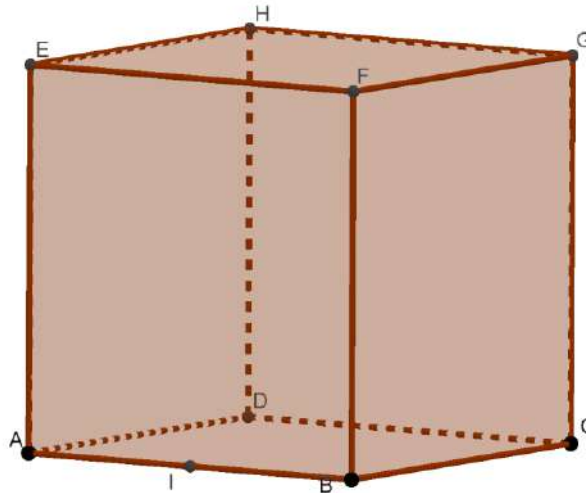
b) Base orthogonale, base orthonormée

Définitions

- Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.
 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale si et seulement si $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.
- Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.
 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube de coté 1 et I est le milieu de $[AB]$



- $(\vec{AI}, \vec{AE}, \vec{AD})$ est une base orthogonale car $\vec{AI} \perp \vec{AE}$; $\vec{AI} \perp \vec{AD}$ et $\vec{AE} \perp \vec{AD}$.
- $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base orthonormée car $\vec{AB} \perp \vec{AD}$; $\vec{AB} \perp \vec{AE}$ et $\vec{AD} \perp \vec{AE}$ et $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = \|\vec{AE}\| = 1$

2- Repères de ξ

a) Définitions et vocabulaire

- On appelle repère de l'espace ξ , un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires ou bien un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W}^3 .

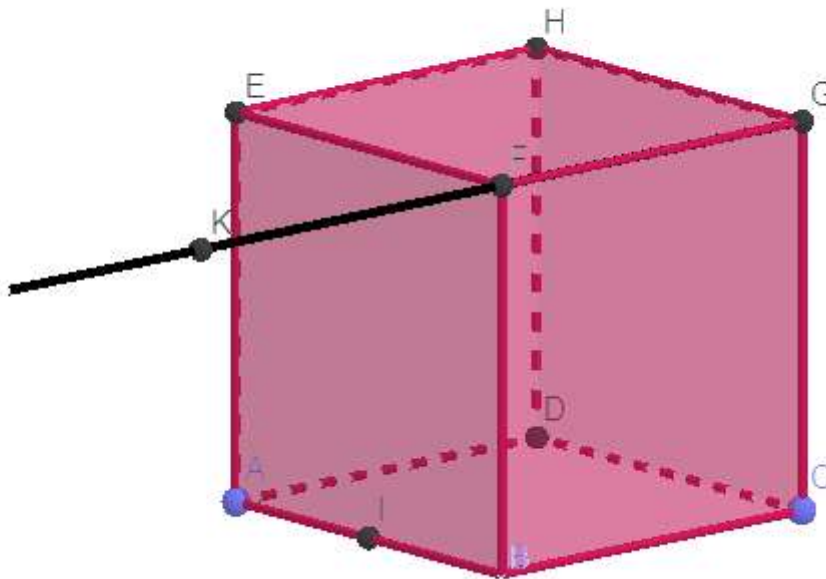
- Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère et M un point de l'espace ξ .
L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le point O est appelé origine du repère. Les nombres x, y et z sont appelés respectivement abscisse, ordonnée et cote du point M.
- Les droites de repère (O, \vec{i}) , (O, \vec{j}) et (O, \vec{k}) sont appelées les axes de coordonnées du repère.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthogonal lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Exemple

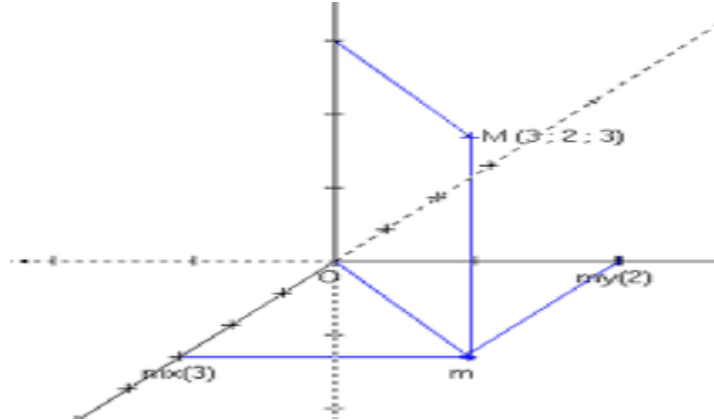
ABCDEFGH est un cube de coté 1 , I est le milieu de $[AB]$ et K est le symétrique de G par rapport F



- $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est un repère car A est un point et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de \mathcal{W}^3 .
- $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthogonal car A est un point et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthogonale de \mathcal{W}^3 .
- $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé car A est un point et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthonormée de \mathcal{W}^3 .

- On a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ alors $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

b) Représentation d'un point dans un repère



Sur la figure, le point $M \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Calculs dans un repère

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues à celles établies dans le plan.

Exemple

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

III- PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1-Définition et propriété

Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs et A, B, C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs \vec{u} ou \vec{v} est nul ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$ si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont non nuls.

$\color{red}{\oplus}$ On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Exercice de fixation

ABCD est un tétraèdre régulier de coté a.

Calcule les produits scalaires suivants en fonction de a

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

Solution

Les quatre faces du tétraèdre ABCD sont des triangles équilatéraux de coté a :

On a :

$$1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

$$2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

$$3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$$

$$4) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

2- Propriétés

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exercice de fixation

Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\|\vec{v}\|$

Solution

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(2) + 2(-1) - 3(2) = 2 - 2 - 6 = -6$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

Conséquence

Soit A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exercice de fixation

On donne A $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Solution

$$AB = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

C- SITUATION COMPLEXE

Lors d'une séance de travaux dirigés sur les vecteurs de l'espace, un professeur de mathématiques d'une classe de première C dessine

le cube ABCDEFGH ci-contre au tableau.

Il demande à ses élèves de déterminer les coordonnées

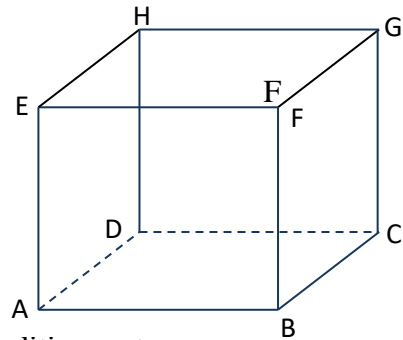
d'un vecteur \vec{t} orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{EG} .

Après un temps de recherches de 10 minutes, un

élève de la classe affirme que tout vecteur qui vérifie ces conditions est

de la forme $\vec{t} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) dans la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Son voisin de classe ne partage pas cet avis. Le professeur te sollicite pour les départager.

Dis, en argumentant, lequel des deux élèves a raison.



Solution

Pour départager les deux élèves je vais utiliser la leçon sur les vecteurs de l'espace.

Notamment :

- la détermination des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux.

ABCDEFGH est un carré donc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée de W .

Soit $\vec{t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a :

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ soit } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}).$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ soit } \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}).$$

De plus :

$$\vec{t} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow -x + y + z = 0$$

$$\vec{t} \perp \overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Alors pour $x = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$ on a $y = -\alpha$ et $z = x - y = 2\alpha$.

Donc $\vec{t} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors c'est le premier élève qui a raison.

D-EXERCICES PROPOSES

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un pavé. Précise dans chaque cas ci-dessous si les vecteurs sont coplanaires ou non.

$$1) \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG} \text{ et } \overrightarrow{AB} \quad 2) \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG} \quad 3) \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{HE} \text{ et } \overrightarrow{AC}$$

Solution

- 1) Les vecteurs sont coplanaires.
- 2) Les vecteurs sont coplanaires.
- 3) Les vecteurs sont non coplanaires.

Exercice 2

Soit \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires.

Justifie que les vecteurs ci-dessous sont non coplanaires.

$$1) \vec{j} + \vec{k}, \vec{k} + \vec{i} \text{ et } \vec{j} + \vec{i} \quad 2) 2\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{k} - \vec{i} \text{ et } 2\vec{i} - \vec{j}$$

Solution

1) Soit α, β, γ trois nombres réels tels que : $\alpha(\vec{j} + \vec{k}) + \beta(\vec{k} + \vec{i}) + \gamma(\vec{j} + \vec{i}) = \vec{0}$. On a :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \text{ donc } \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ ; par conséquent, les vecteurs sont non coplanaires.}$$

2) Soit α, β, γ trois nombres réels tels que : $\alpha(2\vec{j} - \vec{k}) + \beta(2\vec{k} - \vec{i}) + \gamma(-\vec{j} + 2\vec{i}) = \vec{0}$.

On a :

$$\begin{cases} 2\alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \text{ donc } \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ ; par conséquent, les vecteurs sont non}$$

coplanaires.

Exercice 3

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace. Soit $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} - 6\vec{k}$.

Démontre que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

Solution

Soit le triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

On a :

$$\alpha(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + \beta(3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) + \gamma(\vec{i} - 6\vec{k}) = \vec{0}.$$

$$\text{Ce qui donne } (2\alpha + 3\beta + \gamma)\vec{i} + (\alpha + 2\beta)\vec{j} + (-\alpha + 4\beta - 6\gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace, on a :

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = -2\beta \end{cases}$$

Par exemple pour $\beta = 1$, on a $\alpha = -2$ et $\gamma = 1$.

Ainsi, il existe une combinaison linéaire nulle de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sans que les coefficients ne soient tous nuls. Par conséquent \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

Exercice 4

Soit EFGD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(E, -1)$, $(F, 2)$, $(C, 1)$ et $(D, 2)$ et par K le milieu du segment $[FD]$.

Justifie que les points E, C, G et K sont coplanaires .

Solution

On a :

$$-\vec{GE} + 2\vec{GF} + \vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0} \text{ et } \vec{KF} + \vec{KD} = \vec{0} .$$

Donc

$$-\vec{GE} + 2(\vec{GK} + \vec{KF}) + \vec{GC} + 2(\vec{GK} + \vec{KD}) = \vec{0}$$

Ce qui donne

$$-\vec{GE} + 4\vec{GK} + \vec{GC} + 2(\vec{KD} + \vec{KD}) = \vec{0}$$

Ou encore

$$-\vec{GE} + 4\vec{GK} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ puisque } \vec{KF} + \vec{KD} = \vec{0} .$$

Donc les vecteurs \vec{GE} , \vec{GK} et \vec{GC} sont coplanaires. Par conséquent les points E, C, G et K sont coplanaires.

Exercice 5

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. On considère $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ et

$$\vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

- 1- Démontre que le triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ainsi défini est une base de \mathcal{E} .
- 2- Détermine les coordonnées de \vec{i}, \vec{j} , et \vec{k} dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solution

1) Soit α, β, γ trois nombres réels tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ soit

$$\alpha(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + \beta(-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) + \gamma(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{0}. \text{ On a : } \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$; par conséquent, les vecteurs sont non coplanaires et dès lors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2) On a : $\vec{i} = \vec{u} - \vec{j} + \vec{k}$ on remplace \vec{i} par son expression dans les deux autres égalités, on obtient : $\vec{v} = -2\vec{u} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{j} + 3\vec{k}$

Ce qui donne $\vec{k} = \vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v} + \frac{3}{5}\vec{w}$, $\vec{j} = 2\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v} + \frac{4}{5}\vec{w}$ et $\vec{i} = -\frac{2}{5}\vec{v} - \frac{1}{5}\vec{w}$.

$$\text{Soit } \vec{i} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}; \vec{j} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}; \vec{k} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Exercice 6

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Soit A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 0 ; 4) et C(-2 ; 1 ; -3) trois points de l'espace.

- 1- Calcule les coordonnées de \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{BC} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- 2- Calcule les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.
- 3- Détermine les coordonnées du point K tel que : $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{BC}$
- 4- Dédus-en que les points A, B, C et K sont coplanaires.

Solution

1-On obtient $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}; \vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

2-On a H $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

3- $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{BC}$ donc $x_K - x_A = \frac{2}{5}(x_C - x_B)$ soit $x_K = \frac{3}{5}$.

De même on trouve $y_K = \frac{13}{5}$ et $z_K = \frac{1}{5}$.

Donc K $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{13}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

4-On a $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ donc \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires. Alors \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{BC} sont coplanaires. Par conséquent les points A, B, C et K sont coplanaires.

Exercice 7

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace.

On donne les points A(1 ; -2 ; 1), B(-2 ; 0 ; 3) et C(4 ; 1 ; -2).

1- Détermine les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2- Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Solution

1-On obtient $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -26$

Exercice 8

L'espace est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1- Calcule : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils orthogonaux ? Justifie ta réponse.

3- Détermine les coordonnées d'un vecteur \vec{w} non nul, orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .

Solution

1-

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

- De même $\|\vec{v}\| = \sqrt{21}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-1) + 1(2) + 0(4) = 0$.

2- $\vec{u} \perp \vec{v}$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3- Soit $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$. On a donc $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

Ce qui donne $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = -2x \\ -5x + 4z = 0 \end{cases}$

Par exemple pour $x = 1$ on obtient $y = -2$ et $z = \frac{5}{4}$.

Alors $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE



Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE

1^{ère}C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 07 heures

Code :

Compétence 2

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 1

Organisation et traitements de données

Leçon 17 : STATISTIQUES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'équipe de course à pied d'un lycée a un nouvel entraîneur. Celui-ci vient de recevoir le tableau ci-dessous indiquant le temps mis par chacun des membres de l'équipe lors de la dernière épreuve de 10 km.

Nom	Temps (en min)
Agnero	53
Aka	51
Akalé	66
Allou	63
Amani	59
Ballo	61
Camara	48
Dago	41
Ehouman	47
Fallé	46

Nom	Temps (en min)
Goly	51
Gnali	60
Kassi	49
Koffi	46
Kouamé	44
Kouman	43
Lath	52
Lamine	39
Lohess	42
Manouan	53

Nom	Temps (en min)
Pakora	51
Sery	57
Seyo	62
Tiékkoura	50
Traoré	43
Vanié	47
Yao	48
Yéo	56
Zadi	49
Zatto	61

Soucieux d'améliorer les performances de l'équipe, l'entraîneur expose ses décisions suivantes à l'équipe. « Je vais vous partager en cinq équipes de même effectif et de niveau équivalent (selon le temps mis lors de votre dernière épreuve).

Pour exposer les raisons de mon choix, je vais faire un affichage présentant une représentation graphique sous forme d'un histogramme.

Chacun des sportifs sera situé par rapport aux autres avec le classement, ainsi qu'une mise en évidence du premier quart, de la moitié et du troisième quart et des temps correspondants ».

Les élèves des classes de première scientifique faisant partie de l'équipe sont impatients de savoir dans quelles équipes ils seront et quelle est la situation de chacun par rapport aux autres.

Ils se mettent ensemble à organiser les données ci-dessus pour répondre à leurs préoccupations.

B. RESUME DE COURS

I. SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSES

1. Rappel

Lorsqu'il est question d'une série statistique regroupée en classes, on considère le tableau suivant :

Valeurs de X	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$[x_3; x_4[$...	$[x_p; x_{p+1}[$	TOTAL
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p	N
Centre	c_1	c_2	c_3	...	c_p	

- L'amplitude de la classe $[x_i; x_{i+1}[$ est $x_{i+1} - x_i$
- Le centre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Exemple :

On a relevé dans une agence bancaire les montants en milliers de francs des 49 premiers versements effectués au guichet. On a obtenu les résultats suivants :

950	300	100	800	200	30	75
250	600	260	150	45	490	400
200	375	360	620	130	1450	880
1025	560	350	450	400	280	190
1180	220	520	120	900	110	350
600	850	290	1400	125	900	1000
130	1100	430	950	45	310	590

Regroupons ces montants par classes d'amplitude 300, la première étant $[0 ; 300[$ et dressons le tableau des effectifs comportant les centres.

Classes	$[0 ; 300[$	$[300 ; 600[$	$[600 ; 900[$	$[900 ; 1200[$	$[1200 ; 1500[$
Effectifs	19	14	6	8	2
Centres	150	450	750	1050	1350

2. Densité

Définition

On appelle densité d'une classe, le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	25	20	15	17

Déterminons l'amplitude et la densité de chaque classe.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Amplitude	30	15	25	10	20	
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85	

La densité de la classe [0 ;30 [est $\frac{13}{30} = 0,43$

II. Caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes

1. Classe modale

Définition

On appelle classe modale toute classe dont la densité est maximale

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85

La classe modale de cette série statistique est [70 ; 80[

Interprétation : La classe [70 ; 80[comporte la plus grande concentration de coopératives.

Cas particulier :

Si toutes les classes ont la même amplitude, alors une classe modale est une classe dont l'effectif est maximal.

2. Moyenne

La moyenne d'une série statistique, notée : \bar{x} , est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i c_i}{N} = \frac{1}{N} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_p c_p).$$

En utilisant les fréquences, on a :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p f_i c_i = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots + f_p c_p.$$

Exercice de fixation

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17

Calcule la moyenne de la série statistique.

Solution

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Centre	15	37,5	57,5	75	90	
$n_i c_i$	195	750	1437,5	1125	1530	5037,5

$$n_1 c_1 = 13 \times 15 = 195$$

$$\text{La moyenne est : } \bar{x} = \frac{5037,5}{90} = 55,97$$

Interprétation

La production moyenne de l'ensemble des coopératives est 55,97 tonnes.

3. Médiane

Définition :

La médiane d'une série statistique continue est un nombre qui sépare les valeurs ordonnées de la série en deux familles de même effectif.

Autrement dit : c'est un nombre M tel qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Elle se détermine :

- Soit graphiquement : c'est l'abscisse du point de la courbe cumulative des effectifs (resp. fréquences) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5) ;

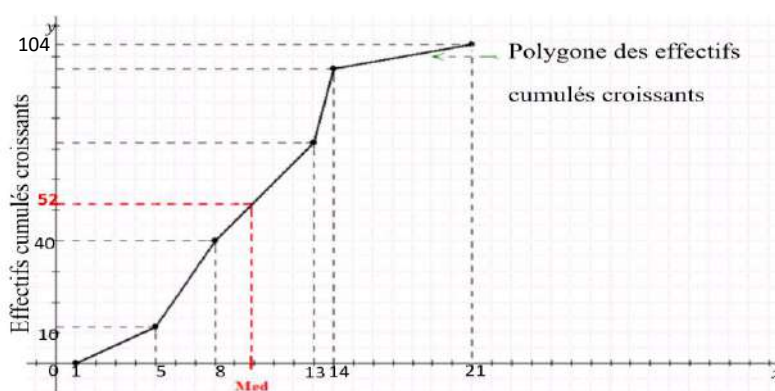
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1^{ère} C d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante :

Classes	[1 ; 5[[5 ; 8[[8 ; 13[[13 ; 14[[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



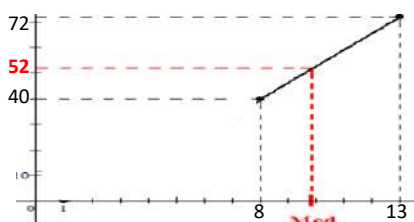
La médiane est environ égale à 9.

- La détermination de la médiane par calcul se fait par interpolation linéaire.

Exemple :

Considérons l'exemple précédent.

On a : $\frac{N}{2} = \frac{104}{2} = 52$; 52 est compris entre le 40^e rang et le 72^e rang. On a $Me \in [8 ; 13[$.



On obtient le tableau suivant :

Modalités (Abscisse)	8	Me	13
Ecc (Ordonnée)	40	52	72

Alors

$$\frac{Me-8}{13-8} = \frac{52-40}{72-40}, \text{ donc } Me = 9,87$$

Interprétation

La moitié des élèves a un nombre d'heures d'absences supérieur ou égal à 9,87.

Remarque : La médiane peut être déterminée graphiquement à l'aide du polygone des effectifs cumulés décroissants.

4. Quartiles

Définition :

Les valeurs de la série étant ordonnées :

- Le premier quartile, noté Q_1 , est la valeur de la variable telle que 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 et 75% lui sont supérieures.
- Le deuxième quartile Q_2 , est la médiane.
- Le troisième quartile, noté Q_3 , est la valeur de la variable telle que 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3 et 25% lui sont supérieures.

➤ Graphiquement,

- Q_1 correspond à 25% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
- Q_3 correspond à 75% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.

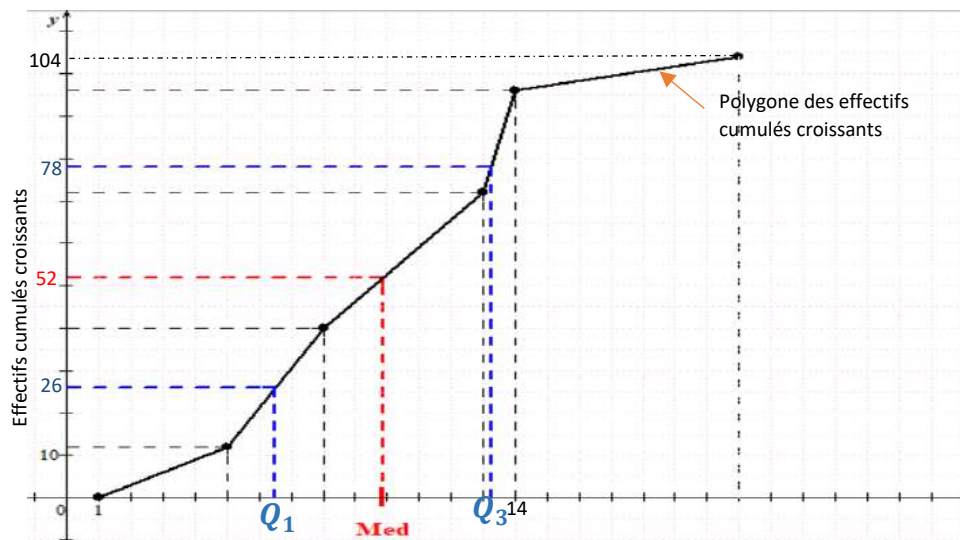
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1^{ere}C d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante .

Classes	[1 ; 5[[5 ; 8[[8 ; 13[[13 ; 14[[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



Le premier quartile est environ égal à 7.

Le troisième quartile est environ égal à 13.

➤ On peut calculer une valeur plus précise de Q_1 et Q_3 par interpolation linéaire.

Calculons le premier quartile

$N \times \frac{25}{100} = 104 \times \frac{25}{100} = 26$; 26 est compris entre le 12^e rang et le 40^e rang. On a $Q_1 \in [5; 8[$

Alors $\frac{Q_1-5}{8-5} = \frac{26-12}{40-12}$, donc $Q_1 = 6,5$

Calculons le troisième quartile

$N \times \frac{75}{100} = 104 \times \frac{75}{100} = 78$; 78 est compris entre le 72^e rang et le 96^e rang. On a $Q_3 \in [13; 14[$

Alors $\frac{Q_3-13}{14-13} = \frac{78-72}{96-72}$, donc $Q_3 = 13,25$

Interprétation

- 26 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 6,5.
- 78 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 13,5

x

III. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1. Histogramme

- L'histogramme d'une série statistique regroupée en classes est constitué de rectangles juxtaposés.
- L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (resp. la fréquence) de la classe correspondante.
- Les largeurs des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes des classes.
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes

Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Modalité	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude					
Centre					
Densité					

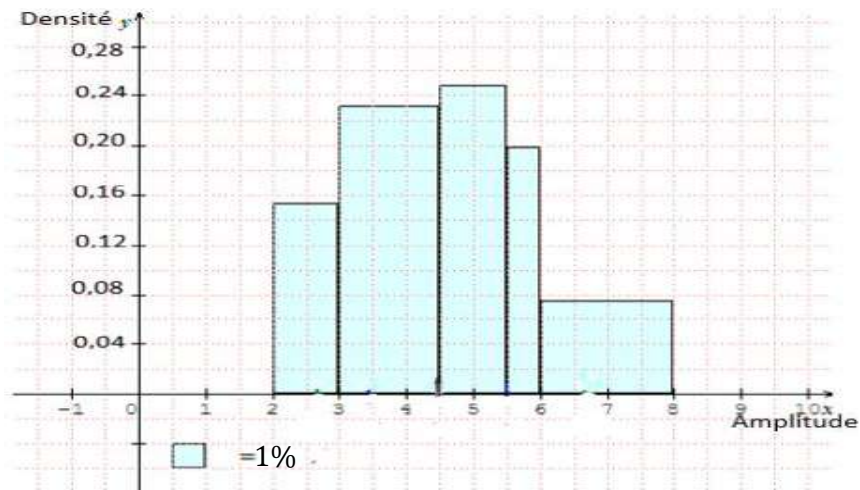
- a- Complète le tableau
b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

Solution

- a- Complétons le tableau

Modalité	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude	1	1,5	1	0,5	2
Centre	2,5	3,75	5	5,75	7
Densité	0,15	0,23	0,25	0,2	0,075

- b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique



La surface d'un petit carreau est $0,5 \times 0,02 = 0,01$ soit 1%

2. Polygones des effectifs et des fréquences

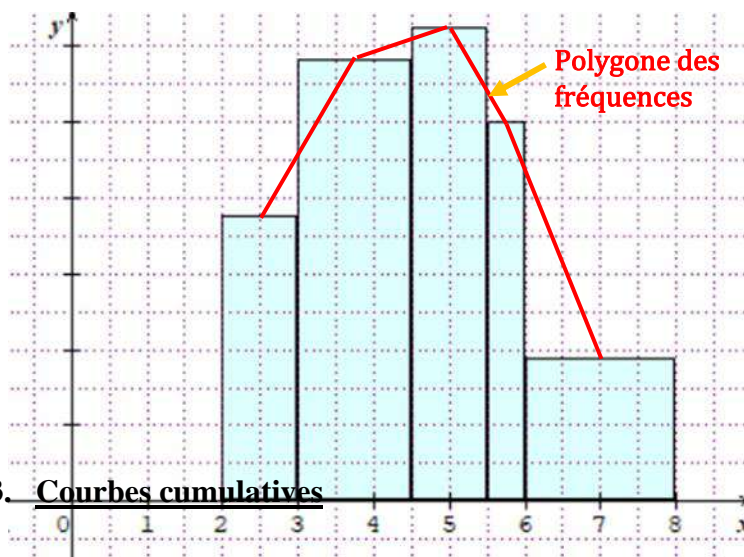
Le polygone des effectifs (resp. fréquences) est obtenu en joignant les milieux successifs des côtés les plus hauts de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice de fixation

Construis le polygone des fréquences de la série statistique dont l'histogramme des fréquences est donné ci-dessous.



Solution



3. Courbes cumulatives

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de la fonction F définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; N]$ telle que :

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}[$, F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i) = N_i$ et $g(x_{i+1}) = N_{i+1}$, où N_i est l'effectif cumulé croissant de $[x_i ; x_{i+1}[$ et N_{i+1} celui de $[x_{i+1} ; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = N$.

La courbe cumulative des fréquences est la représentation graphique de la fonction F définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que :

- Si $x \leq x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i) = F_i$ et $g(x_{i+1}) = F_{i+1}$, où F_i est la fréquence cumulée croissante de $[x_i ; x_{i+1}[$ et F_{i+1} celle de $[x_i ; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = 1$.

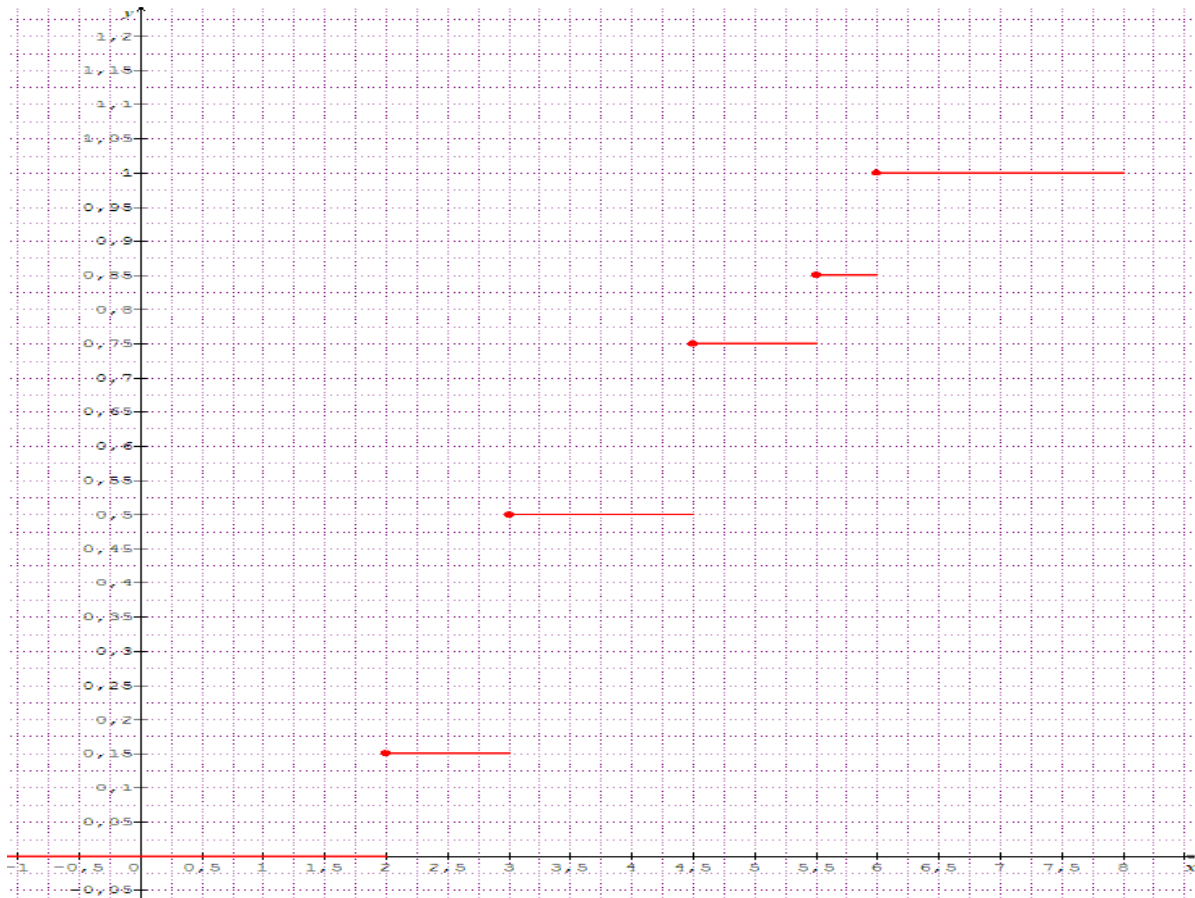
Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Classes	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquences	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Fréquences cumulées	0,15	0,5	0,75	0,85	1

Construis la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

Solution



IV. CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIQUE REGROUPEES EN CLASSES

1. Variance

La variance d'une série statistique regroupée en classe, notée V, est donnée par la formule :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (c_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (c_p - \bar{x})^2 \right]$$

Autre formule :

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^p n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{N} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_p c_p^2) - \bar{x}^2$$

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

- a- Justifions que la moyenne est 39,84
 b- Calcule la variance de cette série.

Solution

Temps (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[Total
Effectif	35	41	30	12	5	2	125
Centre	10	30	50	80	120	170	
$n_i c_i$	350	1230	1500	960	600	340	4980
$n_i c_i^2$	3500	36900	75000	76800	72000	57800	322000

a/ la moyenne \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{4980}{125} = 39,84$$

b/ la variance V

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^6 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{322000}{125} - (39,84)^2 = 988,77$$

2. Ecart type

L'écart type d'une série statistique, noté $\sigma = \sqrt{V}$.

Interprétation

Plus l'écart type est plus élevé, plus la dispersion des valeurs autour de la moyenne est plus élevée

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart type de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Centre	10	30	50	80	120	170

On trouve $V = 988,77$

L'écart type σ

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{988,77} = 31,44.$$

Interprétation

31,44 est élevé donc le temps que les élèves consacrent au sport par semaine dans la majorité n'est pas proche de la moyenne 39,84

3. Ecart absolu moyen

L'écart absolu moyen, noté e_m , est le réel :

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |c_i - \bar{x}| = \frac{1}{N} (n_1 \times |c_1 - \bar{x}| + n_2 \times |c_2 - \bar{x}| + \dots + n_p \times |c_p - \bar{x}|).$$

Interprétation

L'écart moyen nous indique la distance moyenne entre la moyenne et les valeurs de la série statistique

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart absolu moyen de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[Total
Effectif	35	41	30	12	5	2	125
Centre	10	30	50	80	120	170	
$ c_i - \bar{x} $	29,84	9,84	10,16	40,16	80,16	130,16	
$n_i c_i - \bar{x} $	1044,4	403,44	304,8	481,92	400,8	260,32	2895,68

On trouve la moyenne $\bar{x} = 39,84$

L'écart absolu moyen

$$e_m = \frac{1}{125} (35 \times |10 - 39,84| + 41 \times |30 - 39,84| + 30 \times |50 - 39,84| + 12 \times |80 - 39,84| + 5 \times |120 - 39,84| + 2 \times |170 - 39,84|)$$

$$e_m = \frac{2895,68}{125} = 23,17$$

Interprétation.

Le temps consacré à la pratique de sport par semaine d'un élève est à 23,17 min de la moyenne.

4. Ecart interquartile

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est le nombre $Q_3 - Q_1$.

Interprétation

50% des valeurs sont comprises entre le premier quartile et le troisième quartile .

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart interquartile de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Effectifs cumulés croissants	35	76	106	118	123	125

- On a $125 \times \frac{25}{100} = 31,25$.

31,25 est plus petit que la 35^e valeur. Donc $Q_1 \in [0 ; 20[$.

$$\frac{Q_1 - 0}{20 - 0} = \frac{31,25 - 0}{35 - 0} \text{ donc } Q_1 = 17,86$$

- On a $125 \times \frac{75}{100} = 93,75$.

93,75 est compris entre la 76^e et la 106^e valeur. Donc $Q_3 \in [40 ; 60[$.

$$\frac{Q_3 - 40}{60 - 40} = \frac{93,75 - 76}{106 - 76} \text{ donc } Q_3 = 51,83$$

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 51,83 - 17,86 = 33,97$

Interprétation

L'étendue est 200.

L'interquartile est environ égale à 25% de l'étendue donc 50% des élèves ont leur temps consacré à la pratique du sport proche de la médiane.

C. SITUATION COMPLEXE

Le président du comité de gestion scolaire (COGES) de ton lycée veut acquérir une machine pour stocker sa récolte dans des sacs de 50 kg. Un commerçant lui propose deux machines, A et B, qu'il teste sur 80 sacs. Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

Classe	Machine A	Machine B	Classe	Machine A	Machine B
[49; 49,2[7	4	[49,8; 50[11	14
[49,2; 49,4[6	6	[50; 50,2[14	16
[49,4; 49,6[14	9	[50,2; 50,4[9	17
[49,6; 49,8[14	11	[50,4; 50,6[5	3

Un agent de l'agriculture du service qualité estime que la machine est bonne si les conditions suivantes sont simultanément réalisées :

- la moyenne \bar{x} doit être comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type σ doit être inférieur à 0,5 kg ;
- l'intervalle [49,3; 50,5] doit contenir 85% des sacs.

Sollicité par un membre du bureau du COGES pour le choix de la machine convenable, tu décides de répondre à la préoccupation de leur président en utilisant tes connaissances en mathématiques.

Solution

Pour vérifier la qualité de cette machine je vais utiliser la leçon sur les statistiques .

Pour cela je vais :

- Dresser le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquence cumulées croissantes de chaque machine.
- Calculer le stockage moyen de chaque machine.
- Calculer la variance l'écart type de chaque série statistique.
- Utiliser l'interpolation linéaire pour donner une estimation de la fréquence correspondante à la valeur 49,3 et 50,5.
 - Le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquence cumulées croissantes de chaque machine.

Machine A

Stockage	[49; 49,2[[49,2; 49,4[[49,4; 49,6[[49,6; 49,8[[49,8; 50[[50; 50,2[[50,2; 50,4[[50,4; 50,6[
Nombre de sacs	7	6	14	14	11	14	9	5
Centres	49,1	49,3	49,5	49,7	49,9	50,1	50,3	50,5
Fréquence (%)	8,8	7,5	17,5	17,5	13,8	17,5	11,3	6,3
Fréquence cumulée croissantes(%)	8,8	16,3	33,8	51,3	65	82,5	93,8	100

Machine B

Stockages	[49; 49,2[[49,2; 49,4[[49,4; 49,6[[49,6; 49,8[[49,8; 50[[50; 50,2[[50,2; 50,4[[50,4; 50,6[
Nombre de sacs	4	6	9	11	14	16	17	3
Centres	49,1	49,3	49,5	49,7	49,9	50,1	50,3	50,5
Fréquence (%)	5	7,5	11,3	13,8	17,5	20	21,3	3,8
Fréquence cumulée croissantes(%)	5	12,5	23,8	37,5	55	75	96,3	100

- Le stockage moyen de chaque machine.

Machine A :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 n_i c_i}{N} = \frac{3983,8}{80} = 49,79$$

Machine B :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 n_i c_i}{N} = \frac{3991,2}{80} = 49,89$$

- La variance et l'écart type de chaque série statistique.

Machine A

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^8 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{198395,7}{80} - (49,78)^2 = 0,39$$

$$\sigma = \sqrt{0,39} = 0,62$$

Machine B

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^8 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{199132}{80} - (49,89)^2 = 0,14$$

$$\sigma = \sqrt{0,14} = 0,37$$

- Une estimation de la fréquence correspondante à la valeur 49,3 et 50,5 par l'interpolation linéaire.

<p>Machine A A l'aide du tableau des fréquences cumulées croissantes , On a :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>49,2</td> <td>49,3</td> <td>49,4</td> </tr> <tr> <td>8,8</td> <td>b</td> <td>16,3</td> </tr> </table>	49,2	49,3	49,4	8,8	b	16,3	<p>Machine B A l'aide du tableau des fréquences cumulées croissantes , On a :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>49,2</td> <td>49,3</td> <td>49,4</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>b</td> <td>12,5</td> </tr> </table>	49,2	49,3	49,4	5	b	12,5
49,2	49,3	49,4											
8,8	b	16,3											
49,2	49,3	49,4											
5	b	12,5											

$$\frac{49,3 - 49,2}{49,4 - 49,2} = \frac{b - 8,8}{16,3 - 8,8}$$

$$\frac{b-8,8}{7,5} = \frac{0,1}{0,2} \text{ donc } b = 12,55$$

50,4	50,5	50,6
93,8	b	100

$$\frac{50,5 - 50,4}{50,6 - 50,4} = \frac{b - 93,8}{100 - 93,8}$$

$$\frac{b-93,8}{6,2} = \frac{0,1}{0,2} \text{ donc } b = 96,9$$

La fréquence de [49,3;50,5] est
 $96,9 - 12,55 = 84,35\%$

$$\frac{49,3 - 49,2}{49,4 - 49,2} = \frac{b - 5}{12,5 - 5}$$

$$\frac{b-5}{7,5} = \frac{0,1}{0,2} \text{ donc } b = 8,75$$

50,4	50,5	50,6
96,3	b	100

$$\frac{50,5 - 50,4}{50,6 - 50,4} = \frac{b - 96,3}{100 - 96,3}$$

$$\frac{b-96,3}{3,7} = \frac{0,1}{0,2} \text{ donc } b = 98,15$$

La fréquence de [49,3;50,5] est
 $98,15 - 8,75 = 89,4\%$

Après calcul, on remarque que :

Pour la machine A on a :

- la moyenne calculée (49,8) est comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type calculé (0,39) est inférieur à 0,5
- l'intervalle [49,3;50,5] contient 84,35% des sacs donc la machine n'arrive pas à contenir 85% des sacs.

Pour la machine B on a :

- la moyenne calculée (49,89) est comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type calculé (0,37) est inférieur à 0,5

l'intervalle [49,3;50,5] contient 89,4% des sacs donc la machine arrive à contenir 85% des sacs.

Donc le président du comité de gestion scolaire (COGES) devra choisir la machine B.

D. EXERCICES

Exercice 1

Le tableau ci- dessous indique la répartition du salaire journalier (en milliers de francs CFA) des ouvriers d'une entreprise.

Salaire	[1; 2[[2; 3[[3; 5[[5; 8[
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39

1. Dans un tableau détermine la densité et l'amplitude de cette série statistique.
2. Construis l'histogramme des effectifs de cette série statistique.
3. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des polygones des effectifs cumulés décroissants.
4. a) Déduis graphiquement une valeur approchée de la médiane.
 b) Détermine par le calcul une estimation de la médiane.

Solution

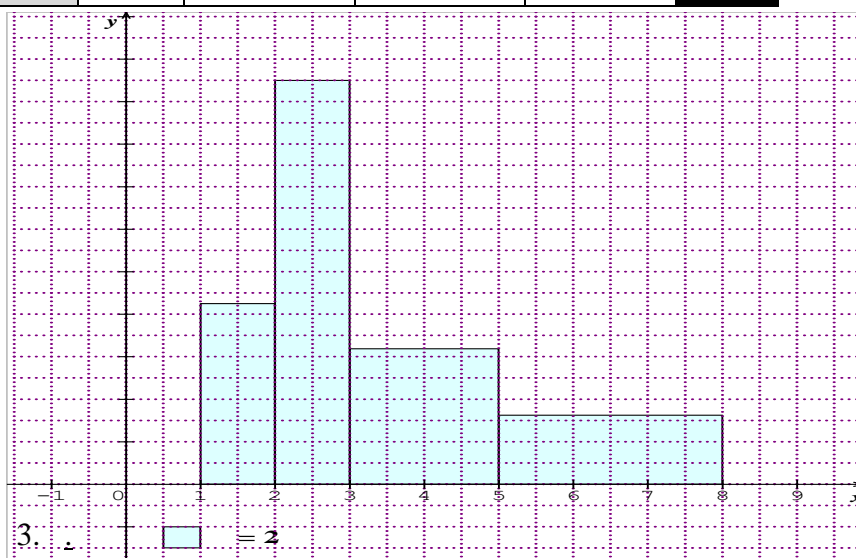
1. Tableau des fréquences

Salaire	[1; 2[[2; 3[[3; 5[[5; 8[Total
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39	200
Amplitude	2	1	2	3	
Densité	17	76	25,5	13	

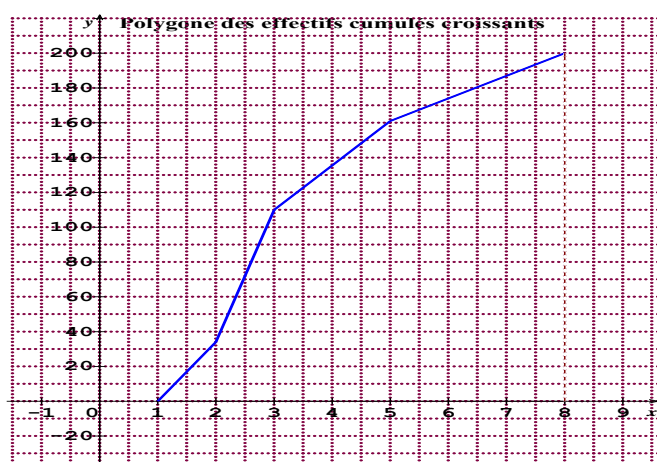
2. L'histogramme des effectifs

Echelle ; un petit carreau correspond à 2 ouvriers soit $1\text{cm}^2 \rightarrow 8$ ouvriers

Salaire	[1; 2[[2; 3[[3; 5[[5; 8[Total
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39	200
Largeur	1	1	2	3	
hauteur	4,25	9,5	3,2	1,6	



Le polygone des effectifs cumulés croissants



Le polygone des effectifs cumulés décroissants.



Exercice 2

On donne la série statistique suivante :

Tranche d'âge (en année)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17; 20[
Effectif (n_i)	7	16	18	9

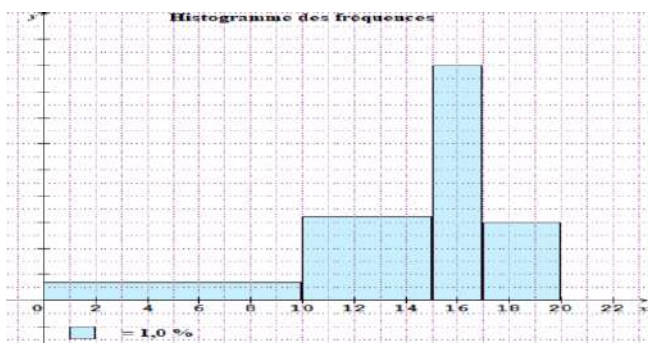
- Dresse, en pourcentage, le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série.
- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.
- Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
- Déduis graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près des quartiles de cette série statistique.
 - Détermine par le calcul une estimation des quartiles de cette série statistique.
(On donnera les résultats à l'arrondi d'ordre 1).
 - Calcul l'écart interquartile.

Solution

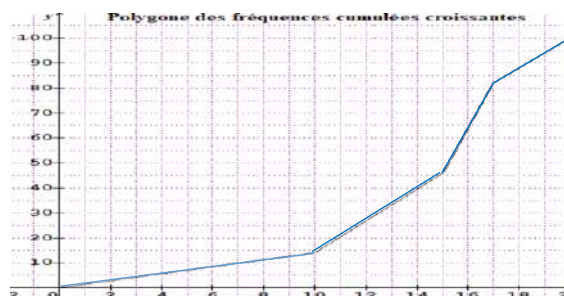
- Le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série en pourcentage.

Tranche d'âge (en année)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17; 20[
Effectif (n_i)	7	16	18	9
Fréquence (%)	14	32	36	18
Fréquence cumulées croissantes(%)	14	46	82	100

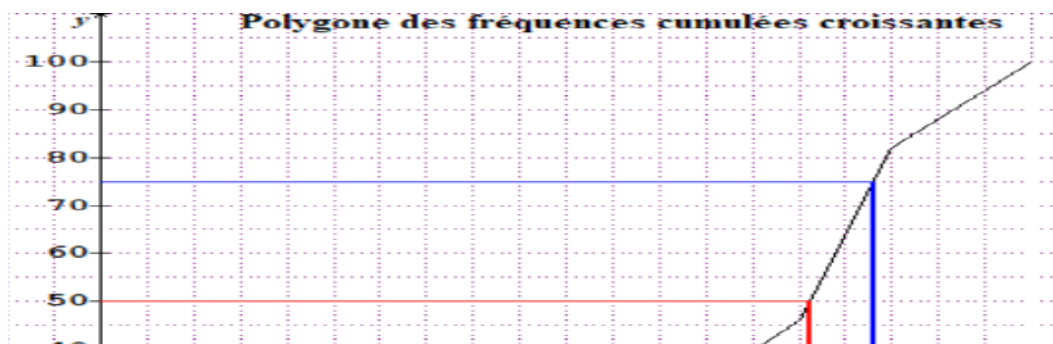
- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.



- Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.



- Une valeur approchée à 10^{-1} près des quartiles de cette série statistique.



Q_1 **Med** Q_3

$Q_1 = 11,7$

$Q_3 = 16,6$

b) Une estimation des quartiles par le calcul de cette série statistique.

Tranche d'âge (en année)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17; 20[
Fréquence (%)	14	32	36	18
Fréquence cumulées croissantes(%)	14	46	82	100

<ul style="list-style-type: none"> On a $100 \times \frac{25}{100} = 25$ <p>25 est compris entre la 14^e et la 46^e valeur. Donc $Q_1 \in [10 ; 15[$.</p> <p>$\frac{Q_1 - 10}{15 - 10} = \frac{25 - 14}{46 - 14}$ donc $Q_1 = 11,72$</p>	<ul style="list-style-type: none"> On a $100 \times \frac{75}{100} = 75$. <p>75 est compris entre la 46^e valeur et la 82^e valeur. Donc $Q_3 \in [15 ; 17[$</p> <p>$\frac{Q_3 - 15}{17 - 15} = \frac{75 - 46}{82 - 46}$ donc $Q_3 = 16,61$</p>
---	--

c) Calcul l'écart interquartile.

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 16,61 - 11,72 = 4,89$

Exercice 3

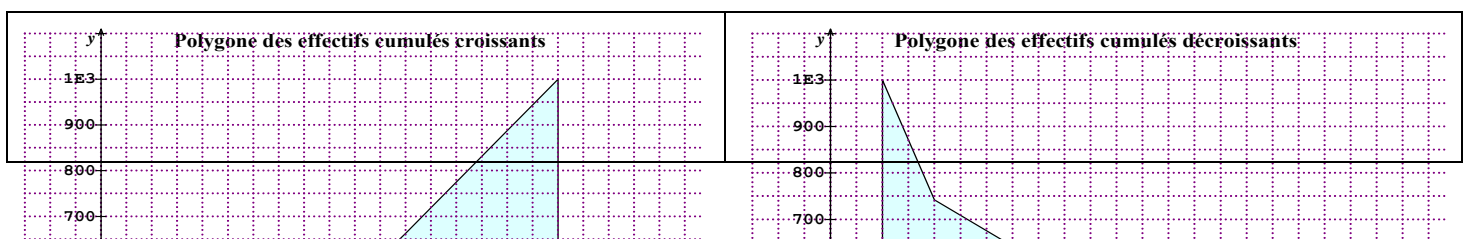
On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant :

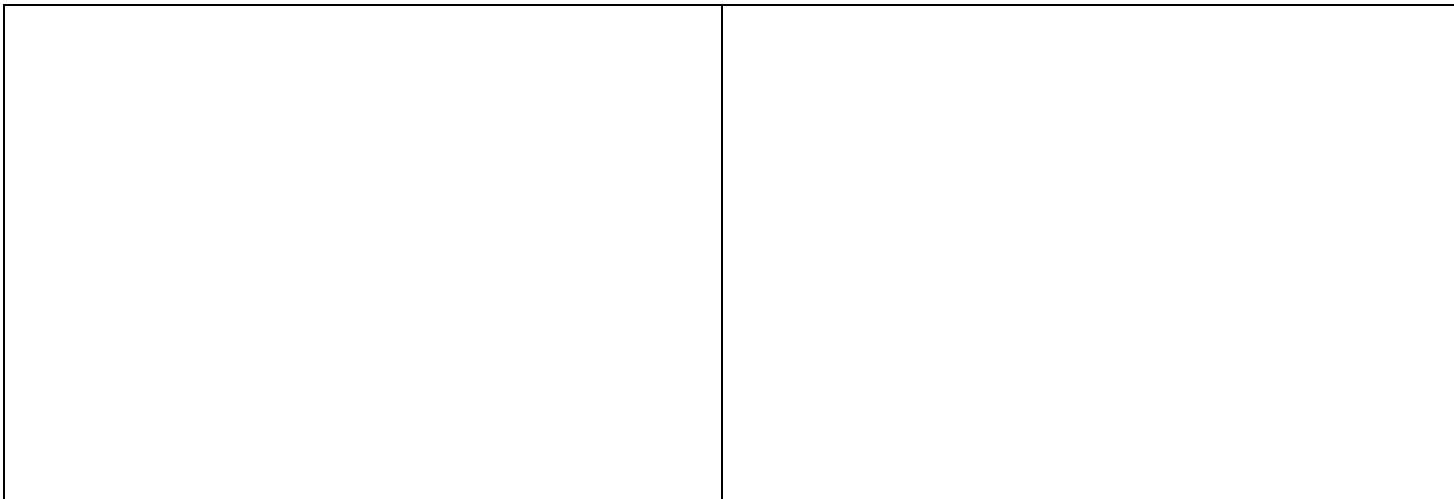
Classe	[1; 2[[2; 4[[4; 5[[5; 6[[6; 9[
Effectif	258	133	164	108	337

1. Construis les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Détermine le nombre d'individus dont la modalité est :
 - a) inférieure à 3 ; b) supérieure à 5,3 ; c) comprise entre 3 et 5,3
3. Calcule la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

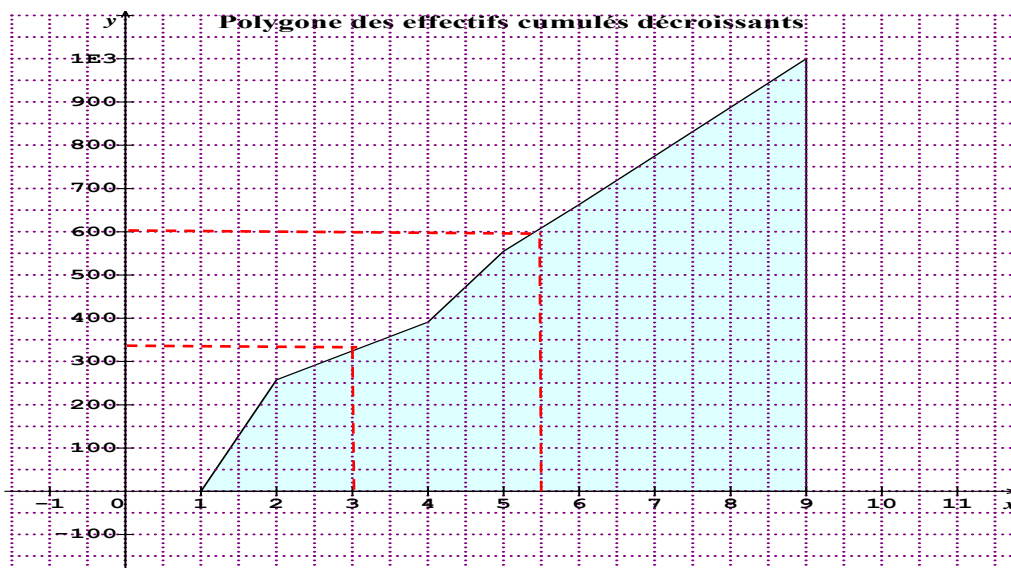
Réponse

1. :





1. Le nombre d'individus dont la modalité est :



- inférieure à 3

Graphiquement on a 340 individus qui ont une modalité inférieure 3

- supérieure à 5,3

Graphiquement on a 600 individus qui ont une modalité inférieure 3

- comprise entre 3 et 5,3

On a $600-340=260$ individus.

2.

Classe	[1; 2[[2; 4[[4; 5[[5; 6[[6; 9[Total
Effectif	258	133	164	108	337	1000
Centre	1,5	3	4,5	5,5	7,5	
$n_i c_i$	387	399	738	594	2527,5	4645,5
$n_i c_i^2$	580,5	1197	3321	3267	18956,25	27321,75

la moyenne,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i c_i}{N} = \frac{4645,5}{1000} = 4,65$$

La variance

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^5 n_i c_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{27321,75}{1000} - (4,65)^2 = 5,7$$

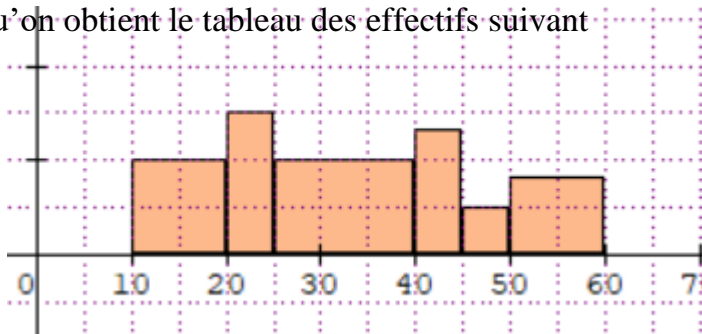
L'écart type.

$$\sigma = \sqrt{5,7} = 2,4$$

Exercice 4

L'histogramme ci-contre représente les recettes en milliers de francs CFA de 300 commerçants. 1cm² représente 60 individus.

1. Justifie qu'on obtient le tableau des effectifs suivant

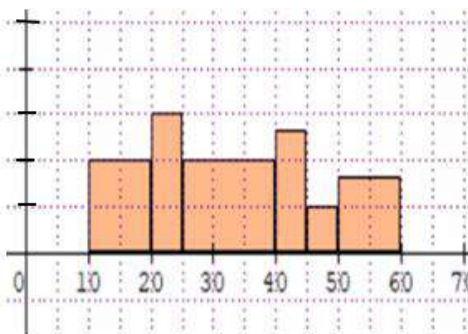


Classes	[10; 20[[20; 25[[25; 40[[40; 45[[45; 50[[50; 60[
Effectifs	60	45	90	40	15	50

- Détermine l'écart -type de cette série statistique. Interprète ce résultat.
- Détermine l'écart interquartile de cette série statistique. Interprète ce résultat.

Solution

1.



On sait que l'aire d'un rectangle est hauteur \times base

Classes	[10; 20[[20; 25[[25; 40[[40; 45[[45; 50[[50; 60[
Aire du rectangle(cm ²)	2	1,5	3	1,33	0,5	1,67

Pour trouver l'aire de la classe [50 ;60[on a la base est égale à 1cm et la hauteur est égale environ à 1,67.

On obtient le tableau des effectifs

Classes	[10; 20[[20; 25[[25; 40[[40; 45[[45; 50[[50; 60[
---------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Effectifs	60	45	90	40	15	50

2. L'écart –type de cette série statistique.

Classe	[10; 20[[20; 25[[25; 40[[40; 45[[45; 50[[50; 60[Total
Effectif	60	45	90	40	15	60	300
Centre	15	22,5	32,5	42,5	47,5	55	
$n_i c_i$	900	1012,5	2925	1700	712,5	2750	10000
$n_i c_i^2$	13500	22781,25	95062,5	72250	33843,75	151250	388687,5

$$\text{la moyenne : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i c_i}{N} = \frac{10000}{300} = 33,33$$

$$\text{La variance : } V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^6 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{388687,5}{300} - (33,33)^2 = 184,74$$

$$\text{L'écart type : } \sigma = \sqrt{184,74} = 13,59$$

Interprétation

13,59 est élevé donc les recettes sont dispersées autour de la moyenne 33,33.

3. L'écart interquartile de cette série statistique.

Classes	[10; 20[[20; 25[[25; 40[[40; 45[[45; 50[[50; 60[
Effectifs	60	45	90	40	15	50
Effectifs cumulés croissantes	60	105	195	235	250	300

- On a $300 \times \frac{25}{100} = 75$

75 est compris entre la 60^e et la 105^e valeur. Donc $Q_1 \in [20 ; 25[$.

$$\frac{Q_1 - 20}{25 - 20} = \frac{75 - 60}{105 - 60} \text{ donc } Q_1 = \mathbf{21,67}$$

- On a $300 \times \frac{75}{100} = 225$

225 est compris entre la 195^e et la 235^e valeur. Donc $Q_3 \in [40 ; 45[$.

$$\frac{Q_3 - 40}{45 - 40} = \frac{225 - 195}{235 - 195} \text{ donc } Q_3 = \mathbf{43,75}$$

$$Q_3 - Q_1 = 22,08$$

Interprétation

50% des recettes sont dispersées dans un intervalle d'amplitude 22,08 qui contient la médiane

Exercice 5

On considère la série statistique suivante :

Surface (en m ²)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5

- Détermine la classe modale et calcule la moyenne \bar{x} de cette série.
- Calcule les caractéristiques de dispersion de cette série.

Solution

- Déterminons la densité de chaque intervalle.

Surface (en m ²)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5
Amplitude	10	5	2	3
Densité	2	2	7,5	1,67

La classe modale est : [15; 17[

- Les caractéristiques de dispersions.

Surface (en m ²)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17 ; 20[Total
Individu (x_i)	20	10	15	5	50
Centre	5	12,5	16	18,5	
$n_i c_i$	100	125	240	92,5	557,5
$n_i c_i^2$	500	1562,5	3840	1711,25	7613,75
$ c_i - \bar{x} $	6,15	1,35	4,85	7,35	
$n_i c_i - \bar{x} $	123	13,5	72,75	36,75	246

la moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i c_i}{N} = \frac{557,5}{50} = 11,15$

La variance : $V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^4 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{7613,75}{50} - (11,15)^2 = 27,95$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{27,95} = 5,29$

L'écart absolu moyen.

$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i |c_i - \bar{x}| = \frac{246}{50} = 4,92$

L'écart 'interquartile

Surface (en m ²)	[0; 10[[10; 15[[15; 17[[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5
Effectifs cumulés croissantes	20	30	45	50

- On a $50 \times \frac{25}{100} = 12,5$

12,5 est plus petite que la 20^e valeur. Donc $Q_1 \in [0 ; 10[$.

$$\frac{Q_1}{10} = \frac{12,5}{20} \text{ donc } Q_1 = 6,25$$

- On a $50 \times \frac{75}{100} = 37,5$

37,5 est compris entre la 30^e et la 45^e valeur. Donc $Q_3 \in [15 ; 17[$.

$$\frac{Q_3 - 15}{17 - 15} = \frac{37,5 - 30}{45 - 30} \text{ donc } Q_3 = 16$$

L'interquartile est donc :

$$Q_3 - Q_1 = 9,75$$