

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

📺 Rappels du cours de 1^{ère} en vidéo : <https://youtu.be/wJb3CSS3cg>

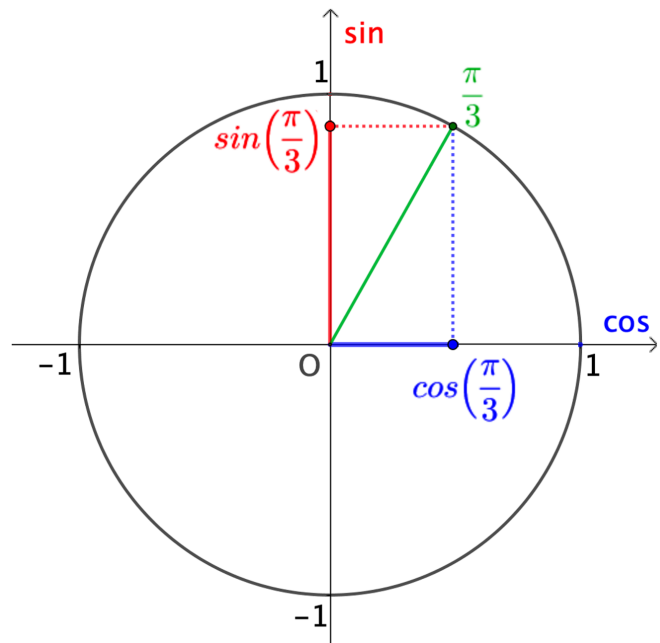
Partie 1 : Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

1) Définitions et propriétés

Exemple :

A l'aide du cercle trigonométrique, il est possible de lire le cosinus et le sinus d'un nombre.

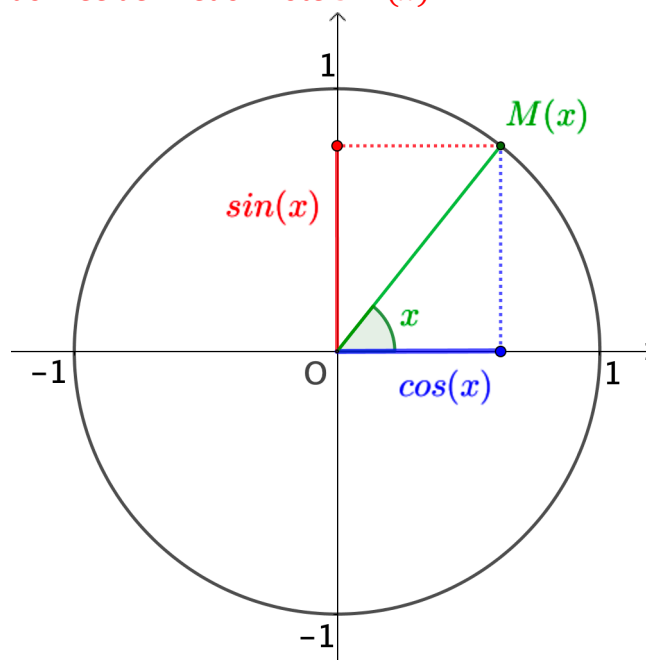
Le **cosinus** se lit sur l'axe des abscisses et le **sinus** sur l'axe des ordonnées.



Définitions : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).

- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note **cos**(x).

- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note **sin**(x).



Propriétés :

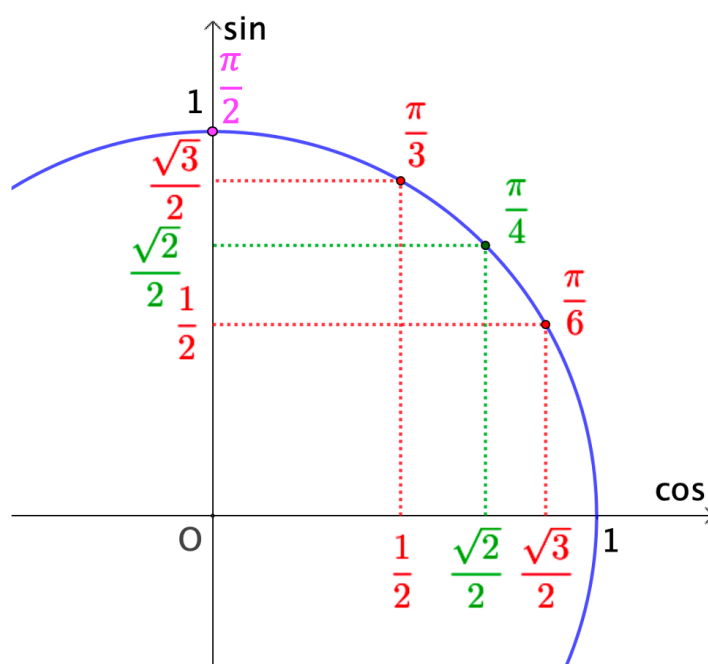
1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3) Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus :

► Vidéo : <https://youtu.be/ECNX9hnhG9U>

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Méthode : Résoudre une équation et une inéquation trigonométrique

► Vidéo <https://youtu.be/p6U55YsS440>

► Vidéo <https://youtu.be/PcgvyxU5FCc>

► Vidéo https://youtu.be/raU77Qb_-lw

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.

2) Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$, l'inéquation : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction

$$1) \cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2(x) - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

$$\cos^2(x) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\text{En effet : } \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit :

$$\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, & k_1 \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, & k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi, & k_3 \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k_4\pi, & k_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- On commence par résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.

$$\text{Soit : } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

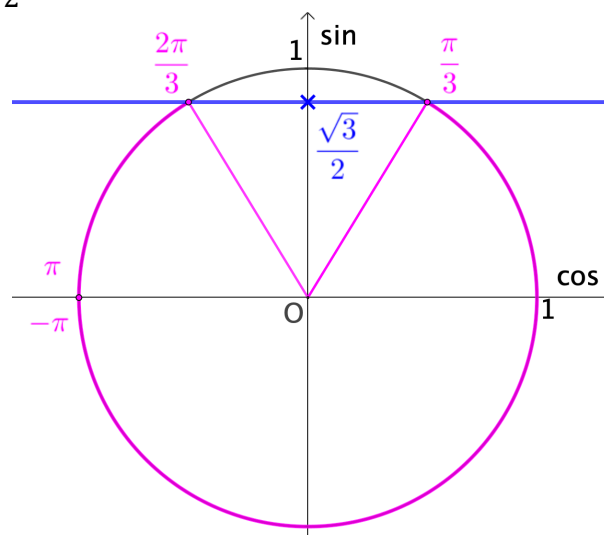
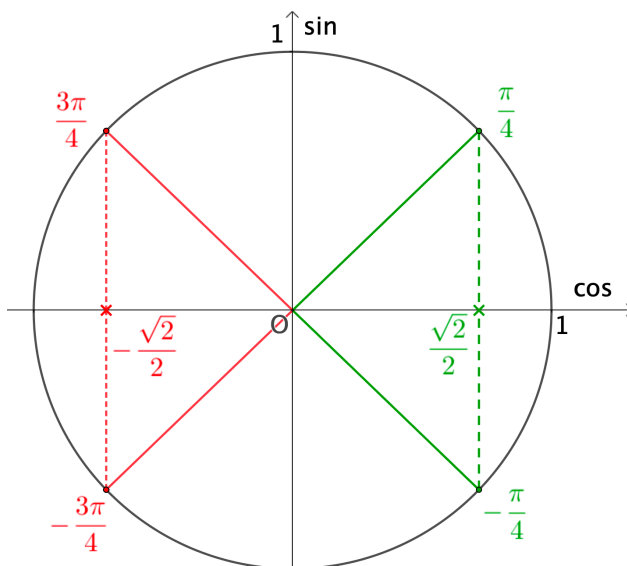
- On veut des valeurs de sinus inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Elles correspondent à la **partie du cercle trigonométrique** située en dessous des points

associés à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Ainsi :

$$S = \left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

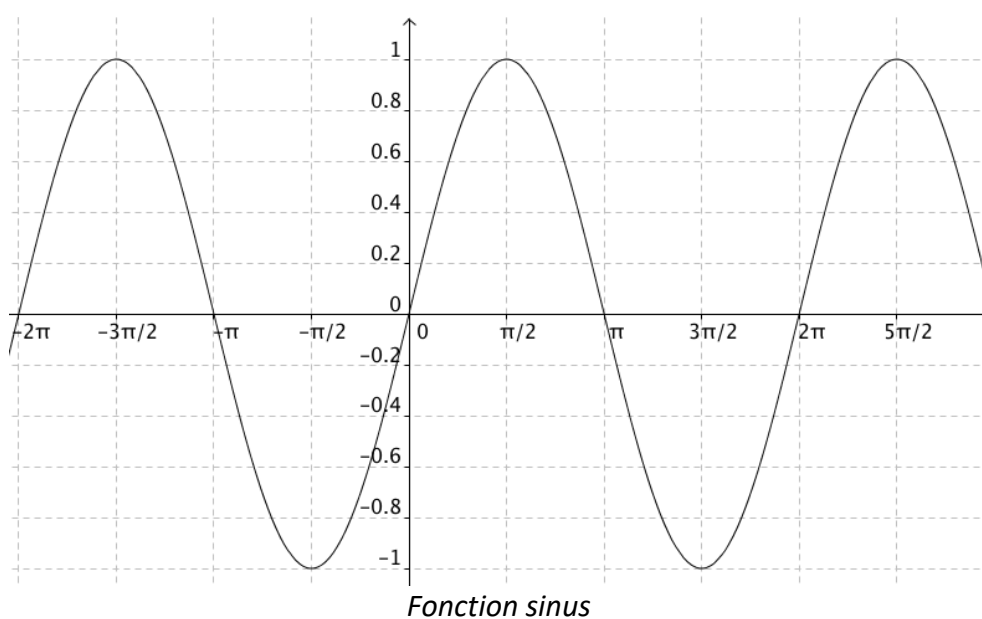
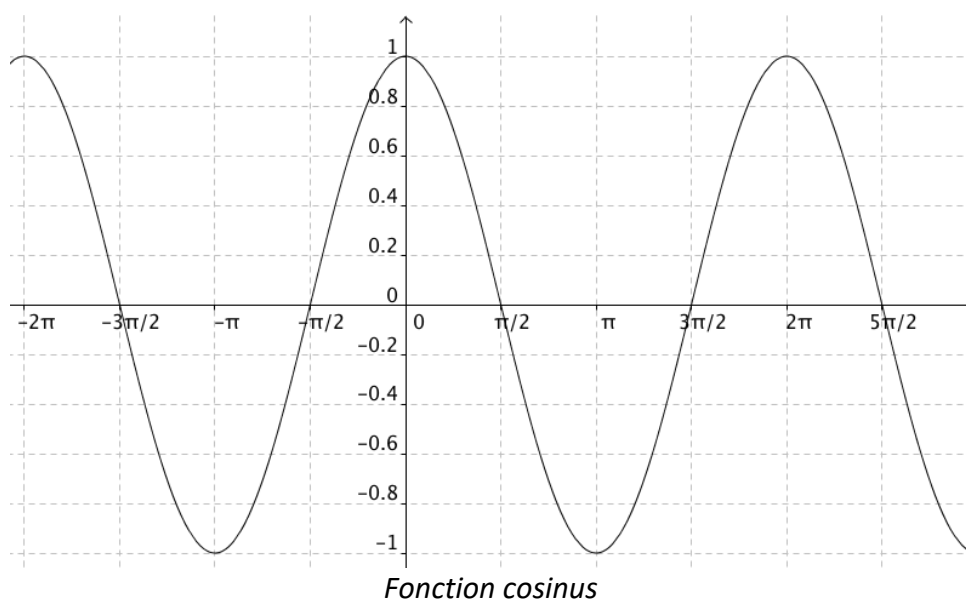


Partie 2 : Propriétés des fonctions cosinus et sinus

1) Définitions

Définitions :

- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.



2) Périodicité

- Propriétés :**
- 1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
 - 2) $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

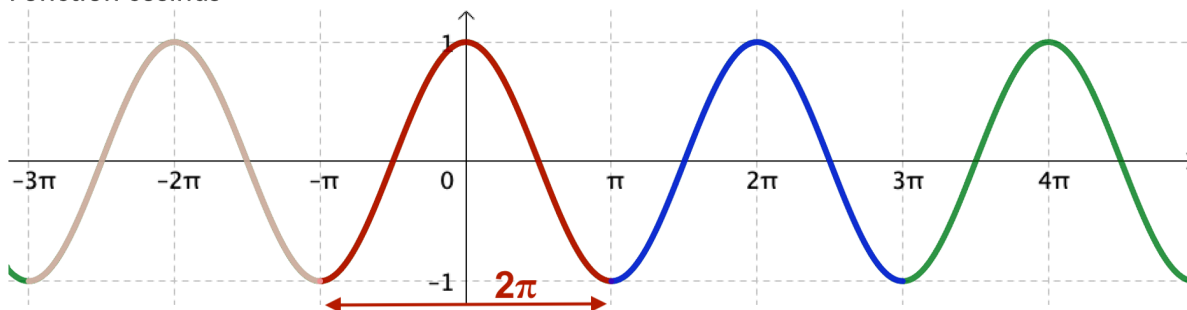
Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :

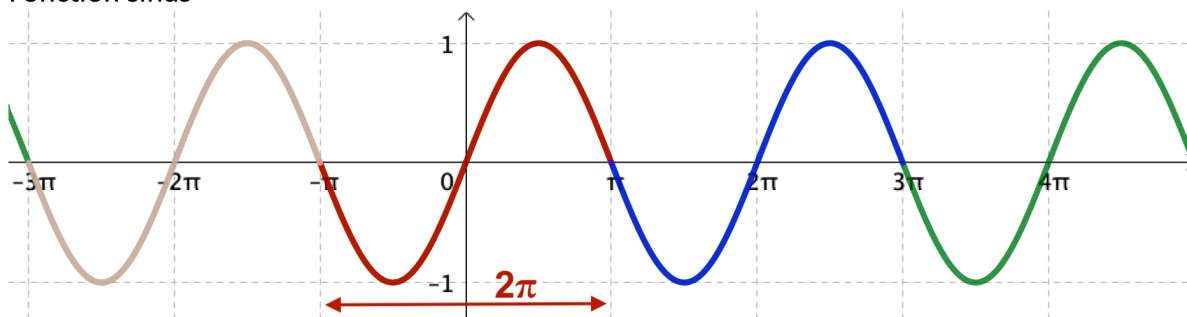
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** .

Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π .

Fonction cosinus



Fonction sinus



3) Parité

Définitions : - Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarques :

- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.

- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés :

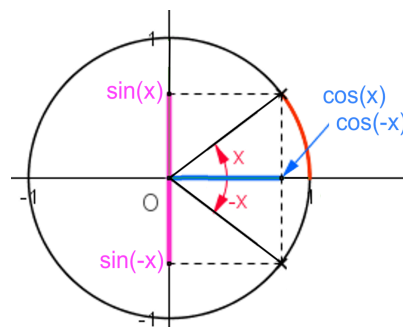
- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$

- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration :

Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Remarques :

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Vidéo <https://youtu.be/hrbgxnCZW> I

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Correction

On a :

$$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin(x) + \sin(2x) = -(\sin(x) - \sin(2x)) = -f(x).$$

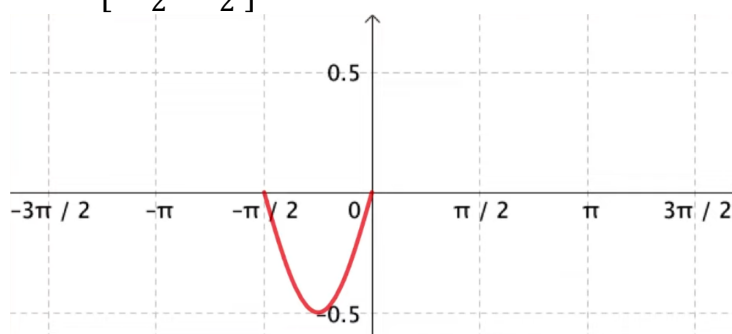
La fonction f est donc impaire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Méthode : Compléter un graphique par parité et périodicité

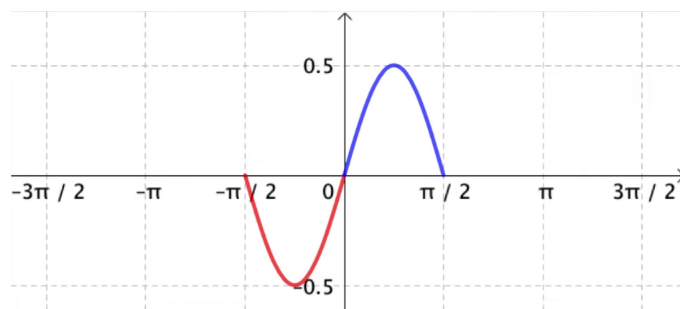
Vidéo <https://youtu.be/KbCpgXSvR8M>

Soit f une fonction impaire et périodique de période π . Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

**Correction**

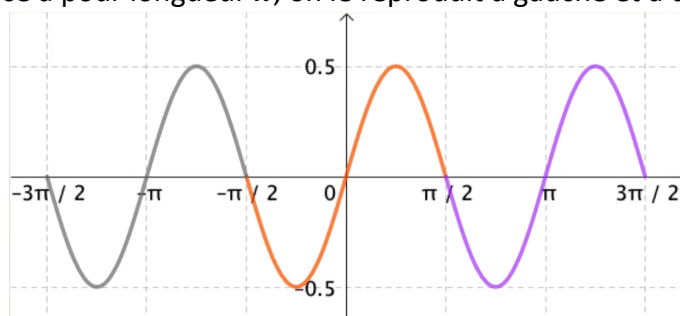
1^{ère} étape : La fonction est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

On complète donc par symétrie centrale.



2^e étape : La fonction est périodique de période π . On retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π .

Le morceau déjà tracé a pour longueur π , on le reproduit à gauche et à droite par translation.



Partie 3 : Variations des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(ax + b)$ a et b réels	$-a \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$ a et b réels	$a \cos(ax + b)$

2) Tableaux de variations

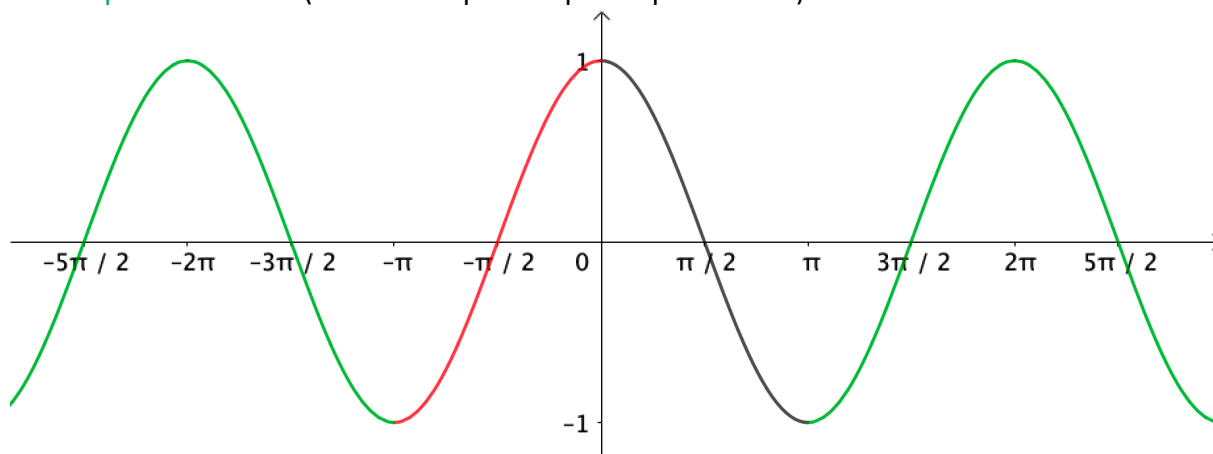
x	0	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	0
$\cos(x)$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
$\sin(x)$	0	1	0

3) Représentations graphiques

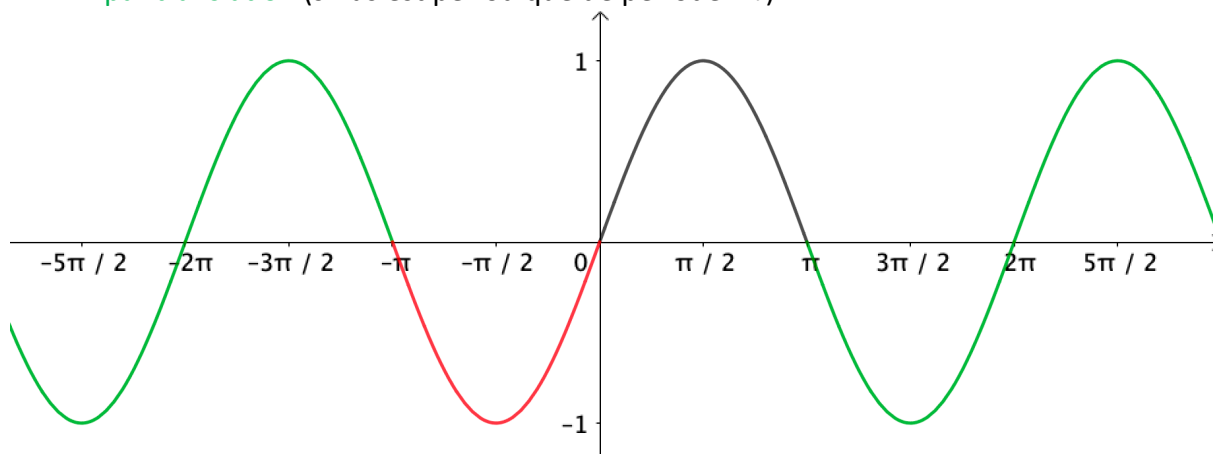
● On retrouve la représentation graphique de cosinus en complétant les données du tableau de variations :

- **par symétrie** avec l'axe des ordonnées (cosinus est paire),
- **par translation** (cosinus est périodique de période 2π).



● On retrouve la représentation graphique de sinus en complétant les données du tableau de variations :

- **par symétrie** avec l'origine du repère (sinus est impaire),
- **par translation** (sinus est périodique de période 2π).



Méthode : Étudier une fonction trigonométrique

▶ Vidéo <https://youtu.be/uOXv5XnAiNk>

▶ Vidéo <https://youtu.be/s3S85RL06ks>

▶ Vidéo https://youtu.be/X6vJog_xQRY

▶ Vidéo <https://youtu.be/ol6UtCpFDQM>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

- Étudier la parité de f .
- Démontrer que la fonction f est périodique de période π .
- Étudier les variations de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.

Correction

$$a) f(-x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire. Dans un repère orthogonal, sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$\begin{aligned} b) f(x + \pi) &= \cos(2(x + \pi)) - \frac{1}{2} \\ &= \cos(2x + 2\pi) - \frac{1}{2} \\ &= \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est périodique de période π .

$$c) f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2} = v(u(x)) - \frac{1}{2}$$

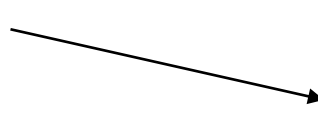
$$\begin{aligned} \text{Avec : } u(x) &= 2x \rightarrow u'(x) = 2 \\ v(x) &= \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= u'(x) \times v'(u(x)) \\ f'(x) &= 2 \times (-\sin(2x)) = -2 \sin(2x) \end{aligned}$$

Si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0 ; \pi]$ et donc $\sin(2x) \geq 0$.

Donc si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $f'(x) \leq 0$. Ainsi f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$



$$f(0) = \cos(2 \times 0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

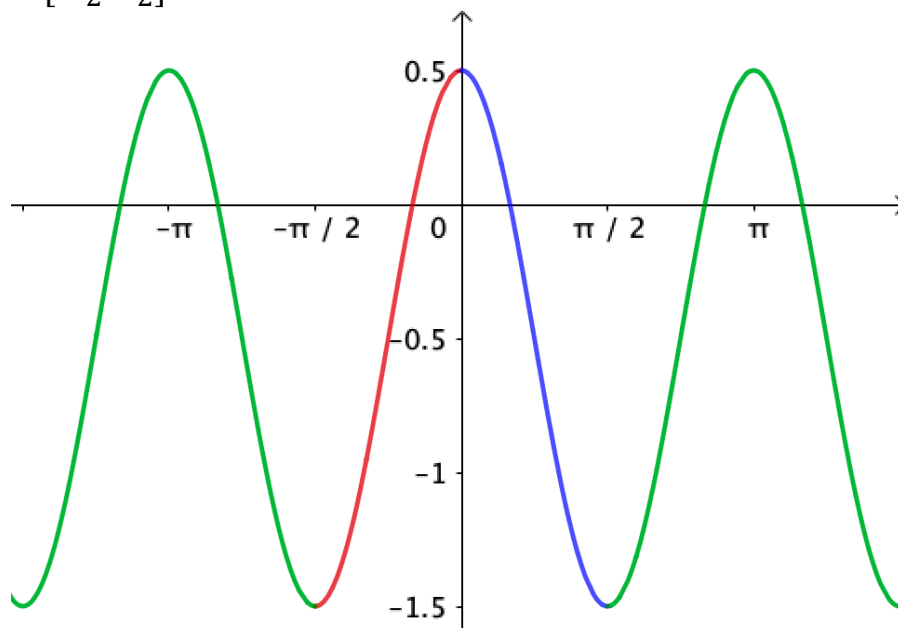
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

d) - On commence par tracer la courbe sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

- La fonction f est paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut ainsi prolonger la courbe **par symétrie axiale** sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

- La fonction f est périodique de période π , on peut ainsi prolonger la courbe **en translatant** horizontalement la portion de courbe déjà tracée. En effet, la portion déjà tracée se trouve sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ de longueur π .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales