MATHEMATIQUES
COURS ET EXERCICES

CLASSES DE PREMIERE S1, S2 et S3

Rédigé par :

Abdoulaye FAYE
Formateur à la FASTEF
(ex – Ecole Normale Supérieure)

Mouhamadou KA
Professeur au Lycée de Ouakam
(Dakar)

Oumar MBENGUE
Professeur au Cours Mandione
Laye de Yoff (Dakar)

Dakar, Septembre 2013

AVANT-PROPOS

Ce livre s'adresse aux élèves des classes de Première S. Conforme aux Programmes officiels en vigueur dans les séries S1, S2 et S3, il a pour but de leur présenter les connaissances indispensables et de mettre à leur disposition de nombreux exercices et problèmes pour appliquer celles-ci. Il n'est cependant pas un substitut au Cours du Professeur qui demeure irremplaçable.

Chaque notion du cours introduite a été illustrée d'exemples et tous les résultats du programme sont démontrés. Nous avons évité cependant toute digression inutile, nous concentrant sur l'essentiel. Nous avons voulu être très pratiques et ne donner à l'élève que ce dont il a vraiment besoin pour réussir les évaluations et avoir le niveau requis pour affronter la classe suivante (Terminale S1 ou S2). Tout discours superflu (par exemple sur l'histoire ou la biographie des mathématiciens) a donc été omis.

En général, un élève ne pourra pas étudier toutes les situations présentées dans ce livre, mais, sous la guidée de son Professeur, il pourra sélectionner les notions et exercices qui correspondent à des objectifs précis, en fonction de sa classe et de sa série.

Il ne s'agit pas d'un traité aux prétentions encyclopédiques mais, plus modestement, d'un outil de travail qui veut éviter à l'élève, comme c'est le cas actuellement, de devoir consulter une demi-douzaine d'ouvrages pour bien maîtriser les concepts.

Nous espérons que cet humble travail, malgré ses imperfections, sera utile aux élèves et aux collègues. Nous remercions par avance toute personne qui voudra bien nous faire part de remarques ou suggestions pour l'améliorer.

LES AUTEURS

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : DENOMBREMENT

1. INTRODUCTION

L'objet du dénombrement est, comme son nom l'indique, de compter le nombre d'éléments d'un ensemble bien défini c'est-à-dire d'un ensemble dont les éléments possèdent une propriété ne posant aucun problème d'ambiguïté.

Compter peut s'avérer assez délicat dans des cas complexes où l'on ne « voit pas » les objets qu'on souhaite dénombrer. Voici par exemple des exercices simples de dénombrement :

• Combien de mots de quatre lettres distinctes ou non peut-on constituer avec l'al-

phabet?

• Dix athlètes prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles ?

• Combien y a-t-il de façons de sélectionner une équipe de 6 joueurs parmi les 10

membres d'un club?

Nous allons mettre en place des outils et méthodes pour résoudre ce type de problèmes.

Le dénombrement utilise un vocabulaire spécialisé tel que : combinaison, p-liste, arrangement, permutation, ensemble, cardinal d'un ensemble, réunion, intersection, complémentaire, …

Les outils utilisés en dénombrement sont très variés : des entiers naturels particuliers tels que $n!$, A_n^p, c_n^p et n^p, des représentations telles que le diagramme de Venn, les diagrammes sagittaux , les arbres de choix , les tableaux à double entrée …

Les problèmes de dénombrement se ramènent aussi parfois à des situations où on doit déterminer le nombre de façons d'obtenir p éléments choisis parmi n éléments donnés.

Devant de telles situations, les questions qu'on se pose sont :

-Les éléments sont-ils choisis sans ordre ou avec ordre ?

-Sont-ils différents ou un élément donné peut-il être choisi plusieurs fois ?

On a souvent reproché à certains énoncés d'exercices de dénombrement d'être flous et ambigus à tel point que l'on se demande parfois ce que veut dire le texte.

Beaucoup d'efforts doivent être faits pour avoir des énoncés clairs, ne posant aucun problème d'ambigüité, et étant le moins possible sujets à des interprétations différentes pour les résoudre.

2. Ensemble

2.1 Notion d'ensemble

Une collection d'objets ayant tous une propriété bien définie, est un **ensemble**. Chaque objet figurant dans un ensemble est appelé **élément** de cet ensemble.

Un ensemble est souvent noté par une lettre majuscule et un élément de cet ensemble par une lettre minuscule.

Exemple : notons $\boldsymbol{C}$ l'ensemble des chiffres du nombre 12244

C contient les éléments 1,2 et 4.

2.2 Ecritures d'un ensemble

a) Ecriture en extension d'un ensemble

On peut écrire un ensemble en donnant tous ses éléments ; on dit alors qu'on écrit cet ensemble en extension.

Ecrire un ensemble en extension consiste à écrire entre deux accolades tous les éléments de cet ensemble, chaque élément étant écrit une seule fois, deux éléments quelconques étant séparés par une virgule ou un point – virgule ; un élément donné pouvant être mis à n'importe quelle place.

Dans l'exemple précédent, $C = \{1,2,4\}\ ou\ C = \{4,2,1\}\ ou\ C = \{2,4,1\}$, ...

En changeant l'ordre des éléments d'un ensemble, cet ensemble reste inchangé.

b) Ecriture en compréhension d'un ensemble

On peut écrire un ensemble en utilisant une propriété commune à tous ses éléments ; on dit qu'on a écrit cet ensemble en compréhension

Exemple : E étant l'ensemble des entiers naturels compris strictement entre 2 et 8, l'écriture en compréhension de E est : E= $\{n \in \mathbb{N} / \ 2 < n < 8\}$

On lit alors E est l''ensemble des entiers naturels n tels que $2 < n < 8$

2.3 Ensemble fini-Ensemble infini

Si on peut compter le nombre n d'éléments d'un ensemble E, on dit que cet ensemble est **fini**.

Le nombre d'éléments n, d'un ensemble fini E, est appelé **cardinal** de cet ensemble fini E et on note $Card\ E = n$.

Exemple : l'ensemble E des entiers naturels strictement compris entre 2 et 8, est un ensemble fini

$$E = \{3; 4; 5; 6; 7\}$$

E a 5 éléments qui sont 3, 4 ,5 ,6 et 7 ; son cardinal est 5 : $Card\ E = 5$.

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. On ne peut pas déterminer par comptage le nombre d'éléments d'un tel ensemble.

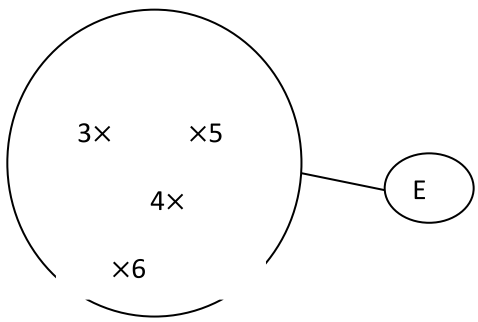
Par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble infini

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3, \dots, n, \dots\}$$

2.4 Diagramme de Venn d'un ensemble

Un ensemble E peut être représenté par un diagramme de Venn: à l'intérieur d'une courbe fermée, on place les éléments de E, l'emplacement de chacun étant marqué par une croix

$$E = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$$



2.5 Appartenance

Si a est un élément d'un ensemble A, on dit que a **appartient** à A et on note a ∈ A.

Le symbole ∈ est appelé symbole d'appartenance.

2.6 Ensembles particuliers

a) Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** et est noté Ø.

Exemple **:** Il n'existe aucun entier naturel compris entre 0,2 et 0 ,7. Donc l'ensemble des entiers naturels compris entre 0,2 et 0,7 est l'ensemble vide Ø.

b) Singleton

On appelle **singleton** un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

Exemple : l'ensemble des entiers naturels strictement compris entre 2 et 4 est le singleton $\{3\}$.

c) Paire

Un ensemble contenant deux éléments est appelé **paire.**

Exemple **:** l'ensemble des éléments du nombre 1122 est la paire {1,2}.

d) Produit cartésien

• Produit cartésien de deux ensembles :

Le produit cartésien d'un ensemble A par un ensemble B, noté $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que a est élément de A et b est élément de B.

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \ \ et \ \ b \in B\}$$

Remarque : Parenthèses et accolades

Le produit cartésien $B \times A$ est différent de $A \times B$, car un couple est ordonné :

$$\text{Si } a \neq b, (a, b) \neq (b, a).$$

Un couple étant ordonné, est écrit à l'aide de parenthèses ; l'ordre des éléments d'une paire n'étant pas important, une paire est écrite à l'aide d'accolades : si $a \neq b$, alors $\{a, b\}$= $\{b, a\}$

• Produit cartésien de trois ensembles :

$A, B \ et \ C$ étant trois ensembles, le produit cartésien $A \times B \times C$ est l'ensemble des triplets (a, b, c) tels que $a \in A, b \in B \ et \ c \in C$.

$A \times B \times C = \{(a, b, c)/a \in A, b \in B \text{ et } c \in C\}$

• **Produit cartésien de quatre ensembles :**

A, B, C et D étant quatre ensembles, le produit cartésien $A \times B \times C \times D$ est l'ensemble des quadruplets (a, b, c, d) tels que $a \in A, b \in B, c \in C \text{ et } d \in D$.

$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d)/a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}$

• **Produit cartésien de p ensembles :**

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$ sont p ensembles avec p ≥ 2, le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times A_3, \dots \times A_p$ est l'ensemble des listes $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ tels que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \dots, a_p \in A_p$.

Remarque **:** Une liste $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ contenant p éléments appelée p- liste ou p-uplet.

Exemple **:** Un couple (a, b) est une *2-liste.*

Un triplet (a, a, b) est une *3-liste.*

Un quadruplet (a, a, b, c) est une *4-liste*.

Remarque **:**

Le produit cartésien $A \times A \times A \times \dots \times A$de p ensembles tous égaux à A est noté A^P.

$A^P = \{(a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_p)/ a_1 \in A, \dots\dots\dots, a_p \in A\}$

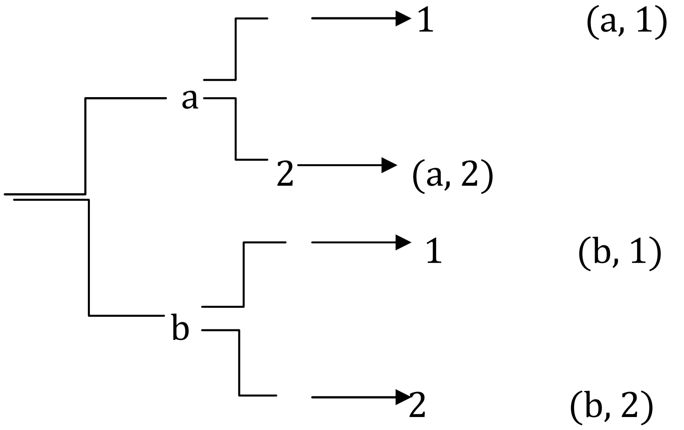
Exemples : Soient A={1,2} , B=$\{a, b\}$, C={3,4}

$A^2 = A \times A = \{(1,1) ; (1,2) ; (2,1); (2,2)\}$

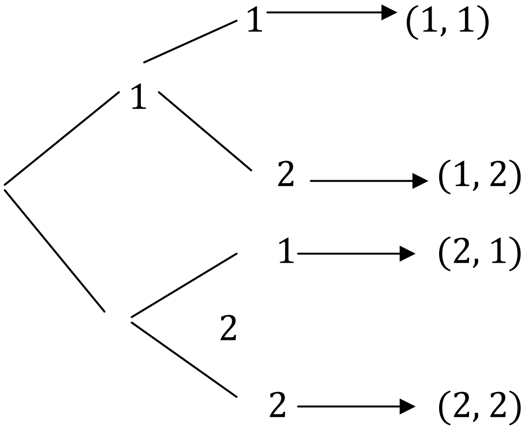
$A \times B = \{(1, a) ; (1, b) ; (2, a) ; (2, b)\}$

$B \times A = \{(a ; 1); (b , 1); (b , 2)\}$

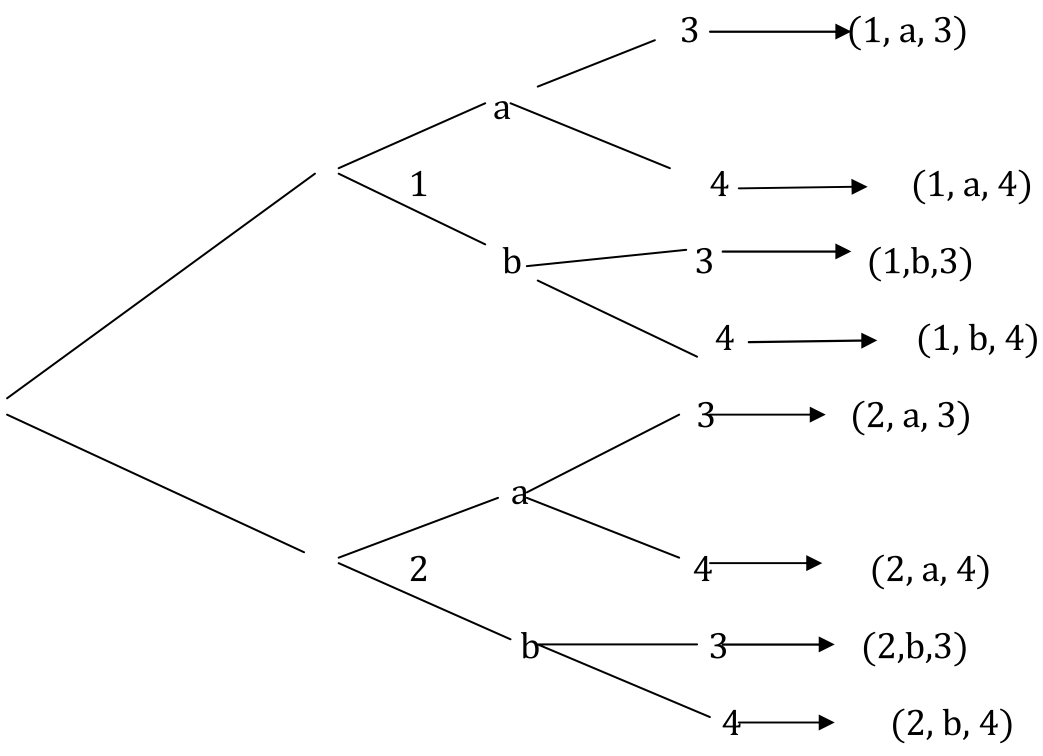
B×A peut être obtenu à l'aide d'un arbre de choix



L’arbre de choix donnant A^2 est le suivant :



L’arbre de choix donnant $A \times B \times C$ est le suivant :



$A \times B \times C$ = {(1, a, 3); (1, a, 4); (1, b, 3); (1, b, 4); (2, a, 3); (2, a, 4); (2, b, 3); (2, b, 4)}

Dans le plan muni d’un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), l’ensemble des couples coordonnées des points M(x,y) est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.6 Sous ensemble ou Partie d'un ensemble – Inclusion

a) Définition

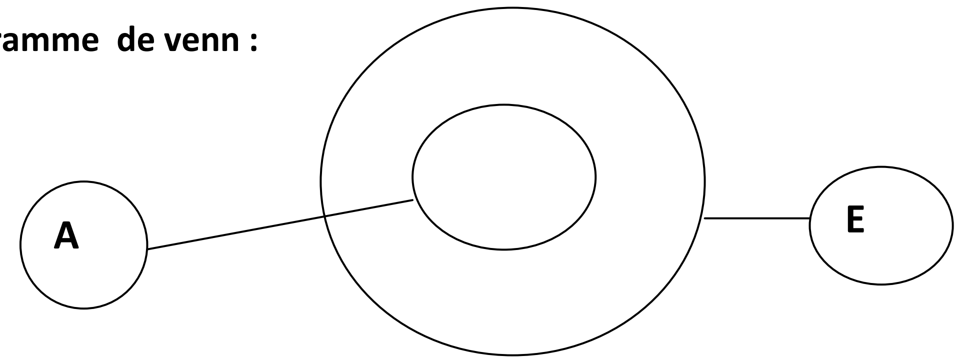
On dit qu'un ensemble A est une **partie** d'un ensemble E ou que A est un **sous-ensemble** de E ou que A **est inclus dans** E, lorsque tout élément de A est aussi élément de E.

Si A est une partie de E, on note A⊂E et on lit A est inclus dans E.

Le symbole ⊂ est le symbole de l'inclusion

$A \subset E$ signifie que : $\forall\, x \in A, x \in E$

Diagramme de venn :



b) ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E

Les parties ou sous ensembles E sont :

— la partie vide ∅ de E

— les singletons de E ou parties de$E$ contenant un seul élément de E

— les paires de E ou parties de E contenant deux éléments de E

…………………..

— la partie pleine E de E (E est une partie de lui-même, appelée partie pleine de$E$)

L'ensemble contenant toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ et est appelé **ensemble des parties de $\boldsymbol{E}$**.

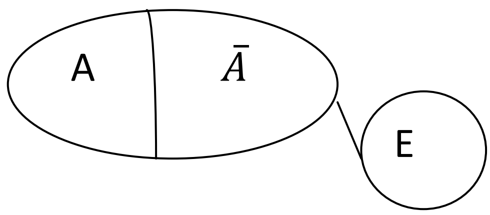
Exemple : Soit $E = \{1,2,3\}$. Alors $\boldsymbol{\mathcal{P}(E)} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}\}$

c) complémentaire d'une partie de E

Si A est une partie de E, on appelle **complémentaire** de A dans E, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

Le complémentaire de A dans E est noté C_E^A ou $\grave{\bar{A}}$ s'il n'y a pas d'ambigüité.

$$C_E^A = \bar{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$$

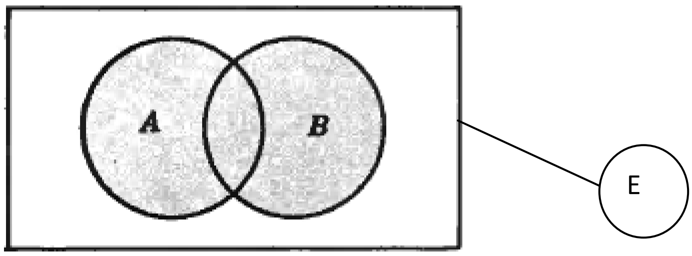


d) réunion – intersection

• **REUNION:** si A et B sont deux parties de E, on appelle réunion de A et B, la partie de E notée $A \cup B$ formée des éléments de A ou des éléments de B .

$$A \cup B = \{x \in E/x \in A \text{ ou} \in B\}$$

x ∈ $A \cup B$ ⟺(x appartient uniquement à A ou x appartient uniquement à B ou x appartient à la fois à A et à B)

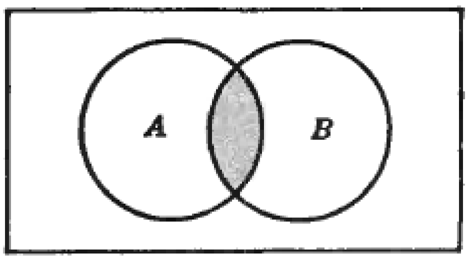


$A \cup B$ désigne la région grisée.

• **INTERSECTION :**

A et B étant deux parties d'un ensemble E, on appelle intersection de A et B, la partie de E notée $A \cap B$, formée des éléments communs à A et à B.

$$A \cap B = \{x \in E/x \in A \text{ et } x \in B\}$$



$A \cap B$ désigne la région en gris.

<u>Remarque</u>: **<u>Parties disjointes</u>** :
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont des parties disjointes de E.

c)PROPRIETES :
Soient A, B, et C trois parties d'un ensemble de E. On a les propriétés suivantes :

PROPRIETES DE L'INTERSECTION ET DE LA REUNION		
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associativité
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Commutativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivité
$A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$	
$A \cup C_E^A = E$	$A \cap C_E^A = \emptyset$	
$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$	$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$	Lois de Morgan

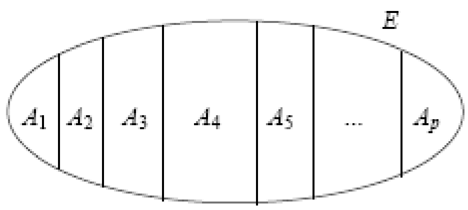
2.7 Partition d'un ensemble E

On appelle **partition** d'un ensemble E, un ensemble de parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ de E telles que :

−aucune des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ n'est vide

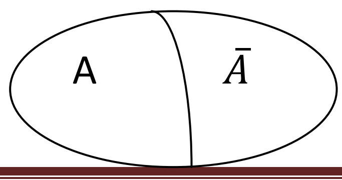
− deux parties quelconques parmi les parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont disjointes.

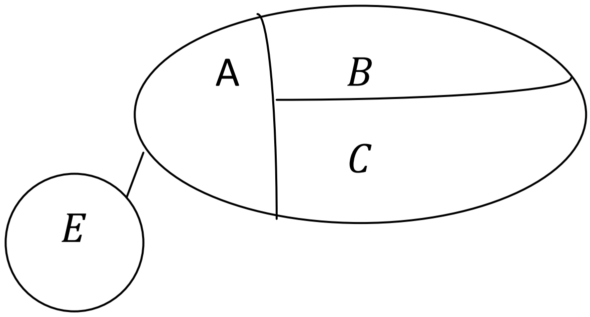
−$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = E$



<u>Exemples</u> :

Si $A \neq \emptyset$, alors $\{A, \bar{A}\}$ est une partition de E





{A, B, C} est une partition de E

2.8 PROPRIETES DES CARDINAUX DES ENSEMBLES FINIS

a)PRINCIPE ADDITIF

Soient A et B deux parties d'un ensemblefini E.

Si A∩B = ∅, alors : Card($A \cup B$) = Card A + Card B

Si deux ensembles finis sont disjoints, alors le cardinal de leur réunion, est égal à la somme de leurs cardinaux.

Cette propriété appelée **principe additif**, est admise.

b) Théorème : Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.

Si $\bar{A}$= C_E^A et B=C_E^B , alors :

- Card ($A \cap \bar{B}$) =Card$A$-Card ($A \cap B$)
- Card ($\bar{A} \cap B$) =Card$B$-Card (A∩B)

Démonstration:

-Considérons les parties $A \cap$ B et A $\cap \bar{B}$:

* $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})$=$(A \cap B) \cap (\bar{B} \cap A)$d'après la propriété de commutativité
= $[A \cap (B \cap \bar{B})] \cap A$d'après la propriété d'associativité.
= $(A \cap \emptyset) \cap A$
= $\emptyset \cap A$
=$\emptyset$

Comme $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})$=∅, Card [($A \cap$B) ∪(A∩ $\bar{B}$)]=Card(A⋂B) +Card(A⋂$\bar{B}$)

*($A \cap$B) ∪ ($\bar{A}$∩B)=($A \cup$A) ∩ $(A \cup \bar{B})$ ∩(B∪A) ∩(B∪ $\bar{B}$)
= $A \cap (A \cup \bar{B})$ ∩(B∪A)∩ E
=$[A \cap (A \cup \bar{B})]$ ∩(B ∪ A)
=A ∩(B ∪ A)
= A

On a alors : Card(A∩B) +Card (A∩ $\bar{B}$)= CardA

D'où

card (A∩ $\bar{B}$)=Card A −Card(A∩B)

De même

Card ($\bar{A}$ ∩B) =CardB −Card (A∩B)

<u>c) Généralisation du Principe additif</u>

Si A_1,A_2,…,A_n sont n parties de E, disjointes deux à deux, alors :

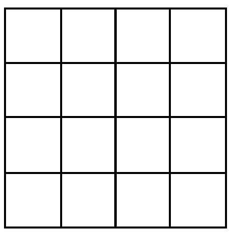
Card (A_1∪A_2∪…∪A_n)=CardA_1+CardA_2+…+CardA_n.

On en déduit la conséquence importante suivante:

Si A_1, A_2,…., A_n constituent une partition d'un ensemble E, alors :

Card(E) = card(A_1) + Card(A_2) +……+ Card (A_n) = $\sum_{i=1}^{i=n} Card(A_i)$.

<u>Exemple</u> : Combien y a-t-il de carrés sur la figure ci-dessous?



<u>Réponse</u> : Soit E l'ensemble de tous ces carrés. Notons A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont pas d'élément en commun et que leur réunion est égale à E). D'après le principe additif,

Card(E) = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3) + Card(A_4) = 16 + 9 + 4 +1 = 30.

d) Cardinal de A∪B (A et B ensembles quelconques)

A et B étant deux parties d'un ensemble fini E, on a :

A∩ $\bar{B}$, A∩B et B∩ $\bar{A}$ sont des parties de E disjointes deux à deux et (A∩ $\bar{B}$) ∪ (A∩B) ∪$(B \cap \bar{A})$=$A \cup B$

D'où, d'après le principe additif, on a :

Card (A∪B) =Card (A∩ $\bar{B}$) +Card (A∩B) +Card (B∩ $\bar{A}$)

=Card A − Card (A∩B)+Card (A∩B)+Card B − Card(A∩B)

Donc

$$\boxed{\text{Card}(A\cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A\cap B)}$$

Cette propriété est parfois appelée **formule des quatre cardinaux.**

e) Cardinal de $\bar{A}$= $C_E A$:

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors :

$$\boxed{\text{Card } \bar{A} = \text{Card } E - \text{Card } A}$$

Démonstration : on a $\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = E \end{cases}$

Donc Card(E)=Card(A∪ $\bar{A}$)

=Card A+Card $\bar{A}$; d'où Card ($\bar{A}$)=Card E−Card A

f) Cardinal de ∅

$$\boxed{\text{Card } \emptyset = 0}$$

Démonstration : on a $\begin{cases} E \cap \emptyset = \emptyset \\ E \cup \emptyset = E \end{cases}$

Donc Card E=Card (E ∪ ∅)

CardE=CardE+Card∅ ; on a alors Card∅=CardE-CardE=0

g) PRINCIPE MULTIPLICATIF

Soient A et B deux ensembles quelconques. Alors on a :

$$\boxed{\text{Card } (A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B}$$

Le cardinal du produit cartésien de deux ensembles est égale au produit de leurs cardinaux.

Cette propriété, appelée **principe multiplicatif**, est admise.

h) Généralisation du Principe multiplicatif

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles quelconques, on a :

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \ldots\ldots \times \text{Card}(A_n) = \prod_{i=1}^{i=n} Card(A_i)$$

Dans la pratique, ce principe s'applique sous la forme équivalente suivante:

> Si une situation comporte p étapes successives offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités, alors le nombre total d'effectuer cette situation dans l'ordre indiqué des étapes est : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

Exemples :

• *Le menu d'un restaurant propose un certain jour pour le repas de midi 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts. De combien de façons un client peut-il composer son menu ce jour-là ?*

Le choix d'un menu est une situation qui comporte 3 étapes :

– choix d'une entrée : 3 possibilités

– choix d'un plat de résistance : 4 possibilités

– choix d'un dessert : 2 possibilités.

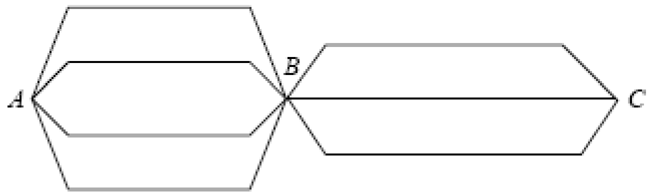
D'après le principe multiplicatif, le nombre total de choix possibles est :

$3 \times 4 \times 2 = 24$ menus différents.

• *Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?*

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

• *Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?*



Aller simple *A*-*C* : $4 \times 3 = 12$

Aller retour *A*-*C*-*A* : $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$.

N.B. Le principe multiplicatif est l'un des outils les plus fréquemment utilisés en dénombrement.

3. NOTIONS SUR LES APPLICATIONS

N.B *Ces notions seront davantage développées dans le chapitre 3 (Généralités sur les fonctions).*

3.1. Définition

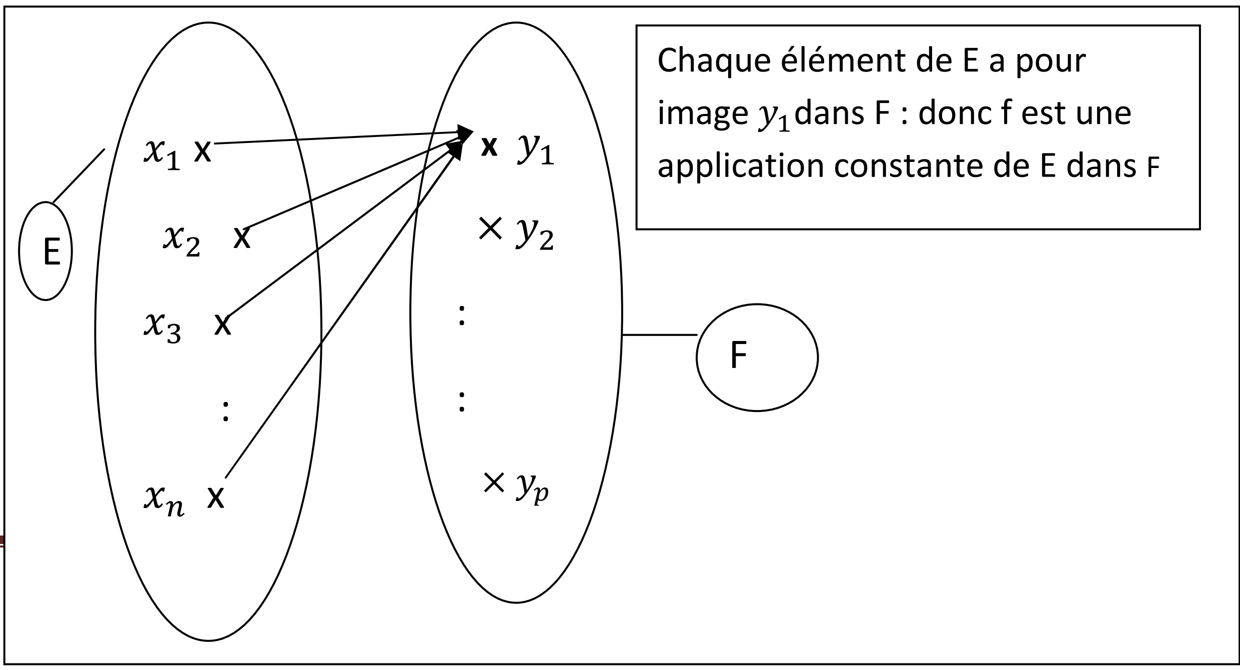
Une **application** f de E dans F est une correspondance (ou mode d'association) entre éléments de E et F telle que chaque élément x de E ait une image (c'est-à-dire un associé) et une seul y dans F, par f.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto f(x)=y \end{aligned}$$

3.2 Application constante de *E* dans *F*

Si tous les éléments de E ont la même image dans F, par une application f de E dans F , alors f est une application constante de E dans F.

Représentation par un diagramme sagittal :



3.3 Application injective

Une application f de E dans F est une **injection** de E dans F ou est une **application injective** de E dans F si et seulement si :

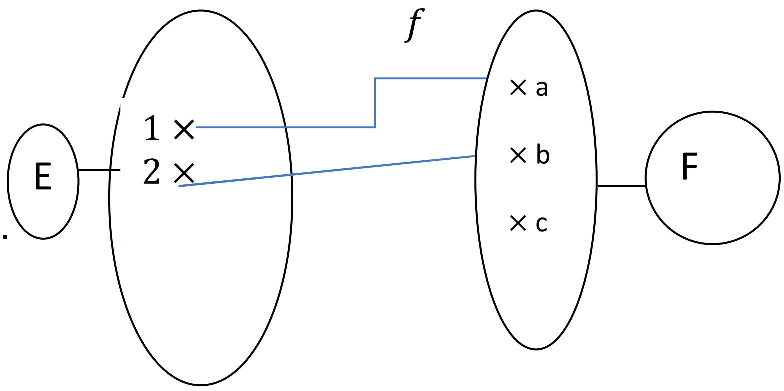
Deux éléments différents de E ont des images différentes dans F, par f ou bien : deux éléments de E qui ont la même image par f sont confondus.

$\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou bien : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Remarque **:** E et F étant deux ensembles finis, il existe une injection de E dans F si et seulement si CardE≤ CardF

Exemple :



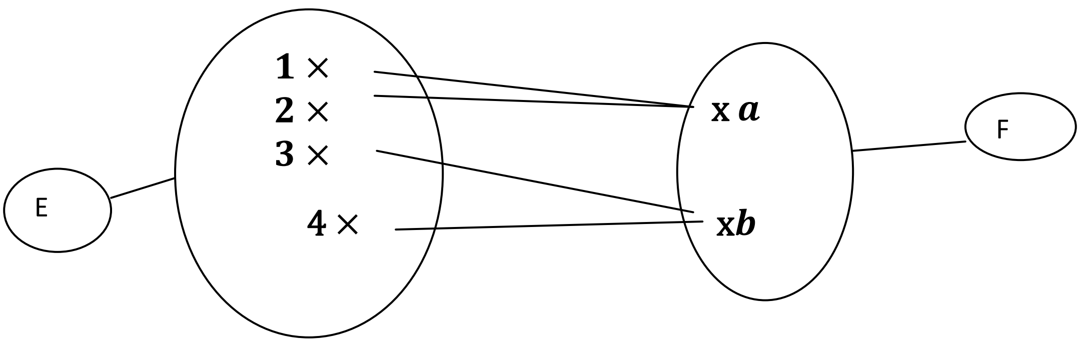
f est une injection de E dans F.

3.4 Application surjective

Une application f de E dans F est **surjective** ou est une **surjection** de E dans F si et seulement si tout élément y de F admet au moins un antécédent x dans E par f.

Remarque : Si E et F sont deux éléments finis, il existe une surjection de E dans F si et seulement si CardE≥ CardF.

Exemple :



f est une surjection de E dans F

3.5 Application bijective

Une application f de E dans F est une **bijection** de E dans F ou est une **application bijective** de E dans F si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Remarque:

-Si E et F sont des ensembles finis, il existe une bijection de E dans F si et seulement CardE=CardF.

-Si E et F sont des ensembles finis et si CardE=CardF, toute injection de E dans F est une bijection de E dans F.

-Si E et F sont des ensembles finis et si CardE=CardF, toute surjection de E dans F est une bijection de E dans F.

4. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement utilisé pour établir la véracité d'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel donné n_0. Le raisonnement par récurrence est souvent utilisé dans des situations de dénombrement.

Principe du raisonnement par récurrence :

Si P (n_0) est vraie et si la véracité de P(n) entraine celle de P(n+1) pour n>n_0, alors la propriété P(n) est vraie pour tout n≥n_0.

Le raisonnement par récurrence comporte les points suivants :

• Initialisation :

Elle consiste à vérifier que P (n_0) est vraie ou que la propriété P(n) est vraie pour n=n_0 c'est- à- dire pour la plus petite valeur de$n$.

• Hérédité :

Elle consiste à montrer que la propriété P(n) est héréditaire c'est-à-dire que si on suppose P(n) est vraie à un rang $n$strictement supérieur à n_0, alors elle est vraie au rang suivant n+1, c'est-à-dire que P(n+1) est vraie .

Remarque :

On appelle hypothèse de récurrence le fait de supposer qu'à un rang n supérieurà n_0 ,$P(n)$ est vraie ; cette hypothèse de récurrence doit être utilisée pour montrer que $P(n+1)$ est vraie pour établir l'hérédité.

Si $P\ (n_0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, alors $P(n)$ est vraie aux rangs n_0, n_0+1,n_0+2,… n,…

• **Conclusion :**

Le raisonnement par récurrence se termine par la conclusion suivante : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

5. LES OUTILS DE DENOMBREMENT

5.1 Arrangements d'ordre p ou p-arrangements

Soit un ensemble fini $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Nous nous intéressons ici aux p-listes formées d'éléments différents pris parmi les n éléments de Ω.

• Deux quelconques de ces p-listes sont différentes lorsque des éléments figurant dans l'une ne figurent pas dans l'autre.

• Deux quelconques de ces p-listes formées des mêmes éléments, sont différentes lorsque les éléments de l'une ne sont pas rangés dans le même ordre que ceux de l'autre.

De telles p-listes sont appelées **arrangements d'ordre p** ou **p-arrangements**.

a) Définition :

On appelle arrangement d'ordre p ou p arrangement de n éléments distincts $e_1, e_2, \ldots, e_n$, toute p liste formée de p éléments différents choisis parmi $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Exemple : Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

(1,2,3) et (3,2,1) sont des arrangements d'ordre 3, différents,des quatre éléments 1,2,3et4 ; on a $(1,2,3) \neq (3,2,1)$

(3,4), (4, 3) et (2,1) sont des arrangements d'ordre 2 différents, des quatre éléments 1, 2,3 et 4.

b) Exemples de situations où interviennent les arrangements

• Soit E = {a, b, c, …. x, y, z} . Les listes suivantes *matin*, *soir*, *jour* sont des arrangements à 4 et 5 éléments de E . par contre, *arrangement* n'est pas un arrangement à 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts .

• Je dois ranger 3 livres dans 5 tiroirs . Chaque tiroir peut contenir au plus un livre . Tout rangement (par exemple (T_2, T_3, T_5)) est un arrangement à 3 éléments de l'ensemble des 5 tiroirs .

• Au Tiercé, on essaie de deviner les trois premiers arrivés dans une course de 17 chevaux(sans ex-aequo) . tout pronostic est un arrangement à 3 éléments de l'ensemble des 17 chevaux .

• Tirages sans remise Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10 . On tire au hasard une première boule, on note son numéro, puis sans la remettre dans l'urne, on tire à nouveau une deuxième boule (qui ne peut donc être identique à la première) . On continue à procéder ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu une quatrième boule . Chaque tirage (ex : (5, 2, 3, 7)) peut être assimilé à un arrangement à 4 éléments de {1, 2, ….9, 10} .

c) Nombre d'arrangements d'ordre p de n éléments différents :

Exemple : si l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3,4\}$

Déterminons le nombre d'arrangements (a, b ,c) d'ordre 3 des 4 éléments de Ω.

− Le premier élément a d'un tel arrangement peut être 1 ou 2 ou3 ou 4 donc il y a 4 façons de le choisir

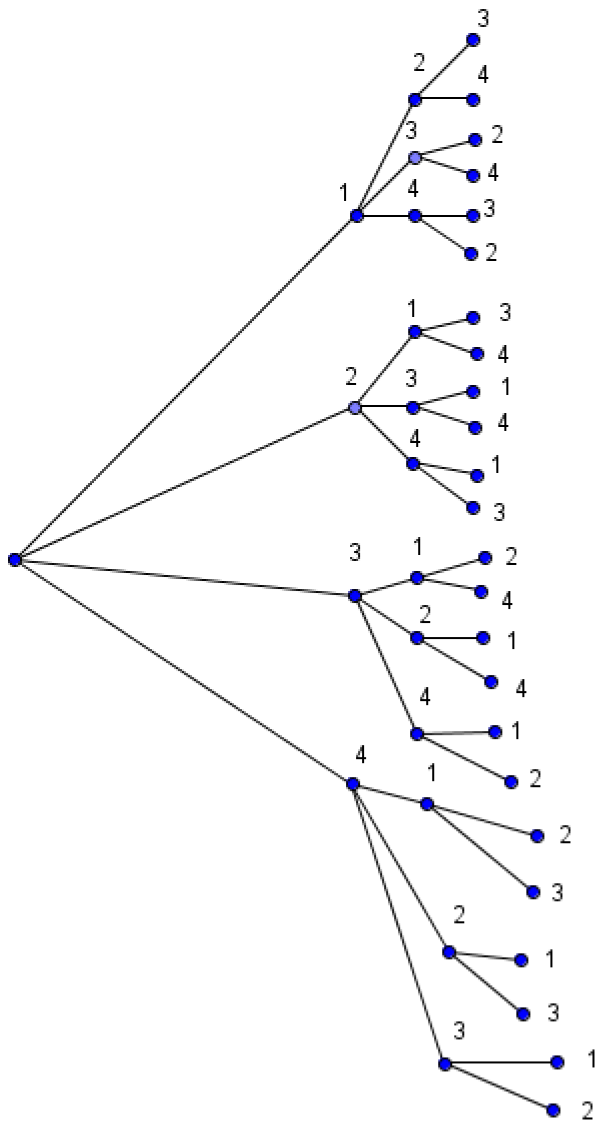
− le deuxième élément b peut être tout sauf a ; une fois a choisi, il reste 3 façons de l'avoir.

− le troisième élément c, une fois que $a\ et\ b$ sont choisis, peut être obtenu de 2 façons.

Cette situation peut se traduire par un arbre de choix :

Cet arbre est composé de 24 chemins, chacun de ces chemins étant formé de 3 branches chaque chemin correspondant à un arrangement et un seul et réciproquement.

Par exemple le chemin 2 – 3 — 1 donne l'arrangement (2, 3, 1)
Le chemin 4 – 3 – 2 donne l'arrangement (4, 3, 2).



Le nombre d'arrangements d'ordre 3 des 4 éléments 1, 2,3 et 4, est donc égal au nombre de chemins sur cet arbre, soit $4 \times 3 \times 2 = 24$

D'après le Principe multiplicatif (voir §2.8 h.),pour obtenir le nombre d'arrangements (a, b, c) d'ordre 3, des 4 éléments 1, 2, 3 et 4, on fait le produit $n_1 \times n_2 \times n_3$ où n_1 est le nombre de façons d'obtenir a, n_2 celui d'avoir b, n_3 celui d'avoir c.

Cet exemple peut se généraliser et en utilisant toujours le principe multiplicatif : le nombre de p-arrangements de n éléments distincts $e_1, e_2, \dots, e_n$ est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

où n_i est le nombre d'avoir le i *éme* élément d'un tel p-arrangement, pour i allant de 1 à n.

Donc le nombre de p-arrangements de n éléments distincts $e_1, e_2, \dots, e_n$ est

$$\boldsymbol{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)}.$$

Ce Nombre entier naturel noté $\boldsymbol{A_n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\ et\ 2 \leq p \leq n$.

A_n^p est le produit de p facteurs entiers décroissants à partir de n.

Le nombre de p-arrangements de n éléments distincts $e_1, e_2, \dots, e_n$ est A_n^ppour $p \leq n$.

<u>**Tirages successifs sans remise :**</u>

Comme on l'a vu dans les exemples du b), tirer successivement p éléments parmi n, avec $p \leq n$, revient à les tirer un à un et en ne remettant pas l'élément tiré avant le tirage suivant. En les tirant successivement on établit un ordre de sortie entre ces éléments : on connait le premier élément tiré, le deuxième, …,le $p-$ *iéme*. Puisque les tirages se font sans remise, on obtient p éléments différents.

Finalement le résultat obtenu est une p-liste formée d'éléments différents pris parmi n éléments ou un p-arrangement ; on en déduit que :

Le nombre de façons de tirer successivement sans remise $\boldsymbol{p}$ éléments parmi $\boldsymbol{n}$, est $\boldsymbol{A_n^p}$, avec $p \leq n$.

<u>**Nombre d'injections :**</u>

Si $p \in \mathbb{N}$, si $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq n$, le nombre d'injections d'un ensemble fini E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n, est A_n^p.

<u>**Démonstration :**</u> Soit E= $\{x_1, x_{2,\dots,x_p}\}$, F = $\{y_1, y_{2,\dots,y_n}\}$avec $1 \leq p \leq n$.

Une injection de E dans F est entièrement déterminée si on connait la p-liste des images de $x_1, x_{2,\dots,x_p}$:

- ✓ Il ya n façons de choisir l'image de x_1, qui peut- être $y_1$ou y_2,ou …ou y_n
- ✓ Une fois que l'image de x_1 est choisie, il ya n-1 façons de choisir celle de x_2 car deux éléments différents ont des images différents par une injection

✓ Une fois qu'on a fixé les images de x_1 et x_2, il reste n-2 choix possibles pour l'image de x_3

✓ Une fois qu'on a fixé les images de $x_1, x_{2,\dots,} x_{p-1}$, il ya n- $p + 1$ choix possibles pour l'image de x_p.

Donc d'après le principe multiplicatif, le nombre d'injections de E dans F est

$n(n$-1) $(n$-2) x…x$(n$- $p + 1$)= A_n^p

5.2 Permutations

a)Définition : On appelle permutation de n éléments différents $e_{1,}e_{2,} \dots , e_n$ tout d'arrangement d'ordre n de ces n éléments.

En d'autres termes, une permutation est un arrangement de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.

Exemples :

a) Les permutation des 3 éléments 1,2,3 sont : (1,2,3), (1,3 ,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1) et (3,1,2).

b) Considérons l'ensemble des lettres a, b, c et d. Alors : bdca, dcba et acdb sont des permutations des 4 lettres (considérées ensemble) ;

Exemples de situations où interviennent les arrangements et les permutations

• Soit E = {s, u, c, r, e }. Les anagrammes du mot *sucre* sont des permutations de E.

• On veut installer 7 personnes P_1, P_2,……P_7 sur 7 chaises . Chaque répartition des personnes peut être considéré comme un arrangement à 7 éléments de l'ensemble E = { P_1, P_2,……P_7 } c'est-à-dire comme une permutation de E

b) Nombre de permutations de n objets

D'après le § 5.1, le nombre de permutations de n éléments différents e_1,e_2, … , e_n est le nombre noté :

$$\boldsymbol{n\,! = 1 \times 2 \times \dots . \times n}$$

(*C'est le produit de tous les entiers de 1 jusqu'à n*)

En effet, pour l'obtenir, on remplace p par n dans A_n^p.
Cet entier naturel est appelé « factorielle n » :

• Si $n \geq 2$, le produit $n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ est appelé factorielle n et est noté $n!$

Si $n \geq 2, \quad n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

• Par convention $0! = 1$ *et* $1! = 1$

Règle de calcul sur $n!$:

Si n *et* p sont deux entiers naturels tels que$2 \leq p \leq n$, alors $n!$ peut être obtenu à l'aide de $p!$

On a :

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (p+1)p!}$$

Exemple : $7! = 7 \times 6!$

$$7! = 7 \times 6 \times 5!$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4!$$

Exercice d'application :

Simplifier $\frac{n!}{(n-1)}, \frac{n!}{(n-p)}$ pour $2 \leq p \leq n$

Réponses : $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

D'où $\frac{n!}{(n-p)!}$=A_n^psi $2 \leq p \leq n$

Remarque :

-Si $p \in \mathbb{N}, si\ n \in \mathbb{N}\ \ et\ 2 \leq p \leq n, A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Cette formule reste vraie pour p=0 ou pour p=1

$\forall\ n \in \mathbb{N}$,$A_n^0$=$\frac{n!}{(n-0)!}$=$\frac{n!}{n!}$=1

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

5.3 Nombre de p-listes-cardinal d'un produit cartésien

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$, p ensembles finis dont les cardinaux respectifs sont $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des p-listes $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,… ,$x_p \in E_p$.

Il ya n_1 façons de choisir x_1 dans E_1, n_2 façons de choisir x_2 dans E_2,… , n_p façons de choisir x_p dans E_p.D'après le principe multiplicatif :

Card($E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$)$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

D'où Card($E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$)= (Card$E_1$) x (Card$E_2$) x … x (Card$E_p$)

Le nombre de p-listes dont le $1^{ére}$ élément est pris dans E_1, le $2^{éme}$ dans E_2,… ,le $p^{ième\neq}$ dans E_p est : (CardE_1) x (CardE_2) x … x (CardE_p)

Remarque: Si les ensembles E_1, E_2 , … et E_p sont égaux à un ensemble E de cardinal n, alors : $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = E^p$ et

Card(E^p)=($Card E$)^p=n^p

On en déduit que :

Le nombre de p-listes d'éléments d'un ensemble fini E de cardinal n, est n^p

Tirages successifs avec remise :

Tirer successivement avec remise p éléments parmi n éléments différents e_1, e_2 ,…,e_n, revient à les tirer un par un (donc avec ordre), en remettant à chaque fois l'élément tiré avant de tirer le suivant.

On obtient une p-liste formée d'éléments pas nécessairement distincts : on peut tirer un élément, le remettre, le tirer à nouveaux, le remettre, le tirer une $3^{éme}$ fois, …

On en déduit que :

> Le nombre de façons de tirer successivement avec remise p éléments (pouvant se répéter) parmi n éléments distincts, est n^p

<u>Attention :</u> En effectuant p tirages successifs avec remise dans une urne contenant n objets, on peut avoir $p > n$.

<u>Exemple :</u> Une urne contient deux boules a et b.

On tire successivement avec remise 3 boules de cette urne.

Les résultats possibles sont : (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (b,a,a), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,b) et (b,b,a).

Le nombre de résultats possibles est : $2^3 = 8$.

5.4 COMBINAISONS D'ORDRE p

<u>a) Définition :</u>

Soients $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison d'ordre p ou p-combinaison d'un ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$ de cardinal n, toute partie ou sous-ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$ contenant p éléments.

L'ensemble des combinaisons de $\boldsymbol{\Omega}$ est $P(\boldsymbol{\Omega})$ contenant :

— la partie vide $\boldsymbol{\Phi}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ ou combinaison d'ordre zéro de $\boldsymbol{\Omega}$

— les singletons ou combinaisons d'ordre 1 de $\boldsymbol{\Omega}$

— les paires ou combinaisons d'ordre 2 de $\boldsymbol{\Omega}$

— ………………………………………………………………

— ………………………………………………………………

— la partie pleine ou combinaison d'ordre n de $\boldsymbol{\Omega}$

<u>b) Nombre de combinaison d'ordre p</u>

Soit un ensemble fini $\boldsymbol{\Omega} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Chaque combinaison d'ordre p de Ω, donne $p!$ arrangements d'ordre p en considèrent les $p!$ permutations des p éléments de cette combinaison.

Le nombre de combinaisons d'ordre p de Ω étant noté C_n^p alors

On a: $A_n^p = (p!)C_n^p$ ou encore $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Si $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n$, alors le nombre de combinaisons d'ordre p d'un ensemble Ω de cardinal n, est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

c) Tirage simultané :

En tirant simultanément p éléments parmi n éléments différents, ces p éléments sont différents et non ordonnés car on les tire d'un seul coup et on ne peut pas établir un ordre de sortie entre ces éléments.

On obtient alors une combinaison d'ordre p de l'ensemble Ω des n éléments.

On en déduit que : le nombre de façons de tirer simultanément p élément parmi n éléments différents est C_n^p.

d) Propriétés des coefficients binomiaux C_n^p

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $C_n^n = C_n^0 = 1$

Démonstration : Un ensemble Ω de cardinal n, admet une seule partie contenant n éléments, la partie pleine Ω de Ω ; or le nombre de partie de Ω contenant n éléments est C_n^n ; d'où $C_n^n = 1$

Le nombre de parties de Ω contenant 0 éléments est C_n^0 or Ω n'a qu'une seule partie contenant 0 éléments, la partie vide, d'où $C_n^0 = 1$

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $C_n^1 = C_n^{n-1}$

Démonstration :

C_n^1 est le nombre de singletons de Ω ; or Ω admet n singletons, d'où $C_n^1 = n$

Chaque singleton de Ω admet un complémentaire est un seul dans Ω, de cardinal n-1 ; donc le nombre de singletons de Ω et le nombre de parties de Ω contenant n-1 éléments sont égaux, d'où :

$$\boxed{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$$

3)$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ si $p \leq n$, alors $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

Démonstration : on a $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$

Donc : le nombre de parties à p éléments est égal au nombre de parties à $n-p$ éléments , pour un ensemble Ω de cardinal n.

4) Si $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$, $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$

Démonstration :

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-p)(n-1)!+p(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

5) Triangle de pascal :

Le tableau triangulaire suivant où on a rangé les C_n^p, est appelé triangle de Pascal.

C_0^0						
C_1^0	C_1^1					
C_2^0	C_2^1	C_2^2				
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
...	...	...	...	...	...	

La règle clé de ce tableau est la formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ qu'on retrouve à tous les niveaux :

Tout élément du triangle de Pascal est la même somme de celui qui est au dessus de lui et de celui qui est à gauche de ce dernier.

En remplaçant chaque élément du triangle de Pascal par sa valeur, on retrouve le tableau suivant :

1

1 1 C_3^2

1 2 1

1 3 1 C_5^3

1 4 6 4 1 C_6^4

1 5 10 5 1

1 6 15 15 6 1

. ...

<u>**Remarque :**</u>

Le triangle de pascal a été établi à partir de la règle $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Il permet de calculer C_n^p pour n et p connus

n est le $2^{éme}$ élément pour une ligne donnée et p varie de 0 à n

Ainsi que $C_6^4=15$, $C_5^3=10$, $C_3^2=3$

6) <u>Formule du binôme de newton :</u>

a) La formule du binôme de newton est le développement de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$(a+b)^n = C_n^0\, a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2\, a^{n-2}\, b^2 + C_n^3\, a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n$

Si on remplace b par $-b$, on a : $(-b)^k = (-1)^k\, b^k$ et $(-b)^n = (-1)^n b^n$ et alors :

$(a-b)^n = C_n^0\, a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2\, a^{n-2}\, b^2 - C_n^3\, a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^k a^{n-k} b^k + \ldots$
$+ (-1)^n C_n^n a^0 b^n$

Cette formule se démontre par récurrence, en utilisant la formule $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

b) Si $a = b = 1$, la formule du binôme de newton, donne :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Remarque :

$(a+b)^n$est une somme de monôme de la forme $C_n^p a^{n-p} b^p$ de coefficient C_n^p.

De ce fait les C_n^p intervenant dans la formule du binôme sont appelés **coefficients binomiaux**.

ANAGRAMMES

I) Définition :

On appelle anagramme d'un nombre N de n chiffres, tout nombre N' de n chiffres, formé des mêmes chiffres que N, chaque chiffre figurant dans N' autant de fois que dans N.

On appelle anagramme d'un mot M de n lettres, tout mot M' de n lettres, formé des mêmes lettres que M, chaque lettre figurant dans M' autant de fois que dans M.

Remarque :

Un nombre est considéré comme anagramme de lui-même et chaque mot est anagramme de lui-même.

Exemples:

Les anagrammes du mot BAT sont :$BAT, BTA, ATB, ABT, TAB, TBA$

Le nombre 1122 est anagramme du nombre 2211

II) Nombre d'anagrammes :

1) Le nombre d'anagrammes d'un nombre de n chiffres distincts (ou d'un mot de n lettres différents) est $n!$

Démonstration :

Le nombre d'anagrammes d'un nombre de n chiffres distincts est égal au nombre de permutations de ces n chiffres, c'est-à-dire n !

2) Le nombre d'anagramme d'un nombre de n chiffres ou figure p fois un troisième chiffre donné,q fois un $2^{éme}$ chiffre donné, r fois un troisième chiffre, avec $p+q+r=n$, est $\frac{n!}{p!q!r!}$

Démonstration :

On peut considérer un nombre de n chiffres comme formé de n places, et on met un chiffre et un seul à chaque place pour le constituer.

- Il faut choisir simultanément p places parmi ces n places ou on met la même lettre; le nombre de façons de les placer est donc C_n^p.
- On choisit ensuite simultanément q places parmi les $n-p$ placesrestantes ou met la même lettre différente de la première.

Soit C_{n-p}^q façons de les placer.

- On choisit ensuite r places parmi les r places restantes ou on place la $3^{éme}$ lettre ; soit C_r^r façons de les choisir.

Donc le nombre d'anagramme de ce mot est

C_n^p x C_{n-p}^q x $C_r^r=\frac{n!}{p!(n-p)}$ x $\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)}$ x $1=\frac{n!}{p!q!r!}$

Exemples :

Le nombre d'anagrammes de 221 est :$\frac{3!}{2!1!}=3$

Ces 3 anagrammes sont : 221, 212, et 122

- L e nombre d'anagrammes $MATH$ est $4!=24$

Résumé : On distingue trois types de tirages :

Types de tirages	**Successsif avec Remise**	**Successif sans Remise**	**Simultané**
Un résultat	Une p-liste avec répétition possible	Une p-liste sans répétition	Une partie à p éléments
Ordre	L'ordre compte	L'ordre compte	L'ordre ne compte pas
Nombre de tirages de p éléments parmi n	n^p	A_n^p	C_n^p

EXERCICES ET PROBLEMES

ENSEMBLES ET CARDINAUX

EXERCICE 1

Soit E = {1,2, . . . , 8,9}, A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8} et C = {3, 4, 5, 6}.
Déterminer : **(i)** $\bar{A}$, **(ii)** A ∩ C, **(iii)** $\overline{A \cap C}$, **(iv)** A ∪ B, **(v)** B ∩ $\bar{C}$.

EXERCICE 2

Soit E = {a, b, c, d, e}, A = {a, b, d} et B = {b, d, e}. Déterminer :
(i) A ∪ B **(ii)** B ∩ A **(iii)** $\bar{B}$ **(iv)** B ∪ $\bar{A}$ **(v)** $\bar{A}$ ∩ B **(vi)** A ∪ $\bar{B}$
(vii) A ∩ $\bar{B}$ **(viii)** $\bar{A} \cap \bar{B}$ **(ix)** $\overline{A \cup B}$ **(x)** $\bar{A} \cup \bar{B}$ (xi) $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$

EXERCICE 3

Dans un groupe de 20 camarades, 12 jouent au football et 11 jouent au basket, 4 jouent à la fois au football et au basket. Dénombrer les élèves qui :
1) jouent seulement au football.
2) ne jouent ni au football ni au basket.

EXERCICE 4

Dans une classe de 30 élèves, chaque élève étudie au moins une des trois langues : anglais, allemand, espagnol. Un élève étudient les trois langues, 17 élèves étudient l'anglais, 8 étudient l'anglais et l'allemand, 5 étudient l'anglais et l'espagnol, 17 élèves étudient exactement 2 langues, 26 élèves étudient l'allemand ou l'anglais.
1°) Combien d'élèves étudient l'allemand ?
2°) Combien d'élèves étudient l'espagnol ?
3°) Combien d'élèves étudient une seule langue ?

EXERCICE 5

Parmi 40 personnes :
– 8 parlent le Poulaar, 15 le Diola et 8 le Sereer.
– 5 parlent le Poulaar et le Diola.
– 4 parlent le Diola et le Sereer
– 2 parlent le Poulaar et le Sereer.
– 2 parlent les trois langues.
1°) Combien de personnes parlent au moins l'une des trois langues ?
2°) Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

EXERCICE 6

Un certain produit se vend en liquide ou poudre.
Un sondage fait ressortir les faits suivants :
– le tiers des personnes interrogées n'utilise pas la poudre.
– les deux septièmes des personnes interrogées n'utilise pas le liquide.
– 427 personnes utilisent le liquide et la poudre.
– le cinquième des personnes interrogées n'utilise pas du tout le produit.
Combien de personnes ont été interrogées au cours de ce sondage ?

EXERCICE 7

Dans un lycée de 800 élèves, il y a 60 enseignants et 30 personnels (administratifs et de service).
60% de l'ensemble des personnes travaillant dans le lycée(enseignants, élèves et personnels) sont des femmes.
Parmi les enseignants, 55% sont des femmes, et parmi le personnel il y a 14 hommes.
1°) Combien y -t-il de femmes dans l'ensemble des personnes travaillant dans le lycée ? Combien y -t-il de femmes enseignantes ?
2°) Représenter ces données dans un tableau à double entrée que l'on complètera.
3°) Représenter ces données par un arbre que l'on complètera.

PRODUIT CARTESIEN ET PARTITION

EXERCICE 8

Soit A = {1, 2, 3}, B = {2, 4} et C = {3, 4, 5}. Déterminer A x B x C.
On pourra utiliser un diagramme arborescent.

EXERCICE 9

Soit A = {a, b}, B = {2, 3} et C = {3, 4} . Déterminer :
(i) $A \times (B \cup C)$, **(ii)** {$A \times B) \cup (A \times C)$, **(iii)** $A \times (B \cap C)$, **(iv)** $(A \times B) \cap (A \times C)$

EXERCICE 10

Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble E dans les cas suivants :
1°) Le nombre de couples de E est 56.
2°) Le nombre de triplets de E est 120.

EXERCICE 11

On joue avec deux dés. Le dé n° 1 est cubique et ses 6 faces sont numérotées de 1 à 6.
Le dé n° 2 est tétraédrique et ses 4 faces sont notées A, B, C, D.
Ecrire dans un tableau tous les tirages possibles et les dénombrer.

EXERCICE 12

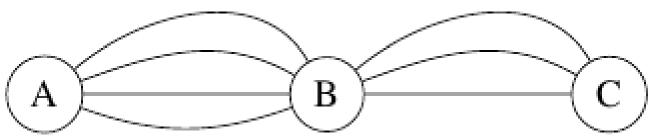
Un établissement propose à ses élèves le choix de langues suivant :
Anglais (A) , Allemand (D) , Espagnol (E) , Italien (I) , Russe (R).
Un élève doit choisir deux langues vivantes : LV1 et LV2.
1°)En utilisant un diagramme en arbre, énumérer et dénombrer tous les choix possibles
(On remarquera qu'un élève ne peut pas choisir la même langue en LV1 et LV2)
2°)Même question pour le choix de trois langues LV1, LV2, LV3.

EXERCICE 13

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes auxquelles il doit répondre par "Oui" ou "Non"
Un candidat répond au hasard. En utilisant une disposition en forme d'arbre, déterminer combien de possibilités il a de répondre au questionnaire.

EXERCICE 14

La figure suivante représente trois villes A, B et C ainsi que les routes qui les relient.



Déterminer :
1°) le nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ?
2°) le nombre d'itinéraires « aller retour » A-B-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?

EXERCICE 15

Un fabriquant de chaussures réalise trois modèles différents . De plus, il peut faire chacun d'eux en trois couleurs et en quatre tailles différentes . Combien de paires de chaussures distinctes peut-t-il proposer à sa clientèle ?

EXERCICE 16

On veut choisir deux personnes de nationalités différentes parmi 5 camerounais, 10 malgaches et 6 sénégalais. Combien y a t-il de possibilités ?

EXERCICE 17

Combien de nombres peut-on former avec des chiffres distincts choisis parmi les éléments de E = {1; 2; 3; 4; 5} ?

p-LISTES, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

EXERCICE 18

En informatique on utilise le système binaire pour coder les caractères.
Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.
Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

EXERCICE 19

On jette six fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les résultats possibles.
1°) Calculer le nombre de résultats possibles.
2°) Calculer le nombre de façons d'obtenir :
- **a)** le même numéro six fois ;
- **b)** le numéro 5 exactement une fois.
- **c)** le 6 suivi du numéro 5 .

EXERCICE 20

Une urne contient 3 boules vertes, 5 boules jaunes, 4 rouges et 2 noires. On tire successivement avec remise 4 boules de l'urne.
Déterminer le nombre de tirages :
comportant :
1°) a) 4 jaunes
- **b)** 4 vertes
- **c)** 4 boules de même couleur
- **d)** 4 boules de couleurs distinctes deux à deux.
- **e)** 3 jaunes et une verte dans cet ordre
- **f)** 3 jaunes et une verte dans un ordre quelconque.
- **g)** 2 jaunes et 2 vertes dans cet ordre
- **h)** 2 jaunes et 2 vertes

2°) Reprendre la question 1° dans le cas où les 4 boules sont tirées successivement sans remise.

EXERCICE 21

Huit coureurs, 3 Sénégalais et 5 étrangers participent à une course et sont classés de 1 à 8.
1°) Quel est le nombre d'arrivées possibles ?

2°) Quel est le nombre d'arrivées lorsque la course est gagnée par un Sénégalais ?
3°) Quel est le nombre de possibilités pour qu'il y ait un Sénégalais et un seul parmi les trois premiers coureurs ?

EXERCICE 22

Un homme d'affaires doit se rendre dans quatre villes A, B, C et D. Combien de voyages différents peut-il réaliser sachant que :
1°) il peut commencer et finir par la ville qu'il veut ?
2°) il doit commencer par D.
3°) il doit commencer par D et finir par A ?

EXERCICE 23

Les numéros d'un réseau téléphonique sont tous formés de 9 chiffres choisis parmi les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .
Exemples de numéros théoriquement acceptés :
000 00 00 ; 961 52 87 ; 022 23 33 ; etc. . . .
Calculer le cardinal des ensembles suivants :
Ω : la capacité théorique du réseau.
A : ensemble des numéros composés de 9 chiffres distincts.
B : ensemble des numéros composés de 9 chiffres identiques.
C : ensemble des numéros ne contenant aucun chiffre 0.
D : ensemble des numéros contenant exactement un 0.
E : ensemble des numéros contenant au moins un 0.
F : ensemble des numéros contenant au plus un 0.
G : ensemble des numéros contenant au moins deux 0.
H : ensemble des numéros pairs, chaque numéro étant strictement inférieur à 7000000.
I : ensemble des numéros commençant par un chiffre pair et finissant par un chiffre impair strictement inférieur à 9.

EXERCICE 24

Une classe de 30 élèves, 18 filles et 12 garçons, doit élire un comité comprenant un président, un trésorier et un secrétaire (sachant qu'il n y a ni cumul ni discrimination).
1°) Combien de comités peut-on ainsi constituer ?
2°) Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X?
3°) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est une fille et le secrétaire un garçon ?
4°) Sachant que le président est un garçon, le secrétaire une fille, et que M^{r} X ne veut pas faire partie du même comité que M^{elle} Y, quel est le nombre de comités possibles ?

EXERCICE 25

Le code PIN d'un téléphone portable est un nombre de quatre chiffres choisis parmi 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,6 ,7 , 8 et 9 .
1. a. Quel est nombre de codes possibles ?
b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres deux à deux distincts ?
2. Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1 ,9 ,8 et 5 mais il ignore l'ordre des chiffres.
a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?
b. Si le premier code introduit n'est pas bon, il doit attendre 2 mn avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est 4mn ; entre le 3ème et 4ème essai est de 8 mn. (Le délai d'attente double entre deux essais successifs). Combien de codes peut-il introduire au maximum en 24 h ?

EXERCICE 26

Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 5 de philosophie, 1 d'anglais. Il veut ranger ces livres sur une étagère.
1. De combien de fac¸on peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2. De combien de façons peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie, puis ceux de maths, et enfin ceux de philo ?
3. De combien de façons peut-il le faire s'il range les livres par matière ?

EXERCICE 27

Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de sorte que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

EXERCICE 28

4 sénégalais, 3 maliens et 5 gambiens doivent s'asseoir sur un même banc. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

COMBINAISONS

EXERCICE 29

Une urne contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4
On tire simultanément 3 jetons de l'urne.
Combien y a t il de tirages contenant :
(a) 3 jetons de la même couleur ?

(b) contenant le vert numéro 1 et le rouge numéro 1 ?
(c) un seul jeton portant le numéro 1 ?
(d) exactement un jeton vert et un jeton numéro 1 ?

EXERCICE 30

On considère un jeu classique de 32 cartes . On rappelle que celles-ci peuvent être de 4 couleurs (cœur, pique, trèfle, carreau) comportant chacune 8 valeurs (7, 8, 9, 10, Valet, Dame , Roi , As)
On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Dénombrer tous les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages comportant :
(a) 5 cartes de même couleur
(b) 4 cœurs et un pique
(c) 2 couleurs dont l'une revient 4 fois
(d) Exactement 4 trèfles et un roi .

EXERCICE 31

On tire simultanément 3 boules d'une urne contenant 3 boules rouges 4 boules blanches et 4 boules noires
Déterminer le nombre de résultats possibles.
On note : A l'ensemble des résultats unicolores,
B l'ensemble des résultats tricolores,
C l'ensemble des résultats contenant 2 boules rouges et une boule noire,
D l'ensemble des résultats contenant 2 boules rouges et une boule d'une autre couleur.
E l'ensemble des résultats contenant 2 boules d'une même couleur et une boule d'une autre couleur.
1. Calculer cardA, cardB, cardC, cardD et cardE
2. Soit F l'ensemble des résultats contenant au moins une boule noire
Définir F et calculer cardF
En déduire cardF
3. Soit G l'ensemble des résultats contenant au plus 2 boules rouges.
Définir G et calculer cardG
En déduire cardG

DIVERS

I-Calculer:A_5^3 ,C_7^4 ,A_5^4-C_8^3+5! ,$\frac{10!}{8!}$, $\frac{13!}{5!}$

II-Donner la valeur exacte de chacun des réels suivants:

C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5 ,C_7^0-C_7^1+C_7^2-C_7^3+C_7^4-C_7^5+C_7^6-C_7^7, C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5,
C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6

III-Exprimer les réels suivants sous forme d'un polynôme en n ou d'une fraction rationnelle en n :

$\frac{n!}{(n-1)!}$,$\frac{n!}{(n-2)!}$,$\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$,$\frac{A_n^4}{(n-1)!}$, $\frac{6C_n^3}{A_n^5}$,C_n^3-3C_n^2+ 2, C_n^4+3A_n^3-2$\frac{n!}{(n-3)!}$

IV-Exprimer les réels suivants en fonction de 2^n, $n \in \mathbb{N}$:

C_n^1+C_n^2+C_n^3+…+C_n^{n-1}, C_n^2+C_n^3+C_n^4+…+C_n^{n-2}, C_n^1-C_n^2+C_n^3-C_n^4+…+$(-1)^{n-1}C_n^{n-1}$, C_n^2-C_n^3+C_n^4-C_n^5+…+$(-1)^nC_n^n$, $2!\,A_n^2 + 3!\,A_n^3$+…+$(n-1)!\,A_n^{n-1}$, $2!\,A_n^2 + 3!\,A_n^3 + 4!\,A_n^4 + \cdots + (n-2)!\,A_n^{n-2}$, $A_n^1 - 2!\,A_n^2 + 3!\,A_n^3 - 4!\,A_n^4 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,A_n^{n-1}$

V- En utilisant les égalités suivantes 1+2+ 3+…+n=$\frac{n(n-1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + 3^2$+…+n^2=$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, montrer que : C_2^2+C_3^2+C_4^2+…+C_n^2=$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}$

VI- Développer à l'aide de la formule du binôme de newton :

$(2x+1)^5$, $(3x-1)^4$, $(-2x+3)^3$, $(x^2+x+1)^3$, $(x^2-x+1)^4$

VII- quel est le coefficient de x^{13} dans le développement de :

1) $(x+1)^{20}$, 2)$(2x-3)^{17}$,3)$(3x-1)^5(2x+1)^8$

4)$(x^2+x)^6$, 5) $(-x+2)(-2x+1)^{14}$

VIII- soit$f(x) = (x+1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

1) Donner le développement de $(x+1)^n$
2) Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et utiliser $f'(x)$ pour monter que :
$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^{n-1} = n \times 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IX- Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes d'inconnue n :

1) C_n^3+C_n^2+C_n^1-7=0
2)$C_{n^2}^n$=$C_{n^2+n}^4$
3) $(C_{2n+1}^3)^2$- $4C_{2n+1}^3 + 3 = 0$
4)$(C_{4n+1}^2)^2$- $5C_{4n+1}^2 + 4 = 0$

5)$C_{n^2+n+1}^{n} + 3C_{n^2+n+1}^{n} + 2 = 0$,   6)$(n_{n+2}^{n})^3 - 3(C_{n+2}^{n})^2 + 2 = 0$

X- Répondre par oui ou par non justifiant la réponse :

1) En tirant simultanément 3 boules dans une urne contenant 4 boules rouges l'ordre des boules obtenues n'a pas d'importance
2) Lorsqu'on tire simultanément 4 boules dans une urne contenant 4 boules rouges, il y'a un seul tirage possible
3) Lorsqu'on tire successivement p boules dans une urne contenant n boules le nombre de tirages possibles est A_n^p
4) Lorsqu'on tire successivement p boules dans une urne contenant n boules, l'ordre des boules obtenues à de l'importance.
5) Lorsqu'on veut élire un comité où les membres ne jouent aucun rôle on ne doit pas tenir de l'ordre des membres de ce comité
6) Lorsqu'on veut élire un comité où il y a un président, un secrétaire et un trésorier, on doit tenir compte de l'ordre des membres de ce amité
7) Lorsqu'on veut élire un comité de 3 membres ne jouant aucun rôle, dans une population de 10 personnes, alors le nombre de comités possibles est C_{10}^3
8) Lorsqu'on veut élire en comité de 3 membres dont un président, un secrétaire est un trésorier, dans une population de 15 personnes, le nombre total de comités est A_{15}^3
9) On considère l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$

a)$\{a, b, c\}$ est une combinaison d'ordre 3 de Ω

b) (a, b, c) est un arrangement d'ordre 3, des 5 éléments de Ω

c) (a, a, b, c) est un arrangement d'ordre 4, des 5 éléments de Ω

d) (a, b, c, d, e) est une permutation des 5 éléments de Ω

e) le nombre de permutation des 5 éléments de Ω est A_5^5

f) le nombre de permutations des 5 éléments de Ω est $5!$

g) le nombre de combinaisons d'ordre 4 de Ω est $\frac{A_4^5}{4!}$

h) le nombre de combinaisons d'ordre 3 de Ω, contenant l'élément a, est 3× A_4^2

i) le nombre d'arrangements d'ordre 3, contenant a, des 5 éléments de Ω, est $3C_4^2$

k) le nombre de 3-listes d'éléments de Ω, contenant a, est 3×2^2

XI- 1) Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone convexe de $n$cotés est $C_n^2 - n$, pour n≥3

2) Exprimer $C_n^2 - n$ sous forme d'une fraction
3) Quel est le nombre de diagonales d'un octogène régulier ?

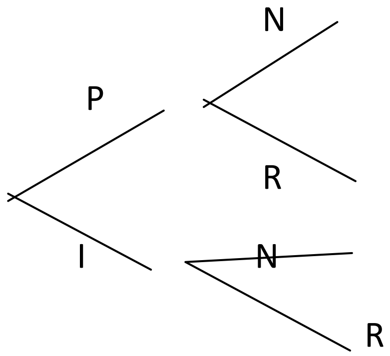
XIII- on considère un polynôme convexe de n côtés, dont les diagonales se coupent deux à deux

1) Montrer le nombre de points d'intersection situés à l'intérieur de ce polygone, des diagonales de ce polygéne, est C_n^4
2) En déduire le nombre de points d'intersection de ces diagonales, situés à l'extérieur de ce polynôme

XIV- Répondre par oui ou non en justifiant la réponse :

1) Lorsqu'on lance une fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, le nombre d'issues est 6
2) Lorsqu'on lance 2 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, il y a 36 issues possibles
3) Lorsqu'on lance deux fois une pièce de monnaie, chaque lancer pouvant donner les issues pile (P) ou face (F), l'ensemble des résultats possibles est $\{(P, P); (P, F); (F, P)\}$
4) Lorsqu'on lance 2 fois de suite un é cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, il y a 7 issues dont la somme est 7
5) Lorsqu'on lance simultanément 3 des cubiques dont les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6, alors il y a 6^3 issues possibles.
6) On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de deux urnes U_1 et U_2 ;U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires et U_2 contient 3 boules noires et deux boules rouges. On lance une fois ce dé ; si on obtient un chiffre pair(P), on tire une boule de U_1 et on peut obtenir une boule noire (N) ou une boule rouge (R) ; ce le lancer de ce dé donne un chiffre impair (I), on tire une boule de l'urne U_2 et on peut obtenir une rouge (R) ou une boule noire (N)

On peut traduire l'énoncé par l'arbre suivant (oui ou non)

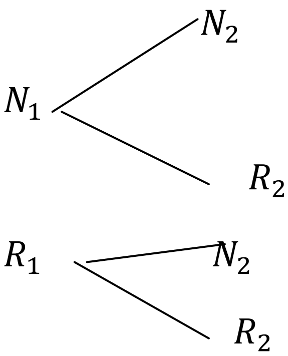


7) Une urne contient 3 boules noires et 2 boules rouges .

On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne

Le premier tirage peut donner une boule noire (N_1) ou une boule rouge(R_1), le 2éme tirage peut donner une boule noire N_2 ou une boule rouge R_2

On peut traduire l'énoncé (oui ou non) par l'arbre suivant



8) les anagrammes du mot ARA sont : AAR, RRA, RAA et ARA

9) le mot ARAL admet $4!$ Anagrammes

10) AABA et AAAB sont des anagrammes de deux mots différents

11) Lorsqu'on tire simultanément p éléments d'un ensemble Ω contenant n éléments chaque résultat est une combinaison d'ordre p de Ω

12) Lorsqu'on tire successivement avec remise 3 éléments d'une urne contenant des cartons 4 numérotés 1, 2, 3 et 4, on peut obtenir les résultats suivants :
(1, 1, 1, 1), (1, 3, 2, 4), (1, 1, 2, 2)

XV- une urne contient 5 boules : 3 rouges et 2 noires

On tire simultanément 2 boules de cette urne et on note Ω L'ensemble des résultats possibles :

Déterminer :

1) CardΩ
2) Le nombre de résultats contenant deux boules de même couleur
3) Le nombre de résultats contenant deux boules de couleurs différentes

XVI- On tire simultanément 3 boules d'une urne contenant 3 boules rouges 4 boules blanches et 4 boules noires

1) Déterminer le nombre de résultats possibles
2) On note : A l'ensemble des résultats unicolores,
   B l'ensemble des résultats tricolores,
   C l'ensemble des résultats contenant 2 boules rouges et une boule noire,
   D l'ensemble des résultats contenant 2 boules rouges et une boule d'une autre couleur
   E l'ensemble des résultats contenant 2 boules d'une même couleur et une boule d'une autre couleur

Calculer CardA, CardB, CardC, CardD et CardE

3) Soit F l'ensemble des résultats contenant au moins une boule noire
a) Définir $\overline{\mathrm{F}}$ et calculer Card $\overline{\mathrm{F}}$
b) En déduire Card F
4) Soit G l'ensemble des résultats contenant au plus 2 boules rouges
a) Définir $\overline{\mathrm{G}}$ et calculer Card G
b) En déduire Card G

XVII- on tire successivement sans remise 4 boules d'une urne contenant 3 boules, 3boules blanches et 4 boules noires

1) Déterminer le nombre de résultats possibles
2) Déterminer le nombre de résultats contenant :
a) Exactement 2 boules rouges
b) Exactement 2 boules noires et une boule blanche
c) Au plus de 3 boules noires

d) Au moins une boule blanche

XVIII- on tire successivement avec remise 3 boules d'une urne contenant 3 boules, 2 boules noires et 2 boules blanches

1) Quel est le nombre de résultats possibles ?
2) Déterminer le nombre de résultats unicolores
3) Déterminer le nombre de résultats tricolores
4) Déterminer le nombre de résultats ne contenant aucune boule noire
5) Déterminer :
a) le nombre de résultats contenant au moins une boule noir
b) le nombre de résultats contenant au plus 2 boules rouges

XIX- 20 personnes dont 10 femmes et 10 hommes veulent élire un comité de 3 personnes pour les représenter à une réunion

1) Quel est le nombre de comités possibles
2) Déterminer le nombre de comités ne contenant aucun homme
3) Quel est le nombre de comités contenant exactement un homme ?
4) Quel est le nombre de comités contenant au plus 2 hommes ?
5) ʺ ʺ ʺ ʺ au moins une femme ?
6) ʺ ʺ ʺ ʺ ʺ ʺ monsieur X, personne figurant parmi les 20 personnes
7) Quel est nombre de comités contenant Madame Y, personne figurant parmi les 20 personnes
8) Si monsieur X et madame Y ne peut pas être dans un même comité, quel est le nombre de comités possibles ?

XX- 15 personnes dont 5 femmes doivent élire un bureau formé d'un président (P), d'un secrétaire (S) et d'un trésorier (T), sans cumul de poste.

1) Quel est le nombre de bureau possibles ?
2) Déterminer le nombre de bureaux contenant :
a) Exactement un homme
b) Exactement deux femmes
c) Au plus 2 hommes
d) Au moins une femme
3) Si Monsieur X et Madame Y doivent être dans le bureau quel est le nombre de bureaux possible ?

XXI- une urne contient 2 boules rouges $R_1 \ et \ R_2$, 3 boules blanches$B_{1\,,}B_2 \ etB_3$, 2 boules noires $N_1 et \ N_2$

On tire successivement avec remise 4 boules de cette urne

1) Quel est le nombre de tirages donnant exactement 2 boules rouges et une boule numérotée 1
2) Donner le nombre tirage donnant exactement une boule noire et boules numérotées 2

XXII- on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, pour obtenir une « main » de 5 cartes

1) Calculer le nombre de mains possibles
2) Déterminer le nombre de mains contenant :

a) exactement deux rois

b) exactement deux dames et 3 As

c) 5 piques

d) exactement 3 trèfles

e) au moins un carreau

f) au plus 4 cœurs

g) exactement un Vallet et 2 piques

XXIII- Quel est le nombre de résultats (a, b, c) tels que :

1) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait deux solutions distinctes
2) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait une solution double
3) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait impossible dans $\mathbb{R}$
4) $a + b + c = 8$

XXIV- On lance simultanément 3 dés identiques dont les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6 et on appelle résultat l'ensemble $\{a, b, c\}$ des 3 numéros obtenus

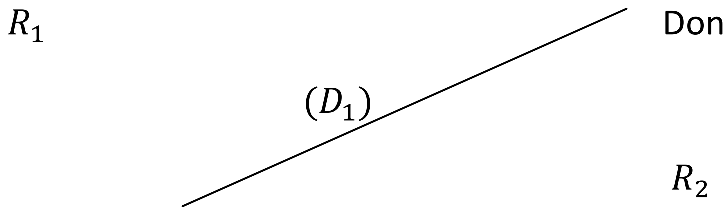
1) Quel est le nombre de résultats possibles ?
2) Quel est le nombre de résultats tels que $a + b + c = 4$?

XXV- On considère n droites $(D_1), (D_2), (D_3)$ telles que trois quelconques d'entres elles ne soient pas concourantes, avec $n \in \mathbb{N}^*$

On note par U_n le nombre de régions délimités par ces n droites dans le plan

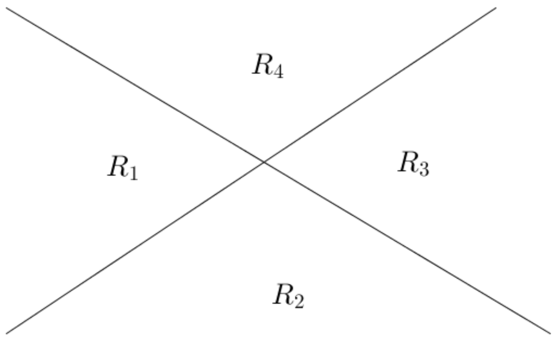
Exemple :

- Si $n = 1$, on a une seule droite (D_1) qui découpe 2 régionR_1 et R_2 sans le plan

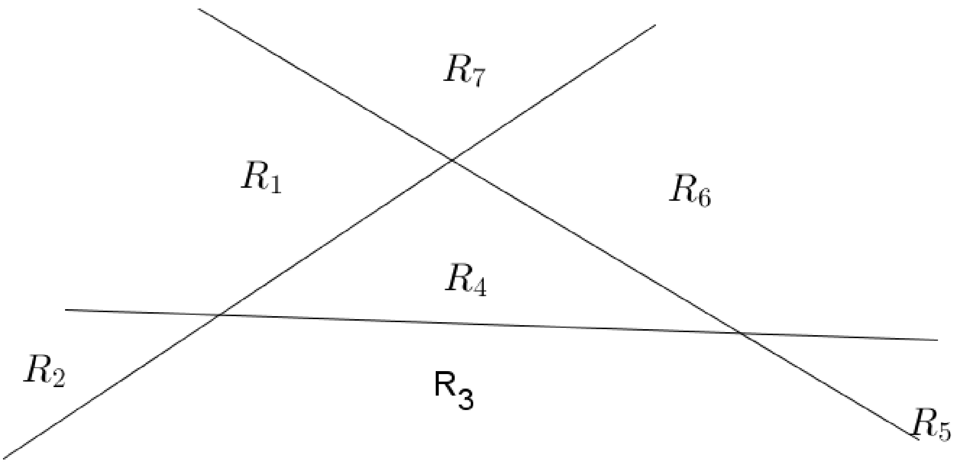


Donc $U_1 = 2$

- Si $n = 2$, on a deux droites qui délimitent 4 régions R_1, R_2, R_3 et R_4



Si $n = 3$, on a 3 droites $(D_1), (D_2), (D_3)$



Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = U_n + n + 1$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{n^2+n+2}{2}$

CHAPITRE 2 : EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

A COURS

1. EQUATION DU SECOND DEGRE (Rappels et compléments)

On appelle **équation du second degré** toute équation qui peut se mettre sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

où a, b et c sont trois réels donnés, avec a ≠ 0 et x l'inconnue.

Pour la résoudre, on considère la quantité Δ = b² — 4ac appelée **discriminant** de l'équation.

— Si $\Delta > 0$: l'équation a **deux solutions** (ou **racines**) réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$: l'équation aune **unique** solution, appelée **racine double**.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$: l'équation **n'a pas de racines.**

Cas particuliers :

1°) *Si a et c sont de signes contraires* : l'équation a toujours deux racines. En effet, on a alors ac < 0, d'où Δ = b² — 4ac > 0.

2°) *Si le coefficient b est de la forme b = 2b'* : alors le discriminant Δ s'écrit:

Δ = b² — 4ac = (2b')² — 4ac = 4b'² — 4ac = 4(b'² — ac).

Ainsi Δ a le même signe que la quantité Δ′ = b'² — ac, appelée discriminant réduit.

• Si $\Delta' > 0$: Alors Δ est aussi strictement positif et l'équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$$

• Si $\Delta' = 0$: Alors Δ est aussi égal à 0 et l'équation a une racine double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2b'}{2a} = \frac{-b'}{a}$$

• Si $\Delta' < 0$: Alors Δ est aussi négatif et l'équation n'a pas de racines.

Exemple 1 : *Résoudre l'équation $3x^2 + 8x + 4 = 0$ en utilisant le discriminant réduit.*

$\Delta' = 4^2 - 12 = 2^2$. $x_1 = \frac{-4-2}{3} = 2$ et $x_2 = \frac{-4+2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Exemple 2 : *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence des racines de l'équation* :

$$(3m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$$

1er cas : Si $3m - 1 = 0$, c'est-à-dire si m = $\frac{1}{3}$

L'équation est du premier degré. Elle devient : $\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$ et a pour unique solution x = $\frac{2}{7}$.

2ème cas : Si $3m - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si m $\neq \frac{1}{3}$

L'équation est du second degré et a pour discriminant : $\Delta = -11m^2 + 20$. Faisons un tableau de signes de Δ :

m	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{20}{11}}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{20}{11}}$	$+\infty$
Δ	$-$	$+$	$+$	$-$	

On obtient la discussion suivante :

• Si $m \in \left]-\infty; -\frac{20}{11}\right[\cup \left]\frac{20}{11}; +\infty\right[$: Alors $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solution.

• Si $m \in \left]-\frac{20}{11}; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; \frac{20}{11}\right[$: Alors $\Delta > 0$ et l'équation admet 2 solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(m+2)-\sqrt{-11m^2+20}}{2(3m-1)}$ et $x_1 = \frac{-(m+2)+\sqrt{-11m^2+20}}{2(3m-1)}$

• Si $m = -\sqrt{\frac{20}{11}}$: Alors Δ = 0 et l'équation admet une unique solution (racine double) :

$$x_0 = -\frac{m+2}{2(3m-1)} \text{ avec } m = -\sqrt{\frac{20}{11}}.$$

• Si $m = \sqrt{\frac{20}{11}}$: Alors Δ = 0 et l'équation admet une unique solution (racine double) :

$x'_0 = -\frac{m+2}{2(3m-1)}$ avec $m = \sqrt{\frac{20}{11}}$.

2. SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Propriété 1 : *Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines distinctes ou confondues (i. e. si Δ ≥ 0), alors leur somme est : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et leur produit est : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.*

Propriété 2 : Réciproquement, si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, alors ils sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple : *Calculer la somme et le produit des racines des équations suivantes, si elles existent :*

1°) *$x^2 + 5x - 7 = 0$* ***2°)*** *$x^2 + x + 6 = 0$* ***3°)*** *$3x^2 + 4x - 7 = 0$*

4°) *$4x^2 - 3x = 0$*

Réponses :

1°) S = − 5 et P = − 7 **2°)** Δ = 1 − 24 = − 23 < 0. S et P n'existent pas.

3°) $S = -\frac{4}{3}$ et $P = -\frac{7}{3}$. **4°)** Le coefficient c de ce trinôme est nul, donc P = 0. $S = \frac{3}{4}$.

3. SIGNE DES RACINES

Les propriétés du paragraphe 2 permettent de trouver une des racines connaissant l'autre, de rechercher deux nombres connaissant leur somme et leur produit, et enfin de déterminer, sans les calculer, le signe des racines.

Pour ce dernier problème, on a les résultats suivants :

$\Delta \geq 0$ (2 racines)	$\mathrm{P} > 0$ (2 racines de même signe)	$\mathrm{S} > 0$	2 racines positives	
		$\mathrm{S} < 0$	2 racines négatives	
	$\mathrm{P} = 0$ (1 racine nulle)	$\mathrm{S} > 0$	1 racine nulle, l'autre positive	
		S = 0	2 racines nulles	
		$\mathrm{S} < 0$	1 racine nulle, l'autre négative	
	$\mathrm{P} < 0$ (2 racines de signes contraires)	$\mathrm{S} > 0$	$\boldsymbol{x_1 < 0 < x_2}$	$\boldsymbol{\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert}$
		S = 0	$\boldsymbol{x_1 < 0 < x_2}$	$\boldsymbol{\lvert x_2 \rvert = \lvert x_1 \rvert}$
		$\mathrm{S} < 0$	$\boldsymbol{x_1 < 0 < x_2}$	$\boldsymbol{\lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert}$

Exemple 1 : *Déterminer sans les calculer le signe des racines des équations suivantes :*

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ ***b)*** $5x^2 - 6x + 1 = 0$ ***c)*** $3x^2 + 9x + 1 = 0$

Réponses :

1°) S = $-\frac{5}{2}$ et P = $-$ 1. On a : $x_1 < 0 < x_2$ et $|x_1| > x_2$

2°) S = $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$ et P = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$. On a : $0 < x_1 < x_2$

3°) P = 1, S = $-$ 3. On a : $x_1 < x_2 < 0$

Exemple 2 : *Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation suivante :*

$$(m + 3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0.$$

Réponse :

• *Si $m = -3$*, l'équation est du premier degré et s'écrit : $-$ 6x – 8 = 0 ⇔ x = $-\frac{4}{3}$. Elle a une solution négative.

• *Si $m \neq -3$*, l'équation est du second degré et a pour discriminant : $\Delta' = m^2 - (m + 3)(m - 5)$, soit : $\Delta' = 2m + 15$. Lorsqu'ils existent, le produit et la somme des racines sont donnés respectivement par : P = $\frac{m-5}{m+3}$ et S = $\frac{-2m}{m+3}$.

Il est plus commode d'observer la situation dans un tableau de signes conjoint :

m	$-\infty$	$-\frac{15}{2}$ $\quad -3$	0	5	$+\infty$
Δ	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
P		$+$	$-$	$-$	$+$
S		$-$	$+$	$-$	$-$
Discussion	Pas de racines	$x_1 < x_2 < 0$	$x_1 < 0 < x_2$ et $\lvert x_1 \rvert < x_2$	$x_1 < 0 < x_2$ et $\lvert x_1 \rvert > x_2$	$x_1 < x_2 < 0$

Cas particuliers :

- Si m = $-\frac{15}{2}$, alors l'équation a une racine double négative (Δ = 0 et S $<$ 0) : $x_0 = -\frac{5}{3}$
- Si m = 0, l'équation a 2 racines opposées (S = 0).
- Si m = 5, l'équation a une racine nulle (P = 0), l'autre étant négative.

4. ETUDE DU TRINÔME DU SECOND DEGRE

On appelle **trinôme du second degré** toute expression algébrique de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Les racines du trinôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

4.1 Rappel sur le binôme du premier degré :

L'expression (ax+b), où a et b sont des réels donnés, avec a $\neq$ 0, est appelée **binôme du premier degré**. Son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$ $\qquad +\infty$
ax + b	Signe de ($-$ a)	Signe de a

Exemple : Signe de ($-$ 2x + 3)

x	$-\infty$ $\qquad \frac{3}{2}$ $\qquad +\infty$

$-2x+3$	$+$	$-$

4.2 <u>La forme canonique</u>

On sait (cf. cours de Seconde) que f(x) peut se mettre sous la forme

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Cette écriture est appelée **forme canonique du trinôme**.

4.3 <u>Signe du trinôme. Factorisation</u>

Les résultats, déjà vus en classe de Seconde, sont résumés dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td>$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$</td><td>Factorisation</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td>Impossible</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td colspan="2">$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td>$f(x = a(x - x_0)^2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td><table><tr><td></td><td colspan="3">$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x$</td><td>Signe de a</td><td>Signe de (— a</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td>$f(x = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

4.4 <u>Application à la résolution d'inéquations du second degré</u>

<u>Exemples</u> : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$ **b)** $-2x^2 + 5x - 4 < 0$ **c)** $-2x^2 + 5x - 2 > 0$

d) $\frac{x^2-3x-4}{x-2} \leq 0$

<u>Réponses</u> : **a)** Considérons le trinôme A(x) = $3x^2 - 4x + 1$. On vérifie que son discriminant $\Delta = 1$ et que ses racines sont: $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 1$. Le coefficient de x^2 est $3 > 0$.

On obtient, d’après les résultats du paragraphe précédent, le tableau de signes du trinôme :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$	+	$-$	+

Par suite S = $\left]-\infty; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] \cup [\mathbf{1}; +\infty[$.

b) De même, soit B(x) = $-2x^2 + 5x - 4$. On a $\Delta = -7$. Le coefficient de x^2 est $-2 < 0$. B(x) est donc négatif sur $\mathbb{R}$. On a le tableau :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\boldsymbol{-2x^2 + 5x - 4}$	$-$

S = $\mathbb{R}$.

c) Pour le trinôme C(x) = $\boldsymbol{-2x^2 + 5x - 2}$, $\boldsymbol{\Delta = 9}$, $\boldsymbol{x_1} = \frac{1}{2}$ et $\boldsymbol{x_2} = 2$. On a le tableau :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$\boldsymbol{-2x^2 + 5x - 2}$	$-$	$+$	$-$

$$\mathbf{S} = \left]\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{2}\right[$$

d) Posons D(x) = $\boldsymbol{\frac{x^2-3x-4}{x-2}}$, on fait les tableaux de signes du numérateur et du dénominateur, puis on consigne les résultats dans un tableau commun. On obtient :

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	2	4	$+\infty$
$\boldsymbol{x^2 - 3x - 4}$	+	$-$	$-$	+
$\boldsymbol{x - 2}$	$-$	$-$	+	+
D(x)	$-$	$+$	$-$	+

S = $]-\infty; -1] \cup]2; 4]$

5. POSITION D'UN NOMBRE PAR RAPPORT AUX RACINES

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose que $a \neq 0$. Soit α un réel donné. On a :

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c.$$

THEOREME : **1° Si le produit $af(\alpha)$ est strictement négatif, alors le trinôme f(x) admet nécessairement deux racines distinctes x_1 et x_2 *et on a :* $x_1 < \alpha < x_2$.**

2° Si $\Delta > 0$ et si le produit af(α) est strictement positif, alors le trinôme f(x) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et pour déterminer leur position par rapport à α, on étudie le signe de $\frac{S}{2} - \alpha$, S désignant la somme des racines:

- Si $\frac{S}{2} - \alpha > 0$, on a : $\alpha < x_1 < x_2$.
- Si $\frac{S}{2} - \alpha < 0$, on a : $x_1 < x_2 < \alpha$.

3° Si $\Delta > 0$ et si le produit af(α) est nul, alors α est l'une des racines.

- Si $\frac{S}{2} - \alpha > 0$, et on a : $x_1 = \alpha$ et $\alpha < x_2$.
- Si $\frac{S}{2} - \alpha < 0$, et on a : $x_1 < \alpha$ et $\alpha = x_2$.

Ce théorème est une conséquence directe des règles sur le signe d'un trinôme.

Exemple 1 : *Classer les nombres $-\frac{1}{2}$ et 2 par rapport aux racines de l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$.*

Posons $f(x) = x^2 - 2x - 3$. $1 \times f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4} < 0$, donc $-\frac{1}{2}$ est situé entre les racines et $1 \times f(2) = -3 < 0$, donc 2 est également entre les racines. Finalement, on a le classement : $\mathbf{x_1 < -\frac{1}{2} < 2 < x_2}$.

Exemple 2 : *Déterminer m pour que l' équation*

$$(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1 = 0$$

ait deux racines x' et x'' satisfaisant à : $-6 < x' < 4 < x''$.

Posons $f_m(x) = (m-1\,)\,x^2 - 2\,(m\;+\;1\,)\,x\;+\;2m-1\;=\;0$. On doit avoir simultanément les conditions suivantes :

$$\begin{cases} m \neq 1 \text{ (pour que l'équation soit du second degré)} \\ (m-1)f_m(4) < 0 \;\text{ (pour que 4 soit situé entre les racines)} \\ (m-1)f_m(-6) > 0 \;\text{ (pour que } -6 \text{ soit à l'extérieur des racines)} \\ \frac{S}{2} + 6 > 0 \;\text{ (pour que } -6 \text{ soit inférieur à la plus petite racine)} \end{cases}$$

Ces conditions équivalent au système : $\begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{3}{2}(m-1)(6m^2 - 32m - 1) < 0 \\ (m-1)(50m - 25) > 0 \\ \frac{5m-7}{m-1} > 0 \end{cases}$

dont la résolution par l'intermédiaire d'un tableau de signes donne :

m $\in \left]-\infty ; \frac{16-\sqrt{262}}{6}\right[\cup \left]\frac{7}{5} ; \frac{16+\sqrt{262}}{6}\right[$

<u>Exemple 3</u> : *Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel m la place des nombres* $-\frac{1}{2}$ *et 1 par rapport aux racines de l'équation :* $m(m-3)x^2 - 2m^2x + m^2 - \frac{3}{2} \;= 0.$

Après calcul et factorisation, on constate que : $\Delta = \frac{3}{2}m(m-1)(2m+3)$; $af\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}m(m-3)(m-1)(3m+2)$;

$af(1) = -3m(m-3)\left(m + \frac{1}{2}\right)$; $\frac{S}{2} + \frac{1}{2} \;= \frac{3(m-1)}{2(m-3)}$; $\frac{S}{2} - 1 \;= \frac{3}{m-3}$.

L'étude simultanée des signes de ces expressions conduit au tableau suivant :

(On note x_1 et x_2 les deux racines, avec $x_1 > x_2$).

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$ $\quad -\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	$+\infty$
Δ	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$af\left(-\frac{1}{2}\right)$		$+$	$-$	$-$		$-$	$+$
$af(1)$		$+$	$+$	$-$		$+$	$-$
$\frac{S}{2} + \frac{1}{2}$		$+$	$+$	$+$		$-$	$+$
$\frac{S}{2} - 1$		$-$	$-$	$-$		$-$	$+$

Discussion	Pas de racines	$-\frac{1}{2} < x_1 < x_2 < 1$	$x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1$	$x_1 < -\frac{1}{2} < 1 < x_2$	Pas de racines	$x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1$	$-\frac{1}{2} < x_1 < 1 < x_2$

__Cas particuliers__ :

• Si m = $-\frac{3}{2}$, alors l'équation a une racine double $x_0 = \frac{1}{3}$ et on a évidemment : $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < 1$.

• Si m = $-\frac{2}{3}$, alors $-\frac{1}{2}$ est l'une des racines, l'autre étant $\frac{19}{22} < 1$ (utiliser, par exemple le produit des racines).

• Si m = $\frac{1}{2}$, alors 1 est l'une des racines(x_2), l'autre étant $< -\frac{1}{2}$.

• Si m = $\mathbf{0}$, alors l'équation n'a pas de solution (elle s'écrit $-\frac{3}{2} = 0$!)

• Si m = $\mathbf{1}$, alors l'équation a une racine double $x_0 = -\frac{1}{2}$ et on a évidemment : $-\frac{1}{2} < 1$.

• Si m = $\mathbf{3}$, alors l'équation est du premier degré et s'écrit : $-18x + \frac{15}{2} = 0$. Elle a pour unique solution $x = \frac{5}{12}$. On a alors : $-\frac{1}{2} < \frac{5}{12} < 1$.

6. EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE

6.1 Equations bicarrées

On appelle ainsi les équations du 4ème degré qui peuvent se ramener au 2ème degré, parce qu'elles ne présentent que des puissances paires de l'inconnue.

On résout facilement l'équation bicarrée par un changement d'inconnue :

Nous poserons : $X = x^2$ d' où $x = \sqrt{X}$ ou $x = -\sqrt{X}$.

__Exemple 1__: Soit à résoudre l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
Posons $X = x^2$. l'équation devient : $X^2 - 5X + 4 = 0$.
Elle a pour solutions X = 1 et X = 4.
Donc, on a : $x^2 = 1$ (soit : x = 1 ou x = $-$ 1) ou $x^2 = 4$ (soit : x = 2 ou x = $-$ 2).
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : S = {1 ; $-$1 ; 2 ; $-$2}.

6.2 Inéquations bicarrées

Méthode : poser également $X = x^2$, on retrouve alors une inéquation du second degré. On pourra terminer avec un tableau de signes.

Exemple : Soit à résoudre l'inéquation $5x^4 - 13x^2 + 6 \geq 0$.

Posons $X = x^2$. L'inéquation devient : $5X^2 - 13X + 6 > 0$. Le trinôme au premier membre a pour racines 2 et $\frac{3}{5}$. Il se factorise en

$5(X - 2)(X - \frac{3}{5}) = 5(x^2 - 3)(x^2 - \frac{3}{5})$

x	$-\infty$ $-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{15}}{3}$	$\frac{\sqrt{15}}{3}$	$\sqrt{2}$ $+\infty$
Signe de $x^2 - 3$	+	+	−	+	+
Signe de $x^2 - \frac{3}{5}$	+	−	−	−	+
Signe du produit	+	−	+	−	+

De ce tableau de signes, on déduit que :

$S = \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[\cup \left[-\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{3}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$

5.3 Equations irrationnelles

Théorème 1 : *L'équation $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ est équivalente au système :* $\begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

En effet, si l'égalité $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ est vraie, alors B est positif, puisque $\sqrt{B}$ existe et cette égalité implique en élevant au carré les deux membres, que A = B.

Réciproquement, supposons que le système soit vérifié. Alors A est positif, puisqu'il est égal au nombre positif B et l'égalité A = B entraîne que $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

Exemple : Soit à résoudre l'équation : $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

Elle équivaut, d'après le théorème précédent au système :

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 2x^2 - x - 1 \end{cases}$, soit après résolution, à : $\begin{cases} x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[\quad (1) \\ x^2 + x = 0 \quad (2) \end{cases}$.

(2) a pour solutions − 1 et 0, valeurs qui vérifient aussi la condition (1). **S =** $\{\mathbf{-1}; \mathbf{0}\}$

Théorème 2 : *L'équation $\sqrt{A} = B$ est équivalente au système :* $\begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

En effet, si l'égalité $\sqrt{A} = B$ est vraie, alors B est nécessairement positif, puisque B est la racine carrée du nombre réel A. D'autre part, l'égalité implique en élevant au carré les deux membres, que A = B².

Réciproquement, supposons que le système soit vérifié. Alors A est positif, puisqu'il est le carré d'un réel et l'égalité A = B² entraîne que $\sqrt{A} = \sqrt{B^2} = |B|$ = B, en vertu de l'hypothèse : B $\geq$ 0.

<u>Exemple 1</u> : Soit à résoudre l'équation : $\sqrt{2x+1} = x - 1$.

Elle équivaut, d'après le théorème précédent au système : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 = (x+1)^2 \end{cases}$, soit après résolution, à : $\begin{cases} \mathrm{x} \geq 1 \ \ (1) \\ x = 4 \ \text{ ou } x = 0 \ \ (2) \end{cases}$. Seule la valeur 4 vérifie la condition (1). **S =** $\{\mathbf{4}\}$**.**

<u>Exemple 2</u>: Soit à résoudre l'équation : $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$ (1).

L'équation est équivalente à : $\sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{x+2}$ (2).L'équation (2) est définie si et seulement si : $\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$. Dans ce cas, elle est équivalente (puisque ses deux membres sont positifs), à l'équation obtenue en élevant ses deux membres au carré, soit à :

$2x + 3 = 4 + x + 2 + 4\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{4}} = \sqrt{x+2}$ (3). On est ramené à une équation du type de l'exemple 1.

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x + 2 = \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 - 22x + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -1 \ \text{ ou } x = 23 \end{cases}$$

On conclut que **S =** $\{\mathbf{23}\}$.

5.4 <u>Inéquations irrationnelles</u>

Une inéquation irrationnelle est une inéquation dans laquelle l'inconnue apparaît sous un signe radical.

Nous utiliserons la propriété suivante (principe d'équivalence):

Quels que soient les réels positifs a et b,

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

<u>Théorème 3</u> : *L'équation $\sqrt{A} \leq B$ est équivalente au système :* $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$.

L'inégalité $\sqrt{A} \leq B$ entraîne que A $\geq$ 0 (puisque $\sqrt{A}$ existe) et que B $\geq$ 0 (puisqu'il est supérieur à la racine carrée d'un réel positif). D'autre part, deux nombres positifs étant rangés dans le même ordre que leurs carrés (propriété vue en Seconde) , $\sqrt{A} \leq B$ $\Longrightarrow \left(\sqrt{A}\right)^2 \leq$ B², soit : $A \leq B^2$.

Réciproquement ; si le système des 3 conditions : $B \geq 0$, $A \geq 0$ et $A \leq B^2$ est vérifié, on en déduit (deux nombres positifs étant rangés dans le même ordre que leurs racines carrées) que : $\sqrt{A} \leq \sqrt{B^2}$, soit :

$\sqrt{A} \leq B$ (car B $\geq$ 0, donc $\sqrt{B^2} = |B| = B$).

<u>Exemple</u>: Soit à résoudre l'inéquation : $\sqrt{x+1} \leq x+3$.

Elle est équivalente, d'après le théorème 3, au système : $\begin{cases} x+3 \geq 0 \ \ (1) \\ x+1 \geq 0 \ \ (2) \\ x+1 \leq (x+3)^2 \ \ (3) \end{cases}$

Les inégalités (1) et (2) sont équivalentes à : x ≥ -1. L'inégalité (3), qui s'écrit après développement :

$x^2 \ +5x+8=0$ est vérifiée quel que soit x. On conclut que S = $[-1;+\infty[$.

> ***<u>Théorème 4</u>*** *: L'équation $\sqrt{A} \geq B$ est équivalente à la réunion des deux systèmes :*
>
> $$(I)\begin{cases} B<0 \\ A \geq 0 \end{cases} \textit{ ou bien } (II)\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$

En effet, si $\mathrm{B}<0$ et A $\geq$ 0 , $\sqrt{A}$ (qui est positif) est évidemment supérieur à B. SI maintenant on a $\mathrm{B} \geq 0$, et A $\geq \mathrm{B}^2$, cette dernière inégalité, qui est une inégalité entre deux nombres positifs, est équivalente à l'inégalité de même sens entre leurs racines carrées, soit : $\sqrt{A} \geq B$.

Réciproquement, si on a $\sqrt{A} \geq B$, alors A est nécessairement positif (puisque $\sqrt{A}$ existe). De deux choses l'une :

— soit B est négatif, et on a le système (I).

— soit B est positif, et alors, en élevant au carré les deux membres de l'inégalité $\sqrt{A} \geq B$, on en déduit que : $A \geq B^2$, donc on a le système (II).

<u>Exemple</u>: Soit à résoudre l'inéquation : $\sqrt{2-x} \leq x+4$.

Elle est équivalente, d'après le théorème 4 à la réunion des deux systèmes :

$$(I)\begin{cases} x+4<0 \\ et \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (II)\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ et \\ 2-x \geq (x+4)^2 \end{cases}$$

On établit facilement que le système (I) a pour ensemble de solutions $S_I =]-\infty;4[$.

Le système (II) est équivalent, après développement, à : $\begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \end{cases}$. On vérifie qu'il a pour ensemble de solutions : $S_{II} = [-4; -2[$.
Finalement : S = $S_I \cup S_{II} =]-\infty; -2[$.

Voici comment procéder en général pour résoudre des inéquations irrationnelles:
1) Rechercher le domaine de l'inéquation.
2) Isoler le radical dans l'un des membres de l'inéquation.
3) Etudier le signe de l'autre membre.
4) Partager le domaine en deux parties:
- dans la partie du domaine où les deux membres sont strictement positifs, en élevant ceux-ci au carré, on obtient une inéquation rationnelle équivalente à l'inéquation initiale. Résoudre cette inéquation en ne gardant que les solutions qui appartiennent à cette partie du domaine.
- dans l'autre partie du domaine, on obtient une inéquation impossible ou indéterminée. Dans cette partie du domaine, l'ensemble des solutions est donc soit l'ensemble vide, soit cette partie du domaine.
5) L'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est la réunion des deux ensembles ci-dessus.

6. SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

6.1 Systèmes d'équations 2×2

1) Rappels de Seconde

Un système de deux équations à deux inconnues *x* et *y* est un système qui peut s'écrire sous la forme : $(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Pour résoudre le système, on peut alors utiliser la méthode des déterminants ou méthode de Cramer.

Le réel Δ = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ ***est appelé déterminant principal du système. Les réels***

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ ***et*** $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$ ***sont les déterminants associés à x et y respectivement.***

Si Δ ≠ 0, le système admet un unique couple solution (x, y) avec

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ***et*** $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Si $\Delta = 0$ ***et*** $\Delta_x \neq 0$ ***ou*** $\Delta_y \neq 0$***, alors le système n'admet pas de solution :***

$S = \emptyset$.

Si $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$***, le système a une infinité de solutions.***

<u>Exercices</u> : Résoudre les systèmes suivants :

(I) $\begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ x + 7y - 15 = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ -5x - 2y = 4 \end{cases}$

(III) $\begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$

<u>Réponses</u> :

(I) $\Delta = 19$; $\Delta_x = 19$; $\Delta_y = 38$. $S = \{(\mathbf{1};\ \mathbf{2})\}$

(II) $\Delta = 0$; $\Delta_x = -10$; $\Delta_y = 55$. $S = \emptyset$.

Lorsque $\Delta = 0$, on peut toujours écrire les équations du système de sorte qu'elles aient même premier membre.

<u>Exemples</u> : (i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

Le système (i) n'a aucune solution. Le système (ii) en a une infinité.

2)Lien avec les droites

De même que deux droites ont pour intersection :	De même un système 2 × 2 aura pour solutions :
• soit un unique point d'intersection (les droites sont sécantes)	• soit un unique couple solution
• soit aucun point d'intersection (les droites sont strictement parallèles)	• soit aucun couple solution
• soit tout point de l'une est aussi un poin de l'autre (les droites sont confondues)	• soit tout couple solution de l'une est aussi solution de l'autre (les deux équations sont équivalentes)

3) Applications

d et *d*' sont deux droites dont on connaît des équations dans un repère donné. Déterminer dans chacun des cas suivants l'intersection éventuelle de *d* et *d*'.

a) *d* : $2x - 3y - 1 = 0$ et *d*' : $5x + y - 2 = 0$

b) $d : 5x + 2y - 3 = 0$ et $d' : 10x + 4y - 1 = 0$
c) $d : x - 1{,}5y - 0{,}5 = 0$ et $d' : 6x - 9y - 3 = 0$

__Réponses__ : Il s'agit de résoudre les systèmes formés par les équations des deux droites.

a) $d \cap d' = \left\{A\left(\frac{7}{17} ; -\frac{1}{17}\right)\right\}$ (d et d' sont sécantes) **b)** $d \cap d' = \emptyset$ (d et d' sont strictement parallèles)

c) $d \cap d' = d = d'$ (d et d' sont confondues)

4) Systèmes non linéaires se ramenant à un système linéaire via un changement de variable :

Soit à résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{3}{y} = -1 \\ 2\sqrt{x} - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$ Pour tout $x > 0$ et $y \neq 0$, on pose : $X = \sqrt{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$

Le système devient (S_2) : : $\begin{cases} X + 3Y = -1 \\ 2X - Y = 5 \end{cases}$

(S_2) est linéaire et a pour déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$

(S_2) admet donc un couple solution unique et on vérifie facilement que celui-ci est $(2 ; -1)$

donc (S_1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} = \sqrt{x}\ \boldsymbol{Erreur\ !\ Signet\ non\ d}\text{é}\boldsymbol{fini}. = 2 \\ \mathrm{Y} = \frac{1}{y} = -1 \end{cases}$. Finalement : **S = {(4 ; – 1)}**

5) Systèmes symétriques

__Exemple 1 :__ Soit à résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 3 \\ \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 5 \end{cases}$

(S_1) équivaut à : $\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 3 \\ ((x+y)^2) - 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation : $X^2 - 3X + 2 = 0$, qui a pour solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$. Le système (S_1) a donc pour ensemble de solutions : **S =** $\{(\mathbf{1}, \mathbf{2}) ;\ (\mathbf{2}, \mathbf{1})\}$.

__Exemple 2 :__ Soit à résoudre le système (S_2) : $\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \end{cases}$

Le système (S_2) équivaut à : : $\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 7xy = 12 \times 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation : $X^2 - 7X + 12 = 0$, qui a pour solutions $X_1 = 4$ et $X_2 = 33$. Le système (S_2) a donc pour ensemble de solutions : **S =** $\{(\mathbf{4}, \mathbf{3});\ (\mathbf{3}, \mathbf{4})\}$.

<u>Exemple 3 :</u> Soit à résoudre le système (S_3) : $\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} = 9 \\ \mathrm{xy} = -14 \end{cases}$

(S_3) équivaut à : $\begin{cases} \mathrm{x} + (-\mathrm{y}) = 9 \\ \mathrm{x}(-\mathrm{y}) = 14 \end{cases}$. Posons alors $\mathrm{u} = -\mathrm{y}$. Le système devient :

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{u} = 9 \\ \mathrm{xu} = 14 \end{cases}$$

x et u sont solutions de l'équation : $X^2 - 9X + 14 = 0$. On a (x = 2 et u = 7) ou bien (u = 2 et x = 7).

S = $\{(\mathbf{2}, -\mathbf{7});\ (-\mathbf{2}, \mathbf{7})\}$

<u>Exemple 4 :</u> Soit à résoudre le système (S_3) : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \ \ (\mathbf{1}) \\ xy = -\sqrt{3} \ \ (\mathbf{2}) \end{cases}$

D'après (2), ni x ni y ne sont nuls et on a $y = -\frac{\sqrt{3}}{x}$ (3). Substituons cette expression de y dans (1) :

$x^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{x^4-3}{x^2} = -2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0$. Posons X = x^2. L'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$. On a X = 1 ou X = -3, mais cette dernière circonstance est impossible, puisque X est positif. Donc la seule possibilité est X = 1, soit x = 1 ou x = – 1. On déduit alors de (3) que $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$. Finalement **S =** $\left\{\left(\mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{3}}\right);\ \left(-\mathbf{1}, \sqrt{\mathbf{3}}\right)\right\}$

<u>6.2 Systèmes 3 × 3</u>

<u>1)Systèmes triangulaires</u>

<u>Exemple</u> : *Résoudre le système, dit triangulaire, suivant :* $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 19 \\ 7y - 3z = 6 \\ 4z = 20 \end{cases}$

La résolution d'un tel système est simple. De la dernière équation, on déduit que :

$$z = 5.$$

En remontant alors à la seconde équation, on déduit que : $y = 3$. Enfin la première équation donne : $3x = 19 + 12 - 25 = 6$, soit $x = 2$. Le système a donc pour unique solution le triplet (2, 3, 5).

<u>2)La méthode de Gauss</u>

Le but de la méthode de Gauss est de transformer, de manière équivalente, un système (S) en un système triangulaire (S') beaucoup plus facile à résoudre et ayant le même ensemble de solution que le système initial.

Exemple : Soit le système $(S)\ \begin{cases} x+10y-3z=5 & (L_1) \\ 2x-y+2z=2 & (L_2) \\ -x+y+z=-3 & (L_3) \end{cases}$

1ère étape : Eliminer x dans les équations (L_2) et (L_3) en utilisant des combinaisons linéaires avec l'équation (L_1). Le système (S) devient alors le système

$$(S')\begin{cases} x+10y-3z=5 (L_1) \\ -21y+8z=-8 (L_2) \\ 11y-2z=2 (L_3) \end{cases}$$

2ème étape : Eliminer y dans l'équation (L_3) en utilisant une combinaison linéaire avec l'équation (L_2).

Le système (S') devient alors le système triangulaire

$$(S'')\ \begin{cases} x+10y-3z=5 & (L_1) \\ -21y+8z=-8 & (L_2) \\ \dfrac{46}{21}z=-\dfrac{46}{21} & (L_3) \end{cases}$$

3ème étape : Il reste à résoudre le système (S'') qui a le même ensemble de solutions que le système initial (S), ce que nous admettrons.

N.B. Il arrive qu'un système de 3 équations à 3 inconnues n'admette aucune solution ou en admette une infinité.

Applications

1) *Résoudre, par la méthode de Gauss les systèmes suivants* :

$$(S_1)\begin{cases} 3x+4y+z=7 \\ x+2y-z=13 \\ 2x-y+2z=5 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ x+2y+3z-2t=-3 \\ x+3y+4z-4t=-9 \\ x+4y+7z+8t=29 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ x+2y-6z=4 \\ x+8y-21z=6 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ 4x-3y+z=4 \\ 2x+12y-7z=2 \end{cases}$$

2) *Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre m le système*

$$\begin{cases} (m+1)x+y+z=m+1 \\ x+(m+1)y+z=-2m-4 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$$

<u>Réponses</u> :

1) Le système (S_1) a pour ensemble de solutions $\left\{\left(\frac{21}{2};-\frac{11}{3};-\frac{59}{6}\right)\right\}$.

Le système (S_2) a pour ensemble de solutions $\{(2;-1;1;3)\}$.

Le système (S_3) n'a pas de solutions.

Le système (S_4) admet une infinité de triplets solutions : $\left(1+\frac{\lambda}{6};\frac{5\lambda}{9};\lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$**.**

2) Intervertissons tout d'abord les lignes du système proposé. Le système

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} (m+1)x+y+z=m+1 \\ x+(m+1)y+z=m+3 \\ x+y+(m+1)z=-2m-4 \end{cases}$$

devient : $\begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_2 \\ L_2 \longleftarrow L_3 \\ L_3 \longleftarrow L_1 \end{matrix}\begin{cases} x+(m+1)y+z=m+3 \\ x+y+(m+1)z=-2m-4 \\ (m+1)x+y+z=m+1 \end{cases}$

Appliquons la première étape de la méthode du pivot (élimination de x dans les 2 dernières lignes) :

$$\begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \longleftarrow (m+1)L_1 - L_3 \end{matrix}\begin{cases} x+(m+1)y+z=m+3 \\ my- \quad mz=3m+7 \\ (m^2+2m)y+mz=(m+1)(m+2) \end{cases}.$$

Dans une deuxième étape, éliminons y dans la dernière ligne

$$\begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 \\ L_3 \longleftarrow (m^2+2m)L_2 - mL_3 \end{matrix}\begin{cases} x+(m+1)y+z=m+3 \\ my- \quad mz=3m+7 \\ -m^2(m+3)z=2m(m^2+5m+6) \end{cases}$$

<u>1^er^ cas : si m = 0</u> : L_3 devient : 0z = 0 (donc z est indéterminé), tandis que L_2 donne 0y — 0z = 7 (ce qui est impossible, il n'est pas possible de déterminer y) donc **S =** $\varnothing$.

<u>2^ème^ cas : si m = — 3</u> : L_3 devient : 0z = 0, z est donc indéterminé. L_2 donne y = $\frac{2+3z}{3}$ et en substituant dans L_1, on obtient x = = $\frac{4+3z}{3}$. S est constitué de l'ensemble des triplets de la forme $\left(\frac{4+3z}{3},\frac{2+3z}{3},z\right)$, z étant un réel quelconque.

<u>3^ème^ cas : si m ≠ 0 et m ≠ — 3</u> : L_3 donne, après simplification z = $\frac{-2(m+2)}{m}$ et en substituant cette valeur de z dans L_2, il vient y = $\frac{m+3}{m}$. Enfin, en remplaçant y et z par ces expressions dans L_1, on obtient : x = $\frac{m+1}{m}$. Dans ce cas, on a donc :

S = $\left\{\left(\frac{m+1}{m},\frac{m+3}{m},\frac{-2(m+2)}{m}\right)\right\}$ (solution unique).

2) Systèmes rectangulaires

Exemple 1 : *Résoudre et discuter le système :* $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=6 \\ 2x-y=a \end{cases}$ *, où a est un paramètre réel.*

Considérons tout d'abord le système formé par les deux premières équations : $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=6 \end{cases}$. Résolvons-le par la méthode de Cramer. Son déterminant principal est D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = $-$ 3. Ce système a donc un couple unique de solutions. Les déterminants relatifs à x et y sont respectivement : D_x = $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ = $-$ 16 et D_x = $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ = **2.**

On en déduit que le couple solution (x, y) est tel que x = $\frac{16}{3}$ et y =$-\frac{2}{3}$.

Remplaçons dans la troisième équation ces valeurs de x et y. On obtient ainsi $\frac{32}{3}+\frac{2}{3}$ = $\boldsymbol{a}$, soit $\boldsymbol{a}$ = $\frac{34}{3}$.

D'où la discussion suivante :

- Si $\boldsymbol{a}$ = $\frac{34}{3}$, le système admet pour unique couple solution : $\left(\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- Si $\boldsymbol{a} \neq \frac{34}{3}$, le système est impossible et n'a aucune solution.

Exemple 2 : *Résoudre le système :* $\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

Ce système a plus d'inconnues que d'équations. Il a soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Résolvons-le en prenant z comme paramètre. Il est équivalent à : $\begin{cases} 3x+y=-z \\ x+2y=z \end{cases}$

Le déterminant principal est D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = 5. D_X = $\begin{vmatrix} -z & 1 \\ z & 2 \end{vmatrix}$ = $-3z \Longrightarrow x = -\frac{3}{5}z$

D_y = $\begin{vmatrix} 3 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}$ = $4z \Longrightarrow y = \frac{4}{5}z$. Les ***solution***s sont tous les triplets de la forme $\left(-\frac{3}{5}z; \frac{4}{5}z; z\right)$, z

6. 3 Mise en équation de problèmes

a)Un problème d'âges (très classique)

Modou dit à Khady : "J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons cent vingt-six ans à nous deux." Quel est l'âge de Modou, quel est l'âge de Khady ?

Solution : Notons *x* l'âge de Modou et *y* l'âge de Khady.

Modou fait des comparaisons d'âges sur trois époques : le passé, le présent et le futur. La situation peut être résumée ainsi :

	Présent	Passé	Futur
Age de Modou	x	y	x + (x – y)
Age De Khady	y	y – (x – y)	x

En effet, la différence entre leurs âges est (x – y) années, donc quand Modou avait l'âge de Khady, c'était il y a (x – y) annes, et quand Khady aura l'âge de Modou, ce sera dans (x – y) années.

Les affirmations de Modou se traduisent par le système : $\begin{cases} x = 2[y - (x - y)] \\ x + (x - y) + x = 126 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ 3x - y = 126 \end{cases}$, dont la résolution, facile et laissée au lecteur, donne **x = 56** et **y = 42**.

b)D'après un texte d'Euler

Trois personnes A, B et C jouent à un jeu d'argent. Chaque partie a un perdant et deux gagnants. Le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie. Trois parties sont jouées : A perd la première, B la seconde et C la troisième.

Après ces trois parties, chaque joueur possède 24 louis.

On demande la mise initiale de chaque joueur.

Solution : Notons *x* la mise initiale de *A*, *y* celle de *B*, *z* celle de *C.*

A l'issue de la première partie, puisque A perd, il se retrouve avec (x – y – z) louis car il doit doubler les avoirs de B et C, tandis que ces derniers se retrouvent avec respectivement 2y et 2z louis.

A l'issue de la deuxième partie, c'est maintenant B qui perd, alors que les avoirs de A et C doublent. Ainsi A se retrouve avec 2(x – y – z) =2x – 2y – 2z louis, C lui, a 4z louis tandis que B se retrouve avec 2y — (x –y –z) — 2z = — x + 3y + z.

A l'issue de la troisième partie enfin, c'est C qui perd, alors que les avoirs de A et B doublent. Ainsi A se retrouve avec 2(2x – 2y – 2z) = 4x – 4y – 4z, B avec 2(—x + 3y + z) = —2x + 6y + 2z et C avec 4z – [(2x – 2y – 2z) + (—x + 3y + z)] = —x — y + 5z.

Le tableau suivant donne l'avoir final des joueurs après chaque partie.

	Avoir de A	Avoir de B	Avoir de C
Début	x	y	z
Première partie	$x - y - z$	$2y$	$2z$
Deuxième partie	$2x - 2y - 2z$	$-x + 3y + z$	$4z$
Troisième partie	$4x - 4y - 4z$	$-2x + 6y + 2z$	$-x - y + 5z$

Comme l'avoir final de chaque joueur est de 24 louis, on se retrouve avec le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y + 2z = 24 \\ -x - y + 5z = 24 \end{cases}$$

Dont la résolution par la méthode du pivot donne les solutions :

x = 27 ; **y = 9** ; **z = 12**.

I- c) Un problème de robinets

On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une piscine. Avec les robinets A et B, il faut 10 min, avec B et C, 20min et avec C et A 12 min.

Déterminer le temps mis par chaque robinet fonctionnant seul pour remplir la piscine.

<u>Solution :</u> Soit a, b et c les débits respectifs des robinets A, B et C (c'est-à-dire le nombre de litres par minute déversé par chaque robinet). Désignons également par V le volume de la piscine. Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} (a+b) \times 10 = V \\ (b+c) \times 20 = V \\ (c+a) \times 12 = V \end{cases}$$

. Soit, d'autre part $\mathrm{t_A}$ le temps mis par A pour remplir seul la piscine.

On a $\mathrm{t_A} \times a$ = V, et de manière similaire (avec des notations évidentes !), $\mathrm{t_B} \times b$ = V et $\mathrm{t_B} \times c$ = V. En d'autres termes, $\frac{a}{V} = \frac{1}{\mathrm{t_A}}$; $\frac{b}{V} = \frac{1}{\mathrm{t_B}}$ et $\frac{c}{V} = \frac{1}{\mathrm{t_C}}$. Posant alors X = $\frac{a}{V}$; Y = $\frac{a}{V}$ et Z = $\frac{c}{V}$, le système précédent s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} X + Y = \frac{1}{10} \\ Y + Z = \frac{1}{20} \\ Z + X = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Le lecteur pourra résoudre lui-même ce système par la méthode du pivot. On obtient : S = $\left\{\left(\frac{1}{15};\frac{1}{30};\frac{1}{60}\right)\right\}$ et on en conclut que : $\mathbf{t_A}$ **= 15**, $\mathbf{t_B}$ **= 30** et $\mathbf{t_C}$ **= 60**.

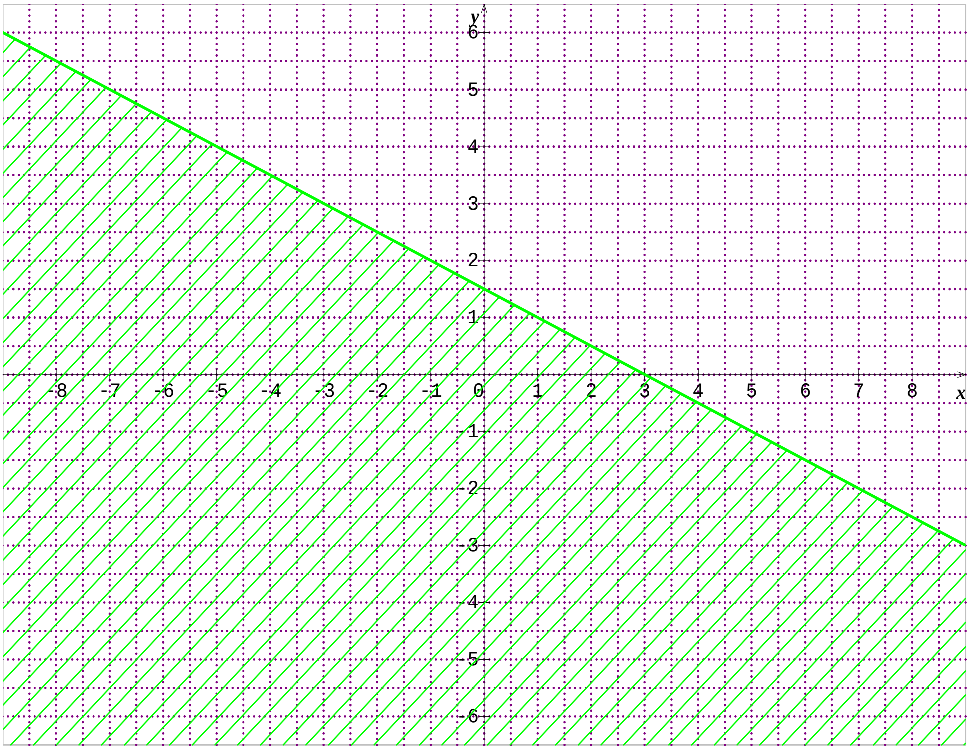
<u>6.4 Systèmes d'inéquations linéaires</u>

1) Rappels

L'ensemble des couples (*x*;*y*) solutions de l'équation *ax* + *by* + *c* > 0 est représenté graphiquement par les points d'un demi-plan dont la frontière est la droite d'équation

ax + *by* + *c* = 0.

<u>Exemple :</u>



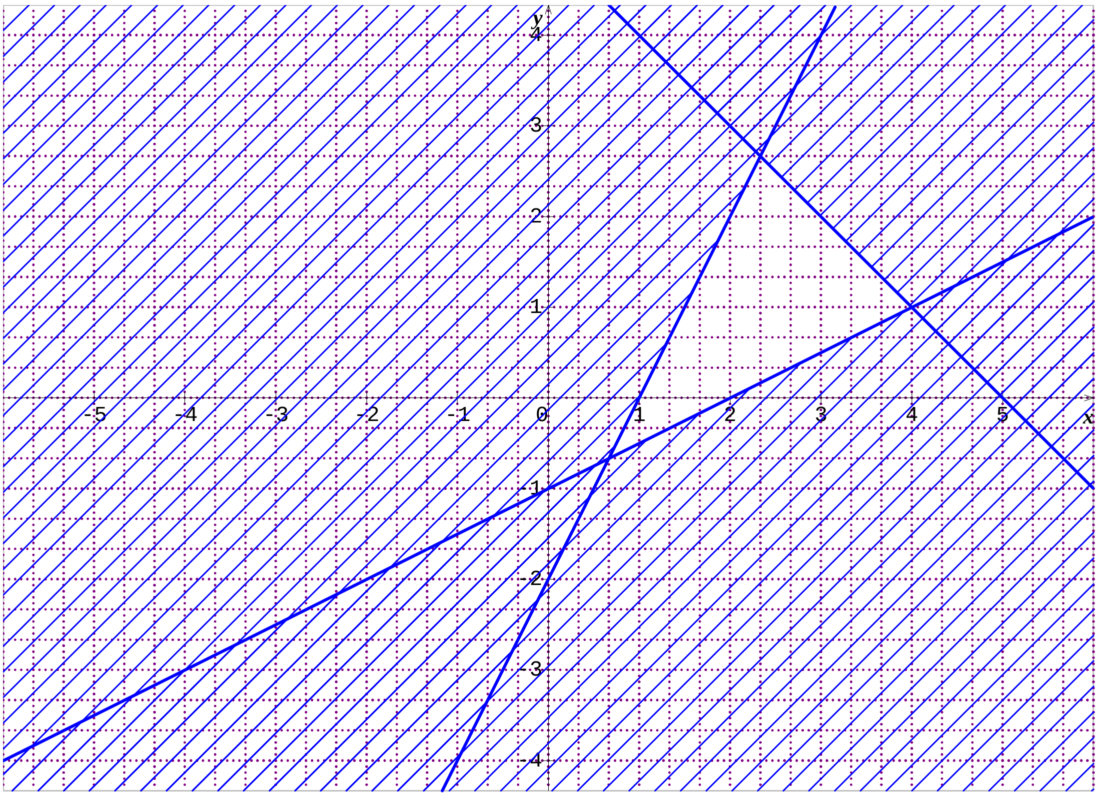
Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x + 2y - 3 > 0$, on trace la droite d d'équation $x + 2y - 3 = 0$. Pour savoir quel demi-plan de frontière d représente les solutions de l'inéquation $x + 2y - 3 > 0$, on choisit un point non situé sur d (par exemple, dans ce cas, le point $O(0;0)$). Si on note P le demi-plan solution, comme O n'appartient pas à P (les coordonnées de O ne vérifient pas l'inéquation), P est alors le demi-plan ouvert de frontière d ne contenant pas O.

2) Applications

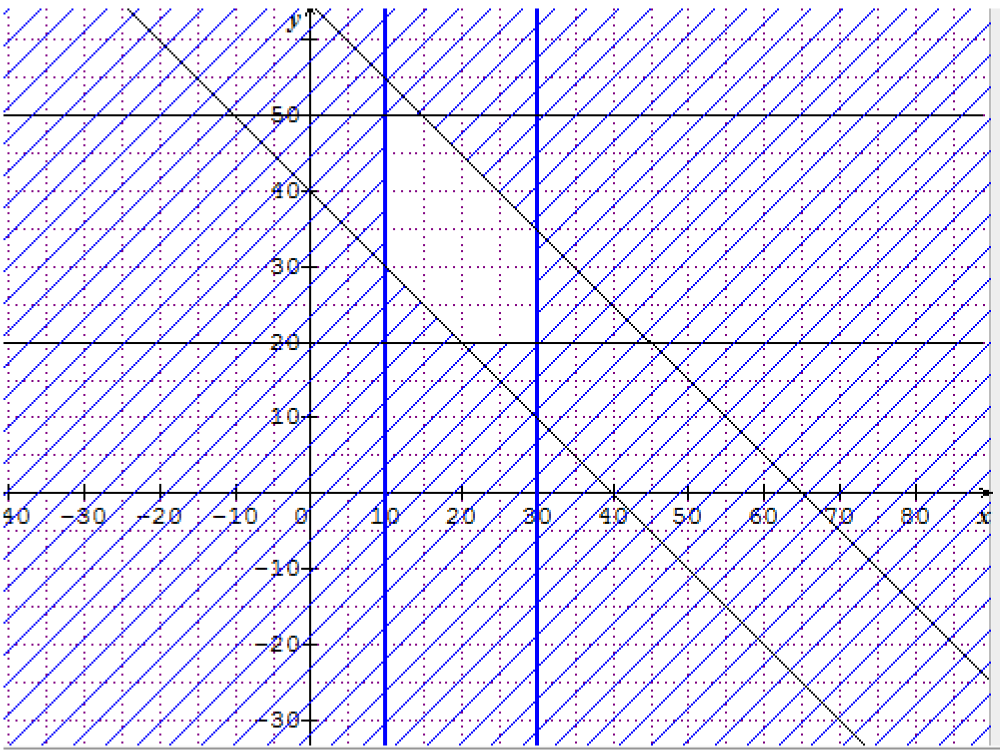
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x - y - 2 > 0 \\ x - 2y - 2 < 0 \\ -x - y + 5 > 0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 10 \le x \le 30 \\ 20 \le y \le 50 \\ 40 \le x + y \le 65 \end{cases}$$

Pour le système (S_1), on obtient la figure suivante (la zone solution est la zone non hachurée) :



Pour le système (S_2), on obtient la figure suivante (la zone solution est la zone non hachurée) :



V) Programmation linéaire

Exemple 1 :

Une usine produit deux types de pièces p_1 et p_2 fabriqués à l'aide de deux machines M_1 et M_2.
Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines, ceci dans un ordre indifférent et pendant les temps (en minutes) indiqués dans le tableau ci-dessous :

	M_1	M_2
p_1	12	8
p_2	10	20

Les machines M_1 et M_2 ne sont disponibles respectivement que 3000 et 4000 minutes par quinzaine.
Le bénéfice réalisé sur une pièce p_1 est de 30 francs et sur une pièce p_2 de 50 francs.
*Combien doit-on réaliser par quinzaine de pièces p_1 et p_2 pour avoir **un bénéfice maximal**?*

1°) *Soit x le nombre de pièces p_1 et y le nombre de pièces p_2 fabriqués par quinzaine. Exprimer le bénéfice total b(x ;y) par quinzaine en fonction de x et y.*

2°) *Justifier que les données du problème peuvent se traduire par le système d'inéquations :*

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12x + 10y \leq 3000 \\ 8x + 20y \leq 4000 \end{cases}$$

*le système obtenu s'appelle **système des contraintes**. De plus x et y sont des entiers.*

3°) *Représenter graphiquement, dans un repère du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations précédent.*
Indication :choisir 2cm, en abscisse et en ordonnée, pour représenter 100 unités.
*L'ensemble des solutions d'une inéquation est l'ensemble des coordonnées des points d'un demi-plan ; on appelle **domaine des contraintes**, ou polygone des contraintes, l'intersection de tous les demi-plans ainsi obtenus.*

4°) *Tracer les trois droites parallèles définies par les équations :*
p(x ;y) = 6 000 ; p(x ;y) = 8 000 ; p(x ;y) = 10 000

5°) *Soit k un réel. Exprimer en fonction de k l'ordonnée à l'origine b_k de la droite d'équation p(x ;y) = k. Montrer que lorsque k augmente, alors b_k augmente. En déduire graphiquement les coordonnées (x ;y) du point du domaine des contraintes pour lequel le bénéfice est maximal et vérifier que ces coordonnées x et y sont des entiers.*

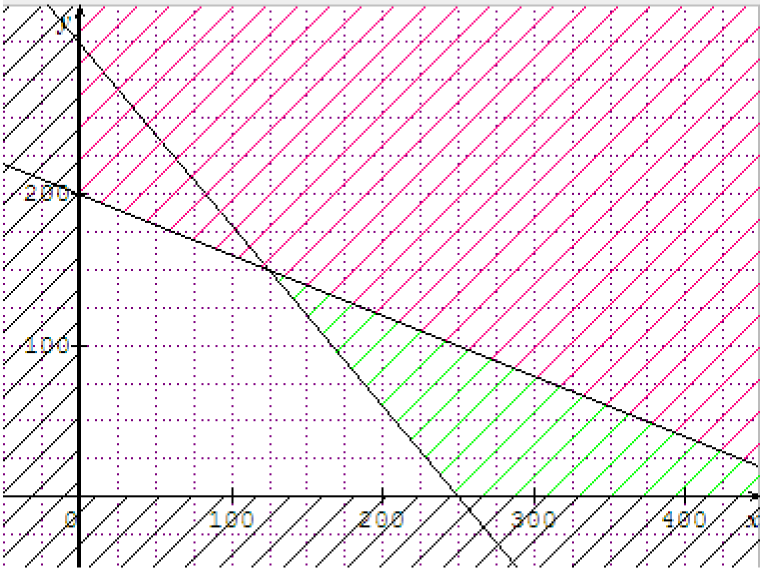
Calculer le bénéfice maximal.

<u>Réponses</u> :

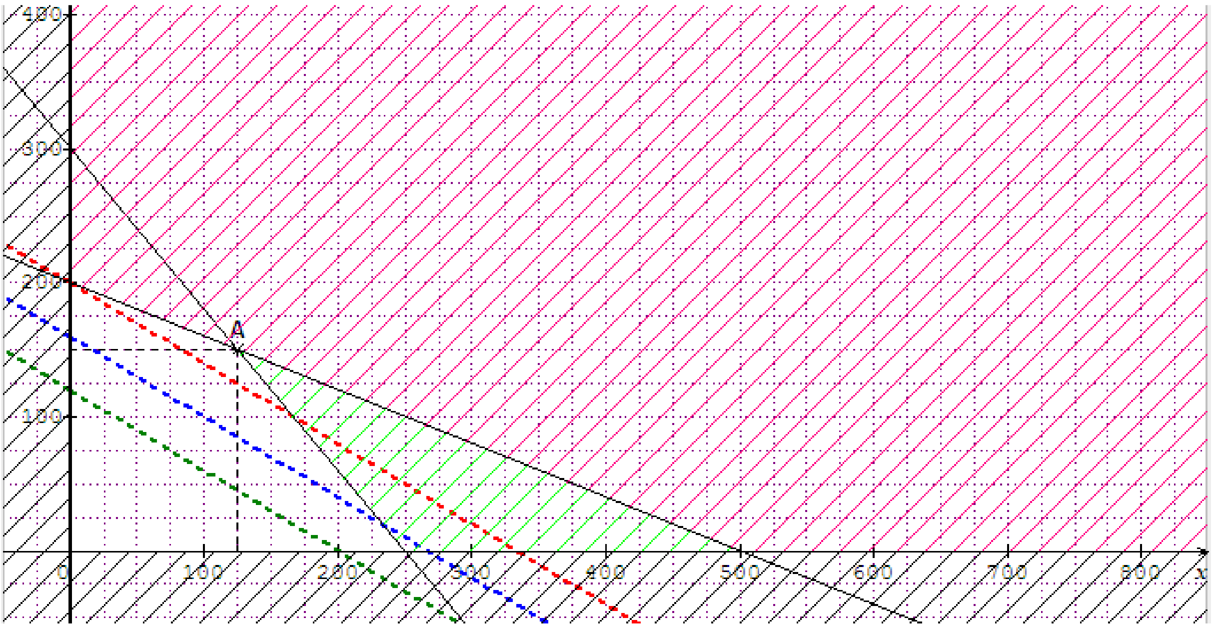
1°) $b(x\,;y) = 30x + 50y$

2°) Le temps nécessaire pour fabriquer les pièces p_1 et p_2 sur la machine M_1 est $12x + 10y$ et celui sur la machine M_2 est $8x + 20y$.

3°) On obtient la région du plan non hachurée sur le schéma ci-dessous.



4°) Ce sont respectivement les droites de couleurs verte, bleue et rouge du schéma ci-dessous :



5°) $30x + 50y = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{50} - \frac{3}{5}x$. L'ordonnée à l'origine est $b_k = \frac{k}{50}$. Si k augmente, b_k augmente aussi.

On constate graphiquement que le programme permettant un bénéfice maximal est celui du couple (x ; y) correspondant au point A.

Par le calcul, on obtient A(x = 125 ; y = 150). Le bénéfice maximum est donc de : $(30 \times 125) + (50 \times 150) = 11\,250$ francs.

B. EXERCICES PREMIERE S2

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$

2°) $(2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 = 0$

3°) $3x^2 - (3\sqrt{2} + 5)x + \sqrt{10} = 0$

4°) $3x^4 + 3x^2 - 6 = 0$

5°) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

6°) $-2x^4 + 5x^2 - 2 > 0$

7°) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) - 2 = 0$ INDICATION: Poser $X = x^2 + 2x$.

8°) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} < 0$

9°) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ -x^2 - 3x - 2 \leq 0 \end{cases}$

10°) $\begin{cases} x^2 + x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$

11°) $x^4 + x^2 + 1 < 0$

12°) $-x^4 + 3x^2 + 4 \geq 0$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence et le signe des racines :

1°) $(m - 2)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$

2°) $(m + 1)x^2 - mx + \frac{m-1}{4} = 0$

3°) $m x^2 - 2m x + m - 8 = 0$

4°) $(m - 3) x^2 + (2m - 1) x + m + 2 = 0$

5°) $(2m - 1) x^2 - 2(2m - 1)x + m + 7 = 0$

6°) $m(m + 2) x^2 - (m + 2) x - m + 1 = 0$

EXERCICE 3

On considère l'équation (E) : $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

1°) a) 0 est-il solution de (E) ?

b) En posant $y = x + \frac{1}{x}$, démontrer que (E) est équivalente à :

$$6y^2 + 5y - 50 = 0 \quad (E')$$

2°) a) Résoudre (E') dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 4

1°) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de :
$(m + 2)x^2 - (m + 4)x + 2 - m = 0$

2°) Etablir la relation indépendante de m qui existe entre les racines.
Retrouver à l'aide de cette relation les racines doubles.

3°) Calculer m pour que la somme des inverses des racines soit égale à $\frac{1}{5}$.

EXERCICE 5

1°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :
$mx^2 - (2m - 7)x + m + 5 = 0$ a-t-elle deux solutions positives ?

2°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :
$mx^2 - (2m + 3)x + m + 1 = 0$ a-t-elle deux solutions négatives ?

3°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :
$mx^2 - 2(4 + m)x + 15 + m = 0$ a-t-elle deux solutions de signes contraires ?

EXERCICE 6

Résoudre les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1°) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 2x - 2}$ 2°) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{3x^2 - x - 2}$

3°) $\sqrt{25 - x^2} = 7 - x$ 4°) $\sqrt{x^2 - x + 3} = x^2 - x + 1$

5°) $\sqrt{2x + 1} + 1 = 3x$ **6°)** $2x + \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 18$

7°) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1$ (Poser $X = x^2 - 3x$) 8°) $\sqrt{x + 2} \leq 3x - 4$

9°) $\sqrt{7 - 6x} > 2x + 1$ 10°) $\sqrt{(3x^2 + 6x - 2)^2} \geq 6$

11°) $\sqrt{x^2 + 1} \leq x + 2$ 12°) $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} > x - 1$

13) $\sqrt{-5x^2 + 3x + 2} < 5x - 1$

14) $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ **15°)** $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \geq x - 1$

EXERCICE 7

Résoudre les systèmes suivants :

$\begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 . \\ x + (\sqrt{3} - 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 17 \\ 2x^2 + 11y^2 = 37 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3}{y-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{y-1} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{29}{12} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 85 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4\,|x| - 2\,|y| = 8 \\ 6\,|x| - 5\,|y| = 5 \end{cases}$

EXERCICE 8

Résoudre par la méthode du pivot chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = -36 \\ -10x - 7y + z = -29 \\ 6x + 4y - 3z = 29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -5x - 5y - 4z + t = 73 \\ 4y + 3z + 2t = -29 \\ 5y - 5z - t = -73 \\ 3x + 5y - 3z + 2t = -96 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9x + 3y + z + 9t = 34 \\ 3x + 2y + 3 - 9z + 7t = 6 \\ -x + y - 6z + 5t = -3 \\ 7x - 4y + 4z - 6t = 29 \end{cases}$

EXERCICE 9

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ (2x-3)(2y-3) = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -\frac{m}{2} \\ 4x - m^2 y = -4 \end{cases}$

(m est un paramètre réel).

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x}{3} = \frac{-2y}{7} = \frac{4z}{5} \\ x + y + z = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 2y = -4 \\ 3x + 2z = 10 \\ 9y - 10z = 10 \end{cases}$

EXERCICE 11

On suppose qu'un cycliste a une vitesse de 25 km/h en terrain plat, de 15 km/h en montée et de 30 km/h en descente. Ce cycliste met 4h24 min pour parcourir une route AB dans le sens de A vers B et 4h38 min pour la parcourir dans le sens de B vers A.

La route ayant une longueur de 100 km, on demande de déterminer les longueurs de terrain plat, de montée et de descente de A vers B.

EXERCICE 12

Un automobiliste effectue un trajet de 505 km en 5h 20 min. La consommation d'essence correspondante a été de 47 litres. Le trajet comporte des portions de route, d'autoroute et de traversées de ville.
On sait que la vitesse moyenne de l'automobiliste est de 80 km/h sur route, 120 km/h sur autoroute et 50 km/h en ville.
Par ailleurs la consommation moyenne du véhicule est respectivement de 81, 101 et 121 aux 100 km suivant que l'on est sur route, sur autoroute ou en ville.

Déterminer le kilométrage du trajet sur route, sur autoroute et en traversées de ville.

EXERCICE 13

Une entreprise de serrures fabrique deux types de serrure, S_1 et S_2 , dont les prix de vente sont respectivement 400F et 300F l'unité.

Pour les fabriquer, elle utilise trois types de produit, A, B et C, dans les proportions fixées par le tableau suivant :

Produi / Serrures	A	B	C
S_1	15	10	5
S_2	9	10	10
Stock disponible	900	700	600

L'objectif est de rendre maximale la recette totale en combinant au mieux les productions des deux serrures.

1°) Choisir les deux inconnues x et y .

Traduire les trois contraintes de stock en inéquations à deux inconnues x et y.

2°) Traduire graphiquement les inéquations.

En déduire la zone Z des productions (x ;y) possibles.

3°) Tracer sur le graphique précédent les droites de production que réaliseraient une recette totale de 24 000F, une autre de 18 000F.

4°) En déduire le sommet T de Z qui rend cette recette totale maximale. Calculer les coordonnées de T. Combien produira-t-on alors de serrures S_1 et S_2 ?

5°) Calculer la recette totale maximale.

EXERCICE 14

Les gérants d'un club de football veulent offrir à leurs joueurs 31paires de chaussures et 50 maillots. Ils s'adressent à deux fournisseurs qui proposent :

− l'un des lots A : 5 paires de chaussures et 10 maillots pour 125 000 F

– l’autre des lots B : 8 paires de chaussures et 10 maillots pour 150 000 F

On suppose que les gérants commandent x lots A et y lots B.

1°) Exprimer la dépense des organisateurs en fonction de x et y.

2°) Exprimer sous forme d’un système d’inéquations les contraintes imposées aux gérants concernant le nombre minimal de maillots et de chaussures à distribuer.

Représenter graphiquement ce système.

3°) Quelles valeurs de x et y fournissent une dépense minimale ?

C. EXERCICES PREMIERE S1

EXERCICE 15

On considère les équations suivantes :

(1) $f(x) = x^2 + px + q = 0$ et **(2)** $g(x) = x^2 + p'x + q' = 0$

qui sont supposées avoir chacune deux racines α et β pour la (1), α' et β' pour la (2).

1°) Démontrer que chacun des produits $f(\alpha')f(\beta')$ et $g(\alpha)g(\beta)$ a pour valeur

$$R = (p - p')(pq' - qp') + (q - q')^2.$$

2°) En déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations aient une racine commune et une seule.

EXERCICE 16

Déterminer deux équations du second degré telles que les racines de chacune d’elles soient la somme et le produit des racines de l’autre.

EXERCICE 17

Factoriser en un produit de deux trinômes du second degré chacun des polynômes suivants :

$P_1(x) = 3x^4 - 11x^2 - 4$; $P_2(x) = 6x^4 - 13x^2 + 6$; $P_3(x) = 4x^4 + x^2 - 5$.

EXERCICE 18

Résoudre et discuter l’équation d’inconnue x suivante : $m(x^2 + 1)^2 - 2(x^4 + 1) = 0$.

Démontrer que, lorsqu’elle admet quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4, celles-ci sont liées par :

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0 \ ; \ x_1x_3 = - x_2x_4 = 1.$$

EXERCICE 19

Résoudre et discuter les équations suivantes :

(1) $\dfrac{x^2 + m}{x - 1} = 1 - 2x$ 2) $\dfrac{(1 + x)^2}{1 + x^3} + \dfrac{(1 - x)^2}{1 - x^3} = m$. (m est un paramètre réel).

· g) $\dfrac{m}{(a - m)^2}\dfrac{(a - x)^2}{x} + \dfrac{m}{(a + m)^2}\dfrac{(a + x)^2}{x} = 1$ (m et a réels donnés)

EXERCICE 20

1°) Montrer que l'équation (E) : $2x^2 - 8x - 18 = 0$ admet deux racines distinctes x' et x'' .

2°) Sans calculer x ' et x '' , déterminer :

$x'^2 + x''^2$, $x' - x''$ (on suppose $x' < x''$), $x'^3 + x''^3$, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$, $\frac{x'-1}{x''} + \frac{x''-1}{x'}$

3°) Former l'équation dont les racines sont : $X' = \frac{x'^2 + x''}{x''}$ et $X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}$.

EXERCICE 21

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée (E) a 2 racines x ' et x '' . Puis calculer la valeur numérique des expressions A et B .

1°) (E) : $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$A = 2(x'^3 + x''^3) - (x'^2 + x''^2) - 5(x' + x'')$. $B = (x'^2 - 1)(x''^2 - 1)$.

2°) (E) : $x^2 - 4x + 1 = 0$ $A = \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} + \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ $B = \frac{x'-1}{x''-1} + \frac{x'+1}{x''+1}$

EXERCICE 22

Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$ 2°) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1}$.

3°) $\sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1} = x - 3$.

4°) $2 - \sqrt{-x^2 + x + 1} \leq x$ 5°) $\sqrt{5x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{3x+1}$

6°) $\sqrt{-x + 1 + \sqrt{x+3}} = 2$ **7°)** $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x}$

8°) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} = 2$ **9°)** $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{4x+7}$

10°) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3$

EXERCICE 23

Résoudre et discuter les équations suivantes :

(1) $5\sqrt{|x| - x} = m - 2x$. (2) $\sqrt{x+1} = mx + 2$. (3) $\sqrt{(m-1)x^2 - 2m} = 2 - x$

EXERCICE 24

1°) Résoudre l'équation suivante : $3x^4 + x^3 - 10x^2 - x + 3 = 0$, en utilisant le changement $x - \frac{1}{x} = X$.

2°) Résoudre l'équation suivante : $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$, en utilisant le changement : $x + \dfrac{1}{x} = X$.

3°) Résoudre l'équation suivante : $x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16 = 0$ en utilisant le changement : $x + \dfrac{4}{x} = X$.

EXERCICE 25

1°) Résoudre l'équation : $(x^2 + x - 1)^2 - 6(x^2 + x - 2) - 1 = 0$.

2°) Résoudre et discuter l'équation : $(2x^2 + 4x - 1)^2 - 6(2x^2 + 4x + m) + 4m + 3 = 0$

EXERCICE 26

1°) Résoudre et discuter l'inéquation : $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$.

EXERCICE 27

Démontrer que l'équation

$f(x) = (x - 1)(x - 3) - m(x + 1)(x - 2) = 0$

admet des racines quel que soit m et classer les racines par rapport aux réels -1, 1, 2 et 3.

EXERCICE 28

On considère les équations suivantes :

(1) $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ (2) $g(x) = x^2 + mx - 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

dont les racines sont α et β pour la (1), α' et β' pour la (2) (on justifiera l'existence de α, α', β et β'), avec $\alpha < \beta$ et $\alpha' < \beta'$.

Sans résoudre ces équations, démontrer que leurs racines sont enchevêtrées (c'est-à-dire que chacune d'elles a une racine et une seule comprise entre les racines de l'autre).

Classer, suivant les valeurs de m, les quatre racines par ordre croissant.

EXERCICE 29

Résoudre et discuter le système : $\begin{cases} mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1 \prec 0 \\ -1 \prec x \prec 1 \end{cases}$

EXERCICE 30

Résoudre les inéquations :

1°) $0 < y = \dfrac{x^2 - mx + 1}{3(x^2 + x + 1)} < 1$ 2°) $\dfrac{x}{x - m} + \dfrac{2}{x + m} > \dfrac{8m^3}{x^2 - m^2}$ 3°) $\sqrt{3x(8 - x)} < m - x$.

4°) $\sqrt{x - 2} > x - 4$ 5°) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} < \sqrt{2x^2 + x + 1}$

6°) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} < \sqrt{x + 2}$ 7°) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1} > 1$

EXERCICE 31

m étant un paramètre, résoudre et discuter les systèmes :

$$\begin{cases} 2m\,x + (m+1)\,y = 2 \\ (m+2)\,x + (2m+1)\,y = m+2 \\ 5x + (2m-1)\,y - 3z = 3\,(m+2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x + my - z = 4 \\ 4m\,x - 2y + (m-1)\,z = m \\ 5x + (2m-1)\,y - 3z = 3\,(m+2) \end{cases}$$

EXERCICE 32

Résoudre et discuter les systèmes suivants en supposant *a, b, c* distincts :

a) $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^4 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^4 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x + cy + az = ab + bc + ca \\ cx + ay + bz = ab + bc + ca \end{cases}$

Résoudre et discuter les systèmes suivants en supposant que m est un paramètre réel :

d) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + my - 2m = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$

(*Pour quelles valeurs de* m *les solutions obtenues sont-elles constituées de nombres x et y tous deux positifs* ?)

EXERCICE 33

1°) Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre, le système suivant :

$$\begin{cases} 2(x+1) = m\,(5y - 5m - 14) \\ 3x + 2y = 11m + 5 \end{cases}$$

2°) Pour quelles valeurs du paramètre m, x et y prennent-ils des valeurs positives ? Comparer dans ce cas les deux nombres x et y .

3°) Les conditions précédentes étant remplies, peut-on choisir m pour que x et y soient les mesures des côtés d'un triangle isocèle . (Envisager tous les cas géométriques possibles).

EXERCICE 34

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z + t = b \\ z + t + x = c \\ t + x + y = d \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = b \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = c \end{cases}$

EXERCICE 35 **Existence d'un triangle**

x et y sont deux réels positifs donnés. Par la suite, on dira que "x et y vérifient la condition T" pour indiquer que l'on peut construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs x, y et 1.

a) Supposons que x soit le plus grand de ces trois réels ($x \geq y$ et $x \geq 1$).

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x \geq y$ et $x \geq 1$. Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la condition T ?

b) Reprendre le a) sur le même repère lorsque

(i) $y \geq x$ et $y \geq 1$ (ii) $1 \geq x$ et $1 \geq y$

c) Quels sont les points qui correspondent à des triangles isocèles? à des triangles équilatéraux?

EXERCICE 36

Résoudre les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 3b = 9 \\ 3a^2 + 3b^2 - a + 5b = 1 \end{cases}$ *(a, b inconnues)*

2°) $\begin{cases} a + b - ab = \dfrac{2m-1}{m^2-1} \\ (a+1)(b+1) = \dfrac{m(m+2)}{m^2-1} \end{cases}$ *(a, b inconnues, m paramètre)*

3°) $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = m + 1 \\ ab = m - 2 \end{cases}$ *(a, b inconnues)*

EXERCICE 37

Soit le système : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 y^2 + 4xy - m^2 + 4 = 0 \end{cases}$ *(x, y inconnues, m paramètre)* .

Discuter l'existence et le nombre de solutions de ce système suivant les valeurs du paramètre m .

EXERCICE 38

Une équation du second degré a ses racines x' et x'' telles que :

$$\begin{cases} m x' + m x'' - m = 4 - 2 x' - 2 x'' \\ m x' x'' + m = 2 - 2 x' x'' \end{cases}$$

1°) Former cette équation dont les coefficients dépendent du paramètre m .

2°) Montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de m.

3°) Utiliser cette relation pour déterminer les racines doubles de l'équation obtenue.

4°) Comment faut-il choisir m pour que les deux racines soient positives ?

CHAPITRE 3 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1. RAPPELS DE NOTIONS VUES EN SECONDE

Vocabulaire et définition

Définition et exemples.

Soient A et B deux ensembles, on appelle **fonction** de A vers B tout procédé permettant d'associer à chaque élément de A, 0 ou 1 élément de B.

A est **l'ensemble de départ** ou la source

B est **l'ensemble d'arrivée** ou le but

Si la fonction est appelée f ,on note $f: A \to B$.

Si x élément de A est associé à y (un élément de B) alors on note $\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto f(x) = y \end{array}$ ou tout simplement $f(x) = y$.

x est **un** antécédent de y ; y est **l**'image de x. Noter la différence entre les deux flèches "$\mapsto$" "$\to$".

Remarques : un élément de A peut ne pas avoir d'image : un élément de B peut avoir 0,1 ou plusieurs antécédents.

Le procédé en question peut être une relation ,une phrase ou une formule.

0 ou 1 élément de B peut se dire aussi **au plus** un élément de B.

Fonction numérique d'une variable réelle

Si A et B sont des parties de IR alors on a une fonction numérique (B$\subset$IR) d'une variable réelle (A$\subset$IR)

Attention : f est la fonction et f(x) est un réel.

Lorsque chaque élément de A a une image, on dit que l'on a une **application**.

Dans toute la suite nous parlerons de fonction numérique d'une variable réelle.

Exemples de procédés : $f(x) = 3x + 1$ signifie que pour chaque réel, on obtient son image en prenant son triple et en y ajoutant 1.

$f(x) = 3x + 1$ $f(\mathrm{t}) = 3t + 1$ et $f(\square) = 3\square + 1$ signifient la même chose. x ou t ou $\square$ sont des variables .(lettres qui peuvent être remplacées par plusieurs valeurs réelles pour calculer des images).

Si $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ nous constatons que 0 n'a pas d'image.

Si $f(x) = x^2 + 3$ nous constatons que (par exemple)0, 1 , 2 n'ont pas d'antécédent et que 12 a deux antécédents. En effet pour avoir un antécédent de 12 on doit chercher les réels x vérifiant $f(x) = 12$. $x^2 + 3 = 12$ et par suite $x = 3$ ou $x = -3$.

Formule : W =RI²t (formule de physique)

W quantité de chaleur « dépend » ou est fonction de R (résistance)de I (intensité) et de t (temps) mais W n'est pas fonction de R , I , et t de la même façon. On voit en se référant à ce qui est vu en classe de 3ème que deux de ces fonctions sont linéaires et l'autre non.

Définition de la représentation graphique.

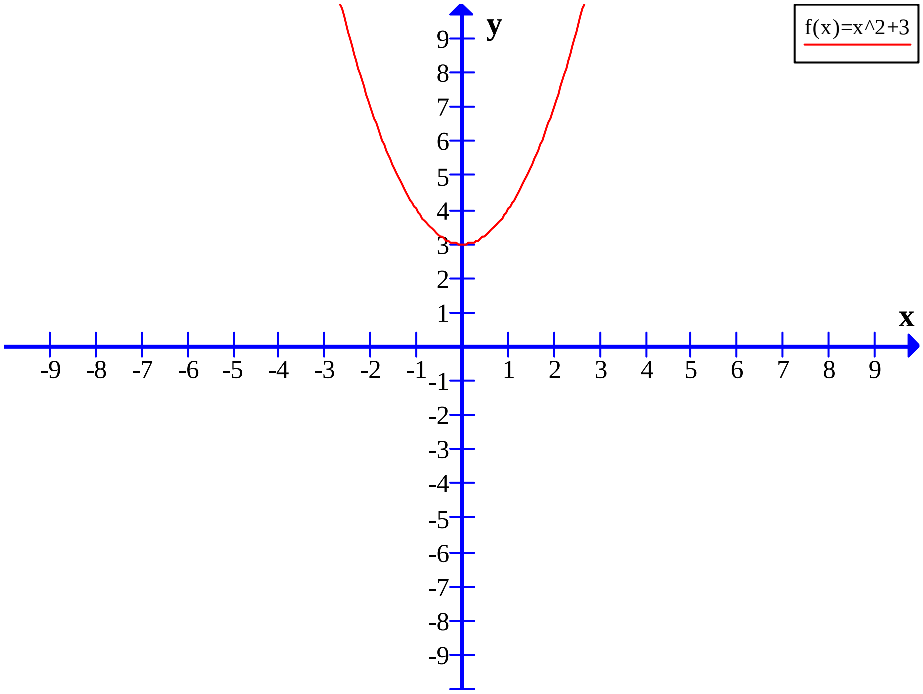
La représentation graphique de la fonction f , en général notée C_f est l'ensemble des points M (x , f(x)) dans un repère donné. Il arrive que l'on parle de courbe représentative de f même si la représentation n'est pas en un seul morceau.

On peut avoir la représentation graphique d'une fonction en procédant point par point mais cela n'est pas toujours possible. Pour la grande majorité des fonctions, il faut d'abord étudier la variation de la fonction (voir plus loin)

Essayons de représenter graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	-4	4
f(x)	12	7	4	3	4	7	12	19	19

Dans un repère nous plaçons ces points de coordonnées x et f (x) et nous essayons de les relier en allant de la gauche vers la droite mais encore une fois cette méthode ne fonctionne pas toujours, il faut d'autres connaissances.



Nous pouvons utiliser la courbe pour retrouver graphiquement des images ou des antécédents de réels.

Méthode : pour avoir l'image d'un réel x_0 (par exemple 2),on trace la droite verticale d'équation x = x_0 (ici x = 2). Elle coupe la courbe en un point (ou elle ne coupe pas la courbe). On cherche l'ordonnée de ce point et on obtient f (x_0) ici f (2)= 7.

Remarquons que si la droite « verticale » ne coupe pas la courbe alors ce réel x_0 n'a pas d'image par f .

Pour un ou des antécédents d'un réel y_0 (par exemple 12), on trace la droite horizontale d'équation y = y_0 (ici y = 12). Elle coupe la courbe en 0, 1 , ou plusieurs points. On cherche l'abscisse de chaque point. 12 a pour antécédent 3 et -3 . si la droite d'équation y = y_0 ne coupe pas la courbe ,alors y_0 n'a pas d'antécédent par f.

Pour avoir l'image directe d'un intervalle [a,b], on trace les droites d'équations :

x = a et x = b, elles coupent la courbe de f en deux points A et B d'ordonnées respectives y_A et y_B :si $y_A < y_B$ alors l'intervalle image est [y_A ; y_B](dans tous les cas l'intervalle est [ordonnée la plus petite ; ordonnée la plus grande])

Pour avoir l'image réciproque d'un intervalle (ou l'ensemble des antécédents) par exemple [y_1 ; y_2], on trace les droites d'équations y = y_1 et y=y_2 . Elles coupent sur la courbe un ou plusieurs « morceaux ». Pour chaque morceau, on prend l'abscisse du point le plus à gauche et celle du point le plus à droite pour former un intervalle. l'image réciproque est la réunion de ces intervalles.

Ensemble de définition d'une fonction.

Pour une fonction numérique, il serait intéressant de connaitre les réels x pour lesquels il est possible de calculer f (x) . L'ensemble de ces réels s'appelle ensemble de définition de la fonction f ou domaine de définition de f on note en général D ou D_f .

Exemples

f définie par : $f(x) = x^2 + 3x + 5$. on peut élever tout réel au carré , prendre le triple de ce réel, faire la somme de ces deux résultats et y ajouter 5. Le domaine de définition de cette fonction est donc IR. La fonction est un polynôme et elle est définie sur IR sauf indication contraire de l'énoncé.

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ la valeur 1 pose problème donc lorsqu'il y'a un dénominateur, il est plus simple de voir les valeurs de x « à problème » ici $f \ / \ f(x) = x^2 + 3$

$f(x) = \sqrt{x-3}$ les valeurs de x supérieures ou égales à 3 sont celles pour lesquelles on peut calculer f (x). Donc $D_f = [3, +\infty[$

En général (dans le cadre de ce cours) si :

$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$avec A(x) et B(x) des polynômes (f est donc une fonction rationnelle)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ B(x) \neq 0\}$ il faut donc résoudre l'équation B (x) = 0.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x) \text{existe et } u(x) \geq 0\}$

Remarquons qu'il y'a autant de conditions à poser que de dénominateurs et de racines carrées contenant x.

Les ensembles de définition que nous rencontrerons seront sous la forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles.

Etudier ces deux curiosités. Donner les ensembles de définition des fonctions $f(x)=\sqrt{-(x-3)^2}$ et $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{\frac{-1}{x}}$

Propriétés éventuelles

fonction paire

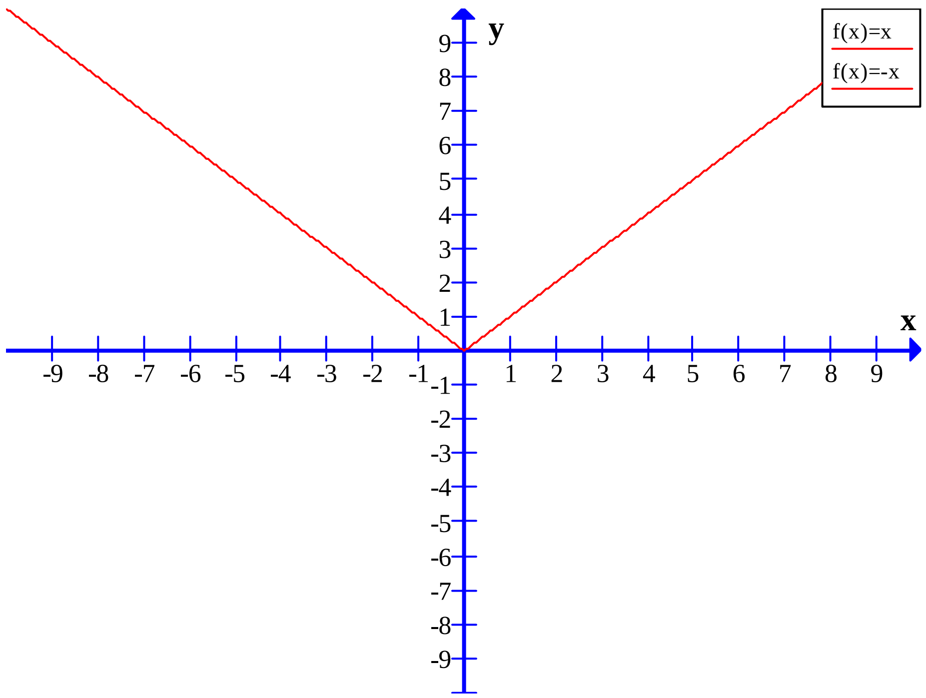
f est paire si pour tout x élément de D_f (- x) est élément de D_f et f (- x) = f (x).

Lorsque pour tout x élément de D_f (- x) est élément de D_f on dit que D_f est symétrique par rapport à 0 (zéro). Cette première condition est à vérifier avant aucun calcul de f (- x) . graphiquement lorsqu'une fonction est paire sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

exemples .

voir la courbe de la fonction $f \,/\, f(x)=x^2+3$

ou $f \,/\, f(x)=|x|$

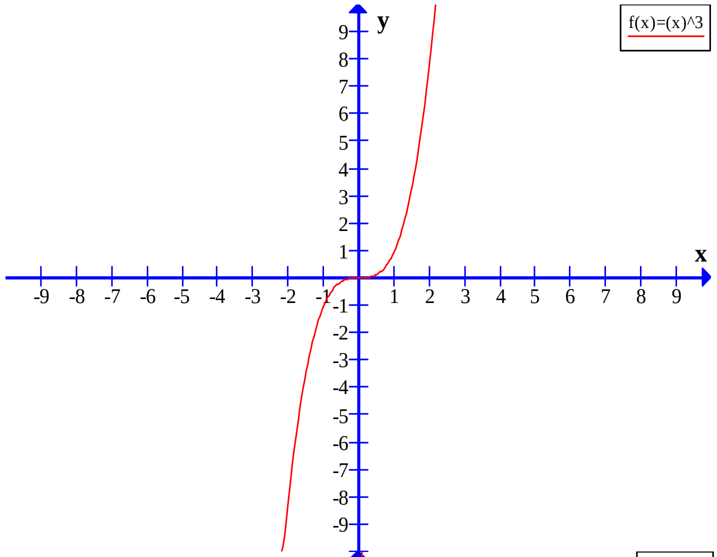


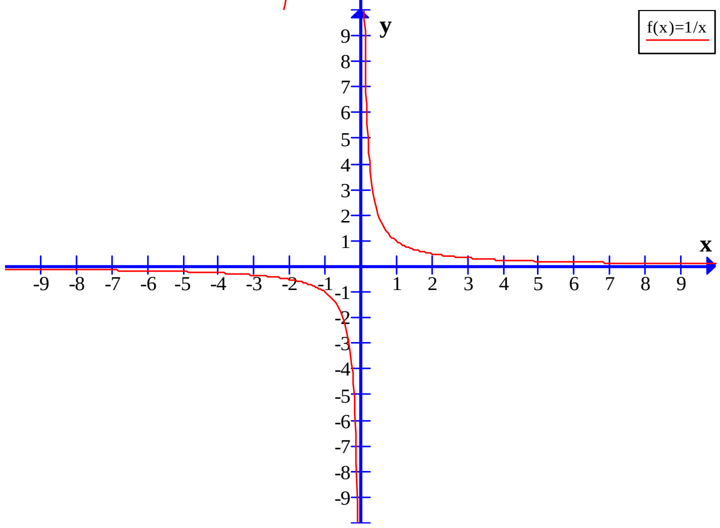
fonction impaire

une fonction f est impaire si pout tout $x \in D_f$ $(-x) \in D_f$ et f (-x) = f (x).

Lorsque f est impaire, sa représentation graphique admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exemples $f\ /\ f(x)=x^3 \qquad f(x)=\dfrac{1}{x} \qquad f(x)=x$



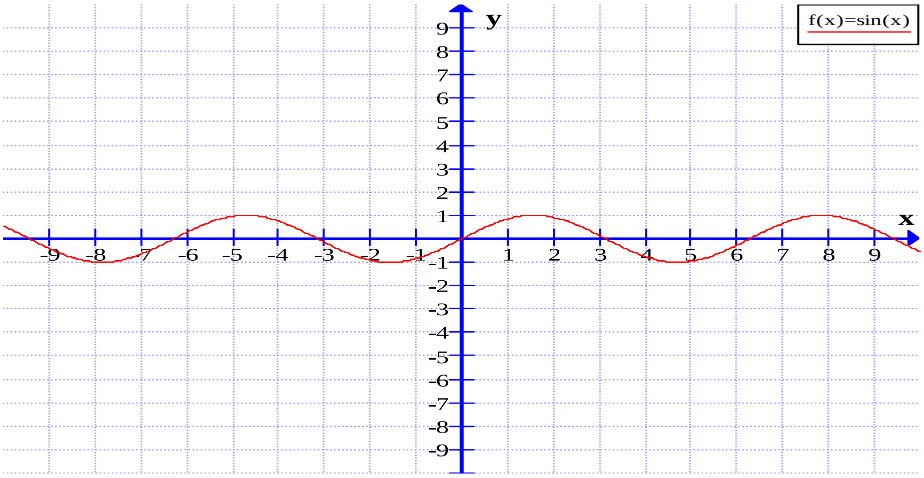


fonction périodique

une fonction *f* est périodique de période T, s'il existe un réel T > 0 tel que pour tout $x \in D_f \quad (x+T) \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$.

Lorsqu'une fonction est périodique, sa représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (voir le chapitre sur les transformations)

Exemples : $f(x) = \mathrm{E(x)}$ $\quad f(x) = \sin x$ $\quad$ E(x) est la partie entière de x



$\mathrm{E(x)} \leq \mathrm{x} < \mathrm{E(x)}+1$

sens de variation d'une fonction

définition

soit une fonction définie sur un **intervalle** I

f est croissante sur I si pour tous a et b éléments de I $(a < b) \Rightarrow (f(a) < f(b))$ ou encore $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \geq 0$.

f est stricte*ment* croissante sur I si pour tous a et b éléments de I $(a < b) \Rightarrow (f(a) < f(b))$ ou encore $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0$.

f est décroissante sur I si pour tous a et b éléments de I $(\mathrm{x}^2 > y^2) \Rightarrow \left(x^2+3 > y^2+3\right)$ d'où $f(x) > f(y)$

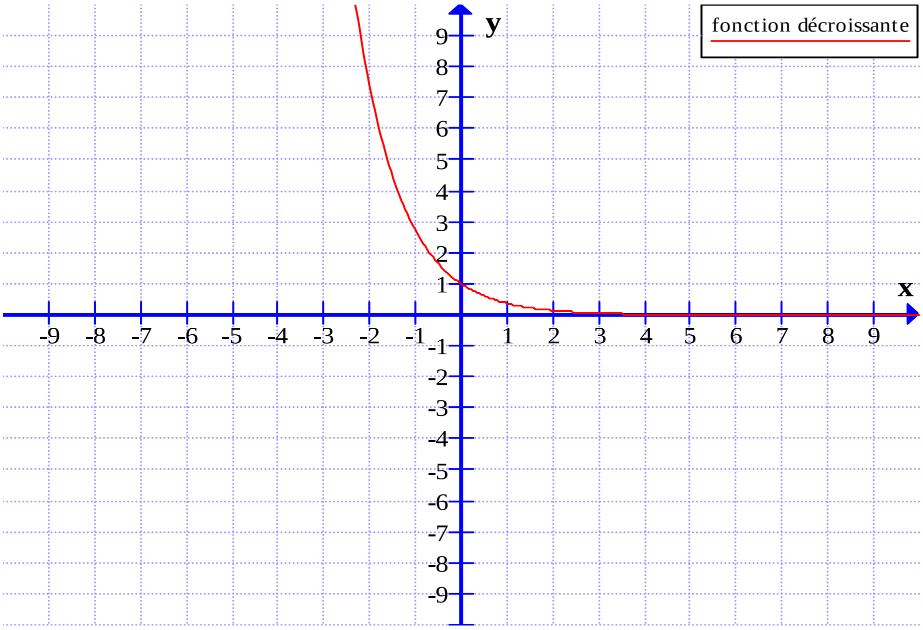
f est strictement décroissante sur I si pour tous a et b éléments de I $(a < b) \Rightarrow (f(a) > f(b))$.

Remarque : f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I.

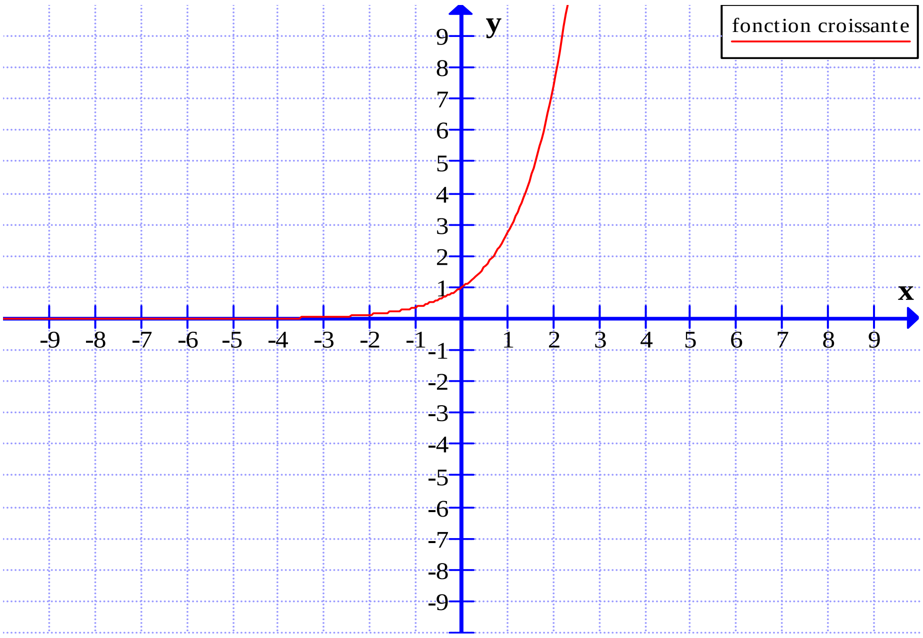
Attention le mot intervalle a été souligné car ces résultats ne sont valables que sur un intervalle et pas sur une réunion d'intervalles.

La stricte monotonie implique la monotonie.

Une fonction croissante conserve l'ordre, elle renverse l'ordre si elle est décroissante.



Graphiquement



Si nous revenons à la première représentation graphique, celle de la fonction $f \,/\, f(x) = x^2 + 3$,elle suggère que f est strictement décroissante sur]-∞ ;0[et strictement croissante sur]0 ;+∞[.

Soit x et y éléments de]-∞ ;0[$(x < y) \Rightarrow (x^2 > y^2)$ (voir ordre dans IR) $(x^2 > y^2) \Rightarrow (x^2 + 3 > y^2 + 3)$ d'où $f(x) > f(y)$ on peut procéder de même pour l'autre intervalle. Le sens de variation de cette fonction peut être donné en résumé sur le tableau suivant appelé tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Ce tableau peut être complété mais il suffit sous cette forme pour illustrer le sens de variation de f sur chaque intervalle. le sens de la flèche (vers le bas ou le haut) indique le sens de variation de f.

Le sens de variation de certaines fonctions usuelles a été vu en classe de seconde. Il est bon de se référer à ce cours.

Théorème

Soient f et g définies sur un même intervalle I et k un réel.

Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) sur I, alors la fonction f + g est croissante (respectivement décroissante) sur I

Si f est croissante sur I et k est positif alors la fonction kf est croissante (respectivement décroissante) sur I.

<u>Preuve</u> : sous forme d'exercices.

En regardant le tableau de variations ci-dessus ou en observant la courbe de la fonction ($f(x) = x^2 + 3$)on constate que la fonction f prend une valeur inférieure à toutes les autres pour x = 0. Cette valeur est appelée minimum de f. (elle n'existe pas toujours)

Minimum, maximum d'une fonction

Minimum relatif ou local

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet un minimum relatif à I en a élément de I si pour tout x élément de I $f(x) \geq f(a)$.

On dit que f(a) est la valeur de ce minimum.

Remarque :si la relation $f(x) \geq f(a)$ est valable pour tout x élément de D_f alors f(a) est le minimum absolu pour la fonction f.

Maximum relatif ou local

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I admet un maximum relatif à I en a élément de I si pour tout x élément de I

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{à condition que } g(x) \neq 0$$

f(a) est la valeur de ce maximum.

Remarque : si la relation $f(x) \leq f(a)$ est vraie pour tout x élément de D_f alors f(a) est le maximum absolu.

Une fonction n'a pas toujours maximum ou minimum dans l'intervalle choisi.

$f(x) = x^2 + 3$ définit une fonction qui n'a pas de maximum dans IR.

$f \,/\, f(x) = x^3$ n'a ni maximum ni minimum dans IR.

Un minimum ou un maximum est un extremum.

Comparaison de fonctions.

Soit D une partie de IR (intervalle ou réunion d'intervalles). Soient deux fonctions f et g définies sur D. on dit que les fonctions f et g sont égales sur D si pour tout x élément de D $f(x) = g(x)$.

On peut noter f = g.

Exemples 1. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ $\qquad g(x) = |x-1|$ $\qquad h(x) = x - 1$

Ces trois fonctions sont définies sur IR

$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = g(x) = |x-1|$ sur IR $\qquad g(x) = h(x) = x - 1$ sur $[1, +\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ $\qquad D_f = IR \setminus \{2\}$ $g(x) = x - 3$ g est définie sur IR.

$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$=$x-3$ si $x\in D_f=IR\setminus\{2\}$ f et g sont égales sur l'ensemble de définition de f mais pas sur IR.

Soit I un intervalle et f et g deux fonctions définies sur I. :

Si pour tout x élément de I $f(x)\le g(x)$, on dit que f est **inférieure** à g et on note $f\le g$.

Si pour tout x élément de I $f(x)\ge 0$,on dit f est **positive** sur IR.

S'il existe un réel A tel que pour tout x élément de I $f(x)\le \mathrm{A}$ on dit que f est **majorée** par A.

S'il existe un réel un réel a tel que pour tout x élément de I $f(x)\ge a$, on dit que f est **minorée** par a.

S'il existe deux réels a et A tels que pour tout x élément de I $a\le f(x)\le A$ on dit que f est **bornée** sur I. car f est majorée et minorée.

Remarquons que nous ne pouvons pas toujours comparer deux fonctions même si elles sont définies sur un même intervalle.

<u>Propriété</u>

Soit f une fonction monotone sur I = [a,b] alors f est bornée.

<u>Preuve</u> :

Supposons f croissante sur [a ; b] et soit x élément de [a ; b]
$a\le x\le b$ et f croissante donnent $f(a)\le f(x)\le f(b)$ donc f est bornée.(on procéderait de même pour f décroissante)

Somme, produit, quotient de fonctions

Soit f , g, h trois fonctions définies sur un intervalle I, pour tout x élément de I

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{à condition que } g(x)\neq 0$$

Composition de fonctions

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to K$ où I, J et K sont des intervalles ou des réunions d'intervalles.

On se propose de voir ce qui se passe si un élément x pris dans I, on cherche son image f(x) par f et l'image de f(x) par g. (car $f(x) \in J$)

Lorsque nous procédons ainsi, nous faisons ce qu'on appelle la composition de fonctions. $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ nous notons $g \circ f$; f suivie de g : lire « g rond f »

Remarquer que l'on écrit g avant f mais on fait « agir » f avant g car c'est f qui est définie sur I $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Cherchons l'ensemble de définition de $g \circ f$ et $f \circ g$.

$g \circ f(x)$ existe si f (x) existe d'abord donc il faut $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

De même $f \circ g(x)$ existe si $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

Traitons un petit exemple

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Donnons $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$ et calculons $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

$f(x)$ existe si $x - 2 \neq 0$ et $\mathrm{g}(x)$ existe si $x^2 - 9 \geq 0$

$D_f = IR \setminus \{2\}$ $\qquad D_g =]-\infty; -3] \cup [+3; +\infty[$

$g \circ f(x)$ existe si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in \mathrm{D}_g \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x \neq 2 \\ f(x) \geq 3 \text{ ou } f(x) \leq -3 \end{cases}$

$\dfrac{x+1}{x-2} \geq 3$ d'où $\dfrac{-2x+7}{x-2} \geq 0$ et donc $x \in \left]2; \dfrac{7}{2}\right]$

$\dfrac{x+1}{x-2} \leq 3$ d'où $\dfrac{4x-5}{x-2} \leq 0$ et donc $x \in \left[\dfrac{5}{4}; 2\right[$

Donc donc $\mathrm{D}_{g \circ f} = \left[\dfrac{5}{4}; 2\right[\cup \left]2; \dfrac{7}{2}\right]$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{(f(x))^2-9}=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2-9}$$

$f\circ g(x)$ existe si $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases}$ $donc \begin{cases} x\geq 3 \ \ ou \ \ x\leq -3 \\ g(x)\neq 2 \end{cases}$

D'où $\sqrt{x^2-9}\neq 2$ dans D_g

Résolvons $\sqrt{x^2-9}=2$ on obtient en tenant compte la condition sur la fonction g

$D_{f\circ g}=\left]-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right[\setminus\left\{-\sqrt{5};+\sqrt{5}\right\}$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-2}=\frac{\sqrt{x^2-9}+1}{\sqrt{x^2-9}-2}.$$

Fonctions associées : $x\mapsto f(x)+k$ **;** $x\mapsto f(x+k)$ **:** $x\mapsto -f(x)$ **;** $x\mapsto f(-x)$ **;** $x\mapsto |f(x)|$ **;** $x\mapsto f(|x|)$**.**

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La courbe représentative C_g de la fonction g définie par : $g(x)=f(x)+\mathrm{k}$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $\mathrm{k}\,\vec{j}$.

La courbe représentative C_h de la fonction h définie par $h(x)=f(x+k)$ est l'image de C_f par la translation de vecteur -$\mathrm{k}\vec{i}$.

La courbe représentative C_l de la fonction l définie par $l(x)=-f(x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

La courbe représentative C_m de la fonction m définie par $m(x)=f(-x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative C_n de la fonction n définie par : $n(x)=|f(x)|$ est celle de f pour les valeurs positives de f(x) (la partie de C_f située au dessus de l'axe des abscisses.) elle est celle de C_l pour les valeurs négatives de f(x)(courbe symétrique de celle de f située en dessous de l'axe des abscisses.)

La courbe représentative C_p de la fonction p définie par $p(x) = f(|x|)$ est celle de f pour les valeurs positives de x. la fonction p étant paire, on déduit par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarquons que les fonctions associées n'ont pas toujours le même ensemble de définition.

Preuve du théorème

Soit $x \in D_f$ et soient M et M' les points de C_f et C_g d'abscisses x. ces points ont pour coordonnées M (x ; f(x)) et M' (x ; f(x) + k). On constate alors que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées (0 ; k) il est donc indépendant de x et s'écrit

$\overrightarrow{MM'} = \mathrm{k}\,\vec{j}$.

En conclusion pour tout point M de C_f d'abscisse x, son image M' par $t_{k\vec{j}}$ est le point de C_g d'abscisse x.

La courbe C_g est donc bien l'image de C_f par la translation $t_{k\vec{j}}$.

Soit $x \in D_f$ et soit M le point de C_f d'abscisse x. la fonction h est définie en x - k car h (x – k)= f (x – k + k) = f (x). Soit M' le point de C_h d'abscisse (x – k) ; on a M (x ; f(x)) et M ' (x – k ; f (x)) et par suite $\overrightarrow{MM'}\left|\begin{matrix}-k\\0\end{matrix}\right.$. Ce vecteur est indépendant de x. le point M' est donc l'image de M par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

Soit $x \in D_f$ et soit M et M' les points de C_f et C_l d'abscisse x. on a M (x ; f (x)) et M' (x ; - f (x)) et par suite le milieu T de [MM'] a pour coordonnées (x ; 0). Ce point T est sur l'axe (Ox) des abscisses. M' est donc symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Soit $x \in D_f$ et soit M le point de C_f d'abscisse x. Soit le point M' de C_m d'abscisse –x . on a M (x ; f(x)) et M' (- x ; f (x)) car m (-x)= f (x). ces points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour les autres fonctions le lecteur peut lui même trouver la preuve, elle est très simple.

Eléments de symétrie .

Quand nous observons certaine courbes, (voir ci-dessus), nous constatons qu'elles admettent quelques fois un centre de symétrie autre que l'origine du repère ou un axe de symétrie différent de l'axe des ordonnées.

Propriété

Le point $\Omega(\mathrm{a};\mathrm{b})$ est centre de symétrie de la courbe C_f si pour tout $x \in D_f$ $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

Preuve

Soit $\Omega(\mathrm{a};\mathrm{b})$ pour tout point M (x ; f(x)) de C_f , son symétrique M' (x' ; f(x')) est un point de C_f . Or par la symétrie de centre $\Omega(\mathrm{a};\mathrm{b})$, le milieu de [MM'] est le centre lu même donc on a : x + x' = 2a et f (x) + f (x') =2b ou encore x' = 2a - x et f(x) + f(x') = 2b d'où f(x)+ f (2a – x) = 2b.

Exemple

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{5}{x-1} \quad \text{et } \Omega(1;5)$$

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{5}{x-1} \quad \text{et } \Omega(1;5)$$
$$\mathrm{D}_f = IR \setminus \{1\} \quad \text{si } x \in D_f \text{ alors } x \neq 1$$
$$2a - x = 2 - x$$
$$si\ x \neq 1 \text{ alors } 2 - x \neq 1$$
$$f(2-x) = 2(2-x) + 3 + \frac{5}{2-x-1} = 7 - 2x + \frac{5}{1-x}$$
$$f(2-x) + f(x) = 7 - 2x + \frac{5}{1-x} + 2x + 3 + \frac{5}{x-1} = 10 = 2 \times 5$$

Et donc $\Omega(1;5)$ est centre de symétrie de la courbe de f.

Propriété

la droite (Δ) d'équation x = a est axe de symétrie de C_f si pour tout $x \in D_f$ $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

Preuve

rapport à (Δ) alors x + x' = 2 a et f'(x) = f (x') d'où la relation.

10.Bijections

a) application injective

Une application f de I vers J est injective si $(x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$.

Avec x et x' éléments de I

Nous pouvons traduire en disant que deux éléments distincts ont des images distinctes.

Comme il n'est pas aisé de travailler avec le symbole $\neq$,nous allons considérer l'énoncé équivalent que nous appelons contraposée.

Contraposée :la contraposée de $(p \Rightarrow q)$ est $(nonq \Rightarrow nonp)$

Nous dirons donc que f est injective si $(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$

<u>Exemple</u> $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ définie sur IR\{2}.

$$f(x) = f(x') \text{ donne } \frac{2x+3}{x-2} = \frac{2x'+3}{x'-2}$$

$$(2x+3)(x'-2) = (2x'+3)(x-2)$$

$$ce \text{ qui donne } x = x'$$

b) application surjective

Une application f de I vers J est surjective si chaque élément de J a au moins un antécédent dans I.

Donc l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution pour tout y élément de J.

Reprenons la fonction précédente

$$f(x) = y \ donne \ \frac{2x+3}{x-2} = y$$
$$2x+3 = yx-2y$$
$$2x-yx = -2y-3$$
$$x(2-y) = -2y-3$$

Cette équation admet solution si y est différent de 2. Donc $f : \mathrm{IR}\backslash\{2\} \to IR\backslash\{2\}$ est surjective

c)application bijective

Toute application à la fois injective et surjective est bijective

f est donc bijective si l'équation *f*(x)=y admet une unique solution pour tout y élément de J.

On parle **d'injection , de surjection et de bijection.**

c)bijection réciproque.

Toute bijection f admet une réciproque notée f^{-1}.

$$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$$

La résolution de l'équation f (x) = y permet de montrer que f est injective , surjective ou bijective. Elle permet aussi de donner l'expression de la réciproque en calculant x en fonction de y.

d)prolongement restriction

soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a sauf en a et soit g une fonction définie sur I et telle que pour tout x élément de I g (x) = f (x) (donc définie en a)

on dit que g est **un** prolongement de f à I (on a prolongé au point a)

f est **la** restriction de g à I\{a}.

Restreindre revient à considérer la fonction sur une partie de son ensemble de définition.

Prolonger consiste à considérer un ensemble qui contient l'ensemble de définition de la fonction et à définir des images pour le ou les nouveaux éléments ainsi introduits.

EXERCICES

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1°) $f(x) = \sqrt{-x}$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 3°) $f(x) = \sqrt{1-x}$

4°) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+7}}$ 5°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$

6°) $f(x) = \sqrt{|-x|}$ 7°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{-x}}$

8°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{2x+1}$ 9°) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$ 10°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$

11°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{|-x|}}{1-\sqrt{|-x|}}$ 12°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-13x-5}$

13°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-|13x-5|}$ 14°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$

16°) $\dfrac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$ 17°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$

18°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$ 19°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}$

20°) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$

21°) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2-14x-5} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+11x-15}} & si\ x > 1 \end{cases}$

22°) $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{(1+x)(2-x)}}{x(2x-1)}$ 23°) $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1+x}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$

EXERCICE 2

Pour chacune des fonctions numériques définies ci-dessous, préciser l'ensemble de définition suivant les valeurs du paramètre réel m .

1°) $f(x) = \dfrac{3}{|x| + m}$ 2°) $\sqrt{x^2 + m}$ 3°) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - mx + 1}$ 4°) $f(x) = \sqrt{x^2 - mx + 1}$

EXERCICE 3

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des **applications** :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sqrt{x}$ $h : [2 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x-2}$ $i : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

$j : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2 + 2x - 3}$ $k : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ $m : [0 ; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

$n :]-\infty ; 0[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-3}$

EXERCICE 4

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui définissent une **bijection** .Dans ce cas, déterminer la **bijection réciproque** .

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_4 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$

$x \mapsto 1 - x$ $x \mapsto 1 + x^2$ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $x \mapsto \sqrt{-x}$

$f_5 : [0\,;1] \to [0\,;1]$ $f_6 : [4\,;+\infty[\to \mathbb{R}_-$ $f_7 : \mathbb{R}_- \to]-\infty\,;5]$

$x \mapsto 1 - x$ $x \mapsto -\sqrt{x-4}$ $x \mapsto -x^2 + 5$

$f_8 : [2\,;+\infty[\to [3\,;+\infty[$ $f_9 : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$x \mapsto 3 + \sqrt{x-2}$ $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, étudier si l'application f de E vers F est injective, surjective ou bijective .

1°) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ 2°) $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

3°) $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 4°) $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$ $f(x) = 3x^2 - 4$

5°) $E = \mathbb{R}$, $F = [-3\,;+\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 3$

6°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = x - 1$, si x est impair : $f(x) = x + 1$

7°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = \dfrac{x}{2}$, si x est impair : $f(x) = \dfrac{x-1}{2}$

8°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = 2x$, si x est impair : $f(x) = 2x + 1$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par : f (x) = $\dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$

1°) Déterminer son ensemble de définition D .

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f (x) = y , où y est un paramètre réel .

L'application f : D → $\mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

3°) Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles , pour que l'application g : E → F soit bijective . Définir alors g^{-1} .

x ↦ f (x)

EXERCICE 7

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x ↦ 2x + 3

1°) Calculer f ($-\dfrac{1}{2}$) et f ($\dfrac{1}{2}$) .

2°) Démontrer que f est bijective et déterminer l'application réciproque .

3°) La restriction de f à $\mathbb{Z}$ est-elle une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$?

4°) Soit g : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ x ↦ g (x) = $\dfrac{x}{2} + 4$ si x est pair

x g (x) = $\dfrac{x^2 - x}{2}$ si x est impair

Déterminer l'image par g de chacun des entiers (− 2), (− 1) , 1 , 2 , 3 .

L'application g est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 8

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère cartésien .

1°) Soit f l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ associant au point M (x, y) le point M ' (x ', y '), tel que :

$$x' = 3x + 2y \ , \ y' = 2x + 3y \ .$$

L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2°) Mêmes questions pour l'application g, telle que :

$$x' = 2x - y \ , \ y' = 6x - 3y \ .$$

Déterminer g ($\mathscr{P}$) .

EXERCICE 9

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Soit le point A(— 1 ; 0) et le point B(1 ; 0) et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] .

Le demi-cercle fermé inclus dans $\mathscr{C}$ et formé des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnées positives est appelé $\mathscr{C}_1$. Le demi-cercle fermé inclus dans $\mathscr{C}$ et formé des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnées négatives est appelé $\mathscr{C}_2$. La droite $\mathscr{D}$ (O, $\vec{i}$) est appelée x ' x (axe des abscisses) .

Etant donné un point M du cercle $\mathscr{C}$, on peut effectuer la construction suivante : par M , on trace la perpendiculaire à x ' x qui coupe x ' x en un point H unique .

1°) L'application $f_1 : \mathscr{C}_1 \to x'x$ est-elle injective, surjective, bijective ?

$$M \mapsto H$$

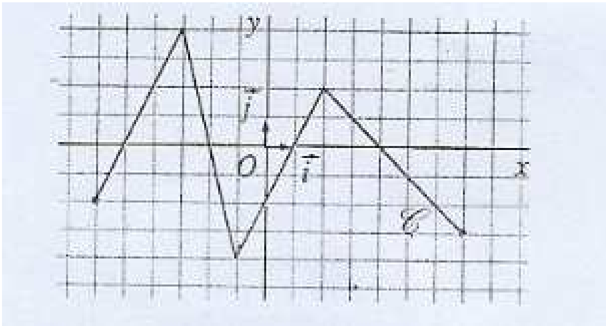
2°) Même question pour les applications suivantes :

$f_2 : \mathscr{C}_2 \to [AB]$ $\qquad$ $f_2 : \mathscr{C} \to [Ax)$ $\qquad$ $f_4 : \mathscr{C} \to [AB]$

$M \mapsto H$ $\qquad$ $M \mapsto H$ $\qquad$ $M \mapsto H$

EXERCICE 10

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d' une fonction f définie sur l'intervalle [— 6 ; 7] .



1°) Quelles sont les images des réels 3, — 2, — 6 et 0 par f ?

2°) Quels sont les antécédents de 2 ?

3°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 0 .

4°) Quel est en fonction de *m* le nombre de solutions de l'équation f (x) = *m* ?

5°) Résoudre graphiquement l'inéquation f (x) > 0 .

6°) Résoudre graphiquement l'inéquation f (x) < 2 .

EXERCICE 11

Soit la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous, représentative de la fonction f : $x \rightarrow x^3 - 4x^2 + 3$, et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 3$.

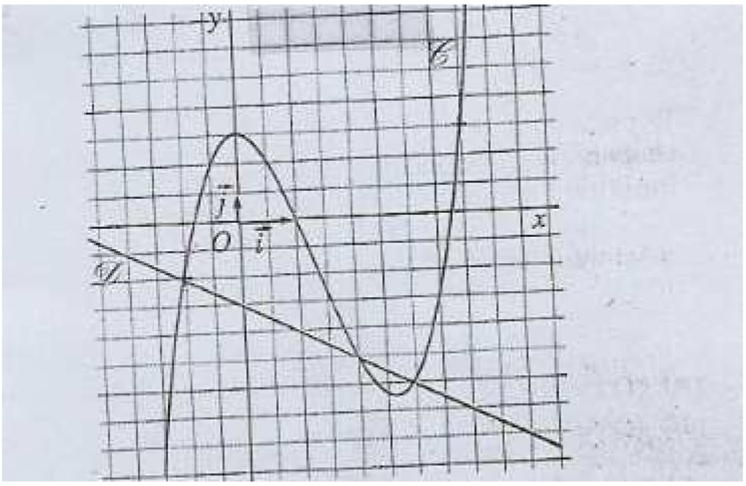
1°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 3, puis l'inéquation f (x) < 3 .

2°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 0, puis l'inéquation f (x) ≥ 0 .

On donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} des solutions non entières .

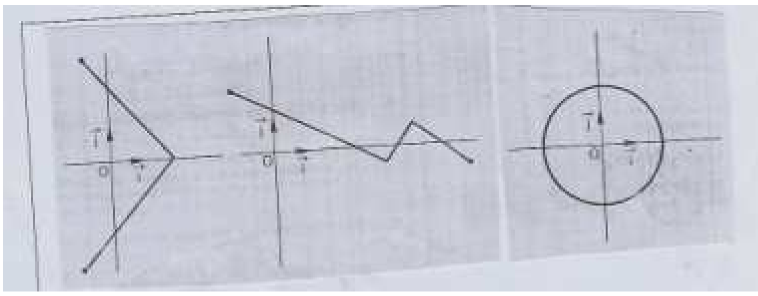
3°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = — x — 3 , puis l'inéquation f (x) ≤ — x — 3.

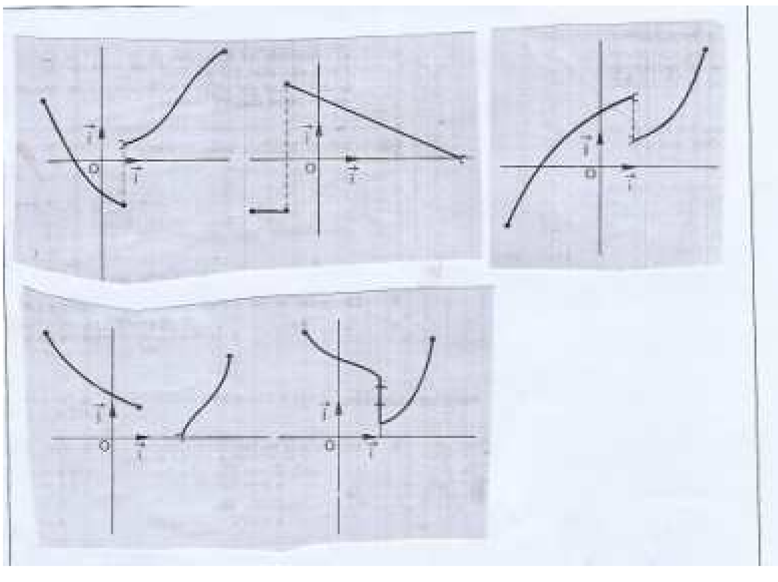
4°) Retrouver algébriquement les résultats des questions 1°, 2° et 3° .



EXERCICE 12

Les courbes suivantes sont-elles représentatives de fonctions ?





EXERCICE 13

Soit f : R → R avec $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$ si $x \neq -2$ et $f(-2) = 1$, et g : R → R $x \to 2x + 3$

1°) Déterminer les fonctions $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$, $3f - 2g$.

2°) Déterminer et comparer les fonctions $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$.

EXERCICE 14

Déterminer les ensembles de définition des fonctions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ et $g(x) = x^2 + x$

EXERCICE 15

Quel est l'ensemble de définition de $(f \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ b) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

d) $f(x) = 1 - \frac{1}{2 - x}$

EXERCICE 16

Ecrire f sous la forme d'une composée de deux (ou plusieurs) fonctions usuelles :

a) $f(x) = (5x + 1)^2 + 2$ b) $f(x) = 2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = \left(1 - \frac{3}{x + 1}\right)^2$.

d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\left(1 + \sqrt{x - 3}\right)^2}$

EXERCICE 17

Soit les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto 3x - 2$,

$f_5 : x \mapsto x^3$.

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de ces fonctions :

a) $f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 2$ **b)** $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ **c)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{3x - 2}$ **d)** $j : x \mapsto (3x - 2)^3$

e) $k : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **f)** $l : x \mapsto \sqrt{3x - 2}$

EXERCICE 18

Soient $f_{a,b}$, g, h les trois fonctions numériques suivantes :

$f_{a,b} : x \mapsto ax + b$ $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $h : x \mapsto x^2$.

Montrer que les fonctions ϕ suivantes peuvent s'écrire comme composées de $f_{a,b}$, g, h en choisissant convenablement a et b .

1°) $\phi : x \mapsto \dfrac{2}{x - 1} + 3$ 2°) $\phi : x \mapsto \dfrac{3}{(3x - 2)^2}$ 3°) $\phi : x \mapsto (2x - 1)^2 + 2$

4°) $\phi : x \mapsto \dfrac{x + 1}{x}$ 5°) $\phi : x \mapsto x^4 - 4$ 6°) $\phi : x \mapsto x^2 + 2x - 3$

EXERCICE 19

Soient f et g deux fonctions affines telles que : $f(x) = ax + b$; $g(x) = cx + d$.

1°) Trouver une relation entre a, b, c, et d caractérisant la propriété : $f \circ g = g \circ f$.

2°) Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équations y = ax + b et y = cx + d .

On désigne par Δ la droite d'équation y = x . Montrer que $f \circ g = g \circ f$ équivaut à :

(1) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est égale à Δ , soit **(2)** $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles à Δ ,

soit **(3)** $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et Δ sont concourantes .

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions (f + g), (fg), $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$. Préciser d'abord l'ensemble de définition de chacun d'eux .

1°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - x^2$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

3°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ 4°) $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$

5°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{2x+3}$ 6°) $f(x) = x - 3$ et $g(x) = (2x+1)(2x+5)$

EXERCICE 21

On considère les applications $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$, de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ vers lui-même

définies par : $f_1(x) = x$; $f_2(x) = 1 - x$; $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_4(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

$f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$; $f_6(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Compléter le tableau suivant :

$\circ$	f_1	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

EXERCICE 22

1°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $h(x) = x - 1$.

a) Déterminer les fonctions $(g \circ f)$ et $(h \circ g)$.

b) Montrer que les fonctions $[(h \circ g) \circ f]$ et $[h \circ (g \circ f)]$ ont même ensemble de définition D puis que pour tout x de D, on a : $[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$.

N.B. On peut donc écrire sans ambiguïté : $(h \circ g \circ f)(x)$.

2°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = 3x$; $g(x) = 1 + x^2$; $h(x) = \sqrt{x}$. Déterminer et comparer les fonctions $(f \circ g \circ h)$ et $(h \circ g \circ f)$.

EXERCICE 23

Les fonctions $f : x \rightarrow \dfrac{x^2+4}{(x^2-1)(x^4-16)}$ et $g : x \rightarrow \dfrac{x^2+1}{(x^4-1)(x^2-4)}$ sont-elles égales ?

EXERCICE 24

Soit F, G, H, I les fonctions numériques suivantes :

$F : x \rightarrow |x|$ $G : x \rightarrow (\sqrt{x})^2$ $H : x \rightarrow \sqrt{x^2}$ $I : x \rightarrow x$

1°) Dire celles qui sont égales .

2°) La fonction G est-elle une restriction de I ? de F ?

La fonction F est-elle un prolongement de I ?

EXERCICE 25

On donne les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$f(x) = \dfrac{x^3}{|x|} + 1$; $g(x) = \dfrac{x - 1}{|x| - 1}$; $h(x) = |2x + 1| - |x - 3| + 4$.

Déterminer les restrictions :

1°) de f à $\mathbb{R}^{*+}$, à $\mathbb{R}^{*-}$, à $[-1 ; 1] \setminus \{0\}$.

2°) de g à $\mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}$, à $\mathbb{R}^{-} \setminus \{1\}$.

3°) de h à $]-\infty ; -\dfrac{1}{2}]$ à $[-\dfrac{1}{2} ; 3]$ et à $[3 ; +\infty[$.

EXERCICE 26

Dans chacun des cas suivants, trouver les plus grands intervalles sur lesquels $f \leq g$ ou $f \geq g$

Interpréter graphiquement les résultats .

1°) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ et $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

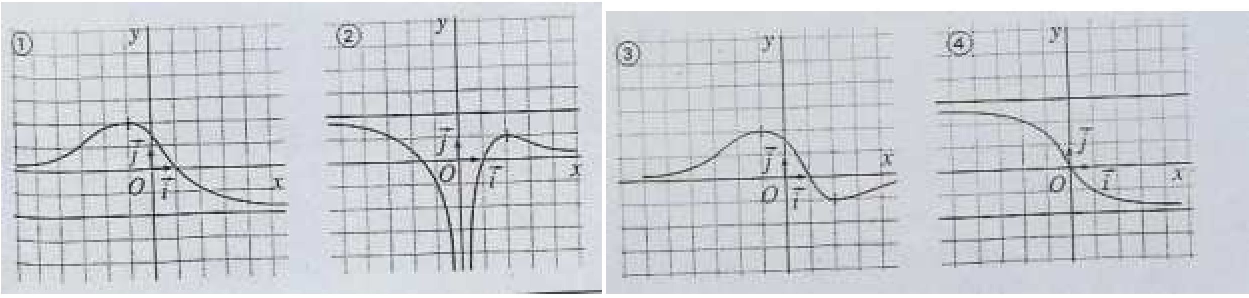
2°) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10x$ et $g(x) = x^3 + 4x^2 - 6x$

3°) $f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$ et $g(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$

4°) $f(x) = -x^2 - x + 3$ et $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

EXERCICE 27

Les courbes suivantes sont représentatives de fonctions :



Dans chacun des cas, dire si la fonction admet : un maximum, un minimum, un majorant

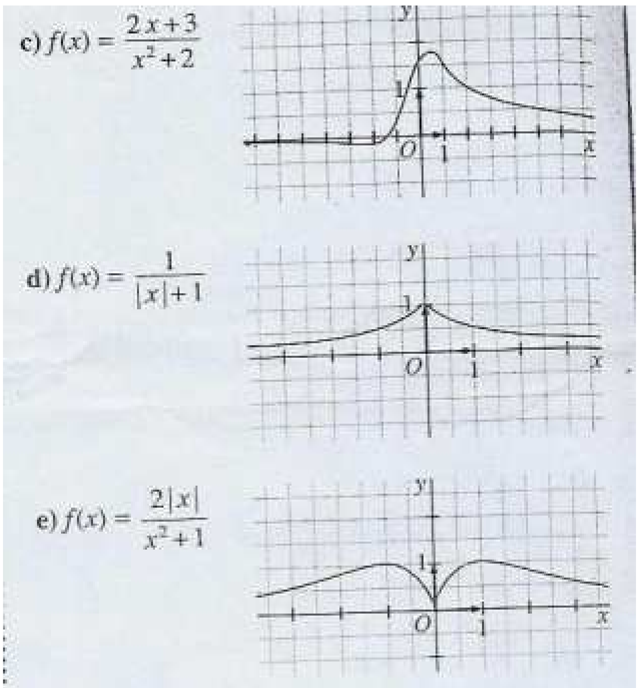
et /ou un minorant .

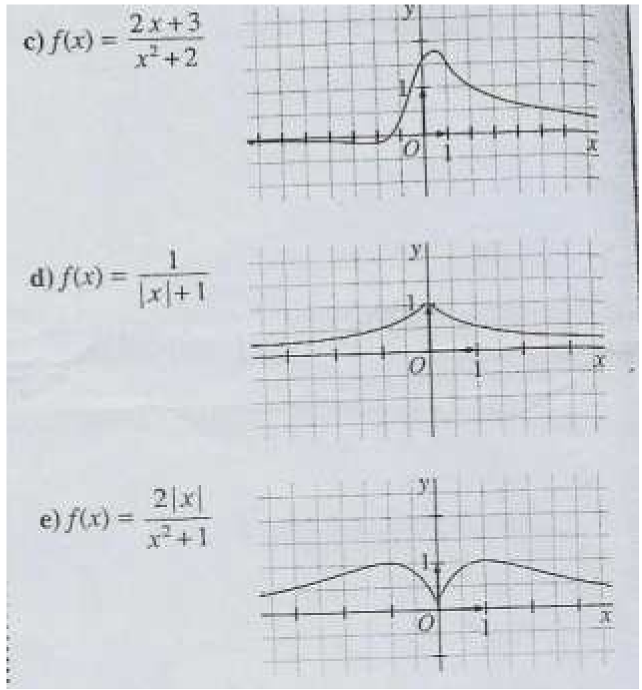
Préciser leurs valeurs s'ils existent.

EXERCICE 28

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur R et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative .

A l'aide de la courbe, conjecturer l'existence d'un majorant et d'un minorant (entiers) pour f, puis démontrer cette conjecture algébriquement .





EXERCICE 29

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to 3x - 5 \qquad x \to \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

1°) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $1 \leq g(x) < 2$.

2°) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

3°) Démontrer que la fonction $(g \circ f)$ est bornée sur **R** .

4°) Démontrer que la fonction $(f \circ g)$ est bornée sur **R** et que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ -2 \leq (f \circ g)(x) < 1$$

EXERCICE 30

Après avoir précisé leur ensemble de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :

(1) $x \to x^3 - x + 1$ **(2)** $x \to x^2 - 3x + 1$ **(3)** $x \to x^2 - 1$ **(4)** $x \to x^3 - 7x$

(5) $x \to 2x^4 + x^2 - 1$ **(6)** $x \to \sqrt{x^2 - 1}$ **(7)** $x \to x^2 - 3\,|\,x\,| + 1$ **(8)** $x \to \dfrac{1}{\sqrt{|\,x\,|}}$

(9) $x \to \dfrac{3x}{|\,x^4 - x^2 + 1\,|}$ **(10)** $x \to \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{\sqrt{x^3 - x}}$ **(11)** $x \to \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{1 - x^2}}$

(12) $x \to \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$ **(13)** $x \to \sqrt{|x-1| + |x+1|}$ **(14)** $x \to \dfrac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$

(15) $x \to \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{4 - x^2}}$ **(16)** $x \to \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{4 - x^2}}$ **(17)** $x \to \dfrac{5x^3 + 3x|x| - 2x}{x^3 - 9x}$

(18) $x \to \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

(19) $x \to \begin{cases} f(x) = -\dfrac{3}{x} & \text{si } -6 \leq x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{-3x^2 + 9}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{3}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$

EXERCICE31

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-a ; +a]$ avec $a > 0$.

Soient g et h les fonctions telles que :

$g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$; $h(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

1°) Démontrer que g est une fonction paire et que h est une fonction impaire .

2°) Vérifier que $f = g + h$.

3°) Déterminer g et h lorsque $f(x) = x^2 + x + 1$; lorsque $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$;

lorsque $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$.

EXERCICE 32

Dans chacun des cas suivants, on demande de tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f relativement à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) On sait que : a) f est impaire b) si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) = x$.

si $x \in]4 ; +\infty[$, alors $f(x) = 4$.

2°) On sait que : a) f est paire b) si $x \in [0 ; 3[$, alors $f(x) = 2$.

si $x \in [3 ; +\infty[$, alors $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3°) On sait que : a) f est périodique, de période 2

b) si $x \in [0 ; 2[$, alors $f(x) = -x + 1$.

· Tracer $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-4 ; 8[$.

4°) On sait que : a) f est impaire b) f est périodique, de période 2

c) si $x \in [0 ; 1[$, alors $f(x) = x$.

· Tracer $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ puis sur l'intervalle $]-3 ; 5[$.

Connaît-on la valeur de $f(-1)$? de $f(3)$?

5°) On sait que : a) f est paire b) f est périodique, de période 2

si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) = x$.

· Tracer $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$

EXERCICE 33

Soit f telle que $f(x) = |x + 2| + |x - 2| + 2x$.

1°) Exprimer $f(x) =$ sans valeur absolue suivant les valeurs de x .

2°) Tracer $\mathscr{C}$ courbe représentative de la fonction f .

3°) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = x$.

EXERCICE 34 Partie entière et partie décimale

Pour tout réel x, on admet qu'il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est appelé «partie entière de x » et est noté E(x) . Par exemple $2 \leq 2{,}8 < 3$ donc

E(2,8) = 2 . Ainsi E(x) = n signifie que $x \in [\, n ; n + 1 \,[$ ou encore que $n \leq x < n + 1$.

A . Etude de la fonction E

1°) Placer sur un axe les nombres suivants et en déduire leur partie entière : 1,75 ; $-3{,}4$; $\frac{3}{2}$; $\frac{17}{4}$; $\sqrt{2}$; 5 ; -3 ; $\sqrt{2} - 2$; $1 - 2\sqrt{3}$; 0,245 ; π ; $-\frac{\pi}{2}$.

2°) Quels sont les nombres x tels que : a) E(x) = 3 ? b) E(x) = -2 c) E(x) = 0 ?

3°) Etudier la fonction E et tracer la courbe représentative de E restreinte à l'intervalle $[-5 ; 4]$.

4°) Quels sont les nombres x tels que : a) E(2x) = 3 ? b) $E(\frac{1}{5}x) = -1$? c) $E(3x - 2) = 4$?

d) $E(\frac{1}{x}) = 1$ $(x \neq 0)$? e) $E(x^2) = 3$?

5°) x est un réel tel que E(x) = 4 . Montrer qu'alors E(x + 3) = 7 .

Montrer que, plus généralement, si x est un réel quelconque et p un entier relatif quelconque, alors E(x + p) = E(x) + p .

B . Avec la partie entière

h est la fonction définie sur $]\, 0 ; +\infty \,[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$ .f désigne la fonction $E \circ h$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2°) Calculer f(1), f(3,2) , puis f(x) lorsque x > 1 .

3°) Calculer $f(\frac{1}{2})$, f(0,75) , puis f(x) lorsque $x \in \,]\frac{1}{2} ; 1[$.

4°) p est un entier naturel non nul . Calculer f(x) pour $x \in \,]\frac{1}{p+1} ; \frac{1}{p}]$.

5°) Tracer la représentation graphique de la restriction de f à $[\frac{1}{4} ; +\infty[$.

6°) Peut-on tracer la courbe représentative de f sue $]0 ; +\infty[$?

C . La partie décimale

d est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x - E(x)$.

1°) Calculer les images par *d* des réels : 5,2 ; $\frac{3}{2}$; 8 ; -5 ; $-6{,}3$.

2°) Donner au moins cinq réels différents, et pas tous de même signe, qui vérifient :

$d(x) = 0{,}3$.

3°) Montrer que pour tout réel x, $0 \leq d(x) < 1$.

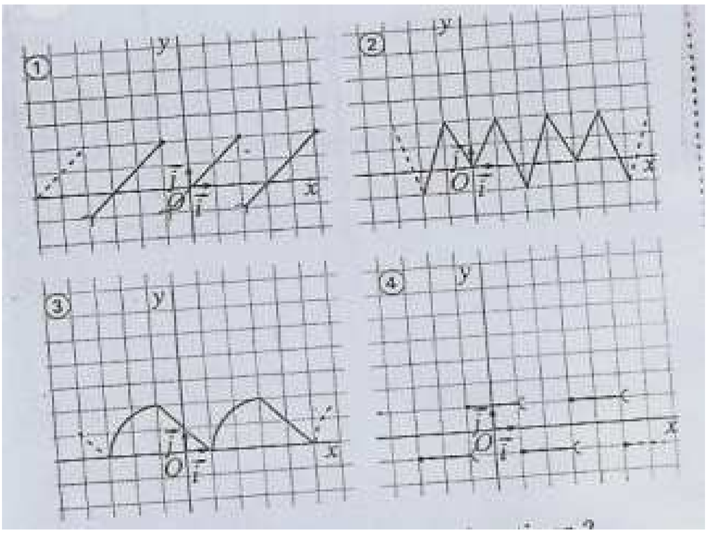
4°) Montrer que *d* est périodique .

5°) Tracer la représentation graphique de la restriction de *d* à $[0 ; 1[$ et en déduire alors la courbe représentative de *d* .

6°) On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{d(x)}{\sqrt{x}}$.

Calculer g(x) pour $x \in]0; 1[$ .En déduire une majoration de g(x) sur $]0; 1[$.
Montrer alors que g est bornée sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 35 Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions périodiques.



Quelles sont les périodes de ces fonctions ?

EXERCICE 36

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \to f(x) = E(x) - 2\,E\left(\frac{x}{2}\right)$.

1°) Donner, sans employer le symbole E, les expressions de f (x) sur le segment [0 ; 2] .

2°) Montrer que f (x) est périodique et construire sa représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

EXERCICE 37

n étant un entier donné supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - n\,E\left(\frac{x}{n}\right)$.

Démontrer que cette fonction est périodique .

En déduire que, quel que soit $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) < n$.

EXERCICE 38

Soit f une fonction définie sur R , telle que, pour tout réel x, $f(x + 1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$.

1°) Calculer f(x + 2), f(x + 3) et f(x + 4) .

2°) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

EXERCICE 39

Soit k un réel strictement positif et f une fonction définie sur R telle que, pour tout réel x, $f(x + k) = - f(x - k)$. Montrer que la fonction f est périodique de période 4k .

EXERCICE 40

Pour tout réel x, on définit E(x) (partie entière de x) comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x , c'est-à-dire l'unique entier n tel que : $n \leq x < n + 1$ (cf. Exercice 76) .

Soit les fonctions $\phi : \mathbb{R} \to [\,0\,;1\,]$ et $h : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$

$x \to x - E(x)$ $\qquad\qquad$ $u \to |2u - 1|$

1°) Soit $f = h \circ \phi$. Montrer que f est une fonction paire, périodique de période 1 .

2°) Soit F la restriction de f à $[\,0\,; \frac{1}{2}\,]$ .Démontrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} , dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image .

3°) Soit $g = F^{-1} \circ f$ .Démontrer que g est une fonction paire, définie sur R , périodique de période 1 . Soit $k \in \mathbb{Z}$. Dans les deux cas suivants, exprimer g(x) en fonction de x et k :

a) $x \in [k\,; k + \frac{1}{2}\,[$.   b) $x \in [\,k - \frac{1}{2}\,; k\,[$.

EXERCICE 41

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel non nul .

1°) On suppose f croissante sur I . Etudier le sens de variation de la fonction λ f sur I suivant le signe de λ .

2°) Reprendre la question pour une fonction f décroissante sur I .

EXERCICE 42

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

1°) On suppose les deux fonctions f et g croissantes sur I . Etudier le sens de variation de la somme f + g sur I .

2°) Reprendre la question pour deux fonctions f et g décroissantes sur I .

EXERCICE 43

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant l'image par f de l'intervalle I .

1°) On suppose les deux fonctions f et g croissantes sur leur intervalle de définition . Etudier le sens de variation de la composée f o g sur I .

2°) On suppose les deux fonctions f et g décroissantes sur leur intervalle de définition . Etudier le sens de variation de la composée f o g sur I .

3°) On suppose f croissante sur I et g décroissantes sur J. Etudier le sens de variation de la composée f o g sur I .

EXERCICE 44

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f : x \to x \quad g : x \to \sqrt{x} \quad h : x \to \dfrac{1}{x} \quad k : x \to x^2 \quad m : x \to ax + b \quad n : x \to a\,x^2 + bx + c$

$p : x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (*Pour n et p , mettre les fonctions sous forme canonique, puis utiliser les résultats des exercices 41, 42 et 43*) .

EXERCICE 45

Dans chacun des cas suivants, décomposer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles et en déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles donnés .

1°) $f(x) = x^2 + 4$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$; 2°) $f(x) = 2 - x^2$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$;

3°) $f(x) = (x-2)^2 + 1$; $I_1 = [2 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 2]$;

4°) $f(x) = x^2 - 4x$; $I_1 = [2 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 2]$;

5°) $f(x) = (x-1)^3$; $I_1 = [1 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 1]$; $I_3 = \mathbb{R}$

6°) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $I_1 = [1 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 1]$;

7°) $f(x) = \sqrt{5-x}$; $I = D_f$; 8°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $I_1 = [0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0]$;

8°) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $I_1 =]0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0[$;

EXERCICE 46

1°) a) f et g sont deux fonctions positives croissantes sur un intervalle I .

Montrer que la fonction p = fg est croissante sur I .

b) f et g sont deux fonctions positives décroissantes sur un intervalle I .

Montrer que la fonction p = fg est décroissante sur I .

2°) f est une fonction définie sur un intervalle I et garde un signe constant sur I ($f > 0$ sur I ou bien $f < 0$ sur I) . On suppose f monotone sur I .

En examinant tous les as possibles, trouver le sens de variation de la fonction $\frac{1}{f}$ sur I .

Applications :

Trouver le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné .

a) $x \to x\sqrt{x+3}$ I = [1 ; + ∞ [; b) $x \to \frac{1}{x^2+1}$ I = [0 ; + ∞ [; c) $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ I =] 0 ; + ∞ [;

d) $x \to |x|(x^2+1)$ I =] — ∞ ; 0] puis I = [0 ; + ∞ [

EXERCICE 47

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle [— a ; a] avec a > 0 .

1°) Si f est paire et strictement croissante sur [0 ; a] , déterminer le sens de variation de f sur [— a ; 0] .

2°) Si f est impaire et strictement croissante sur [0 ; a] , déterminer le sens de variation de f sur [— a ; 0] .

EXERCICE 48

Etudier et représenter graphiquement la restriction à [— 1 ; 5] de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{E(3-x)}{E(x)}$$

EXERCICE 49

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{E(x + E(-x))}$$

CHAPITRE 4 : FONCTIONS POLYNÔMES

A. COURS

1. GENERALITES

1.1 Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe un entier naturel n et (n + 1) **constantes** réelles a_0, a_1, … , a_n avec lesquelles f(x)puisse s'écrire, pour tout x réel :

$$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}}$$

Exemples et contre-exemples :

- La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme.
- La fonction f : $x \mapsto \frac{(x^2+1)(3x+2)}{(x^2+1)}$ est une fonction polynôme, car elle est définie sur

$\mathbb{R}$ et après simplification, elle se réduit à $x \mapsto 3x + 2$.

- La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme (son ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$).
- La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme, car après simplifications, on obtient $f(x) = x^2 - 1$. Cependant, la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = \pm 1$.
- La fonction f : $x \mapsto |x|$ n'est pas une fonction polynôme (car on a f(x) = x ou f(x) = — x suivant les valeurs de x donc le nombre qui est avant x n'est pas une constante).

1.2 Théorème 1 (admis)

Soit P une fonction polynôme. Alors on a :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$ si et seulement si

$(a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0)$.

1.2 Théorème 2 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)

Toute fonction polynôme P s'écrit **d'une manière unique** sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Preuve : Supposons que P(x) s'écrive de deux manières différentes :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + ... + b_1 x + b_0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

et que $n > p$. On a alors par différence :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_{p+1} x^{p+1} + (a_p - b_p)x^p + (a_{p-1} - b_{p-1})x^{p-1} + ... + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D'où d'après le théorème 1, $\begin{cases} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \\ \dots . \\ a_{p+1} = 0 \\ a_p - b_p = 0 \\ a_{p-1} - b_{p-1} = 0 \\ \dots . \\ a_1 - b_1 = 0 \\ a_0 - b_0 = 0 \end{cases}$

Et par conséquent les deux écritures de P(x) sont identiques.

1.2 Définition :

Dans l'écriture $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé **degré** du polynôme P. Il est noté deg(P).

Les nombres $a_0, a_1, ... , a_n$ qui interviennent dans l'écriture (unique) de P(x) sont appelés **coefficients** du polynôme P.

Exemples :

- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $p(x) = x^p$ $(p \in \mathbb{N})$ sont des fonctions polynômes de degré p (avec la convention $0^0 = 1$ lorsque $p = 0$).
- Les fonctions trinômes $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 2.
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 1.

• Les fonctions constantes $x \mapsto k$, avec $k \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 0.

Remarques :

• Une fonction du type $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ où tous les coefficients $a_0, a_1, ... , a_n$ sont des réels nuls s'appelle la *fonction polynôme nulle*.

• Une telle fonction polynôme **n'a pas de degré**, par convention.

• Le théorème 1 peut donc s'énoncer en disant : « *Une fonction polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls* ».

Ce résultat est à la base de la méthode dite **d'identification** que nous développerons dans les exercices qui suivent.

• Une fonction du type $x \mapsto a_p x^p$ est appelée **fonction monôme** de degré p. Une fonction polynôme (que nous désignerons souvent sous le terme de *polynôme*) est donc une somme de fonctions monômes (on dit aussi que c'est une somme de monômes).

• Le théorème 2 peut donc s'énoncer en disant : **« *Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients* »**.

Exercice 1 : *Dans chaque cas, indiquer le degré du polynôme P suivant les valeurs de m :*

1) $P(x) = 2x^5 - 3(m + 2)x^3 - 3$; ***2)*** $P(x) = (m^2 + 1)x^2 + mx + m$

3) $P(x) = (1 - m^2)x3 + 2(m + 1)x^2 + 3x - m$

Solution : 1) P(x) est de degré 5 pour tout réel m, car le coefficient du monôme de degré de plus haut degré, 2, est non nul.

2) P(x) est de degré 2 pour tout réel m, car $(m^2 + 1) \neq 0, \forall m$.

3) – Si m = 1 : $P(x) = 4x^2 + 3x - 1$. Le polynôme P est de degré 2.

– Si m = – 1 : $P(x) = 3x + 1$. Le polynôme P est de degré 1.

– ***Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$:*** Le polynôme P est de degré 3.

On a discuté par rapport à l'annulation ou non du coefficient du monôme de plus haut degré**.**

<u>Exercice 2</u> : *Dans chaque cas, déterminer, si possible, les réels a, b et c pour que les polynômes P(x) et Q(x) soient égaux.*

1°) *$P(x)) = x^3 - 2x^2 - 11x - 8$ et $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx +c)$*

2°) *$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $Q(x) = ax^4 + (a +b)x^3 +(a+b+c)x^2+(b+c)x+c$*

<u>Solution</u> : 1) $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. D'après l'unicité de l'écriture d'un polynôme : $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \\ b + c = -11 \\ c = -8 \end{cases}$, ce qui donne après résolution : $\begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{b = -3} \\ \boldsymbol{c = -8} \end{cases}$

2) $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a + b = -4 \\ a + b + c = -1 \\ b + c = -4 \\ c = 3 \end{cases}$, ce qui donne après résolution : $\begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = -7} \\ \boldsymbol{c = 3} \end{cases}$

<u>2. OPERATIONS SUR LES POLYNÔMES</u>

Nous admettrons que :

• La **somme** ($P + Q$) et le **produit** (PQ) de deux polynômes sont encore des **polynômes**.

• De même, le produit λP du réel λ par la fonction polynôme P est encore un **polynôme**.

<u>Exemple</u> : Soit à calculer la somme des polynômes P et Q avec : $P(x) = 3x^3 + 2x - 1$ et $Q(x) = - 3x^3 + 5x^2 - 4$.

On utilise la disposition pratique suivante (addition en colonne) :

$$\begin{array}{lrrrr} & P(x) = & 3x^3 & & + 2x - 1 \\ + & Q(x) = & -3x^3 & + 5x^2 & - 4 \\ \hline & (P+Q)(x) = & & \mathbf{5x^2} & \mathbf{+ 2x - 5} \end{array}$$

Exemple : Soit à calculer le produit des polynômes P et Q avec : $P(x) = 3x^3 + 2x - 1$ et $Q(x) = - 3x^3 + 5x^2 - 4$.

On utilise la disposition pratique suivante :

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & P(x) = & & 3x^3 & & +2x & -1 \\
\times & & Q(x) = & & -3x^3 & +5x^2 & & -4 \\
\hline
 & & & & -12x^3 & & -8x & +4 \\
 & 15x^5 & & +10x^3 & -5x^2 & & & \\
-9x^6 & & -6x^4 & +3x^3 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$(P \times Q)(x) = \mathbf{-9x^6 + 15x^5 - 6x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x + 4}$$

N.B : Il vaut mieux, pour ce genre de calculs ; adopter une disposition « en colonne » et placer les monômes de même degré les uns en dessous des autres. On ajoute ou on multiplie terme par terme.

Dans ces exemples, on constate que le degré de $(P + Q)$ est strictement inférieur à celui de P et Q et que le degré de (PQ) est égal à la somme des degrés de P et Q. On démontre en général, que :

Propriété : *Soient P et Q des fonctions polynômes non nulles. On a :*

$$\boldsymbol{deg(P + Q) \leq max(deg(P)\ ;\ deg(Q))} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)}$$

N.B. La notation max(a, b) désigne le plus grand des deux nombres a et b.

Voici la justification à titre indicatif :

Notons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0$ avec $b_m \neq 0$.

- Pour la somme $P + Q$, distinguons trois cas :

Si $m < n$ alors, $P(x) + Q(x) = a_n x^n + ...$ donc $\deg(P + Q) = \deg(P)$.
Si $n < m$ alors, $P(x) + Q(x) = b_mx^m + ...$ donc $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.
Si $n = m$ alors, $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + ...$
Si $a_n + b_n \neq 0$ alors $\deg(P + Q) = n = \deg(P)$.
Si $a_n + b_n = 0$, alors $\deg(P + Q) < n$, c'est-à-dire $\deg(P + Q) < \deg(P)$.
Bilan : dans tous les cas, on a $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P)\ ;\ \deg(Q))$

- Pour le produit PQ, on écrit $PQ = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1x + a_0)(b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0)$

En développant, on obtient : $PQ = a_nb_mx^{n+m} + ...$ (termes de degré inférieurs)
Or, on a : $a_nb_m \neq 0$ (puisque $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$).

Donc : $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

Plus généralement, nous admettrons que <u>le degré du produit d'un nombre fini quelconque de polynômes est la somme des degrés</u>.

<u>Exercice 3</u> : *Dans chaque cas, déterminer (P + Q) et PQ.*

1) *$P(x) = -x^3 + x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$* ***2)*** *$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$*

<u>Solution</u> : 1) On trouve : $(P + Q)(x) = x^3 - x^2 + 1$ et $(PQ)(x) = -2x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$

2) On trouve : $(P + Q)(x) = 2x^3 + \mathbf{2x}$ et $(PQ)(x) = x^6 + x^4 - x^2 - x^3 + x^2 - 1$

3. FONCTIONS RATIONNELLES

Soient P et Q deux polynômes tels que Q soit différent de la fonction nulle. La fonction $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ et notée $\frac{P}{Q}$ est appelée **fonction rationnelle**. L'ensemble de définition de $\frac{P}{Q}$ est l'ensemble des réels x tels que $Q(x) \neq 0$.

En résumé, une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes.

<u>Remarque</u> : En général, *une fonction rationnelle n'est pas une fonction polynôme* !

Par exemple, $x \mapsto \frac{2x^2+x+1}{3x-2}$ est une fonction rationnelle mais son ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 4</u> : *Déterminer l'ensemble de définition puis simplifier les fractions rationnelles suivantes :*

$$P(x) = \frac{(3x-2)(x+5)^2-9(3x-2)}{(x+8)(x+2)(2x-1)} \quad Q(x) = \frac{7x+6}{x+2} + \frac{18-2x^2}{x^2-3x} + \frac{-2x^2+x-8}{x^2-4} \qquad R(x) = \frac{x^4-1}{x^6-1}$$

<u>Solution</u> : • P est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-8, -2, \frac{1}{2}\right\}$. Après simplification, on trouve

$$P(x) = \frac{3x-2}{2x-1}.$$

• Q est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 0, 3\}$. Après simplification, on trouve

$$Q(x) = \frac{3x^3-13x^2-12x+24}{x(x-2)(x+2)}$$

• R est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Après simplification, on trouve

$$R(x) = \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

3. RACINE D'UN POLYÔME. FACTORISATION

Définition 1 :Soit P un polynôme et α un réel. On dit que α est **racine** de P si et seulement si

$$P(\alpha) = 0.$$

Exemple : Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x - 2$.
On a $P(2) = 3 \times 8 - 4 \times 4 - 3 \times 2 - 2 = 24 - 16 - 6 - 2 = 0$.
Donc 2 est racine de P.

Définition 2 : Soit P et Q deux polynômes. On dit que P est **divisible** (ou factorisable) par Q si et seulement si il existe un troisième polynôme R tel que, pour tout x réel, on ait :

$$P(x) = Q(x) \times R(x)$$

Théorème de factorisation :
(*Le réel α est racine du polynôme P*) si et seulement si
(*P est factorisable par le polynôme $(x - \alpha)$*).

Démonstration : On va montrer au préalable le résultat suivant, valable pour tous réels x et α et tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\boxed{x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots . + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1})}$$

En effet, en développant le produit des deux polynômes au second membre, on obtient :

$$\begin{array}{l} x^n + \cancel{\alpha x^{n-1}} + \cancel{\alpha^2 x^{n-2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\alpha^{n-2}}x + \alpha^{n-1}x \\ \qquad - \cancel{\alpha x^{n-1}} - \cancel{\alpha^2 x^{n-2}} - \cancel{\dots} - \cancel{\alpha^{n-2}}x^2 - \alpha^{n-1}x - \alpha^n \\ \hline = x^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\alpha^n \end{array}$$

Par exemple $x^5 - 2^5 = x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Soit maintenant le polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.
a) Si α est racine de P, on a : $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0$.
Ainsi $P(x) = P(x) - P(\alpha) = a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_1(x - \alpha)$.
Or, d'après ce qui précède,

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots . + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1})$$

$$x^{n-1} - \alpha^{n-1} = (x - \alpha)(x^{n-2} + \alpha x^{n-3} + \cdots . + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-2})$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier terme . Par conséquent, il est possible de factoriser chaque terme de la somme $a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + ... + a_1(x - \alpha)$ par $(x - \alpha)$. On aura alors :

$$P(x) = (x - \alpha)\ (a_n\, x^{n-1} + ...).$$

b) Réciproquement, si P(x) est factorisable par le polynôme $(x - \alpha)$, on a $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$, où Q(x) est un polynôme et il est alors clair que α est racine de P car $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, Q(\alpha) = 0$.

2. Division euclidienne de deux polynômes

2.1. Théorème (admis)

Soient A et B deux polynômes avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficient réels tels que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

Q et R sont appelés respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de A par B.

2. 2 Exemples et calcul pratique de *Q* et *R* :

1°) Méthode par identification ou méthode des coefficients indéterminés

Soit à déterminer Q et R avec $A(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 7$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.

D'après le théorème précédent, il existe des polynômes Q(x) et R(x) tels que, pour tout réel x, on ait :

$$A(x) = B(x)\, Q(x) + R(x) \quad \textbf{(*)}$$

Comme le degré de R(x) est strictement inférieur à celui de B(x) qui est 2, on voit que le degré de (A − R) est égal à celui de A (d'après la propriété sur le degré de la somme de deux polynômes), c'est-à-dire 4. Mais on a A − R = BQ, donc deg(BQ) = 4, d'où d'après la propriété sur le degré du produit de deux polynômes, deg(B) + deg(Q) = 4 et puisque deg(B) = 2, il en résulte que deg(Q) = 2.

On peut donc chercher Q et R sous la forme : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et $R(x) = dx + e$.

Si l'égalité (*) doit être vérifiée, on doit donc avoir pour tout réel x :

$$2x^4 - 3x^2 + x - 7 = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e.$$

En développant le second membre, on obtient :

$2x^4 - 3x^2 + x - 7 = ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c + d)x + c + e.$

D'après le théorème 2 relatif à l'égalité de deux polynômes, on en déduit les égalités :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = -3 \\ b + c + d = 1 \\ c + e = -7 \end{cases}$$

Qui entraînent que : **$a = 2$; $b = -2$; $c = -3$, $d = 6$ et $e = -4$**.

Ainsi, l'on a : **$2x^4 - 3x^2 + x - 7 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 2x - 3) + 6x - 4$**.

2°) Par l'algorithme de division euclidienne

$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 \qquad B = X^2 - 5X + 4$

On pose la division en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres :

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 & X^2 - 5X + 4 \\ \cline{2-2}
X^4 - 5X^3 + 4X^2 & X^2 - 2X + 3 \\ \cline{1-1}
-2X^3 + 13X^2 - 17X + 6 & \\
-2X^3 + 10X^2 - 8X & \\ \cline{1-1}
3X^2 - 9X + 6 & \\
3X^2 - 15X + 12 & \\ \cline{1-1}
6X - 6 &
\end{array}$$

On a donc $Q = X^2 - 2X + 3$ et $R = 6X - 6$. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\boldsymbol{X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 = (X^2 - 5X + 4)(X^2 - 2X + 3) + 6X - 6}$$

Exercice 5 : *Déterminer les polynômes Q et R dans les cas suivants :*
1) *$A = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $B = x^3 - 1$*
2) *$A = x^9 - 1$ et $B = x^4 + 1$*
3) *$A(x) = 9x^9 + 8x^8 - 7x^7 - 6x^6 + 5x^5 + 9x^9 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x$ et $B(x) = x^4 - x^2 + 1$*

Réponses : 1) $Q = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$ et $R = 2x^2 + 3x + 3$
2) $Q = x^5 - x$ et $R = x - 1$
3) $Q = 18x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 2x - 10$ et $R = -10x^3 - 14x^2 + 3x + 10$

2°) Méthode de Hörner pour la division par $(x - \alpha)$
Soit $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - x - 2$. On peut écrire :

$P(x) = x(5x^2 + 3x - 1) - 2 = [(5x + 3)x - 1]x - 2$.

Ainsi, si on veut calculer $P(\alpha)$ en utilisant cette nouvelle écriture, on peut décrire les étapes du calcul de la manière suivante :

Etape 1 : On prend le premier coefficient du polynôme P(x), soit 5, que l'on multiplie par α ; on obtient 5α. Ensuite, on ajoute le coefficient suivant, qui est 3, pour obtenir $(5\alpha + 3)$.

Etape 2 : Au nombre obtenu à l'étape précédente, on applique les mêmes opérations que l'on avait effectuées sur le premier coefficient 5, c'est-à-dire qu'on le multiplie par α, puis on ajoute le coefficient suivant qui est maintenant -1 ; on obtient ainsi $[(5\alpha + 3)\alpha - 1]$.

Etape 3 : Enfin pour terminer, on réitère les mêmes opérations qu'à l'étape 1 (multiplication par α puis ajout du coefficient suivant, -2) au dernier nombre obtenu à l'étape 2. On obtient bien la valeur $P(\alpha)$ qui est $[(5\alpha + 3)\alpha - 1]\alpha - 2$.

Remarquons que dans cette succession de calculs, on effectue une multiplication et une addition à chaque étape, ce qui fait au total 6 opérations pour calculer $P(\alpha)$. Si l'on devait calculer P(α) directement, il faudrait d'abord calculer α^3, ce qui nécessite 2 multiplications, le multiplier par 5, ce qui fait déjà 3 opérations. On vérifie aisément que les calculs suivants nécessitent en tout 5 calculs supplémentaires. Ainsi, il faudrait en principe 11 opérations pour calcule P(α) par cette méthode.

On voit donc l'économie procurée par la technique de calcul développée ci-dessus et cette économie de calcul est d'autant plus grande que le degré de P est élevé.

D'autre part, d'après le théorème admis au 2.1, il existe des polynômes Q et R tels que :

P(x) = (x − α)Q(x) + R(x), avec deg(Q) = 2 et deg(R) $<$ 1. Par suite, R est un polynôme constant et on voit facilement que R = P(α).

En d'autres termes, il existe un polynôme du second degré Q tel que l'on puisse écrire :

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha).$$

Cherchons Q sous la forme Q(x) = $ax^2 + bx + c$.

En développant, on obtient :

$P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - c\alpha$, ce qui s'écrit encore:

$5x^3 + 3x^2 - x - 2 = ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - c\alpha + P(\alpha)$

D'où par identification:

$$\begin{cases} a = \mathbf{5} \\ b - a\alpha = 3 \Rightarrow b = \mathbf{5\alpha + 3} \\ c - \alpha b = -1 \Rightarrow c = \mathbf{(5\,\alpha\ +\ 3)\alpha\ - 1} \\ P(\alpha) - c\alpha = -2 \Rightarrow P(\alpha) = [\mathbf{(5\,\alpha\ +\ 3)\alpha\ - 1}]\ \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{2} \end{cases}$$

Ainsi, les nombres obtenus aux étapes précédentes permettent de calculer, outre la valeur de P(α), les coefficients du polynôme Q quotient de P(x) par (x − α).

Nous admettrons que ce procédé se généralise à un polynôme de degré quelconque supérieur ou égal à 3.

L'usage est de présenter les calculs suivant la disposition suivante :

Coefficients de P(x) dans l'ordre décroissant des puissances	5	3	-1	-2
		$\times\alpha$ +	$\times\alpha$ +	$\times\alpha$ +
Coefficients de Q(x) dans l'ordre décroissant des puissances	a = 5	$b = \alpha a + 3$	$c = \alpha b - 1$	$P(\alpha) = \alpha c - 2$

Exercice 6 : Dans chacun des cas suivants, effectuer la division de P(x) par $(x - \alpha)$ en utilisant la méthode de Hörner :

1) $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$ et $\alpha = 2$ **2)** $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$ et $\alpha = -3{,}5$

3) $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ et $\alpha = 7$ **4)** $P(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$

Réponses : On obtient les tableaux suivants :

1)

	3	-4	5
2		6	4
	3	2	9

$$P(x) = (x - 2)(3x + 2) + 9$$

2)

	2	-1	-4	5
$-\frac{7}{2}$		-7	28	-84
	2	-8	24	-79

$$P(x) = (x + \tfrac{7}{2})(2x^2 - 8x + 24) - 79$$

3)

	-2	5	-3	5	-2
7		-14	-63	-462	-3199
	-2	-9	-66	-457	-3201

$$P(x) = (x - 7)(-2x^3 - 9x^2 - 66x - 457) - 3201$$

4)

	1	1	-1	0	1	-1
$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{13}{32}$
	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	$-\frac{19}{32}$

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(-x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{13}{16}\right) - \frac{19}{32}$$

3. Relation entre le nombre de racines d'un polynôme et son degré

Théorème

Une fonction polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines réelles.

Démonstration :

Puisque P a un degré, P n'est pas la fonction polynôme nulle. Raisonnons par l'absurde. Si la fonction P possède p racines avec $p > n$, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ces racines, on a, d'après le théorème de factorisation (appliqué p fois) :

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_p)Q(x)$$

où Q est une fonction polynôme de degré $n - p < 0$, donc $Q = 0$ et, par suite, $P = 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale d'où $p \leq n$.

La fonction polynôme P possède donc au plus n racines réelles.

<u>Corollaire</u>

Une fonction polynôme P à coefficients réels de degré n admettant plus de n (ou une infinité) de racines réelles est la fonction polynôme nulle.

<u>Démonstration</u> :

Si P n'est pas la fonction polynôme nulle, alors elle a un degré $n \in \mathbb{N}$ et d'après le théorème précédent admet au plus n racines réelles. Donc si elle admet plus que n (ou une infinité) de racines réelles, elle est nécessairement nulle.

<u>Application</u> : démontrer que deux fonctions polynômes P et Q à coefficients réels de degré au plus n qui coïncident en $n + 1$ points sont égales.

Il suffit de considérer la fonction polynôme $P - Q$ qui est de degré au plus n et qui possède $n + 1$ racines réelles. Donc, d'après le corollaire, $P - Q$ est la fonction polynôme nulle donc $P = Q$.

<u>Exercice 7</u> : *Soit le polynôme P défini par*
$P(x) = A\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1) Vérifier que P(a) = A, P(b) = B et P(c) = C.
2) Soit le polynôme Q défini par $Q(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

a) Quel est le degré maximal de Q ?
b) Déduire de 1) que le polynôme R(x) = Q(x) – 1 admet trois racines.
c) Que peut-on en déduire pour Q ?

<u>Solution</u> : **1)** $P(a) = A\,\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \cancel{B\,\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}} + \cancel{C\,\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}} = A \times 1 = A$.

De même, on montre que P(b) = B et P(c) = C.

2) a) Le degré maximal du polynôme Q est ≤ 2 car Q(x) est la somme de 2 polynômes de degré 2.

b) D'après 1), Q(a) = 1(remplacer A,B et C par 1), d'où Q(a) − 1 = 0, donc a est racine de R.

De même, on vérifie que b et c sont racines de R.

c) Ainsi R est de degré ≤ 2 et a trois racines, donc il est le polynôme nul, d'après le corollaire du théorème précédent. On en déduit que ∀ x ∈ ℝ, Q(x) = 1 : Q est le polynôme constant égal à 1.

<u>**Exercice 8**</u> : *Le polynôme $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ a trois racines distinctes α, β et γ. Sans calculer ces dernières, déterminer la valeur des expressions*

$$\alpha + \beta + \gamma \; ; \; \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma \; ; \; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \quad et \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

<u>Solution</u> : Comme α, β *et* γ sont des racines distinctes de P, il existe un polynôme Q tel que l'on ait :

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\, Q(x) \quad (*)$$

En appliquant le résultat sr le degré du produit de plusieurs polynômes, on voit, puisque deg(P) = 3, que l'on a nécessairement deg(Q) = 0. En d'autres termes Q est une constante λ. On a donc :

$$P(x) = \lambda\, (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \quad (*)$$

En développant le second membre de (*), on voit que le coefficient du terme de degré 3 de P(x) est λ, d'où $\lambda = 1$. Finalement, $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ (**).

En développant le second membre de (**), on obtient :

$$P(x) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma.$$

D'après l'unicité de l'écriture d'un polynôme, on a par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -5 \\ -\alpha\beta\gamma = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -5 \\ \alpha\beta\gamma = 6 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{5}{6}$ et $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$, ce qui entraîne d'après les résultats précédents que :

$(-2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(-5) \Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 14.$

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 1 Degré d'un polynôme

1°) On considère le polynôme $P(x) = (m^2 - m)x^3 + mx^2 - (m - 1)x - 3m - 2$.
Déterminer m tel que :

a) deg P = 3 **b)** deg P = 2 **c)** deg P = 1

2°) Reprendre les questions a) , b) et c) ci-dessus avec le polynôme Q(x) suivant :
$Q(x) = (m^3 - m^2 - 6m)x^3 - (m^2 + m - 2)x^2 + (m - 1)x + 2m - 1$.

EXERCICE 2 Degré d'un polynôme

Déterminer, suivant les valeurs de m, le degré du polynôme f (x) dans chacun des cas ci-après :

a) $f(x) = 2x^5 - 3(m + 2)x^3 + 7$
b) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + mx + m$
c) $f(x) = (m - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - 5x$
d) $f(x) = (1 - m^2)x^3 + 2(m + 1)x^2 + 3x - m$.

EXERCICE 3 Factorisation d'un polynôme

Dans chacun des cas suivants, montrer que x_0 est une racine de P(x) puis factoriser P(x) (en polynômes du premier degré si possible).

1°) $P(x) = x^3 - 21x + 36$ et $x_0 = 3$. **2°)** $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ et $x_0 = -1$
3°) $P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24$ et $x_0 = 3$. **4°)** $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ et $x_0 = -1$.
5°) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ et $x_0 = -1$ **6°)** $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $x_0 = \sqrt{3}$
7°) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ et $x_0 = -2$. **8°)** $P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$ et $x_0 = 2$.

EXERCICE 4 Calcul de 1 + 2 + 3 + …. + n

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation

$$P(x) - P(x - 1) = x, \qquad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

2°) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme

$1 + 2 + 3 + …. + n$ (somme des n premiers entiers naturels non nuls) en fonction de n
.

EXERCICE 5 Calcul de $1^2 + 2^2 + 3^2 + …. + n^2$

1°) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 qui s'annule en 0 et qui vérifie l'égalité suivante : $P(x) — P(x — 1) = x^2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + …. + n^2$ en fonction de n.

EXERCICE 6 Calcul de $1^3 + 2^3 + 3^3 + …. + n^3$

1°) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 4 qui s'annule en 0 et qui vérifie l'égalité suivante : $P(x) — P(x — 1) = x^3$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

(N.B. Factoriser f (x))

2°) a) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + …. + n^3$ en fonction de n.

b) En utilisant la relation $1 + 2 + 3 + …. + n = \frac{n(n+1)}{2}$, montrer que :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + …. + n^3 = (1 + 2 + 3 + …. + n)^2.$$

EXERCICE 7 Calcul de $1^3 + 3^3 + 5^3 + …. + (2n — 1)^3$

1°) Déterminer P (x) polynôme de degré 4, tel que, pour tout réel x,

$P(x + 1) — P(x) = (2x — 1)^3$.

2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme $1^3 + 3^3 + 5^3 + …. + (2n — 1)^3$

EXERCICE 8 Calcul de 1×2 + 2×3 + 3×4 + …. + n(n +1)

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation :

$P(x) — P(x — 1) = x^2 + x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme 1×2 + 2×3 + 3×4 + …. + n(n +1) .

EXERCICE 9 Calcul de 1×2×3 + 2×3×4 + 3×4×5 + …. + n(n +1)(n + 2)

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation :

$P(x + 1) — P(x) = x(x +1)(x +2)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme

1×2×3 + 2×3×4 + 3×4×5 + …. + n(n +1)(n + 2).

EXERCICE 10

Déterminer un polynôme du second degré divisible par $(x - 2)$ et par $(x + 1)$, et dont le reste de la division par $(x - 1)$ soit 5.

EXERCICE 11

Déterminer un polynôme du troisième degré divisible par $(x - 1)$ et par $(x + 2)$, dont les restes respectifs des divisions par $(x + 1)$ et $(x - 3)$ soient 10 et 30.

EXERCICE 12

Soient A(x) et B(x) polynômes fixés. Déterminer les polynômes Q(x) et R(x) tels que :

$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)$ avec $\deg R(x) < \deg B(x)$ ou $R(x) = 0$.

(Autrement *dit, effectuer la division euclidienne de A(x) par B(x)*).

1°) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ et $B(x) = x^2 - 3x + 1$

2°) $A(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 9$ et $B(x) = x^3 - x + 2$.

3°) $A(x) = 2x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x - 5$ et $B(x) = x^2 + x - 5$.

EXERCICE 13

Simplifier les quotients suivants :

$A(x) = \dfrac{x^3 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ $\qquad B(x) = \dfrac{x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 7x - 10}{x^2 + 3x - 10}$

$C(x) = \dfrac{2x^3 + 17x^2 + 20x - 75}{x^3 + 9x^2 + 15x - 25}$ $\qquad D(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5}$.

EXERCICE 14

Soit $P(x) = \dfrac{x(x - b)(x - c)}{a(a - b)(a - c)} + \dfrac{x(x - c)(x - a)}{b(b - c)(b - a)} + \dfrac{x(x - a)(x - b)}{c(c - a)(c - b)}$.

Calculer P(a), P(b), P(c) . Simplifier P(x) .

EXERCICE 15

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1°) Déterminer un polynôme Q(x) , et un polynôme R(x) du premier degré, tels que : $P(x) = (x^2 - 2x - 1)\,Q(x) + R(x)$.

2°) En déduire le quotient et le reste de la division de P(x) par $(x - 1 - \sqrt{2})$.

3°) Déterminer $P(1 - \sqrt{2})$.

EXERCICE 16

Soit $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

1°) Montrer que 1 et — 1 sont racines de P (x) puis donner une factorisation de P (x) .

2°) Résoudre l'équation P (x) = 0 et l'inéquation P (x) ≤ 0 .

EXERCICE 17

1°) Après avoir déterminé une racine évidente, résoudre dans R l'équation :

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0 .$$

2°) Les restes des divisions d'un polynôme P(x) par x — 1, par x + 5, et par x — 2 sont respectivement 9, — 3 et 5. Déterminer le reste de la division de P(x) par (x — 1) (x + 5) (x — 2) .

Sachant que P(x) est du quatrième degré et qu'il est divisible par $x^2 - 9$, déterminer P(x) ainsi que son quotient par $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$.

EXERCICE 18 : VRAI/FAUX

Parmi les 5 affirmations suivantes, dire celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1°) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

2°) Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.

3°) La fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.

4°) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.

5°) Si α est une racine de deux fonctions polynômes R te S , alors R(x) — S(x) est factorisable par (x — α) .

EXERCICE 19

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

On note α, β, γ ses racines (si elles existent !)

1°) Ecrire en fonction de α, β et γ la forme totalement factorisée de P (x) .

2°) Déterminer la valeur des expressions suivantes :

$$\alpha + \beta + \gamma \ , \ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \ , \ \alpha\beta\gamma \ , \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \ , \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 .$$

3°) Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et β = 1 , calculer γ .

EXERCICE 20

Prouver que le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

EXERCICE 21

Démontrer que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est divisible par $(x - 1)(x - 2)$.

Déterminer le quotient pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

EXERCICE 22

Démontrer que $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x + 1)(2x + 1)$.

Déterminer le quotient pour $n \in \{2, 3\}$.

EXERCICE 23

Les restes respectifs des divisions d'un polynôme $P(x)$ par $(x - 1)$ par $(x - 1)$, par $(x + 5)$, par $(x - 2)$, sont 9, — 39, 3.

Déterminer $R(x)$, polynôme du second degré, tel que :

$P(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 2)Q(x) + R(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme qu'on ne demande pas de déterminer.

EXERCICE 24

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1°) Déterminer un polynôme $Q(x)$, et un polynôme $R(x)$ du premier degré, tels que :

$$P(x) = (x^2 - 2x - 1)Q(x) + R(x)$$

2°) En déduire le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 1 - \sqrt{2})$.

3°) Déterminer $P(1 - \sqrt{2})$.

EXERCICE 25

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 , $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels, $b_1, b_2, \ldots b_n$ n autres nombres réels . On se propose de démontrer le résultat suivant :

« *Il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\deg(P) \leq n - 1$; *b) $P(a_1) = b_1$, $P(a_2) = b_2$,…… $P(a_n) = b_n$.*»

Ce résultat s'appelle <u>théorème de Lagrange(*).</u>

1°) On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q vérifiant les conditions a) et b) .En raisonnant sur le degré et les racines du polynôme $(P - Q)$, démontrer que : $P - Q = 0$.

En conclure que, s'il existe un polynôme qui satisfait les conditions a) et b) , ce polynôme est unique .

2°) Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$P_i(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\ldots\ldots(x - a_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots\ldots(a_i - a_n)} .$$

a) Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, P_i est un polynôme de degré $n - 1$ .Les polynômes P_i sont appelés <u>polynômes d'interpolation de Lagrange</u> .

b) Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on a :

$P_i(a_1) = P_i(a_2) = \ldots\ldots\ldots\ P_i(a_{i-1}) = P_i(a_{i+1}) = \ldots\ldots\ P_i(a_n) = 0$ et $P_i(a_i) = 1$.

c) Démontrer que $P = b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots\ldots + b_nP_n$ est un polynôme qui vérifie les conditions a) et b) du théorème de Lagrange.

3°) Enoncer une conclusion.

<u>EXERCICE 26</u> Résolution d'une équation du troisième degré

Le but du problème est la résolution de l'équation : $x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = 0$ (E) .

1°) On se ramène à la résolution d'une équation de la forme : $X^3 + pX + q = 0$.

a) Trouver trois réels a, p, q, tels que pour tout x,

$$x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = (x + a)^3 + p(x + a) + q .$$

b) En posant $x + a = X$, vérifier que $X^3 + 12X - 112 = 0$.

2°) On résout l'équation $X^3 + 12X - 112 = 0$ (E_1) . Pour cela, on pose $X = u + v$.

a) Vérifier que $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$. En déduire que :

· Lorsque $X = u + v$, alors : $X^3 + 12X - 112 = u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) - 112$;

· $X = u + v$ est une solution de l'équation (E_1) lorsque : $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3v^3 = -64$.

b) Trouver deux nombres u et v tels que : $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3v^3 = -64$.

Indication : Poser $u^3 = U$ et $v^3 = V$.

c) Résoudre l'équation (E_1) .

Indication : Vérifier que $(2 + 2\sqrt{2})^3 = 56 + 40\sqrt{2}$.

d) Résoudre l'équation (E) .

Note culturelle : Réduire l'équation générale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à la forme $X^3 + pX + q = 0$ était une méthode connue par CARDAN(1501-1576), VIETE(1540-1603) et DESCARTES(1596-1650) . Les mathématiciens italiens de la Renaissance, en particulier TARTAGLIA (~ 1500- 1557) savaient résoudre $X^3 + pX + q = 0$, mais par une autre méthode que celle exposée à la question 2° .

<u>EXERCICE 27</u>

« *Quel que soit l'entier $n \geq 5$, $n^4 - 20n^2 + 4$ n'est jamais un nombre premier* » .

Pour établir ce résultat, on propose la méthode suivante :

1°) Soit $P(x) = x^4 - 20x^2 + 4$.

Vérifier que $P(x) = (x^2 - 2)^2 - 16x^2$ et en déduire une factorisation de P sous la forme A (x) B (x) où A et B sont des polynômes de degré 2 .

2°) Montrer que les équations A (x) = 1 et B (x) = 1 n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3°) Conclure .

EXERCICE 28

Ce problème propose des calculs classiques sur les « différences finies » de polynômes .

Pour toute fonction polynôme P, on pose, pour tout réel x,

$\Delta P(x) = P(x + 1) - P(x)$.

1°) Calculer $\Delta P(x)$ dans les cas suivants :

a) $P(x) = x^3$; b) $P(x) = x^2 - 4x + 6$; c) $P(x) = 2x + 1$.

2°) Vérifier que si P est un polynôme quelconque et λ un réel quelconque, $\Delta(\lambda P(x)) = \lambda \Delta P(x)$.

3°) a) Dans cette question, P est le polynôme de degré n, $n \geq 1$, défini par $P(x) = x^n$.

Montrer que ΔP est un polynôme de degré $n - 1$, et que le terme de plus haut degré de ΔP est nx^{n-1} .

b) Déduire des questions 2° et 3°.a) que si P est un polynôme quelconque de degré n, alors ΔP est un polynôme de degré $n - 1$.

4°) On note P_0 et P_1 les polynômes respectivement définis par : $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x - 1$.

a) Vérifier que $\Delta P_1 = P_0$.

b) On se propose alors de trouver un polynôme P_2 tel que : $P_2(1) = 0$ et $\Delta P_2 = P_1$.

• En supposant qu'il existe une telle fonction polynôme, prouver alors que nécessairement P_2 est de degré 2.

• Calculer $\Delta P_2(1)$. Montrer alors que $P_2(2) = 0$, puis que pour tout réel x,
$P_2(x) = a(x - 1)(x - 2)$, avec a réel .

• Montrer que s'il existe un polynôme P_2 répondant à la question, alors

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) .$$

• Réciproquement, pour le polynôme P_2 trouvé, calculer ΔP_2 , puis conclure .

5°) On veut trouver un polynôme P_3 de degré 3, tel que $P_3(1) = 0$ et $\Delta P_3 = P_2$.

En vous inspirant de la démarche suivie à la question 4, montrer qu'il existe un polynôme et un seul qui répond à la question, le polynôme

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 6).$$

Note : Les polynômes P_0 , P_1 , P_2 , P_3 ,....... sont- appelés polynômes de NEWTON .

6°) On pose $\Delta^2 P(x) = \Delta(\Delta P)(x)$.

a) Calculer $\Delta^2 P(x)$, lorsque $P(x) = x^2$.

b) P est le polynôme du second degré défini par :$P(x) = ax^2 + bx + c$.

• Calculer $P(1)$, $\Delta P(1)$, $\Delta^2 P(1)$.

•Montrer alors que pour tout réel x, $P(x) = P(1) + \Delta P(1)(x - 1) + \dfrac{\Delta^2 P(1)}{2}(x - 1)(x - 2)$

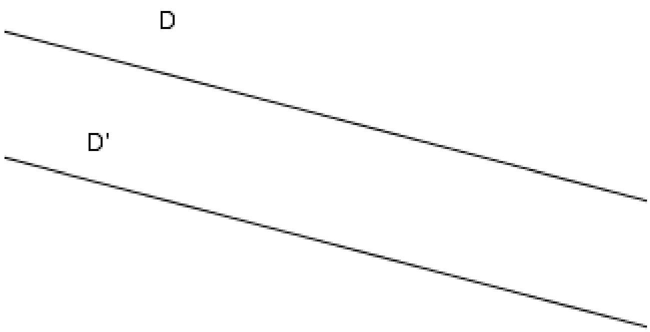
c) Utiliser ce qui précède pour trouver un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(1) = -1$, $P(2) = 9$, $P(3) = 21$.

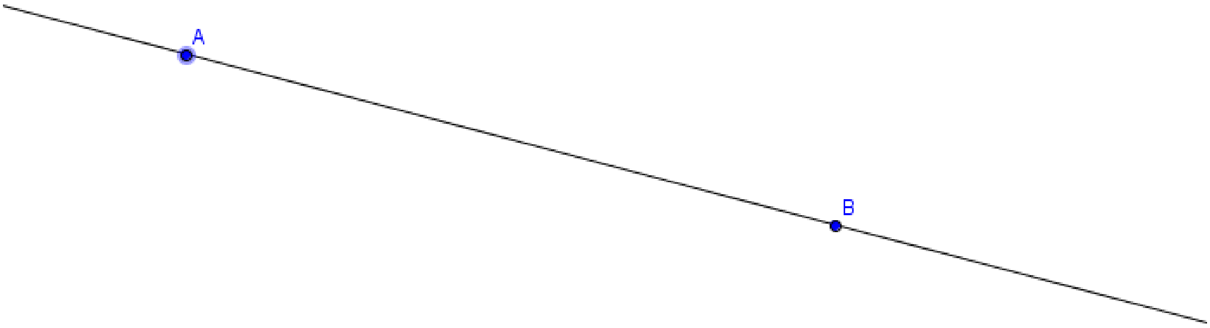
CHAPITRE 1 : CALCUL VECTORIEL, BARYCENTRES ET REPERES
(RAPPELS ET COMPLEMENTS)

1. NOTION DE VECTEUR

On dit que deux droites (D) et (D') ont **même direction** si elles sont parallèles (ou confondues).



Sur une droite (AB) ; on admet par convention qu'il y a deux **sens de parcours** possibles (de A vers B ou de B vers A).



Un **axe** est une droite sur laquelle on a choisi (une fois pour toutes) un sens de parcours.

Un **bipoint** (A, B) est un couple de points du plan donnés dans cet ordre. Le bipoint (A, B) est donc différent du bipoint (B, A).

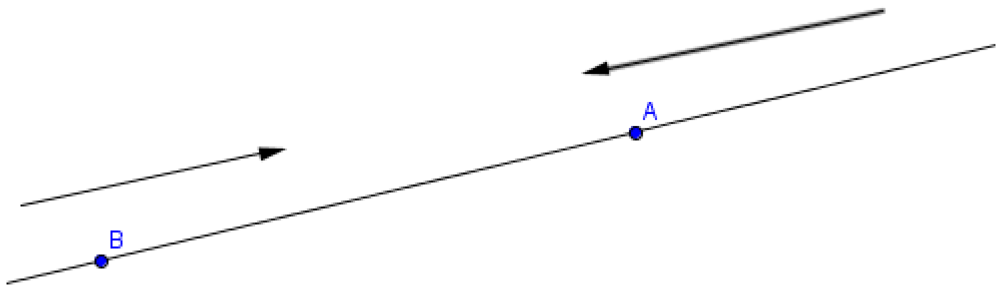
Soient A et B deux points d'un axe (D). On appelle **mesure algébrique** du bipoint (A, B) et on note $\overline{AB}$ le réel égal à :

- + AB si le sens de l'axe est celui de A vers B.
- − AB si le sens de l'axe est celui de B vers A.

On a la relation de Chasles pour les mesures algébriques :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB}$$

pour trois points quelconques A, B et C d'un même axe.



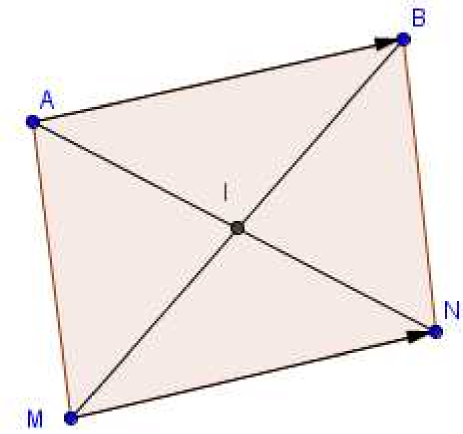
Sur une demi-droite [Ax), on admet, par convention qu'il n y a qu'un seul sens de parcours.

Définition : Soit (A, B) un bipoint donné du plan. L'ensemble de tous les bipoints (M, N) tels que les segments [AN] et [BM] aient le même milieu est un objet mathématique appelé **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ signifie que :

$$\begin{cases} -\text{Les droites (AB)et (MN)ont même direction} \\ -\text{Les demi} - \text{droites [AB)et [MN)ont même sens} \\ -\text{Les distances AB et MN sont égales} \end{cases}$$

N.B. Ces conditions équivalentes au fait que ABNM est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Elles sont aussi équivalentes à l'une quelconque des conditions suivantes :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$
- $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN}$

La distance AB est appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$

Un vecteur est carctérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Propriété (Axiome d'EUCLIDE)

Etant donnés un point O et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M du plan tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

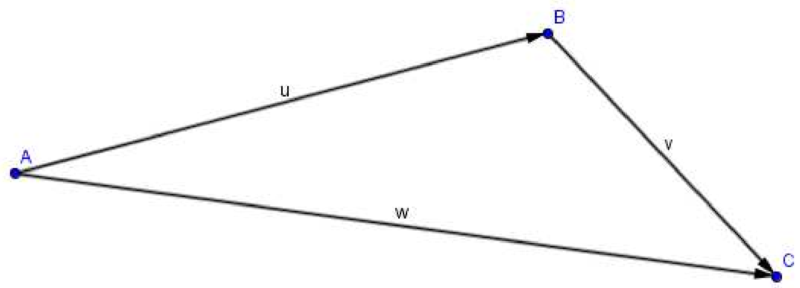
Rappelons qu'en Mathématiques, un axiome est une proposition « évidente » dont la vérité est admise sans démonstration.

2. OPERATIONS SUR LES VECTEURS

2.1 Addition des vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés et A un point fixe. Il existe, d'après l'Axiome d'Euclide précédent, un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et, toujours selon cet axiome, un point C unique tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (**relation de Chasles**).



Propriétés :

1°) La commutativité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2°) L'associativité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

3°) L'existence d'un élément neutre : Le vecteur associé aux bipoints de la forme (A, A) est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

4°) Symétrique d'un élément

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que :

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

$(-\vec{u})$ est **l'opposé** du vecteur $\vec{u}$. Il a même direction et même sens que $\vec{u}$, mais son sens est opposé à celui de $\vec{u}$. On a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

La **différence** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est, par définition, la somme du premier et de l'opposé du second. Elle est notée : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

2.2 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition : Soit t un réel et uvDéfinition : Soit t un réel et $\vec{u}$ un vecteur. On appelle produit du réel t par le vecteur $\vec{u}$ et on note t.$\vec{u}$ le vecteur défini de la manière suivante :

*Si t = 0, alors, on pose : t.$\vec{u} = \vec{0}$.

* Si $t \neq 0$, t.$\vec{u}$ est le vecteur qui a :

– pour direction celle de $\vec{u}$

– pour sens $\begin{cases} -\text{celui de } \vec{u} \text{ si } t > 0 \\ -\text{le sens contraire de } \vec{u} \text{ si } t < 0 \end{cases}$

– pour norme $|t| \times \|\vec{u}\|$.

Propriétés :

Pour tous réels t et t' et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1°) $(t + t').\vec{u} = t.\vec{u} + t'.\vec{u}$

2°) $t(\vec{u} + \vec{v}) = t.\vec{u} + t.\vec{v}$

3°) $t(t'.\vec{u}) = (tt')\vec{u}$

4°) $1.\vec{u} = \vec{u}$

Ces propriétés permettent de faire tous les calculs algébriques sur les vecteurs.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dites **colinéaires** si et seulement si :

$$\begin{cases} -\text{l'un d'eux est nul} \\ \text{OU BIEN} \\ -\text{Il existe un réel k tel que } \vec{u} = k\,\vec{v} \end{cases}$$

On a les résultats suivants (cf . cours de Seconde) :

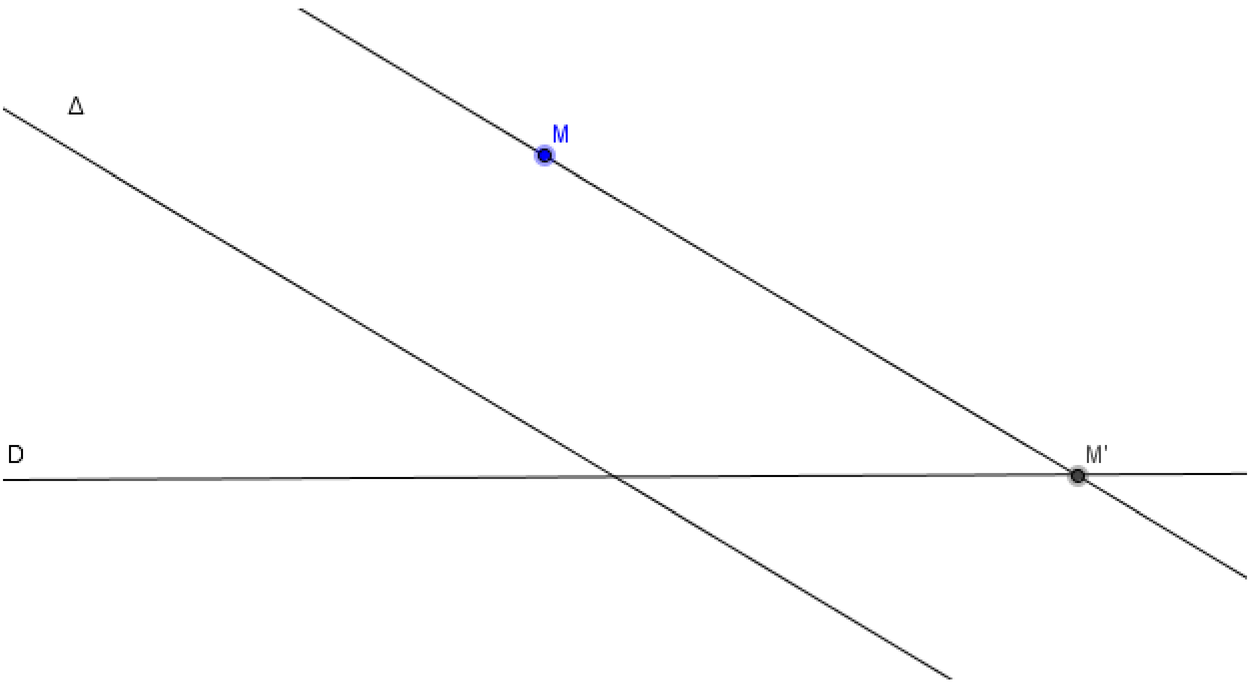
• Les *droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

En particulier, *trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires*.

• La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

3. PROJECTIONS ET ENONCES DE THALES

3.1 Notion de projection



Soient (D) et (Δ) deux droites et M un point du plan. On appelle **projeté** de M sur (D) parallèlement à (Δ) le point M', intersection de (D) avec la parallèle à (Δ) passant par M. On note alors M' = p(M).

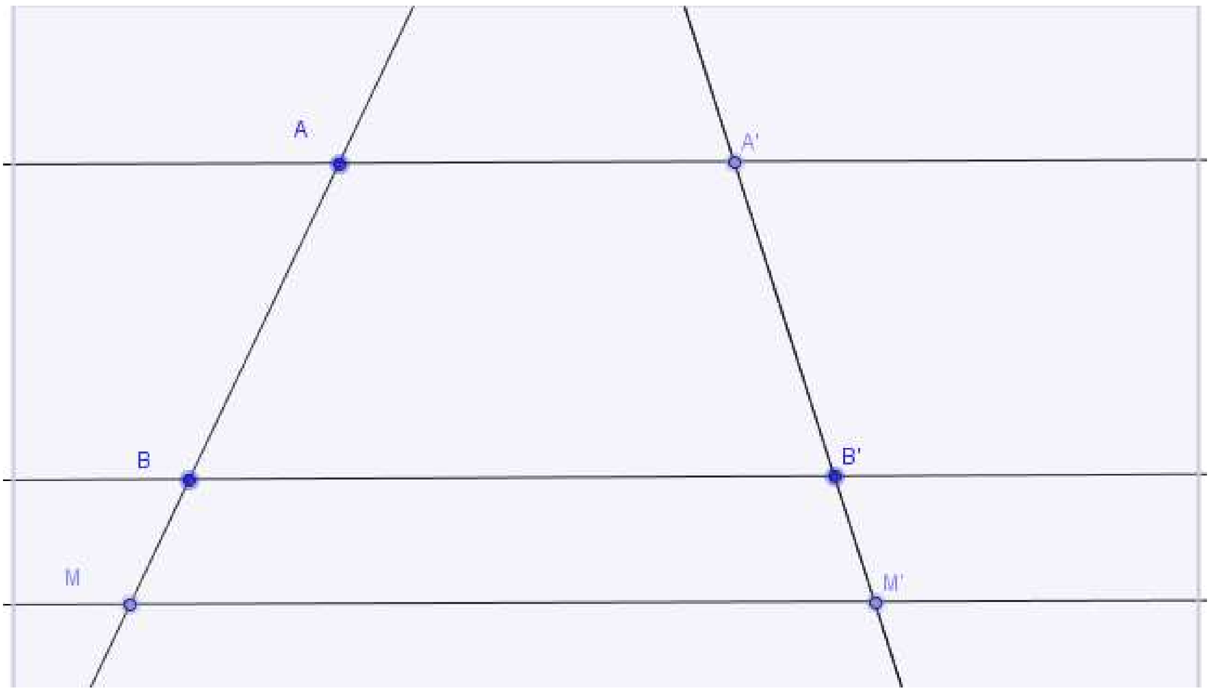
N.B. **a)** L'existence de M' est justifiée par le résultat suivant : « *Quand deux droites sont sécantes, toute parallèle à l'une est sécante à l'autre* ».

b) Si $M \in \Delta$, on a M' = M.

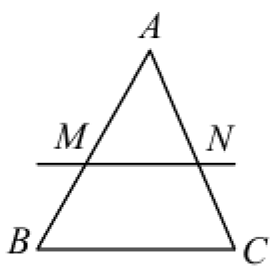
3.2 Théorème de Thalès

Soient (D) et (Δ) deux axes ; A, B et M trois points de (D) de projetés respectifs A', B' et M' sur (Δ) parallèlement à une troisième droite (d).

Alors on a l'égalité : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.



Cas particulier : Dans la configuration ci-dessous :



On a $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ et de plus, en utilisant une propriété des quotients de réels vue en Seconde, ce rapport est aussi égal à $\frac{\overline{AN}-\overline{AM}}{\overline{AC}-\overline{AB}}$ c'est-à-dire à $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$.

3.3 Réciproque du théorème de Thalès

Soient (D) et (Δ) deux axes ; A et B deux points de (D) de projetés respectifs A' et B' sur (Δ) parallèlement à une troisième droite (d).

M et M' sont deux points de (D) et (Δ) respectivement tels que : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.

Alors on a : p(M) = M'.

En d'autres termes les droites (MM'), (AA') et (BB') sont parallèles.

EXERCICES ET PROBLEMES

VECTEURS

EXERCICE 1

1°) Démontrer que le point I est milieu du segment [AB] si et seulement si :

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}\ .$$

2°) Avec les mêmes notations qu'au 1°, démontrer que :

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \qquad \text{et que} \qquad \vec{MA} + \vec{MB} = 2\,\vec{MI}\ .$$

3°) Soit ABC un triangle, E le milieu de [AB], F le milieu de [AC] .Démontrer que :

$$\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BC}\ .$$

En déduire que : a) (EF) // (BC) b) EF = $\frac{1}{2}$ BC (Théorème de la droite des milieux)

4°) Soient A, B, C et D 4 points, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD] .

Démontrer que 2 $\vec{IJ} = \vec{AB} + \vec{CD}$.

Comment choisir le quadrilatère ABCD pour que I et J soient confondus ?

5°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{AC} \|$ **b)** $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = 2\,MC$ **c)** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ a même direction que $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 2

Soient ABCD et AECF des parallélogrammes. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FD}$?

EXERCICE 3

Soient A, B, C et D des points du plan et I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].

Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 4

Soient ABC un triangle dont O est le centre de gravité . Si $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, que peut-on dire du triangle ABC ?

EXERCICE 5

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs tels que :

(1) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (2) $\| \vec{v} \| = \lambda \| \vec{u} \|$ 3) $\| \vec{w} \| = (\lambda + 1) \| \vec{u} \|$.

Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires . Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$.

EXERCICE 6

On donne un triangle ABC et les milieux respectifs A ' , B ' et C ' de [BC], [CA] et [AB] . Un point M quelconque étant donné, on considère les points N et P tels que :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CC'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{BB'} .$$

1°) Démontrer que les droites (NP) et (AA') sont parallèles .

2°) Soit I le milieu de [NP] . Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{BC}$.
En déduire que les droites (MI) et (BC) sont parallèles .

EXERCICE 7

On considère deux triangles ABC et A'B 'C' et leurs centres de gravité respectifs G et G ' .

1°) Démontrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\,\overrightarrow{GG'}$.

2°) En déduire une condition nécessaire te suffisante pour que les triangles aient même centre de gravité.

3°) Comparer G et G ' dans les cas suivants :

a) A ' , B ' et C ' sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB] .

b) A ' , B ' et C ' sont respectivement les points définis par :

$\overrightarrow{BA'} = t\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = t\,\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC'} = t\,\overrightarrow{AB}$, où t est un réel non nul .

(Faire une figure avec $t = \frac{3}{2}$).

EXERCICE 8

Soient A, B, C et D 4 points du plan. A tout réel t, on associe les points M et N tels que :

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = t\,\overrightarrow{DC}$

1°) Démontrer que $\overrightarrow{MN} = t\,\overrightarrow{BC} + (1 - t)\,\overrightarrow{AD}$

2°) On suppose désormais que : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{AD}$ et on note $AD = \| \overrightarrow{AD} \| = a$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de t et $\overrightarrow{AD}$ puis la distance MN en fonction de t et a .

3°) Pour quelles valeurs de t a-t-on : a) M = N ? b) $MN = \frac{7}{2}a$?

EXERCICE 9

ABCD est un quadrilatère.

1°) I et J sont les milieux de [AB] et [CD]. Démontrer que : $2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2°) P et U sont tels que : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{UP} = \overrightarrow{UD}$, R et V sont tels que : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{VC}$,

S et K sont tels que : $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{SK} = \overrightarrow{KJ}$.

Démontrer que S est le milieu de [PR] et K celui de [UV).

EXERCICE 10 Droite et cercle d'Euler d'un triangle

Soit ABC u triangle, A ' , B ' et C ' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB] , O le centre du cercle circonscrit et G le centre de gravité.

1°) Montrer qu'il existe un point H unique tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (1) .

2°) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{BH} = 2\,\overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{OC'}$.

3°) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°) En utilisant la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.

En déduire que les trois points O, G et H sont alignés.

(La droite portant ces trois points est appelée droite d'Euler du triangle) .

5°) Soit A_1 le symétrique de A par rapport à O et I le milieu de $[HA_1]$.

Démontrer que $2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}$, puis que I = A ' . En conclure que A1 est aussi le symétrique de H par rapport à A ' .

6°) Déduire de la question précédente le théorème suivant : « Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit » .

7°) Soit ω l'isobarycentre de A, B, C et H et U le milieu de [HA], V le milieu de [HB], W le milieu de [HC] (U, V et W sont les points d'Euler)

a) Montrer en utilisant la relation (1) que ω est le milieu de [OH] .

b) Etablir les égalités :

$$\overrightarrow{\omega U} = - \overrightarrow{\omega A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \ ; \quad \overrightarrow{\omega V} = - \overrightarrow{\omega B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \ ; \quad \overrightarrow{\omega W} = - \overrightarrow{\omega C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \ .$$

En déduire que les milieux A ' , B ' et C ' et les points d'Euler U, V et W appartiennent au cercle de centre ω admettant pour rayon la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle .

8°) Montrer que ce cercle passe par les points α , β et γ , intersections respectives des hauteurs (AH) , (BH) et (CH) avec les côtés [BC] , [CA] et [AB] (cercle des neuf points) .

MESURES ALGEBRIQUES

EXERCICE 11

Δ est un axe muni d'un repère (O, I) . Soient A et B deux points de Δ d'abscisses respectives 6 et — 2.

1°) Calculer l'abscisse du point M de Δ tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{5}{3}$. Calculer $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$.

2°) Calculer l'abscisse du point N de Δ tel que $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\dfrac{5}{3}$. Calculer $\overline{NA}$ et $\overline{NB}$.

3°) Calculer l'abscisse de I milieu de [MN] . Calculer $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}}$.

EXERCICE 12

Soient A, B, C et M 4 points d' une même droite (D) munie d'un repère (O , I) .

En observant que l'on a : $\overline{MA} = \overline{MC} + \overline{CA}$ et $\overline{MB} = \overline{MC} + \overline{CB}$,

1°) Former l'expression $\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA}$ et en déduire la relation d'*Euler* :

$$\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$$

2°) Former l'expression $MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA}$ et en déduire la relation de *Stewart* :

$$MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0 \ .$$

EXERCICE 13

Soient A, B , C D 4 points d'un axe Δ de repère (O , I) . On désigne par a, b c et d leurs abscisses respectives (c'est-à-dire que : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{OD} = d$) .

On appelle **birapport** des 4 points A, B, C et D dans cet ordre et on note (ABCD)

l'expression : $(ABCD) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

1°) Exprimer le birapport (ABCD) en fonction de a, b, c et d .

2°) Montrer que le birapport (ABCD) reste invariant si on inverse simultanément chacun des couples (AB) et (CD) ou lorsqu'on échange ces deux couples.

3°) L'ensemble ordonné des 4 points A, B C et D est dit constituer une **division harmonique** lorsque le birapport (ABCD) est égal à — 1 .On dit alors que les points C et D sont **conjugués harmoniques** par rapport à A et B.

a) Utiliser 2° pour montrer qu'alors les points A et B sont aussi conjugués harmoniques par rapport à C et D.

b) Etablir la relation 2 (ab + cd) = (a + b) (c + d) .

c) En prenant l'origine O en A, démontrer la relation suivante, dite de NEWTON :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} .$$

d) En prenant l'origine O en I milieu de [AB], démontrer la relation suivante, dite de DESCARTES : $\overline{IC} \cdot \overline{ID} = IA^2$.

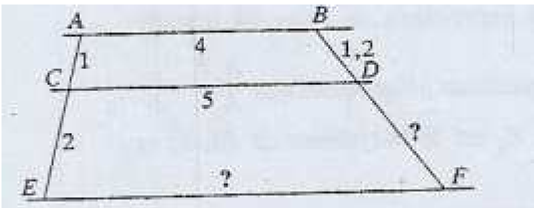
ENONCES DE THALES

EXERCICE 14

Les droites (AB), (CD) et (EF) sont parallèles.

AC = 1 , CE = 2 , AB = 4 , BD = 1,2 et CD = 5 .

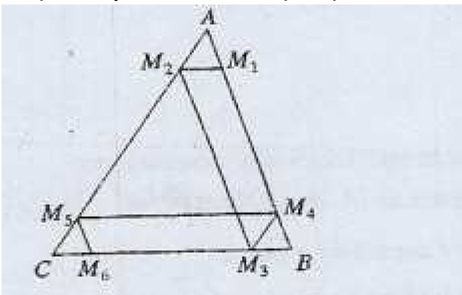
Préciser les longueurs DF et EF .



EXERCICE 15

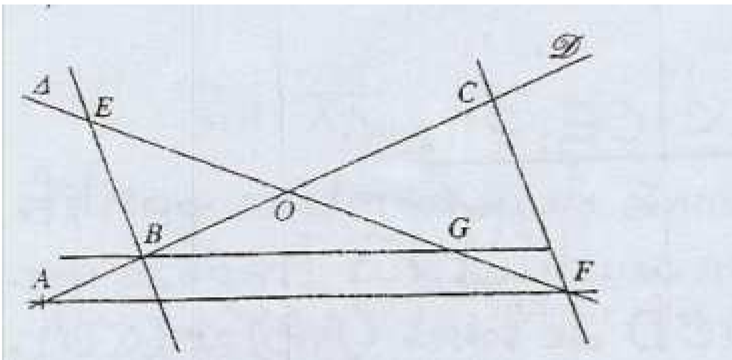
Dans un triangle ABC, M_1 est un point du segment [AB] distinct des sommets A et B.

On construit les points M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 tels que les droites (M_1M_2), (M_2M_3), (M_3M_4), (M_4M_5) et (M_5M_6) soient respectivement parallèles aux droites (BC), (AB), (AC), (BC) et (AB).
Démontrer que la droite (M_1M_6) est parallèle à (AC).



EXERCICE 16 *Théorème de Pappus*

(EB) est parallèle à (CF) et (BG) est parallèle à (AF) . Montrer que (AE) est parallèle à (CG) .



EXERCICE 17

Etant donnés deux nombres positifs a et b, on construit un trapèze convexe ABCD de bases (AB) et (CD) et J le projeté de I sur [BC] dans la direction des droites (AB) et (CD) .

Montrer que : $\frac{1}{IJ} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

EXERCICE 18

ABC est un triangle et G son centre de gravité. Une droite $\mathscr{D}$, ne contenant pas G, coupe respectivement les droites (GA), (GB) et (GC) en M, N, P .

Démontrer que : $\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}} + \frac{\overline{GB}}{\overline{GN}} + \frac{\overline{GC}}{\overline{GP}} = 0$.

On pourra utiliser la projection sur (GA) parallèlement à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 19

Soient D et D ' deux droites sécantes en O. Soit Δ une droite ne passant pas par O et qui coupe D en A et D ' en B. Un point M de Δ se projette en E sur D parallèlement à D ' et en en F sur D ' parallèlement à D .

1°) Démontrer que : $\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$.

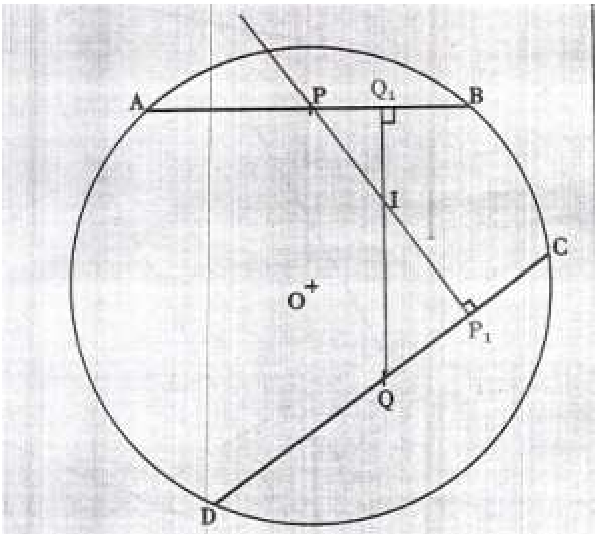
2°) Soient E et F deux points respectivement de D et D ' et vérifiant la relation :

$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$. Soit M le point tel que OEFM sot un parallélogramme.

Démontrer que M est sur la droite Δ.

<u>EXERCICE 20</u> ***<u>Droites concourantes</u>***

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et A, B, C et D sont quatre points de ce cercle, tels que ABCD ne soit pas un trapèze.



1°) P et Q sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] . La perpendiculaire à (CD) passant par P coupe (CD) en P_1 , la perpendiculaire à (AB) passant par Q coupe (AB) en Q_1 . Les droites (PP_1) et (QQ_1) se coupent en I.

a) Démontrer que OPIQ est un parallélogramme et que $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

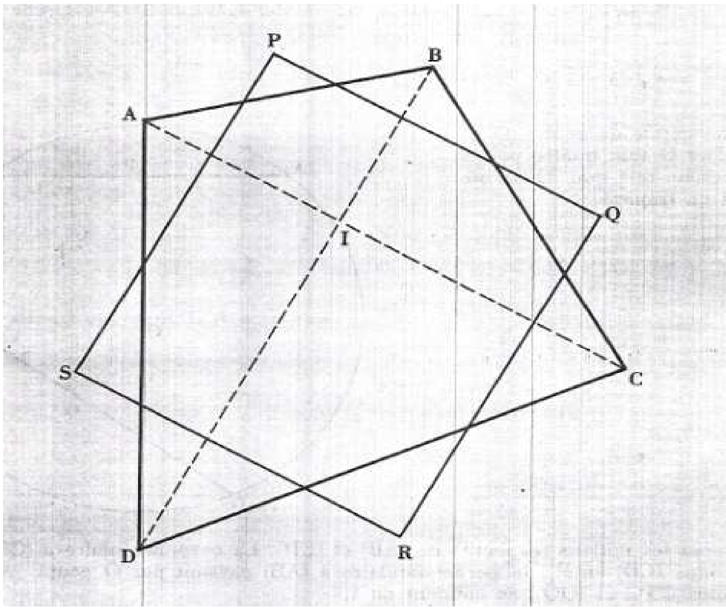
b) En déduire que : $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

2°) R et S sont les milieux respectifs de [BC] et [AD] . La perpendiculaire à (BC) passant par S coupe (BC) en S_1 , la perpendiculaire à (AD) passant par R coupe (AD) en R_1 . Les droites (RR_1) et (SS_1) se coupent en J.

Démontrer que les points I et J sont confondus.

EXERCICE 21 ***Le parallélogramme de Wittenbauer***

ABCD est un quadrilatère convexe ; on partage chacun des côtés [AB], [BC] , [CD] et [DA] en trois segments de même longueur et on joint deux à deux les points obtenus, comme indiqué sur la figure. On obtient un quadrilatère PQRS.



1°) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

2°) I est le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) du quadrilatère ABCD.

Démontrer que : $\frac{2}{3}\ \overrightarrow{IA}\ + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{IB}\ = \overrightarrow{IP}$.   (1)

3°) O est le centre du parallélogramme PQRS et G est l'isobarycentre du quadrilatère ABCD.

Démontrer que : $\overrightarrow{IO} = \frac{4}{3}\ \overrightarrow{IG}$.

Indication : *on peut donner des relations comparables à la relation (1) pour les vecteurs* $\overrightarrow{IQ}$ *,* $\overrightarrow{IR}$ *,* $\overrightarrow{IS}$ *et utiliser ensuite la définition de l'isobarycentre*.

4°) A quelle condition le centre O du parallélogramme PQRS est-il confondu avec l'isobarycentre G du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 22 Théorèmes de MENELAÜS ET DE CEVA

1°) Théorème de Ménélaüs

a) Soit ABC un triangle.

Une droite (D) coupe respectivement (BC), (CA) et (AB) en A ' , B ' et C '. Soit C_1 le projeté de C sur (AB) parallèlement à (D).

Comparer les rapports $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ et $\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'C_1}}$ puis $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\frac{\overline{C'C_1}}{\overline{C'A}}$.

En déduire que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

b) Réciproquement, soient A ' , B ', C ' trois points situés respectivement sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle ABC. On désigne par C '' le point d'intersection de (A'B') avec (AB). En utilisant a), comparer $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ et $\dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$.

En déduire que C ' = C '', puis que A ' , B ' et C ' sont alignés .

c) <u>Conclusion</u> : *Pour trois points A ' , B ' et C ' respectivement situés sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) d'un triangle ABC, on a :* *A ' , B ', C ' alignés* $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

.

<u>2°)</u> <u>Théorème de Ceva</u>

Soit ABC un triangle, A ' , B ', C ' trois points situés respectivement sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle.

a) On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles.

En utilisant le théorème de THALES, montrer que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

b) On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point Q. Appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle ACA' coupé par (BQB') puis au triangle ABA' coupé par (CQC').

En déduire que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

c) On suppose que les droites (AA') et (BB') sont parallèles et que :
$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. Soit C '' le point d'intersection de (AB) avec la parallèle menée par C à (AA'). En utilisant a) , conclure que C '' = C ' .

d) On suppose que les droites (AA') et (BB') se coupent en Q et que :

$$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 .$$

La droite (QC) coupe (AB) en C ''. En utilisant b), conclure que C ' = C ''.

e) Conclusion : *Pour trois points A ' , B ' et C ' respectivement situés sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) d'un triangle ABC, on a :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \Leftrightarrow \text{ ((AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles)}$$

.

<u>3°) APPLICATION</u> : La droite de Newton

Les notations sont les mêmes qu'au 2°.

Soient (Δ) une droite qui coupe les côtés (BC), (CA) et (AB) en A ' , B ' et C ' respectivement, et A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs de [AA'] , [BB'] et [CC']. Soient I_1, I_2 et I_3 les milieux respectifs de [B'C'] , [C'A] et [AB'].

a) Montrer que $\overrightarrow{A_1I_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A_1I_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

En déduire que les points A_1, I_2 et I_3 sont alignés.

b) Montrer, de façon analogue, que B_1, I_3, I_1 , d'une part, et C_1, I_1, I_2 sont alignés.

c) Appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle AB'C' coupé par la droite portant les points A ' , B et C et établir la relation : $\frac{\overline{A_1I_3}}{\overline{A_1I_2}} \times \frac{\overline{C_1I_2}}{\overline{C_1I_1}} \times \frac{\overline{B_1I_1}}{\overline{B_1I_3}} = 1$

d) Conclure que les trois points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

La droite qui porte ces trois points est appelée *droite de Newton du quadrilatère complet* formé par le triangle ABC et la droite AB'C'.

N.B On appelle quadrilatère complet la figure formée par quatre droites deux à deux concourantes. (AA') , (BB') et (CC') sont les diagonales du quadrilatère complet. Le résultat que l'on vient de démontrer s'énonce aussi en disant que *les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.*

4. BARYCENTRE DE PLUSIEURS POINTS

La notion de barycentre de 2 ou 3 points pondérés, étudiée en Seconde, peut être étendue à 4, 5, …, n points. Dans l'exposé qui suit, nous présentons les résultats avec 4 points, mais ils restent valables avec un nombre quelconque de points.

4.1 Théorème et définition

Soient α, β, γ et δ des réels dont la somme n'est pas nulle (i.e. $\alpha + \beta + \gamma + \delta) \neq 0$ et A, B, C, D des points du plan. Il existe un point unique G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0} \quad \textbf{(1)}$$

Le point G défini par la relation (1) est appelé **barycentre** du système de points pondérés $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma) ;(D, \delta)\}$.

Démonstration :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + \delta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AD} \quad \textbf{(2)}$$

Car, par hypothèse la somme $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ n'est pas nulle.

Soit $\overrightarrow{V}$ le vecteur au second membre de (2). $\overrightarrow{V}$ est un vecteur fixe puisque A, B, C, D et α, β, γ et δ sont donnés.

D'après l'Axiome d'EUCLIDE, cf. paragraphe 1, il existe un unique point G tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{V}$$

N. B. La relation (2) de la démonstration précédente permet de construire vectoriellement le barycentre de plusieurs points. On a aussi les relations analogues :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CB} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CD}$$

4.2 Homogénéité du barycentre

Le barycentre de plusieurs points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul .

En effet soit G le barycentre du système $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma) ;(D, \delta)\}$ et k un réel non nul. On a :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Longrightarrow k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow (k\alpha) \overrightarrow{GA} + (k\beta) \overrightarrow{GB} + (k\gamma) \overrightarrow{GC} + (k\delta) \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Et la somme $(k\alpha + k\beta + k\gamma + k\delta) = k(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ est non nulle par hypothèse. Donc G est aussi le barycentre du système $\{(A, k\alpha) ; (B, k\beta) ; (C, k\gamma) ;(D,k \delta)\}$.

Cas particulier : Si tous les coefficients sont égaux et non nuls (i.e. $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ et $\alpha \neq 0$), le barycentre du système $\{(A, \alpha) ; (B, \alpha) ; (C, \alpha) ;(D, \alpha)\}$ est aussi celui de $\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) ;(D, 1)\}$.

N.B. Il est confondu avec le milieu du segment [AB] dans le cas d'un système de deux points distincts, avec le centre de gravité du triangle ABC dans le cas d'un système de trois points non alignés, avec le point de concours des diagonales dans le cas d'un système de 4 points formant un parallélogramme.

4.3 Réduction du vecteur $\overrightarrow{V_M} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD}$, M point quelconque du plan

1er cas : Si $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \neq 0$: Soit alors G le barycentre du système $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma) ;(D, \delta)\}$.

G existe d'après le théorème du 4.1. On peut écrire d'après la relation de CHASLES :

$$\overrightarrow{V_M} = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + \delta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD}}_{=\vec{0} \text{par définition de G}}$$

Ainsi, dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{V_M}$ se réduit à : $\overrightarrow{V_M} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}$.

On retiendra que : si le système $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma) ;(D, \delta)\}$ a un barycentre, alors **pour tout point M du plan**, on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} =$$
$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}$$

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$: Soit N un autre point du plan. On peut écrire :

$$\overrightarrow{V_M} = \alpha\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}\right) + \delta\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}\right)$$

$$= \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MN}}_{=\vec{0} \text{ car par hypothèse } (\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0} + \underbrace{\alpha\,\overrightarrow{NA} + \beta\,\overrightarrow{NB} + \gamma\,\overrightarrow{NC} + \delta\,\overrightarrow{ND}}_{=\overrightarrow{V_N}}$$

Ainsi, dans ce cas, si M et N sont deux points quelconques du plan, on a : $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_N}$.

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{V_M}}$ **est un vecteur constant**.

Il est égal, par exemple, à $\beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} + \delta\,\overrightarrow{AD}$ (M remplacé par A).

4.4 Associativité du barycentre

Exemple : Soient A, B, C, D quatre points du plan et G le barycentre du système

$$S = \{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, -1) ; (D, 3)\}.$$

G existe car : $-1 + 2 + (-1) + 3 = 3 \neq 0$.

Les systèmes de 2 points pondérés $S_1 = \{(A, -1) ; (B, 2)\}$ et $S_2 = \{(C, -1) ; (D, 3)\}$ ont aussi des barycentres que nous désignerons respectivement par I et J.

D'après le paragraphe précédent 4.3, on a pour tout point M du plan :

$$-\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \quad (1) \quad \text{et} \quad -\overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MJ} \quad (2).$$

Remplaçons M par G dans ces deux relations et faisons la somme membre à membre. On obtient ainsi : $\underbrace{-\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 2\,\overrightarrow{GD}}_{=\vec{0} \text{ par définition de G}} = \overrightarrow{GI} + 2\,\overrightarrow{GJ}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{GI} + 2\,\overrightarrow{GJ}$ et par conséquent G est le barycentre du système

S' = {(I,1) ; (J, 2) }.

On notera que les coefficients 1 et 2 sont respectivement la somme des coefficients des systèmes S_1 et S_2.

D'autre part, soit K le barycentre du système $S_3 = \{(B, 2) ; (C, -1) ; (D, 3)\}$.

Pour tout point M du plan, on a, toujours d'après le paragraphe 4.3,

$$2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}.$$

Remplaçant M par G, on obtient : $2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 3\,\overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GK}$ et si on ajoute le vecteur $-\overrightarrow{GA}$ aux deux membres de cette dernière égalité, on a :

$$\underbrace{-\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 2\,\overrightarrow{GD}}_{=\vec{0}\text{ par définition de G}} = -\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GK}.$$

On en déduit que G est aussi le barycentre du système S'' = {(A,− 1) ; (K, 4)}.

En généralisant ces calculs, on retiendra que **dans la recherche du barycentre de plusieurs points, on peut regrouper certains d'entre eux et les remplacer par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients (pourvu que celle(ci ne soit pas nulle).**

4.4 Centre d'inertie d'une plaque homogène

La notion de centre d'inertie d'un solide provient de la Physique. Galilée (1564 - 1642) établit que le mouvement d'un solide, aussi compliqué soit-il, peut être étudié de façon plus simple en considérant la trajectoire de son centre d'inertie.

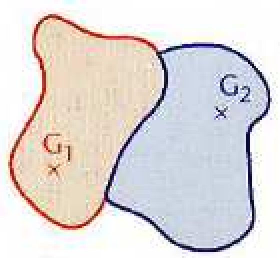
Une plaque homogène est un solide dont la masse de toute portion est proportionnelle à l'aire de celle-ci. Pour en déterminer le centre d'inertie, on utilise les principes suivants, que nous admettrons :

(1) si la plaque admet un centre de symétrie, c'est aussi le centre d'inertie (exemple : point d'intersection des diagonales dans un parallélogramme).

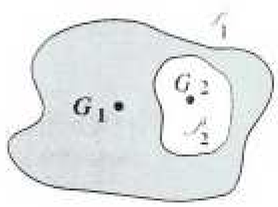
(2) si la plaque admet un axe de symétrie, le centre d'inertie appartient à cet axe (exemple : trapèze isocèle) ;

(3) une plaque triangulaire admet pour centre d'inertie son centre de gravité.

(4) si une plaque est formée par la réunion de deux plaques P_1 et P_2 de centres d'inertie respectifs G_1 et G_2 et de masses respectives m_1 et m_2, alors son centre d'inertie est le barycentre des points pondérés (G_1 ; m_1) et (G_2 ; m_2)



(5) si une plaque est formée par une plaque $\mathscr{P}_1$ de centre d'inertie G_1 et d'aire A_1 dont on enlève une plaque $\mathscr{P}_2$ de centre d'inertie G_2 et d'aire A2, on obtient une plaque évidée $\mathscr{P}$ dont le centre d'inertie est le barycentre de (G_1 ; A_1) et de (G_2 ; – A_2).

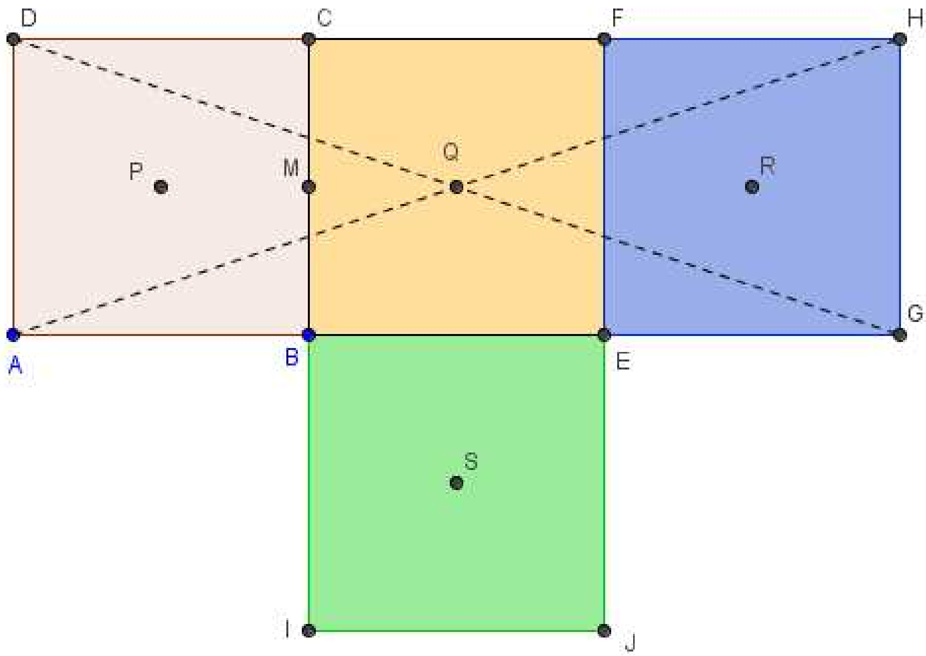


Exemple 1

La plaque homogène ci-dessous est composée de quatre parties carrées superposables.

1) Sans faire aucun calcul, construire son centre d'inertie U.

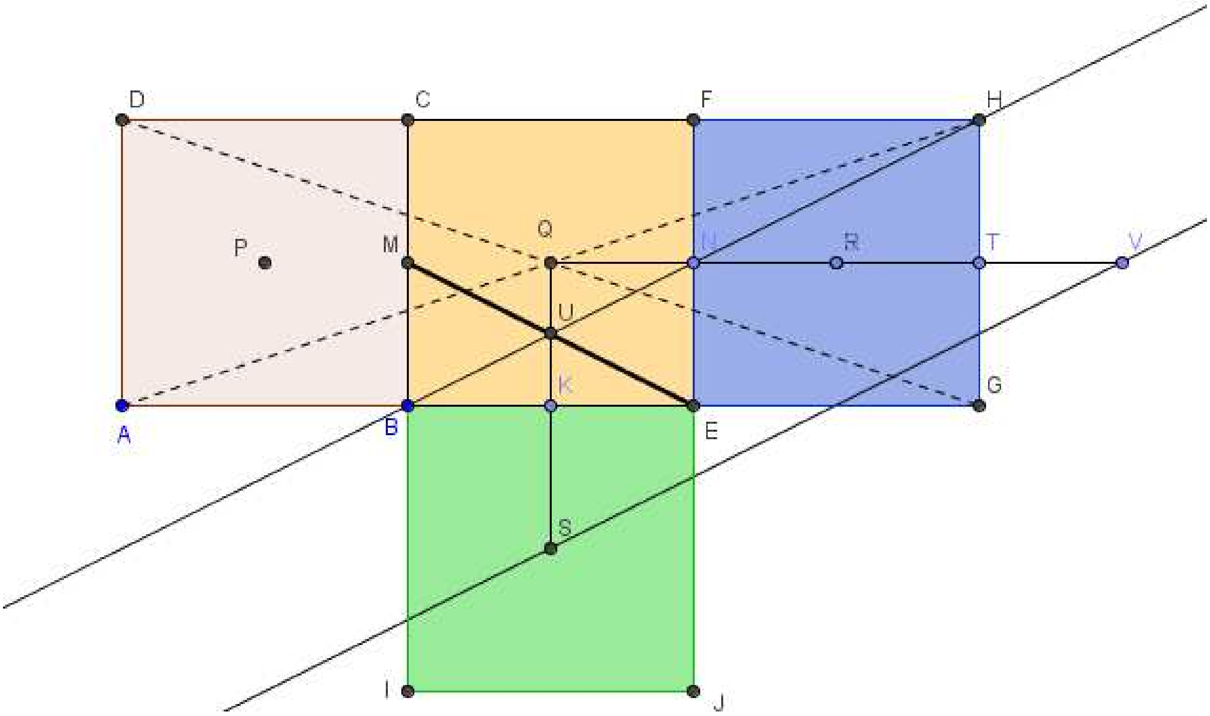
2) Démontrer que le centre d'inertie U est le milieu de [ME].



1°) On peut considérer la plaque comme la superposition de la plaque rectangulaire DHGA (elle-même superposition des trois carrés DCBA, CFEB et FHGE) et de la plaque carrée BEJI.

Pour des raisons de symétrie, il est clair que DHGA a pour centre de symétrie Q et que la plaque BEJI a pour centre de symétrie S (principe (1)). Le centre de symétrie ou d'inertie de la plaque est donc (principe 4) le barycentre de {(Q, 3) ; (S, 1)}.

La figure ci-dessous illustre la construction du centre d'inertie U (les droites (BH) et (SV) sont parallèles).



2°) On a $\overrightarrow{QU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QS} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$ et

$\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$**.**

Ainsi $\overrightarrow{\mathbf{QU}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\mathbf{QM}} + \overrightarrow{\mathbf{QE}}\right)$. U est bien le milieu de [ME].

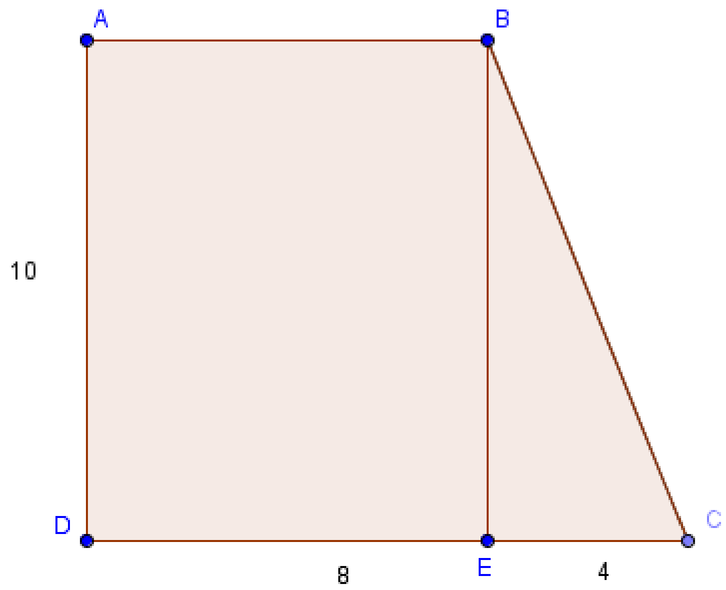
<u>Exemple 2</u>

On considère la plaque trapézoïdale homogène ABCD ci-dessous.

1) Construire le centre d'inertie G de cette plaque.

2) Construire l'isobarycentre I des sommets. A-t-on G = I ?

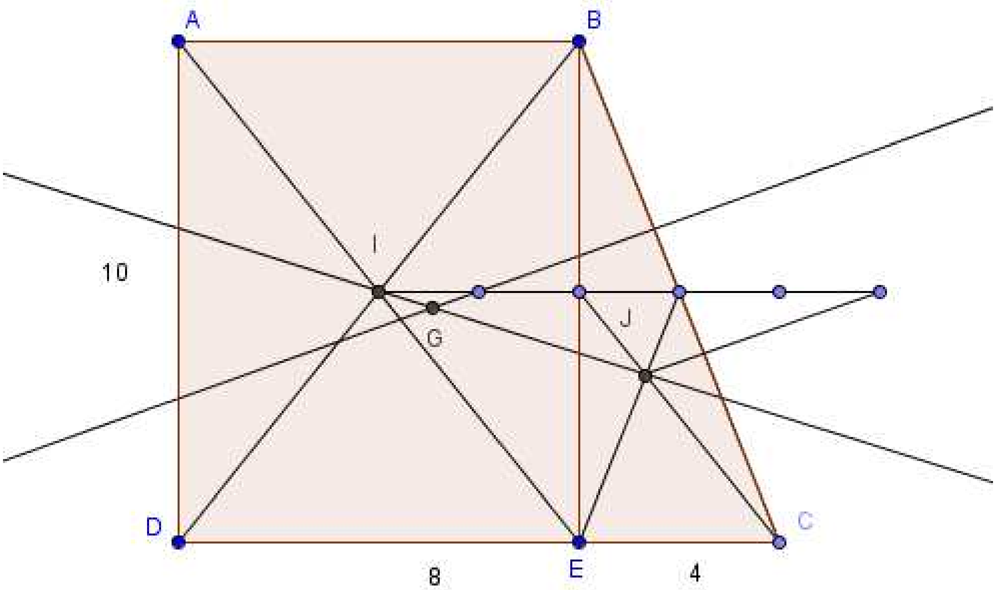
3) Construire le point d'intersection K des diagonales du trapèze. A-t-on G = K ?



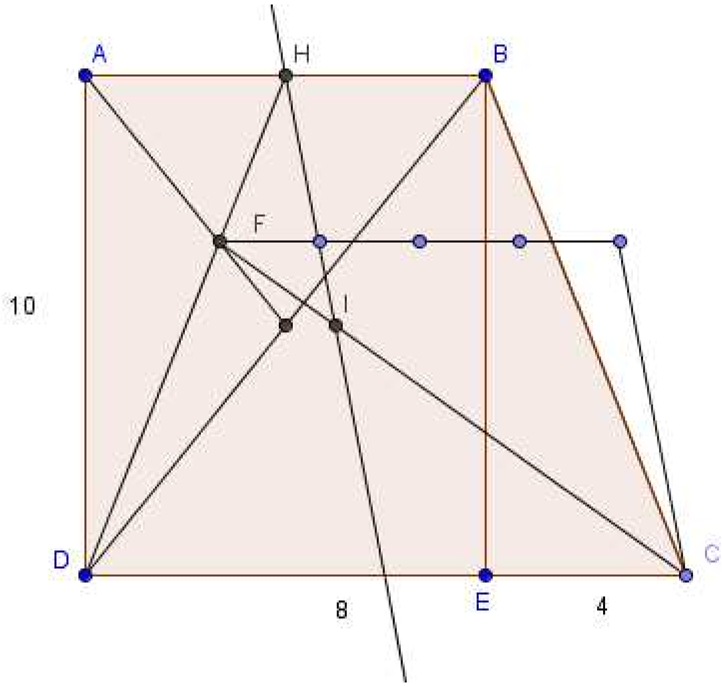
Construisons le centre I du carré ABED et le centre de gravité J du triangle BEC.

G est le barycentre de {(I, 80) ; (J, 20)}, soit d'après la propriété d'homogénéité, celui de {(I, 4) ; (J, 1)}

On a donc $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}$. (Voir figure ci-dessous).



Soit F le centre de gravité de ABD. Alors K est le barycentre de {(F, 3) ; (C, 1)}. On vérifie sur la figure que G est distinct de I et K.



EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 23

Soit ABCD un parallélogramme non aplati.

1°) Déterminer b et c réels tels que D soit le barycentre de {(A , 1) (B , b) (C , c)}.

2°) Les rées b et c ayant les valeurs obtenues et H désignant le centre du parallélogramme, déterminer h, réel, pour que le barycentre de {(A, 1) (B, b) (C, c) (H, h)} soit le milieu du segment [HB] .

EXERCICE 24

Soient A, B, C points non alignés du plan, G le barycentre de {(A , 1) (B , 2) (C , — 1)}et M un point quelconque du plan. soient les vecteurs

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

1°) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan pour lesquels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2°) Déterminer l'ensemble $\mathscr{T}$ des points M du plan pour lesquels $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

EXERCICE 25

ABC est un triangle, M est un point du plan. P, Q, R sont les symétriques de M par rapport aux milieux A1, B1, C1 des côtés [BC] , [CA] et [AB] du triangle. G et K sont les centres de gravité des triangles ABC et PQR.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ .En déduire que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

2°) Donner en fonction de $\overrightarrow{MG}$, une expression de chacun des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MQ}\,, \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MR}\,, \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,, \quad \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$$

Démontrer que G est le milieu de [MK] .

3°) a) Démontrer que les triangles ABC et PQR ont leurs côtés parallèles deux à deux.

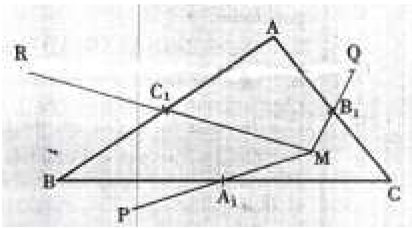
b) Démontrer que $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{GA}$.

4°) Les droites (AP) et (MG) se coupent en L.

a) Préciser la position de L sur chacune des droites (AP) et (MG).

b) En déduire que les milieux des segments [AP] , [BQ] et [CR] sont confondus.

Quelle est la position relative des points M, G, K et L sur la droite (MK) ?



EXERCICE 26

Soient A, B, C points du plan $\mathscr{P}$.

1°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\| 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| .$$

2°) Existe-t-il un point M de $\mathscr{P}$ tel que :

$$\| 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC} \| ?$$

3°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| .$$

EXERCICE 27

Soient A, B, C points non alignés et α, β, γ réels vérifiant les conditions d'existence des barycentres suivants :

G barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$ G_1 barycentre de $\{(A , -\alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$
G_2 barycentre de $\{(A , \alpha) (B , -\beta) (C , \gamma)\}$ G_3 barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

1°) Démontrer que les droites (AG_1) , (BG_2) , (CG_3) concourent en G.

2°) Démontrer que chacun des côtés du triangle $G_1G_2G_3$ passe par l'un des points A, B, C.

EXERCICE 28

Les points A, B, C sont fixés et non alignés.
Soit I le barycentre de $\{(A , 1) (B , -1) (C , 1)\}$ et J le barycentre de $\{(A , -1) (C , 2) \}$.

1°) Soit M le barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.
Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que I, J, M soient alignés.

2°) La droite (IJ) coupe (BC) en K et (AB) en L. Calculer $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ et $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$.

Déterminer λ et μ pour que L soit le barycentre de $\{(I , \lambda) (J , \mu) \}$.

EXERCICE 29

Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de [BC] et M le barycentre du système $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

1°) Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que M vérifie successivement :

a) $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{IM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2°) M satisfaisant à la fois aux conditions a) et b) , la droite (BM) coupe (AC) en J et la droite (CM) coupe (AB) en K.

Calculer les rapports $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}$ et $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$.

EXERCICE 30

Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés [BC] , [CA] et [AB] du triangle en A ' , B ' et C ' .

1°) a) Démontrer que : $\dfrac{\text{aire (MAB)}}{\text{aire (MAC)}} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

b) En déduire que A ' est le barycentre des points pondérés (B, aire (MAC)) et (C , aire(MAB)) .

2°) Soit G le barycentre des points pondérés (A, aire(MBC) (B, aire (MAC)) et (C , aire(MAB)) .

Démontrer que les points G et M sont confondus.

3°) Soient ABC un triangle, α, β, γ réels strictement positifs et G le barycentre de {(A , α) (B , β) (C , γ)}. Démontrer, en utilisant les deux questions précédentes que :

$$\frac{\text{aire(GBC)}}{\alpha} = \frac{\text{aire(GCA)}}{\beta} = \frac{\text{aire(GAB)}}{\gamma}.$$

4°) Application : Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On pose : BC = a, CA = b et AB = c. En les résultats précédents, démontrer que I est le barycentre des points (A, a) , (B, b) et (C , c) .

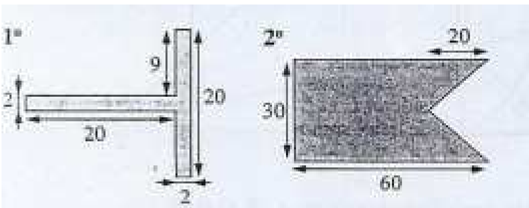
5°) On suppose désormais que les angles du triangle sont aigus. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A (donc H_A est un point de [BC].

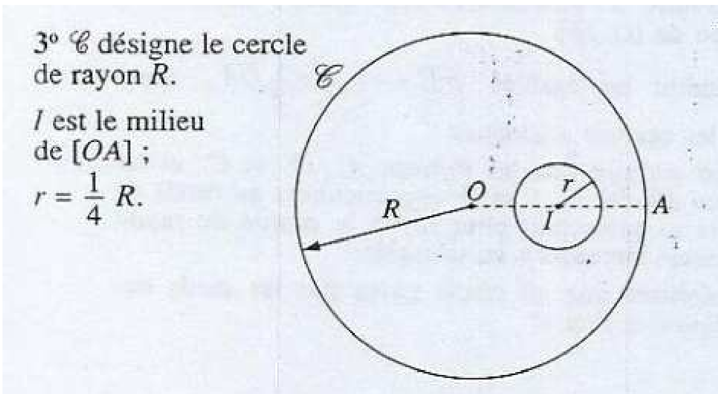
a) Prouver que : $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{H_AC}{H_AB}$; en déduire que H_A est le barycentre de (B, tan B) et (C, tan C)

b) Etablir que l'orthocentre H du triangle ABC est le barycentre de (A, tan A) , (B, tan B) et (C, tan C) .

EXERCICE 31

Déterminer graphiquement, ou analytiquement dans un repère convenablement choisi, le centre d'inertie de chacune des plaques homogènes, d'épaisseur constante et négligeable, suivantes :





4°

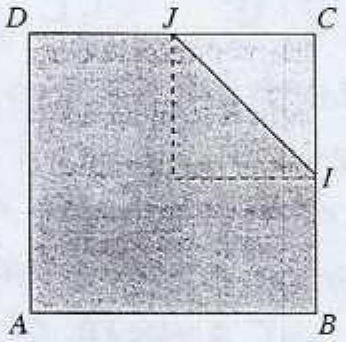
$ABCD$ est un carré de côté a.

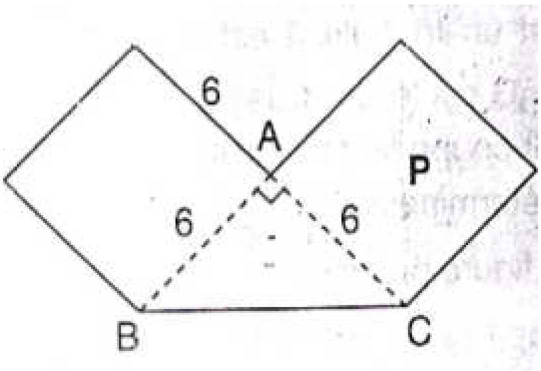
I est le milieu de $[BC]$.

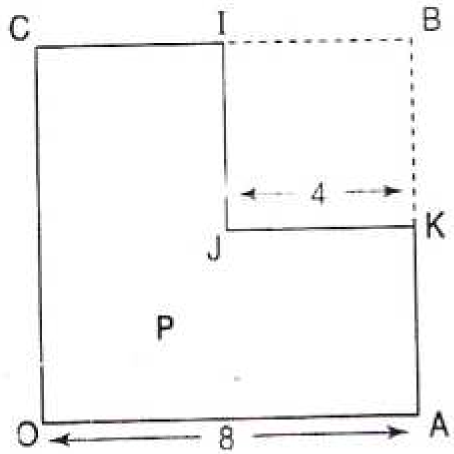
J est le milieu de $[CD]$.

Cas 1 : On découpe le triangle ICJ.

Cas 2 : On replie le coin triangulaire ICJ sur la plaque $ABIJD$.







5. GEOMETRIE ANALYTIQUE (DROITES ET REPERES)

Une **base** du plan est un couple ($\vec{u}$, $\vec{v}$) de vecteurs *non colinéaires*.

Le triplet (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) où O est un point du plan et ($\vec{u}$, $\vec{v}$) une base est un **repère cartésien** du plan .

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Il existe un couple unique

(x, y) de réels tels que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Ces réels x et y sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Soit M un point quelconque. Il existe un couple unique (x, y) de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Ces réels x et y sont appelés **coordonnées** de M dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

<u>*Condition de colinéarité*</u> : Soit $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x ' , y ') dansune base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si xy ' — yx ' = 0 ($\Leftrightarrow$ dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) = 0).

Soit dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) les points A (x_A , y_A) et B (x_B , y_B) .

Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$) et le mileu I du segment [AB] a pour coordonnées I $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

<u>*Représentations anlytique d'une droite*</u>

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A (x_o ; y_0) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (α , β). Un point M (x , y) appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires , c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

appelé *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathscr{D}$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par deux points A et B. Un point M (x , y) appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à dét($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$) = 0 et se traduit par une relation de la forme : ax + by + c = 0 appelé *équation cartésienne* de la droite $\mathscr{D}$.

Si b ≠ 0, cette équation peut se mettre sous la forme y = mx + p et s'appelle alors équation réduite de la droite $\mathscr{D}$: m s'appelle le *coefficient directeur* de $\mathscr{D}$ (si le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est orthogonal, m est aussi appelé *pente* de la droite $\mathscr{D}$). p est *l'ordonnée à l'origine*.

<u>Coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$</u> :

- équation cartésienne ax + by + c = 0 : $\vec{u}$ (— b ; a) .
- système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$ $\vec{u}$ (α , β)
- équation réduite y = mx + p : $\vec{u}$ (1 , m) .

<u>Conditions de parallélisme</u>

$$\left.\begin{array}{r} D : ax + by + c = 0 \\ D' : a'x + b'y + c' = 0 \end{array}\right\} D \parallel D' \Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \qquad \left.\begin{array}{r} D : y = mx + p \\ D' : y = m'x + p' \end{array}\right\} D \parallel D' \Leftrightarrow m = m'$$

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 32

Etant donné un triangle ABC, soient les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1°) Montrer que (MN) est parallèle à (BC) .

2°) Donner les coordonnées de M et N dans les repères (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) puis (B, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$) .

3°) On définit maintenant les points M et N par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1 - k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbf{R}$) .

a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer k pour que BCMN soit un parallélogramme.

EXERCICE 33

Soient A, B, C non alignés. I le milieu de [BC]. Δ une droite passant par I et qui coupe (AB) en M et (AC) en N. P est le point commun à (BN) et (CM).

Déterminer l'ensemble des points P quand Δ pivote autour de I en restant sécante à (AB) et (AC). On pourra utiliser le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

EXERCICE 34

Soient un triangle OAB et deux points C et D alignés avec O. Un point M de la droite (AB) est variable. (MC) coupe (OA) en N et (MD) coupe (OB) en P.

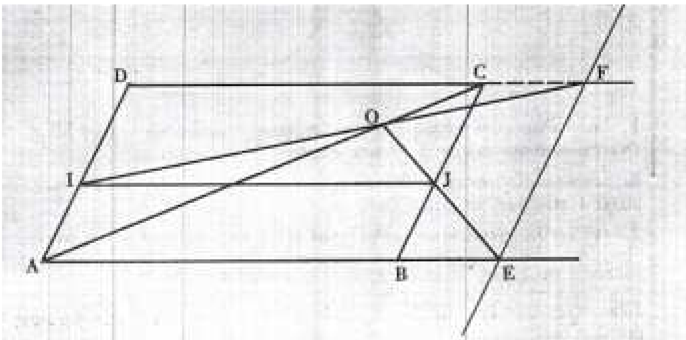
Démontrer que la droite (NP) passe par un point fixe.

N.B. On pourra rapporter le plan à un repère bien choisi.

EXERCICE 35

ABCD est un parallélogramme. Une parallèle à (AB) coupe (AD) en I et (BC) en J ; une parallèle à (AD) coupe (AB) en E et (CD) en F .

On se propose de montrer que les droites (AC), (EJ) et (IF) sont soit parallèles, soit concourantes.



1°) Faire une figure sur laquelle les droites (AC), (EJ) et (IF) sont parallèles.

2°) On choisit $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ pour repère.

a) Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D ? Quelles sont les abscisses de I et J ? Quelles sont les ordonnées de E et F ?

b) On désigne par *a* l'abscisse de E et par *b* l'ordonnée de I.

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AC), (IF) et (EJ) .

c) Démontrer que si les droites (AC) et (IF) sont parallèles alors les droites (AC), (IF) et (EJ) sont parallèles .

d) Démontrer que si les droites (AC) et (IF) sont sécantes en O, alors les droites (AC), (IF) et (EJ) sont concourantes en O.

e) Conclure .

EXERCICE 36

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient O', $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ tels que :

$\vec{OO'} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i}' = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{j}' = \vec{i} + 2\vec{j}$.

1°) Démontrer que $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ est un repère du plan.

2°) Soit M de coordonnées (x , y) dans le premier repère, (x ' , y ') dans le second repère. Calculer x ' et y ' en fonction de x et y .

EXERCICE 37

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

On considère les repères $\mathscr{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et $\mathscr{R}' = (B, \vec{BA}, \vec{BC})$.

Un point M a pour coordonnées (x , y) dans $\mathscr{R}$ et (x ' , y ') dans $\mathscr{R}'$.

Exprimer x et y en fonction de x ' et y ' .

Déterminer l'ensemble des points du plan qui ont les mêmes coordonnées dans les deux repères.

EXERCICE 38 Familles de droites

A) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel *a* , le nombre de solutions de l'équation :

$(a - 2)\, x^2 + 2(a - 1)\, x + a + 4 = 0$, x étant l'inconnue réelle.

B) Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites (d_m) d'équations :

$(d_m) : (m^2 + m - 2)\, x - (m + 3)\, y - (m^2 - 5) = 0$, m étant un paramètre réel ,

et l'ensemble Δ des droites (δ_a) d'équations :

$(\delta_a) : ax + (a - 2)\, y - 6\, (a - 1) = 0$, *a* étant un paramètre réel .

1°) a) Déterminer et construire les droites de $\mathscr{D}$ parallèles aux axes.

b) Démontrer que toutes les droites de $\mathscr{D}$ passent par un point fixe A que l'on déterminera.

2°) a) Déterminer et construire les droites de Δ parallèles aux axes.

b) Démontrer que toutes les droites de Δ passent par un point fixe C que l'on déterminera.

c) Discuter suivant la position d'un point $M_0\, (x_0 , y_0)$ dans le plan, le nombre de droites de Δ passant par M_0.

En déduire que l'ensemble des droites Δ est l'ensemble des droites passant par C privé d'une droite que l'on précisera.

3°) En prenant *a* pour paramètre réel et m pour inconnue, discuter suivant les valeurs de *a* l'existence de droites (d_m) parallèles à une droite (δ_a) donnée.

En déduire que l'ensemble $\mathscr{D}$ ne représente qu'une partie des droites passant par A.

4°) Pour quelles valeurs de *a* et m les droites (d_m) et (δ_a) sont-elles confondues ?

5°) Les droites (d_1) et (δ_2) se coupent en B. Les droites (δ_0) et (d_3) se coupent en D.

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 39 Notion de polaire

ABC est un triangle et J un point du segment [BC].

Pour la suite, on utilisera le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1°) Quelles sont les coordonnées de B et C ?

2°) (Bu), (Cv), (AJ) sont des droites de coefficients respectifs a, a', α .

De plus, (Bu) coupe (AC) en P ; (Cv) coupe (AB) en Q, les droites (Bu) et (Cv) se coupent sur la droite (AJ) au point K distinct de A.

a) Déterminer les coordonnées des points P, Q et K en fonction de a et a' .

b) Montrer que $a(1 + a') = \alpha(1 + a)$.

3°) a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection O (lorsqu'il existe) des droites (BC) et (PQ) .

b) Montrer que ces coordonnées sont indépendantes des réels a et a' .

Que peut-on en déduire ?

4°) Démontrer que $\dfrac{\overline{CO}}{\overline{CJ}} = -\dfrac{\overline{BO}}{\overline{BJ}}$.

La droite (AJ) est appelée la polaire du point O par rapport aux droites (AB) et (AC) .

5°) Δ et Δ' sont des droites sécantes en A. O est un point qui n'appartient pas à Δ et Δ' .

Construire la polaire du point O par rapport aux droites Δ et Δ' .

CHAPITRE 2 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

L'espace $\mathcal{E}$ est un ensemble infini dont les éléments sont appelés points.
Les droites et les plans sont des parties infinies propres de l'espace, c'est-à-dire des parties de l'espace distinctes de celui-ci.

1. AXIOMES DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

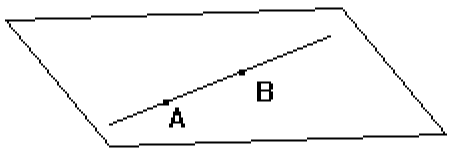
AXIOME 0 : Toutes les règles de la géométrie plane restent valables dans chaque plan de l'espace.

AXIOME 1 : Par deux points distincts de $\mathcal{E}$, il passe une droite et une seule.
La notation (AB) désignera la droite contenant ces deux points.

AXIOME 2 : Il existe un plan et un seul contenant trois points non alignés.

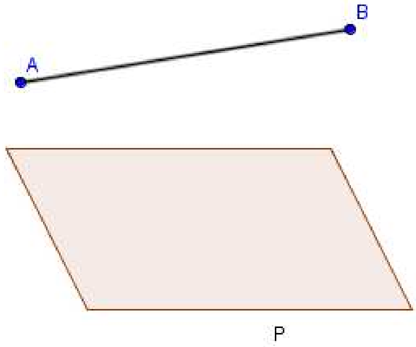
AXIOME 3 : Une droite qui a deux points dans un plan y est contenue toute entière.

$$(A \in P, B \in P) \Longrightarrow ((AB) = D \subset P).$$

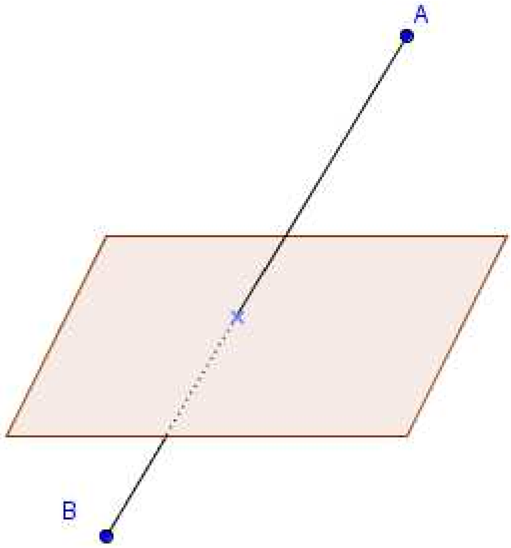


AXIOME 4 : Tout plan P divise l'espace $\mathcal{E}$ en deux régions disjointes (sans point commun) ; ces deux régions $\mathcal{E}1$ et $\mathcal{E}2$ sont appelées demi-espaces.

— Si A et B appartiennent à un même demi-espace, tout le segment [AB] est inclus dans ce demi-espace. (On parle de convexité du demi-espace).



— Si A et B sont de part et d'autre de P, alors [AB] a un point dans P et un seul.



2. PROPRIETES D'INCIDENCE

2.1 Position relative d'une droite et d'un plan

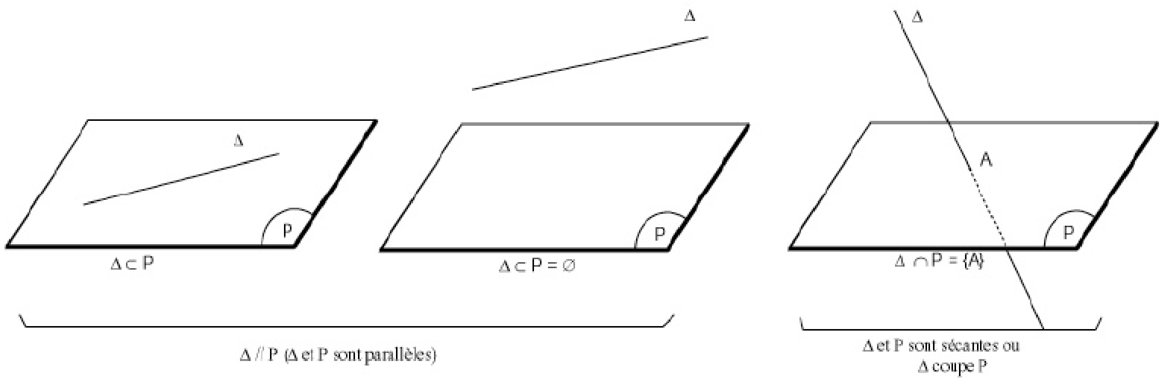
Une droite Δ peut avoir :

— 0 (c'est-à-dire aucun) point dans un plan P : elle est alors dite **parallèle** au plan.

— un seul point commun avec un plan : on dit que D **coupe** P ou que Δ est **sécante** avec P.

— au moins deux points communs avec un plan P : elle est alors **incluse** dans P d'après l'Axiome 3.

N.B. Dans ce dernier cas, on dit aussi que Δ est parallèle à P.



2.2 Détermination d'un plan

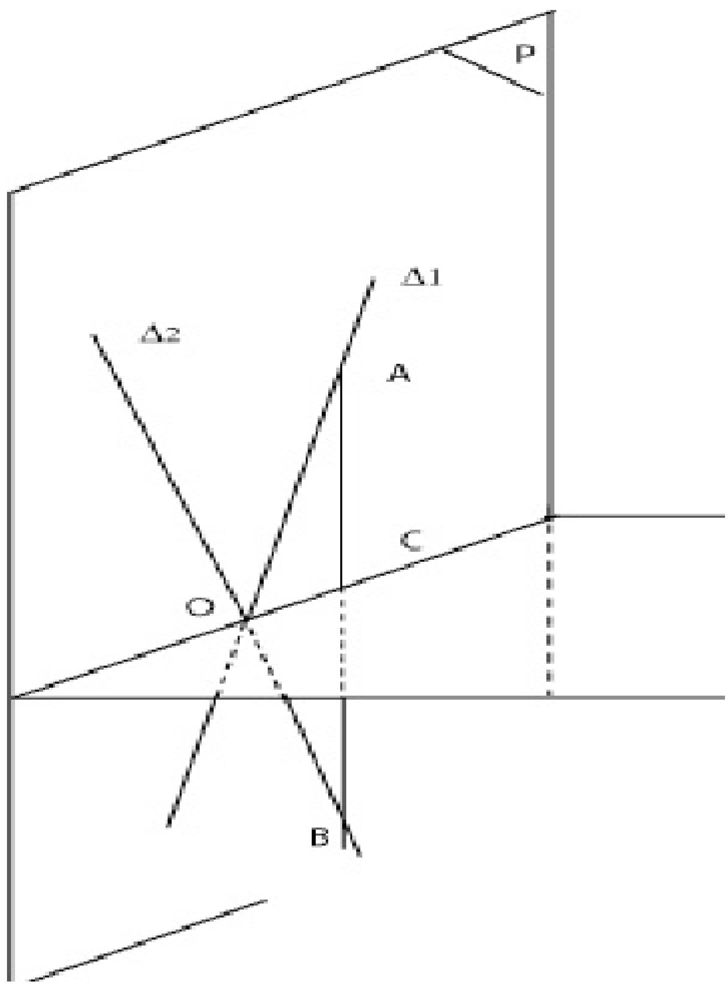
En vertu de l'Axiome 2, il existe un plan unique contenant <u>une droite D et un point A extérieur à D</u>. (En effet, il suffit de choisir 2 points distincts de D. Avec le point A, on obtient alors 3 points non alignés). On dit que la droite D et le point A **déterminent** un plan.

De même, un plan est déterminé par deux <u>droites sécantes</u>. (En effet, il suffit de prendre leur point point d'intersection et deux points A et B appartenant respectivement aux deux droites).

2.3 Intersection de deux plans

THEOREME 1 : *Si deux plans distincts ont (au moins) un point commun O, alors leur intersection est une droite.*

<u>Démonstration</u> : Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites sécantes en O situées dans le plan P et non dans le plan Q. P divise l'espace en 2 régions $\mathscr{E}1$ et $\mathscr{E}2$ (Axiome 4). Alors, nécessairement $\Delta_1 \cap \mathscr{E}1 \neq \emptyset$, car sinon, comme Δ_1 n'est pas située dans Q, Δ_1 serait incluse dans $\mathscr{E}2$, ce qui est impossible, puisque

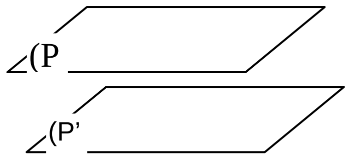
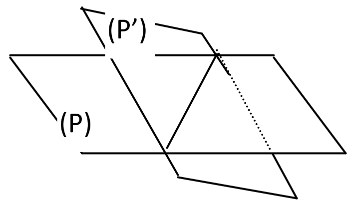


Δ_1 passe par le point O de Q. De même : $\Delta_1 \cap \mathscr{E}2 \neq \emptyset$, $\Delta_2 \cap \mathscr{E}1 \neq \emptyset$, $\Delta_2 \cap \mathscr{E}2 \neq \emptyset$.
Soit A un point de $\Delta_1 \cap \mathscr{E}1$ et B un point de $\Delta_2 \cap \mathscr{E}2$.
D'après l'Axiome 4, (AB) a un point commun unique C avec le plan P. Nécessairement, C et O sont distincts, sans quoi Δ_1 et Δ_2 seraient confondues.
P et Q ont donc en commun la droite (CO) et ne peuvent avoir en commun un autre point M en dehors de (CO) sinon ils seraient confondus.

2.4 Positions relatives de deux plans

D'après le théorème précédent, deux plans P et Q peuvent être :
— sans point commun ; on dit qu'ils sont parallèles ;
— sécants suivant une droite ;
— confondus.

<table>
<tr>
<td>a) (P) et (P’) sont confondus

(P) = (P’)</td>
<td>b) (P) et (P’) sont disjoints

$(P) \cap (P') = \phi$</td>
<td>c)(P) et (P’) sont sécants
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Les cas (a) et (b) déterminent des plans parallèles.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<u>2.5 Positions relatives de deux droites</u>

Soient D et Δ deux droites ;

— Si elles sont sécantes, elles sont coplanaires d’après 2.2.

— Si elles n’ont pas de point commun, soit P le plan déterminé par D et un point arbitraire A de Δ.

- Si P contient Δ, alors D et Δ sont deux droites de P qui n’ont aucun point commun : elles sont parallèles
- Si P coupe Δ, D et Δ ne sont pas dans un même plan, sans quoi ce plan contiendrait D et Δ et serait confondu avec le plan P. Δ serait incluse dans P : contradiction.

On dit que D et Δ sont **non coplanaires**.

En résumé : deux droites de l’espace peuvent être :

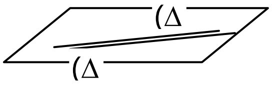
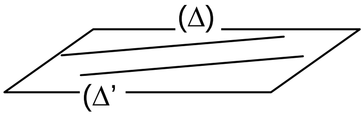
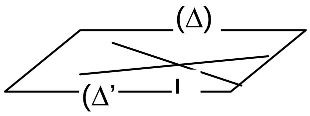
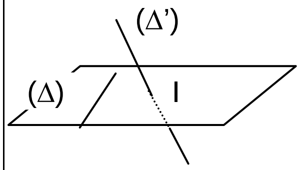
— <u>coplanaires</u> : elles sont alors soit sécantes, soit parallèles.

— <u>non coplanaires</u> : c’est le cas général

N.B. Dans le plan, quand deux droites ne sont pas sécantes, elles sont alors parallèles (distinctes ou confondues).

Dans l'espace, il en va différemment.

- Dire que deux droites sont sécantes <u>signifie qu</u>'elles n'ont qu'un seul point en commun.
- Dire que deux droites sont parallèles <u>signifie qu</u>'elles sont coplanaires et ne sont pas sécantes.

a) (Δ) et (Δ’) sont confondues  $(\Delta) = (\Delta')$	b)(Δ) et (Δ’) sont dans un même plan et disjointes  $(\Delta) // (\Delta')$ et $(\Delta) \cap (\Delta') = \phi$	c)(Δ)et (Δ’)sont sécantes  $(\Delta) \cap (\Delta') = \{I\}$	d)(Δ) et (Δ’) sont non coplanaires  $\Delta) \cap (\Delta') = \phi$
(Δ) et (Δ’) parallèles		(Δ) et (Δ’) non parallèles	

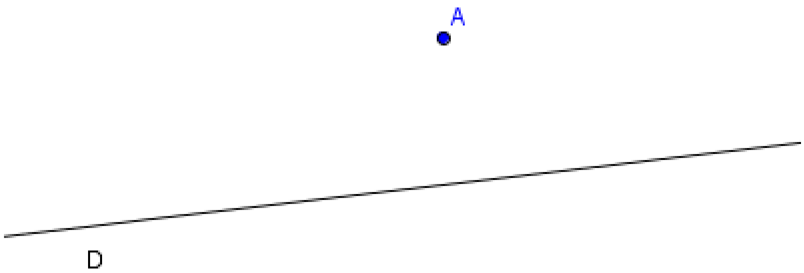
<u>2.5 Positions relatives de quatre points</u>

Quatre points de l’espace ne sont généralement pas coplanaires.
Ils limitent 4 triangles situés dans quatre plans différents.
Le solide ainsi constitué est appelé **tétraèdre**.

3. PARALLELISME DE DEUX DROITES

On rappelle que deux droites de l’espace sont parallèles si et seulement si :
a) Elles n’ont pas de point commun ;
b) Elles sont coplanaires.

<u>THEOREME 2</u> : *Par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle et une seule à cette droite.*



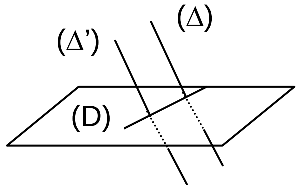
<u>Démonstration</u> : En effet, il existe un plan unique contenant A et D. Toute parallèle à D passant par A est nécessairement située dans le plan (D, A). Or, d’après la géométrie

plane (cf. Axiome 0), il existe dans le plan (D, A) une seule droite passant par A et parallèle à D.

THEOREME 3

Si (Δ) et (Δ') sont deux droites parallèles, alors tout plan qui coupe (Δ) coupe aussi (Δ').

Démonstration : Soit (Π) le plan formé par (Δ) et (Δ'). Supposons un plan (P) sécant à (Δ).

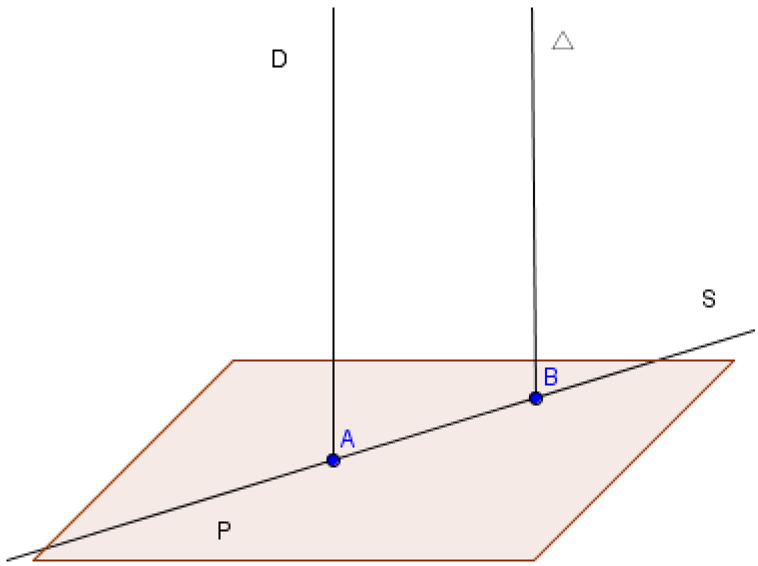


Alors la droite (D), intersection de (Π) et (P),

est sécante à (Δ), donc elle est aussi sécante à (Δ') dans le plan (Π).

Si (P) n'était pas sécante à (Δ') , (P) contiendrait (Δ') et un point de (Δ) donc contiendrait ces deux droites parallèles. Ce qui est contraire à l'hypothèse (P sécant à (Δ).D'où (P) est sécante à (Δ').

THEOREME 3 : *Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.*



Démonstration : On a D// Δ et P ∩ Δ = {A}. D et Δ déterminent un plan π qui coupe P suivant une droite S. S est une droite du plan π qui coupe D en A, donc elle coupe sa parallèle Δ (d'après la géométrie plane) en un point B. Donc P coupe Δ en B.

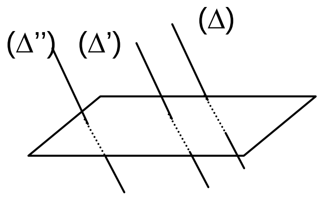
THEOREME 4 : *Deux droites distinctes parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*

Si (Δ) // (Δ’) et (Δ’) // (Δ’’) alors (Δ) // (Δ’’)

<u>Démonstration</u>: Supposons que (Δ) non parallèle à

(Δ’’).

On a : soit (Δ)∩(Δ’’)={I}, soit (Δ) et (Δ’’) non coplanaires



• Si (Δ)∩(Δ’’)={I}. Par I, passeraient deux parallèles à (Δ’), ce qui contredit le théorème 2. Donc (Δ)et (Δ’’) ne sont pas sécantes.

Si (Δ) et (Δ’’) sont non coplanaires, il existe un plan (P) qui contient (Δ’’) et qui coupe (Δ) donc (P) coupe (Δ’) d’après le théorème 2 donc (Δ’) et (Δ’’) sont non coplanaires. Ce qui est contradictoire car deux droites parallèles sont coplanaires.

Donc (Δ) // (Δ’’).

4. PARALLELISME D’UNE DROITE ET D’UN PLAN

Rappelons qu’une droite D et un plan P sont dits **parallèles** s’ils n’ont aucun point commun

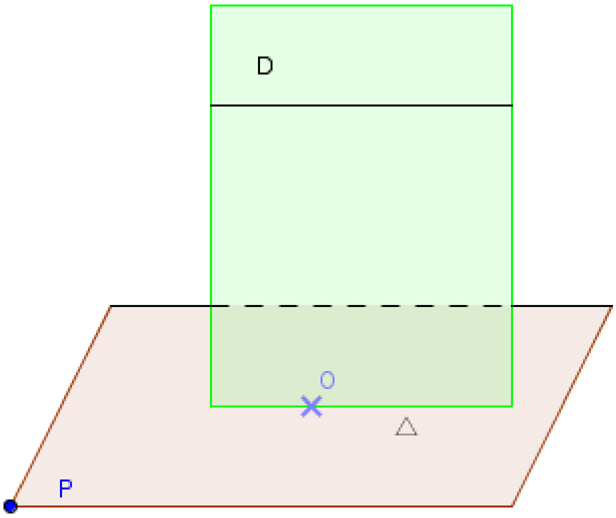
(i.e D ∩ P = ∅)

<u>**THEOREME 5**</u> *: Une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si D est parallèle à une droite de P. En d’autres termes :*

$$\underbrace{(D//P)}_{\text{(i)}} \Leftrightarrow \underbrace{(Il\ existe\ une\ droite\ \Delta\ de\ P\ telle\ que\ D//\ \Delta}_{\text{(ii)}}$$

<u>Démonstration</u>: • Montrons que (i) ⟹ (ii) :

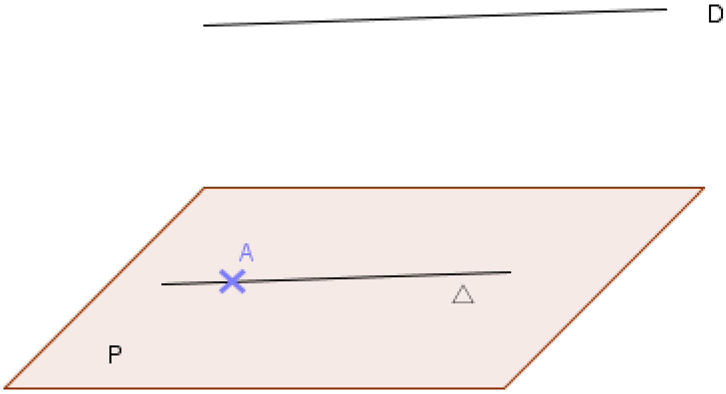
Supposons que D // P et soit O un point quelconque de P. Le plan (D, O) coupe P suivant une droite Δ qui est nécessairement parallèle à D



• Montrons que (ii) ⟹ (i) : Supposons que D soit parallèle à une droite Δ de P et que D ne soit pas incluse dans P. Alors P ne coupe pas D car s'il coupait D, il couperait Δ (cf. théorème 3). Or , par hypothèse D ⊂ P. D'où P // Δ.

CONSEQUENCE 1 : *Si D // P, la parallèle menée par un point A de P à D est incluse dans P.*

Démonstration : En effet, le plan (D, A) coupe P suivant une droite Δ parallèle à D.
Δ est la parallèle unique à Δ passant par A.

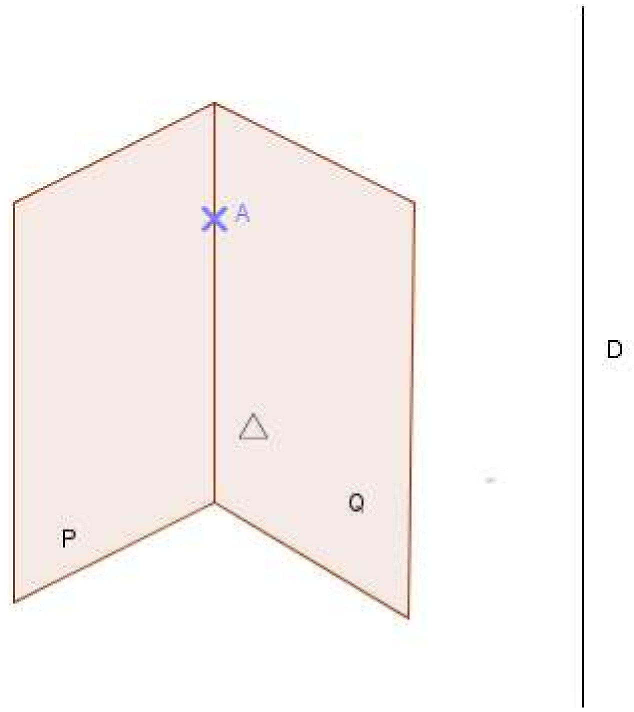


CONSEQUENCE 2 : (Théorème du toit) :

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.

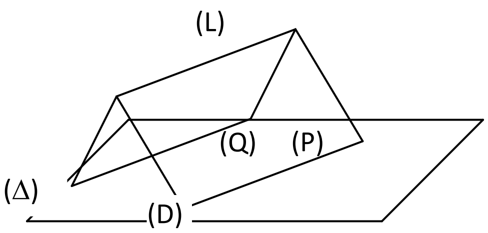
$$(P \cap Q = \Delta \,;\, D \,//\, P \text{ et } D \,//\, Q) \Longrightarrow (D \,//\, \Delta).$$

Démonstration :



Soit A ∈ P ∩ Q. La parallèle menée par A à D est incluse dans P et dans Q d'après la conséquence 1. Elle est donc confondue avec Δ.

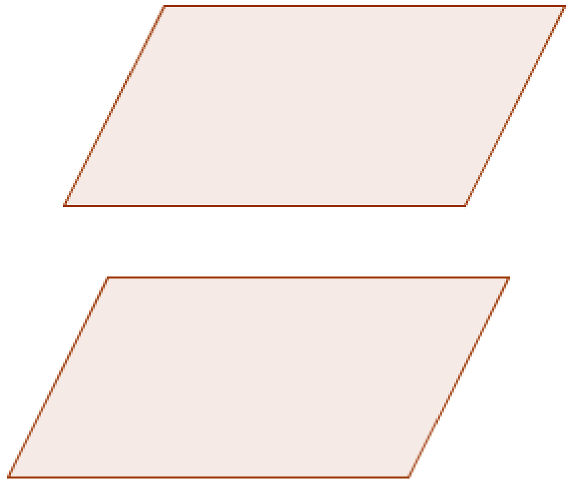
En particulier, dans la configuration ci-dessous, la droite d'intersection (L) de (P) et (Q) est parallèle à la fois à (D) et (Δ).



5. PARALLELISME DE PLANS

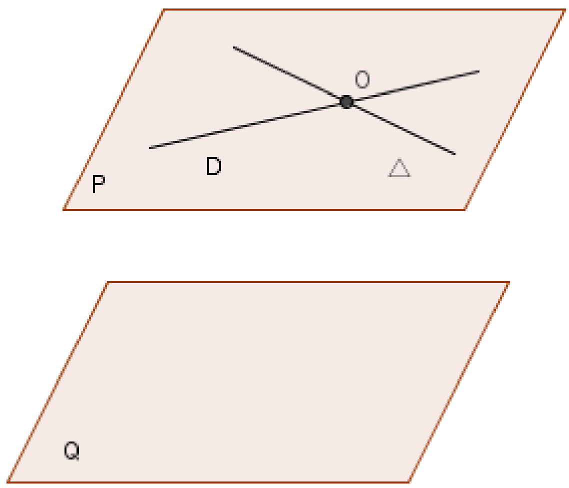
Rappel (cf. 2.4) : Deux plans parallèles sont deux plans qui sont confondus ou bien qui n'ont aucun point commun.

Remarque : Si deux plans distincts sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.



THEOREME 6 : Deux plans distincts P et Q sont parallèles si et seulement si deux droite distinctes de l'une sont parallèles à l'autre.

$$\underbrace{(P \neq Q \text{ et } P//Q)}_{\text{(i)}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Il existe deux droites } D \text{ et } \Delta \text{ de } P \text{ sécantes} \\ \text{en } O \text{ telles que } D//Q \text{ et } \Delta//Q \end{pmatrix}}_{\text{(ii)}}$$



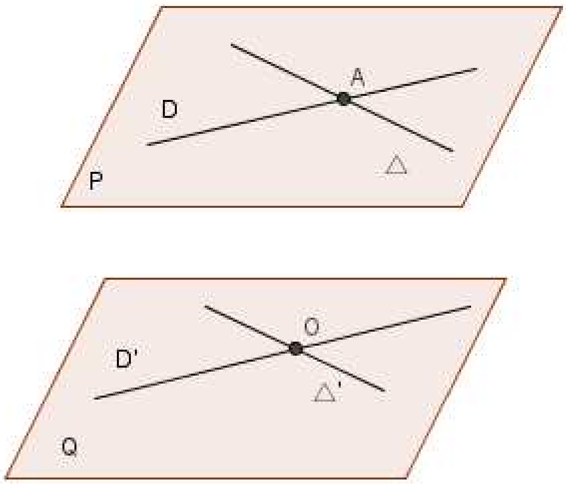
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Evident car toute droite de P est parallèle à Q (cf. remarque précédant le théorème 6).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Si P coupait Q suivant une droite S, D serait parallèle à S ainsi que Δ. Par le point O, passeraient deux parallèles D et Δ à S : absurde.

Donc P est parallèle à Q.

<u>THEOREME 7</u> : *Par un point O donné de l'espace, extérieur à un plan P, il passe un plan P_O et un seul parallèle à P.*

<u>Démonstration</u> : **a) Existence** : Considérons deux droites D et Δ de P sécantes en A. Soit D' la parallèle à D passant par O et Δ' la parallèle à Δ passant par O.



:

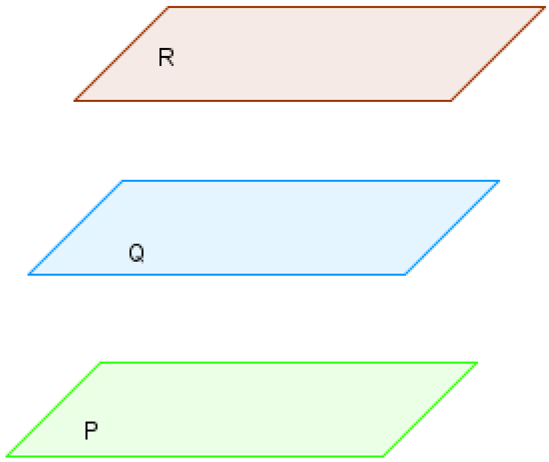
D' étant parallèle à la droite D du plan P est parallèle à P (théorème 5).

De même Δ' // P.

Le plan (D', Δ') est alors parallèle à P d'après le théorème 6.

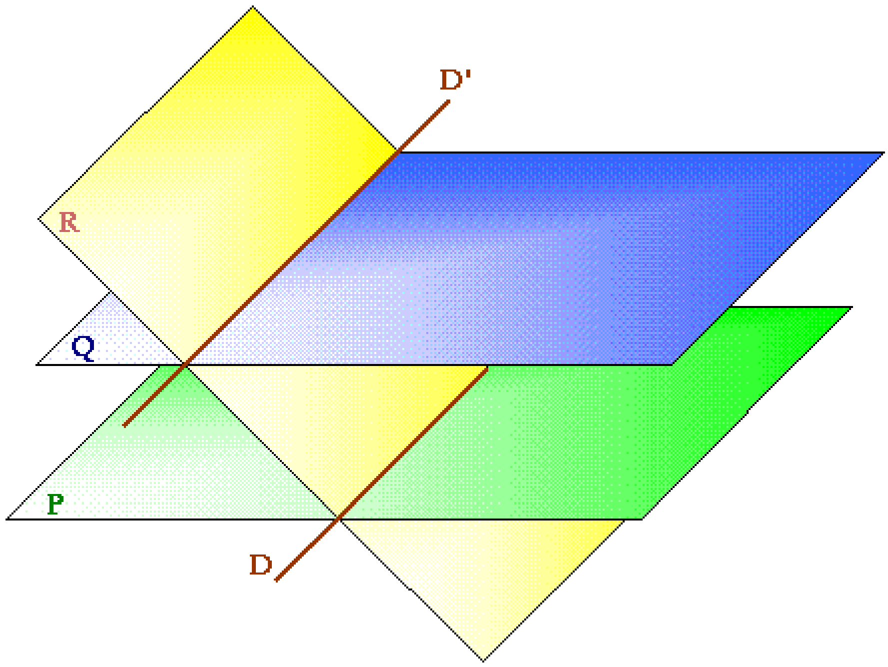
b) Unicité : Supposons qu'il existe un autre plan Q passant par O et parallèle à P. Q n'est parallèle (au sens strict) au plan (D', Δ') car Q passe par O ∈ (D', Δ'). Si Q coupait D', il couperait aussi sa parallèle D (théorème 3), ce qui est absurde puisque Q // P. Comme Q contient le point O de D', Q contient D'. De même Q contient Δ'. D'où Q = (D', Δ').

<u>THEOREME 8</u> : *Lorsque deux plans sont parallèles et distincts,*
1) Tout plan parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre.
2) Tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
<u>Démonstration</u> : 1) Supposons que P // Q et R // P.



Si R coupait Q, soit O un point de R ∩ Q. Par O passeraient deux plans Q et R parallèles à P, ce qui contredit le théorème 7. Donc R // Q.

2)



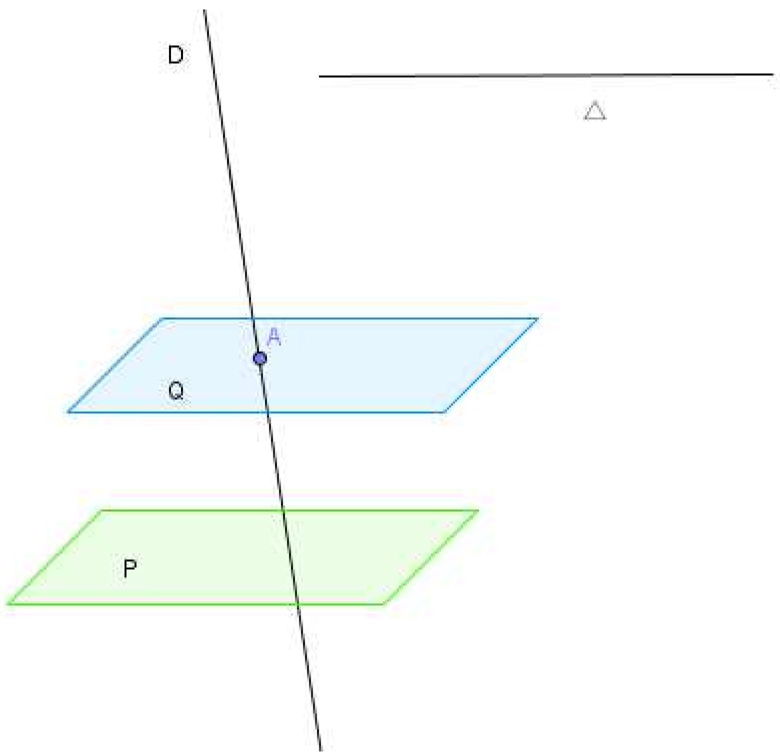
Si P // Q et R coupe P, alors R n'est pas parallèle à Q, sinon il serait parallèle à P (d'après 1°), ce qui est absurde. R n'est pas non plus confondu avec Q puisqu'il coupe P. Donc R coupe Q.
Les droites d'intersection D et D' sont toutes deux dans le même plan R et n'ont pas de point commun puisque D ⊂ P et D' ⊂ Q avec P // Q. Donc elles sont parallèles.

THEOREME 9 : *Lorsque deux plans sont parallèles et distincts,*
1) Tout droite parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre.
2) Tout droite qui coupe l'un coupe l'autre.
Démonstration :

1) Si Δ // P, Δ ne peut couper Q sans quoi il couperait aussi P, d'après le 2° du théorème 8, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc Δ est parallèle à P (ou contenue dans Q).

2) Si D coupe P en A, D n'est pas parallèle à Q car sinon elle serait dans le plan passant par A et parallèle à Q, c'est-à-dire le plan P : absurde. De plus, D n'est pas incluse dans Q, car D passe par le point A de P.

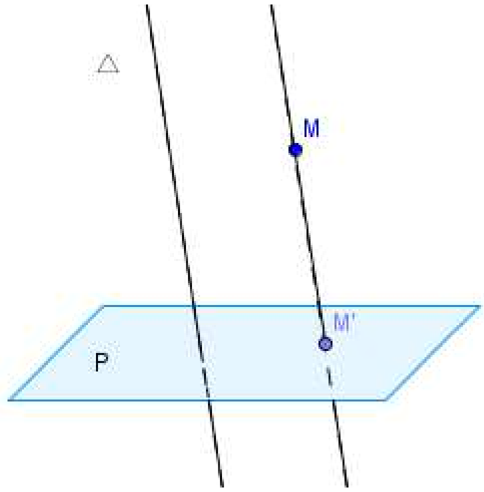
Donc D coupe P.



6. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

6.1 Projection sur un plan parallèlement à une droite

Définition : M étant un point de l'espace, Δ une droite de l'espace et P un plan de l'espace, on appelle projeté de M sur P parallèlement à Δ le point M ' d'intersection de P avec la droite passant par M et parallèle à Δ.

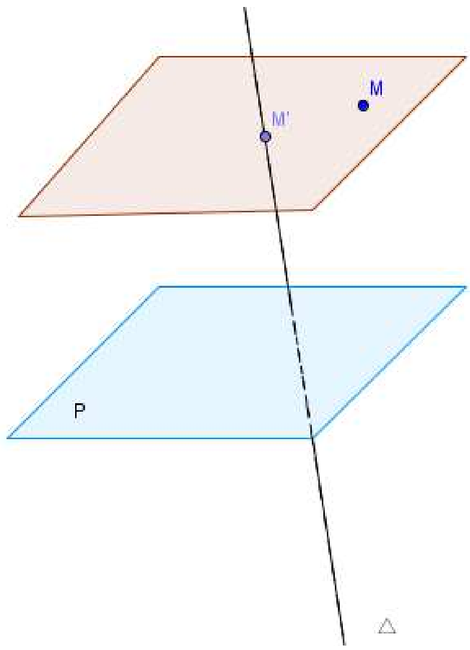


Remarques : 1) Tous les points d'une droite parallèle à Δ ont le même projeté sur P.

2) Tout point M de P est son propre projeté.

6.2 Projection sur une droite parallèlement à un plan

Définition : M étant un point de l'espace, Δ une droite de l'espace et P un plan de l'espace non parallèle à Δ, on appelle projeté de M sur Δ parallèlement à P le point M ' d'intersection de Δ avec le plan P_M passant par M et parallèle à P.



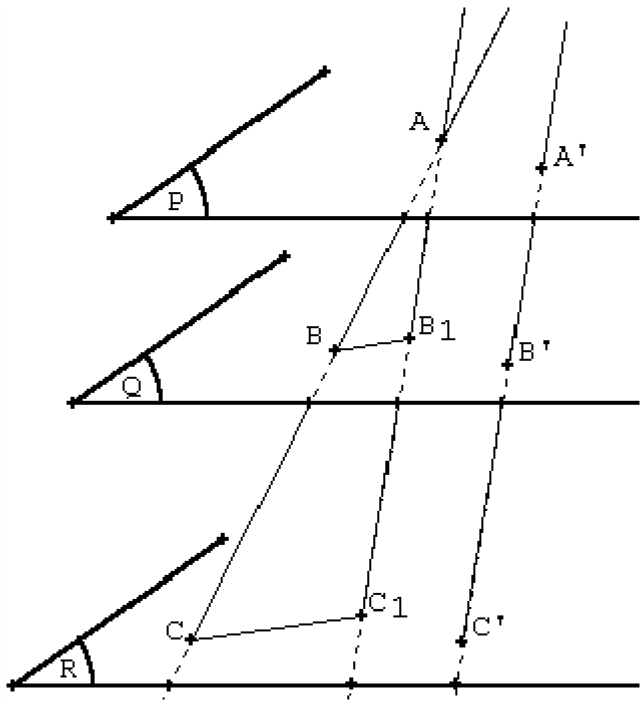
6.3 Théorème de THALES dans l'espace

Nous admettrons que, comme dans le plan, toute droite D de l'espace peut être munie d'une orientation en choisissant sur elle une origine, une unité et un sens de parcours, ce qui en fait un axe. On définit alors la mesure algébrique d'un couple de points de D de la même manière que dans le plan.

THEOREME 10 : *Soit P, Q et R trois plans strictement parallèles, Δ et Δ' deux droites distinctes qui*
coupent P, Q et R en A, B et C, et A', B' et C' respectivement, alors on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Démonstration :



Soit Δ' la parallèle à Δ passant par A. D et Δ' sont coplanaires car sécantes. Dans le plan (D, Δ'), soient B_1 et C_1 les projetés respectifs de B et C sur Δ' parallèlement au plan P. Les droites (BB_1) et (CC_1) du plan (D, Δ') sont parallèles. D'après le théorème de THALES dans le plan (D, Δ'), on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} \quad \textbf{(1)}$$

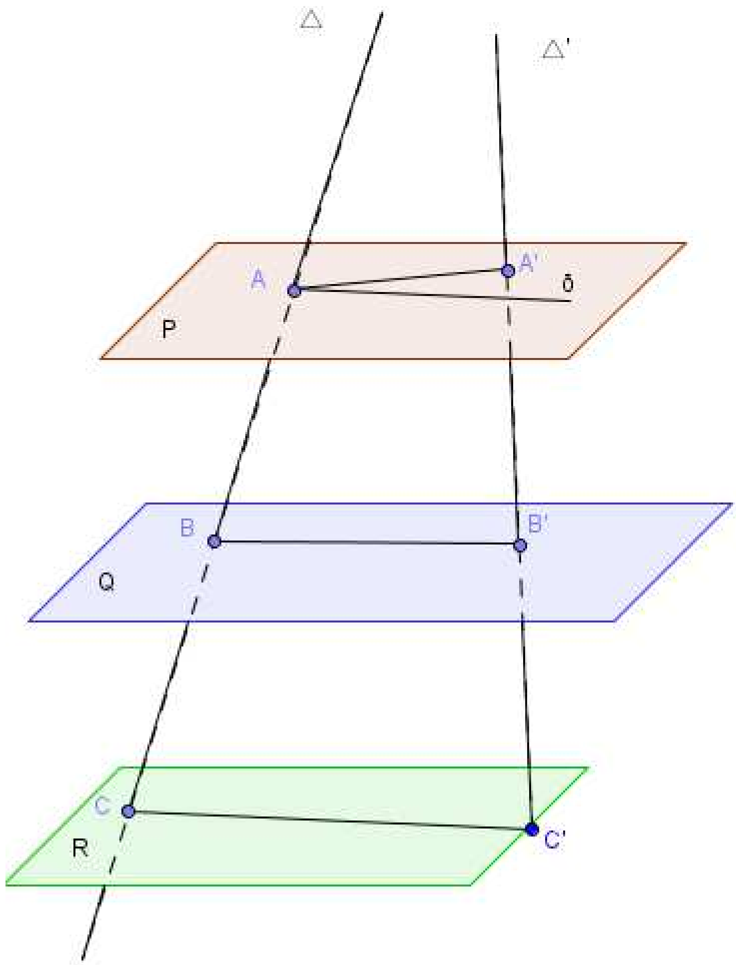
Δ' et Δ sont coplanaires car parallèles. Dans le plan (Δ', Δ), les droites (AA') et (B_1B') sont parallèles, de même que les droites (AB_1) et (A'B'). Le quadrilatère AA'B'B1 est donc un parallélogramme et il en résulte que : $\overline{AB_1} = \overline{A'B'}$ **(2)** (en supposant qu'on a la même orientation sur les droites Δ et Δ').
De la même façon, on a aussi : $\overline{AC_1} = \overline{A'C'}$ **(3)**. En comparant (1), (2) et (3), il vient :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

6.4 Réciproque du théorème de THALES dans l'espace

<u>THEOREME 11</u> : *Soit Δ et Δ' deux droites distinctes et non coplanaires de l'espace, A, B et C trois points distincts de Δ et A', B' et C' trois points distincts de Δ' , vérifiant :* $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont contenues dans trois plans parallèles.



<u>Démonstration</u> :

Soit δ la droite issue de A et parallèle à la droite (BB'). Les droite (AA') et (δ) sont distinctes, car Δ et Δ' ne sont pas coplanaires. Désignons par P le plan déterminé par (AA') et (δ) . Désignons par Q le plan passant par B et parallèle à (P). Comme (BB') // (δ), le plan Q contient la droite (BB').

Soit enfin R le plan passant par C et parallèle à (P). Comme, par hypothèse les trois points A, B et C

sont distincts, les trois plans P, Q et R sont strictement parallèles. D'où, $C_1 \equiv C'$ et par suite $(CC') \subset R$. Il s'ensuit que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont contenues respectivement dans P, Q et R qui sont strictement parallèles.

7. VECTEURS DE L'ESPACE

7. 1 Généralités

Les définitions et propriétés des vecteurs du plan s'étendent à l'espace. Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$

- Lorsque A ≠ B, la direction de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) , le sens $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la longueur ou norme de $\overrightarrow{AB}$, notée AB , est la distance AB .

Lorsque A = B, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ...
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

L'égalité de deux vecteurs est définie de la même façon que dans le plan. Rappelons que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

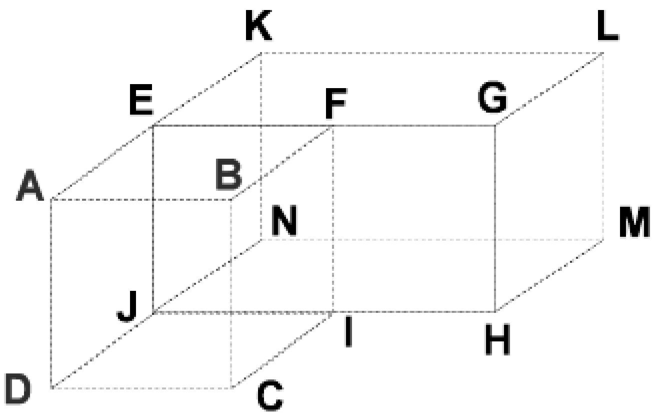
signifie l'une quelconque des deux propriétés suivantes :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- ABCD est un parallélogramme, c'est à dire [AC] et [BD] ont même milieu.

(*Si A, B, C et D sont alignés, on dit que ABCD est un parallélogramme aplati*).

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan. L'addition de deux vecteurs de l'espace, ainsi que la multiplication d'un vecteur de l'espace par un réel sont définies de la même manière et ont les mêmes propriétés que dans le plan.

Dans les exemples qui suivent, on se basera sur la figure ci-dessous :



ABCDEFIJ est un cube
EGHJKLMN est un
parallélépipède rectangle tel que
HM = CI et JH = 2JI

•RELATION DE CHASLES

Par exemple, sur la figure ci-dessus, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DG}$

• REGLE DU PARALLELOGRAMME

Toujours avec la figure précédente, on a :

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{EL}$; $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DF}$

• OPPOSE D'UN VECTEUR

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{LG} = \vec{0}$

• MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL

Pour tous réels a et b et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$; $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$; $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$; $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, etc…

• Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits colinéaires.

Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

• Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Sur la figure précédente, on a par exemple, $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB}$.

• Dire que les points A, B et C (distincts) sont alignés revient à dire qu'il existe k ∈ IR tel que

$$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$$

Exemple : Sur la figure précédente, montrons que les points D, I et M sont alignés. En effet, on a :

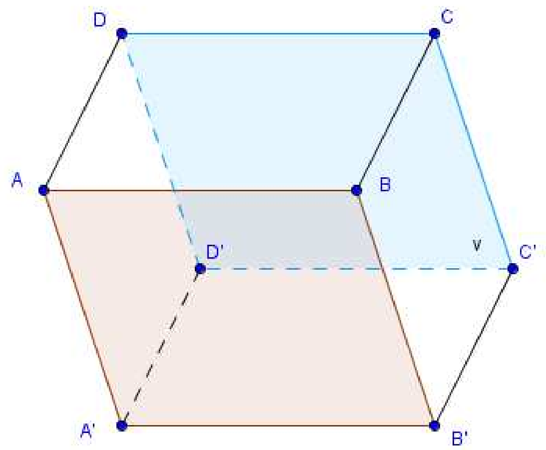
$$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{DN}\right)$$

Soit M' le symétrique de M par rapport à H. Il est clair que DNMM' est un parallélogramme et que

$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{DM'}$$

Il vient alors : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DM'} + \overrightarrow{DN}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires et il en résulte l'alignement des points D, I et M.

Exercice 1 : *Soit le parallélépipède ABCDA'B'C'D' ci-dessous.*



1) *Construire les représentants d'origine A des vecteurs suivants :*

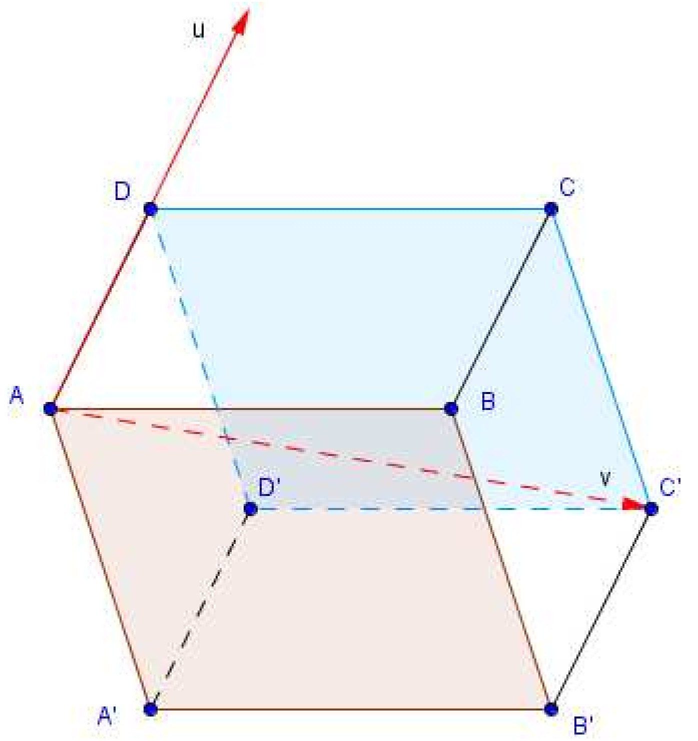
a) $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D}$ ***b)*** $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}$

2) *Soit K le point tel que $\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{A'D'}$. Montrer que la droite (BK) perce le plan DCC'D' en I centre du parallélogramme DCC'D'.*

Solution :

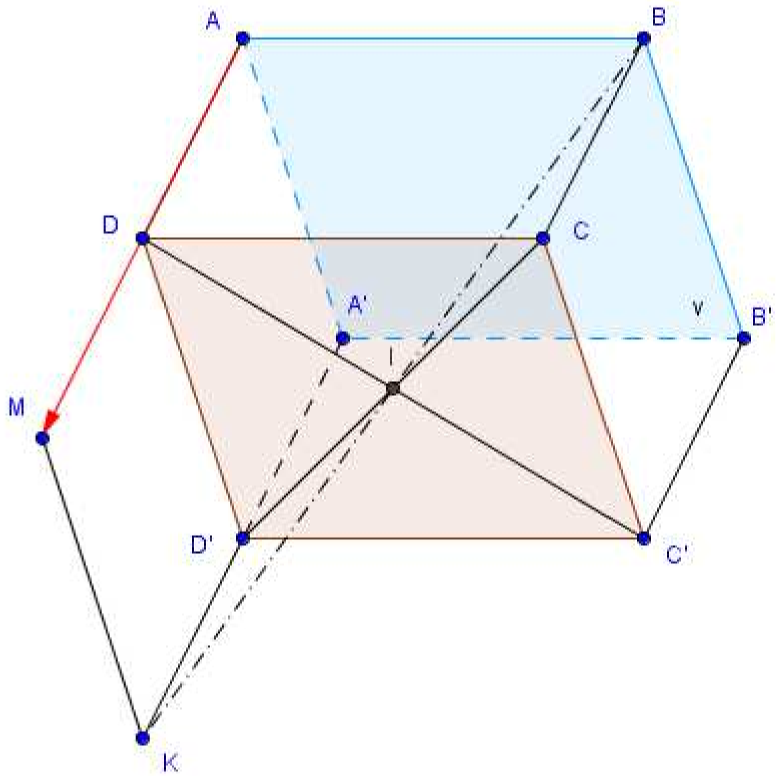
1) a) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}$, donc $\vec{u} = 2\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, donc $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}$, soit $\vec{v} = \overrightarrow{AC'}$.



2) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} = 2\,\overrightarrow{CI} + 2\,\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{D'K}\right) = 2\,\overrightarrow{IK}$.

Donc B, I et K sont alignés.



BARYCENTRES

Les définitions et propriétés concernant le barycentre dans le plan se généralisent à l'espace.

- Comme dans le plan le barycentre reste inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients, par un même nombre non nul.
- La règle du barycentre partiel reste vraie.
- Le barycentre de (A ; a) , (B ; b) appartient à la droite (AB) .

<u>**THEOREME 12**</u> : *Soit G le barycentre du* système *de points pondérés* $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ *(avec* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$*). Alors les points G, A, B et C sont coplanaires.*

<u>Démonstration</u> : Considérons les sommes $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ et $\alpha + \gamma$. Elles ne sont pas toutes trois nulles, sans quoi, leur somme $2(\alpha + \beta + \gamma)$ le serait également, d'où : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (absurde).
Supposons que, par exemple, $\beta + \gamma \neq 0$ et soit G' le barycentre de $\{ (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$. Alors, d'après la propriété d'associativité, G est aussi le barycentre de $\{ (A, \alpha); (G', \beta + \gamma)\}$. Or $G' \in (BC)$ et $G \in (AG')$.

Donc G ∈ (ABC).

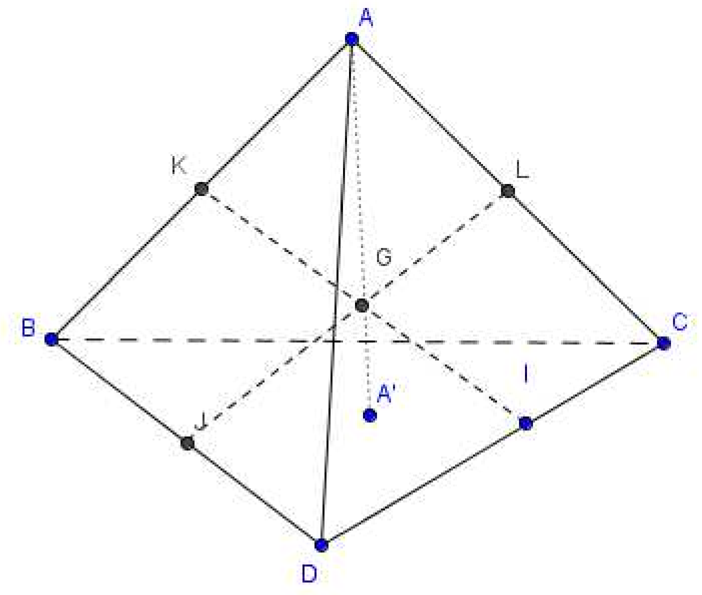
Exercice 2 : *Soit un tétraèdre ABCD et A', B', C' et D' les centres de gravité respectifs des faces opposées aux sommets A, B, C et D.*
1°) *Montrer que les plans définis par 2 sommets et le milieu de l'arête opposée ont un point commun.*
2°) *Montrer que les segments joignant les milieux de 2 arêtes opposées sont concourantes en leur milieu.*
3°) *Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.*

Solution : 1°) Soit G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD. Considérons le plan P_1 défini par (AB) et le milieu I de [CD] et le plan P_2 le plan défini par (AD) et le milieu J de [BC]. On a par associativité :

G = bar {(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) ; (D, 1)} = bar {(A, 1) ; (B, 1) ; (I, 2) }.

D'après le théorème 12, G appartient au plan (ABI) = P_1. On a aussi G = bar {(A, 1) ; (D, 1) ; (J, 2)}. D'où G ∈ P_2.

2°) Toujours d'après l'associativité, en désignant par K et L les milieux respectifs de [AB] et AD], on a : G = bar {(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) ; (D, 1)} = bar {(J, 2) ; (L, 2)} = bar {(K, 2) ; (I, 2)}. Donc G est le milieu commun de [JL] et [IK].



3°) G = bar {(A, 1) ; (A', 3)} = bar {(B, 1) ; (B', 3)} = bar {(C, 1) ; (C', 3)} = bar {(D, 1) ; (D', 3)} (associativité). Donc (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.

D'autre part, pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA'} = 4\,\overrightarrow{MG}$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$$

Ainsi G est situé sur chaque segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée aux $\frac{3}{4}$ à partir de ce sommet.

7. 2 Caractérisation vectorielle des droites et plans de l'espace

A) Droites

Soit D une droite de l'espace. On appelle vecteurs directeurs de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d .

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. (A ; $\vec{u}$) représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.

Remarques:

- La droite (A ; $\vec{u}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires,

c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant : $\overrightarrow{AM}$ = k $\vec{u}$.

- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe k ∈ ℝ* tel que $\overrightarrow{AB}$ = k $\overrightarrow{CD}$.

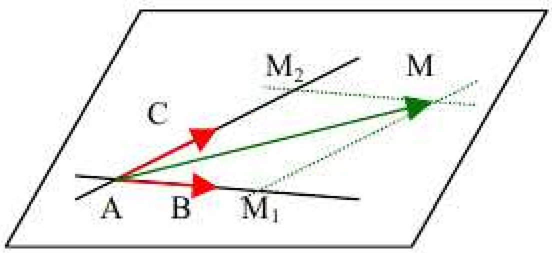
B) Plans

PLAN DETERMINE PAR TROIS POINTS

THEOREME 13 : *Soit A, B et C trois points non alignés.*
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

Démonstration :



On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Le repère (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est un repère du plan (ABC) . Ainsi, pour tout point M du plan, il existe un

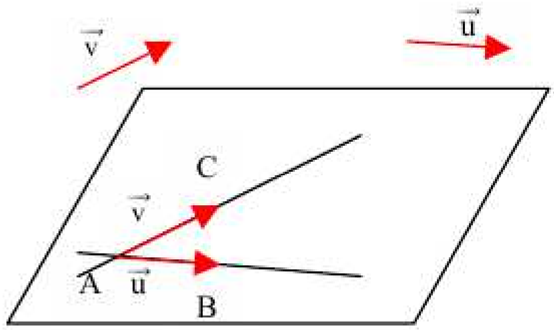
unique couple de réels (x , y) tels que $\overrightarrow{AM}$ = x $\vec{u}$ + y $\vec{v}$

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel qu'il existe deux réels x et y vérifiant

$\overrightarrow{AM}$ = x $\vec{u}$ + y $\vec{v}$ On note M_1 et M_2 les points définis par $\overrightarrow{AM_1}$ = x $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ = y $\overrightarrow{AC}$.
L'égalité $\overrightarrow{AM_1}$ = x $\overrightarrow{AB}$ prouve que M_1 est sur (AB) , donc dans le plan (ABC). De même M_2 est sur
(AC), donc dans le plan (ABC) .
D'autre part on a $\overrightarrow{AM}$ = $\overrightarrow{AM_1}$ + $\overrightarrow{AM_2}$, donc AM_1MM_2 est un parallélogramme.
Les sommets A, M_1 et M_2 sont dans le plan (ABC), il en est donc de même pour le quatrième sommet M .
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

PLAN DEFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINEAIRES

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB}$ = $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ = $\vec{v}$.
On note (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)ce plan. (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux
réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}$ = x $\vec{u}$ + y $\vec{v}$.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) ou encore que le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque : Si $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\overrightarrow{v'}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est le même que le plan (A ; $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$)
Exemple : Sur la figure introduite au § 7.1, Le plan (A ; $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{KL}$) est le même que le plan (A ; $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$)

7. 3 Vecteurs coplanaires

Définition : Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, … , de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'un point O quelconque et les points A, B ,C, … , définis par $\overrightarrow{OA}$ = $\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}$ = $\vec{v}$, et $\overrightarrow{OC}$ = $\vec{w}$, … , sont coplanaires.
Cette définition ne dépend pas du point O choisi.

Remarques :
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exemple : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ de la figure du § 7.1 sont coplanaires.
En effet, à partir du point D traçons les représentants $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DC}$ des vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ respectivement. Les points D, J, M et C étant coplanaires, il en est de même des vecteurs considérés.

THEOREME 14 : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Démonstration : Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB).
Par définition, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire C ∈ (OAB), ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$.

N.B. Dans ce cas, on dit que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

7. 4 Caractérisation vectorielle du parallélisme

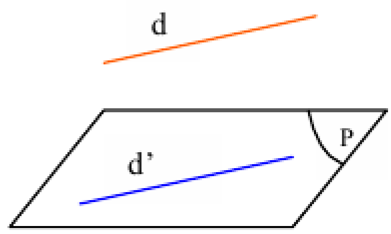
A) DEUX DROITES

THEOREME 15

Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

B) UNE DROITE ET UN PLAN

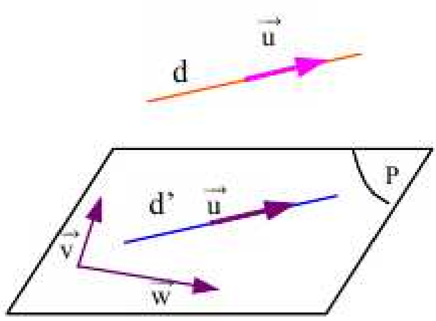
Rappel : Une droite d est parallèle à un plan P si et seulement si d est parallèle à une droite d' contenue dans P .



La forme vectorielle de ce résultat est :

THEOREME 16

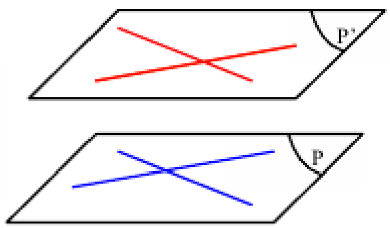
Une droite d , de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, ou encore que $\vec{u}$ est une combinaison *linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*



C) DEUX PLANS

Rappel :

Deux plans P et P' sont parallèles si et seulement si l'un des plans contient deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.

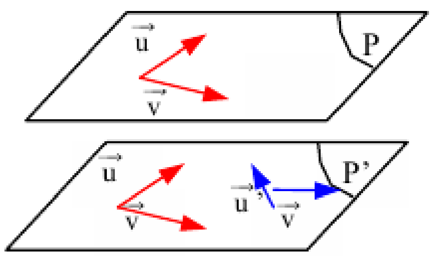


La forme vectorielle de ce résultat est :

THEOREME 17

Un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est parallèle à un plan P' de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont coplanaires.

N.B. Cela revient encore à dire que $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



8. Bases, Repères et coordonnées

8.1 Bases et repères

Etant donnés trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ **non coplanaires** et un point O de l'espace, on dit que

- le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace.
- Le quadruplet $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace.

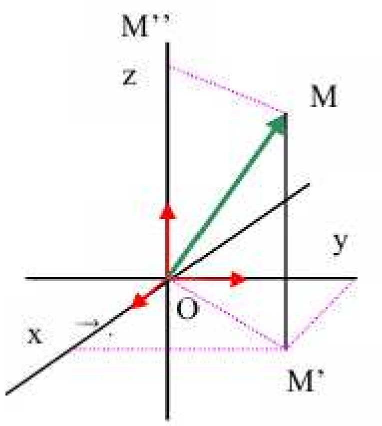
8.2 Coordonnées d'un point, d'un vecteur

THEOREME 18 :Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace .
A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

On dit que (x ; y ; z) sont les **coordonnées du point M** dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou que (x ; y ; z) sont les **coordonnées du vecteur** $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
x , y et z sont respectivement **l'abscisse** , **l'ordonnée** et la **cote** du point M .

Démonstration :

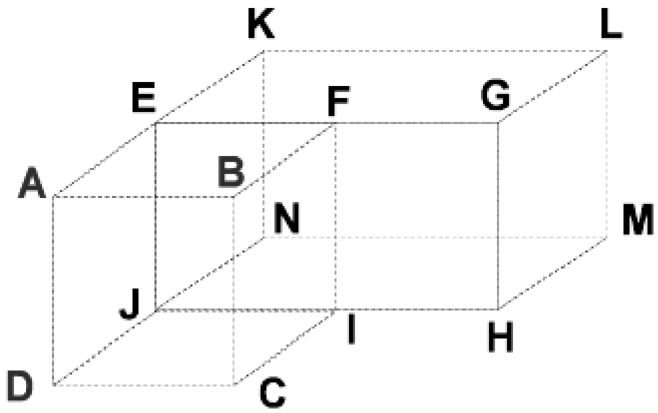


La parallèle menée par M à la droite $(O ; \vec{k})$ coupe le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en M' . La parallèle menée par M à la droite (OM') coupe la droite $(O ; \vec{k})$ en M'' (en effet les droites $(O ; \vec{k})$ et (OM') sont dans un même plan, et dans ce plan $(O ; \vec{k})$ et (OM') sont sécantes) .
Le quadrilatère OM'MM'' est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$.
On note (x ; y) les coordonnées de M' dans le plan de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on a donc $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
D'autre part, $\overrightarrow{OM''}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires ; il existe donc un réel z tel que $\overrightarrow{OM''} = z\,\vec{k}$.
On en déduit que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. (1)
Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons qu'il existe un autre triplet (x' ; y' ; z') de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$. Par différence avec l'écriture (1) , on aurait :

$$(x - x')\,\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$$

Si par exemple x – x' ≠ 0, on aurait $\vec{\imath} = \frac{y'-y}{x-x'}\vec{\jmath} + \frac{z'-z}{x-x'}\vec{k}$. $\vec{\imath}$ serait donc une combinaison linéaire de $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ce qui contredit le fait que $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires (puisqu'ils forment une base).

Exemple : En se référant à la figure de l'exemple 7.1, considérons le repère $(J; \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JE})$



On a :

• $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE}$, donc A a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) dans le repère $(J; \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JE})$

• $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JE}$ donc B a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) dans le repère $(J; \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JE})$

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ signifie que le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) dans le repère $((O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Propriétés :

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}$ (a , b , c) et $\vec{v}$ (a' , b' , c') deux vecteurs , A (x , y , z) et B (x' , y' , z') deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur k $\vec{u}$ a pour coordonnées (ka, kb, kc)

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (a + a' ; b + b' ; c + c')

- $\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} \mathrm{a} = \mathrm{a}' \\ \mathrm{b} = \mathrm{b}' \\ \mathrm{c} = \mathrm{c}' \end{cases}$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x' – x ; y' – y ; z' – z)

- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{\mathrm{x}+\mathrm{x}'}{2}; \frac{\mathrm{y}+\mathrm{y}'}{2}; \frac{\mathrm{z}+\mathrm{z}'}{2}\right)$

- Le barycentre de (A ; α) , (B ; β) a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha a+\beta a'}{\alpha+\beta}; \frac{\alpha b+\beta b'}{\alpha+\beta}; \frac{\alpha c+\beta c'}{\alpha+\beta};\right)$

8.3 Systèmes d'équations paramétriques de droites et plans

L'espace est rapporté au repère (O; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).
Soit D une droite passant par un point A (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (a, b, c).
M (x ; y ; z) est un point de D si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}$ = t$\vec{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique ou système d'équations paramétriques de la droite D.

Remarques :
1. Un point M est sur D si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées de M vérifie le
système d'équations paramétriques de D.

2. Réciproquement, si la droite Δ admet comme équation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

cette droite passe par le point M_0 ($_0, y_0, z_0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ (α, β, γ).

3. Pour obtenir une représentation paramétrique du segment [AB], il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre t ∈ [0 ; 1].

4. Pour obtenir une représentation paramétrique de la demi-droite [AB), il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre t ∈ [0 ; +∞[.

Soit P le plan passant par le point A(x_0, y_0, z_0) et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ (a, b, c) et $\vec{v}$ (a', b', c').

Un point M(x, y, z) appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Il existe donc des réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM}$ = t $\vec{u}$ + t' $\vec{v}$. Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} x - x_0 = ta + ta' \\ y - y_0 = tb + tb' \\ z - z_0 = tc + tc' \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} x = x_0 + ta + ta' \\ y = y_0 + tb + tb' \\ z = z_0 + tc + tc' \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique ou système d'équations paramétriques du plan P.

Exercice : *Soit P le plan défini par la représentation paramétrique :* $\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu - 1 \\ y = 4\lambda - \mu + 1 \\ z = -2\lambda + \mu - 4 \end{cases}$ *et D la droite définie par la représentation paramétrique :* $\begin{cases} x = -\lambda' + 3 \\ y = \lambda' + 7 \\ z = 2\lambda' + 4 \end{cases}$*.*

1) Etudier l'intersection de P et D.

2) Donner un système d'équations paramétrique du plan P' parallèle à P et passant par le point de D d'ordonnée 5.

Solution : 1) Soit M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ∈ P ∩ D. Il existe des réels λ, λ' et μ tels que :

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu - 1 = -\lambda' + 3 \ \ (1) \\ 4\lambda - \mu + 1 = \lambda' + 7 \ \ (2) \\ -2\lambda + \mu - 4 = 2\lambda' + 4 \ \ (3) \end{cases} \quad \text{(S)}$$

Les équations (1), (2) et (3) entraînent respectivement que :

$$\begin{cases} \lambda' = -2\lambda - 3\mu + 4 \ \ (1) \\ \lambda' = 4\lambda - \mu - 6 \ \ (2) \\ \lambda' = \dfrac{-2\lambda + \mu - 8}{2} \ \ (3) \end{cases}$$

D'où le système $\begin{cases} -2\lambda - 3\mu + 4 = 4\lambda - \mu - 6 \\ 4\lambda - \mu - 6 = \frac{2\lambda + \mu - 8}{2} \end{cases}$ dont la résolution, aisée et laissée au lecteur, fournit les valeurs λ = 1 et μ = 2. On en déduit aussi que λ' = — 4. En fait, on aurait pu considérer (S) comme un système de 3 équations à 3 inconnues λ, λ' et μ.

On obtient donc un point d'intersection.

P ∩ D ={A} avec A$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ (remplacer dans l'une ou l'autre des représentations paramétriques de D ou P les valeurs de λ, λ' et μ).

2) Soit B le point de D d'ordonnée 5. B vérifie $\begin{cases} x = -\lambda' + 3 \\ 5 = \lambda' + 7 \\ z = 2\lambda' + 4 \end{cases}$ d'où λ' = −2, x = 5 et z = 0.

Le plan P' a les mêmes vecteurs directeurs que P c'est-à-dire, par exemple, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un point P de coordonnées (x, y, z) appartient à P' si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{BM}$ = $\alpha\vec{u}$ + $\beta\vec{v}$, ou encore $\begin{cases} x - 5 = 2\alpha + 3\beta \\ y - 5 = 4\alpha - \beta \\ z = -2\alpha + \beta \end{cases}$.

8.4 Systèmes d'équations cartésiennes d'une droite

Soit un point A (x_A, y_A, z_A) et un vecteur $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ non nul . Supposons qu'aucune des coordonnées de $\vec{v}$ ne soit nulle, c'est-à-dire $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$.

Un point M(x, y, z) appartient à la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui se traduit par l'existence d'un réel t tel que les égalités :

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{x_A} = \mathrm{t}\alpha \\ \mathrm{y} - \mathrm{y_A} = \mathrm{t}\beta \\ \mathrm{z} - \mathrm{z_A} = \mathrm{t}\gamma \end{cases}$$

soient simultanément vérifiées. Les réels α, β et γ étant tous non nuls, ces égalités s'écrivent aussi :

$\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$ (= t).

On dit que l'on a un **système d'équations cartésiennes de D**.

Exercice : 1)*Définir géométriquement la droite D d'équations :* $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

2) Ecrire les équations de la droite D' passant par A(3 , 5, −2) et parallèle à D.

3) Déterminer les intersections de D avec les plans xOy, yOz et zOx.

Réponses : 1) D est la droite passant par A(3, 2, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

2) Les équations de D' sont : $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{3}$

3) D ∩ (xOy) = {E} avec E $\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}$. D ∩ (yOz) = {F} avec F $\begin{pmatrix}0\\-4\\-8\end{pmatrix}$. D ∩ (zOx) = {G} avec G $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

8.5 Equations cartésiennes d'un plan

L'espace étant muni d'un repère (O; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), soit π l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation

(1) ax + by +cz + d = 0 avec (a, b, c) ≠ (0, 0, 0).

Supposonspar exemple a ≠ 0. Alors (1) entraîne les égalités :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} \\ y = y + 0z + 0 \\ z = 0y + z + 0 \end{cases}$$

On reconnaît là un système d'équations paramétriques du plan P passant par A$\begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\0\\0\end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$ (prendre y et z comme paramètres). Plus précisément, on vient de montrer que π est inclus dans P.

Réciproquement, soit M un point de P, c'est-à-dire dont les coordonnées ont la forme du système ci-dessus. Alors, on a :

ax + by + cz + d = a$\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}\right)$ + by + cz = —by −cz −d + by + cz + d = 0.

Donc M vérifie l'équation (1).

L'équation ax + by +cz + d = 0 (avec (a, b, c) ≠ (0, 0, 0)) est appelée **équation cartésienne du plan P** relativement au repère (O; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

Exercice : *Démontrer que les ensembles définis par les équations suivantes sont des plans dont on déterminera un repère :*

a) 3x – y – z = 1 b) 2x —3y = z c) 3x – 1 = 0 d) z = 1

Réponses : **a)** Les coefficients 3, − 1 et − 1 étant non tous nuls (d'ailleurs aucun d'eux n'est nul), la relation 3x – y – z = 1 définit, d'après ce qui précède, l'équation d'un plan. Pour en avoir un repère, écrivons le sous forme paramétrique en s'inspirant de la démarche précédente :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \\ y = y + 0z + 0 \\ z = 0y + z + 0 \end{cases}$$

Ce plan passe donc par A$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Plan passant par O$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Plan passant par A$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

EXERCICES ET PROBLEMES

REGLES D'INCIDENCE

EXERCICE 1

Soient deux plans distincts $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, ayant au moins un point commun A. Le plan $\mathscr{P}$ définit deux demi-espaces $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Soit $\mathscr{D}'$ une droite de $\mathscr{P}'$ coupant P en A, B un point de $\mathscr{D}'$ dans $\mathscr{E}_1$, C un pont de D′ dans $\mathscr{E}_2$. Soit D un point de $\mathscr{P}'$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}'$.

1°) Si D appartient à $\mathscr{P}$, que peut-on dire de l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

2°) Si D n'appartient pas à $\mathscr{P}$, D appartient à l'un des demi-espaces, $\mathscr{E}_1$ par exemple. Qu'en résulte-t-il pour le segment [CD] ?

3°) Déduire des questions 1° et 2° que deux plans distincts ayant au moins un point commun sont sécants.

EXERCICE 2

Soit un quadrilatère plan ABCD, tel que (AB) et (DC), (AD) et (BC), (AC) et (BD) soient sécants respectivement en I, J et K.
Soit S un point non situé dans le plan de ABCD. On trace les droites (SA), (SB), (SC) et (SD).
1°) Combien ces droites, associées deux à deux, déterminent-elles de plans ?
2°) Construire les intersections de ces plans pris deux à deux.

EXERCICE 3
On donne deux droites sécantes D et D ′, deux points A et B de D, deux points A ′ et B ′ de D ′.
Démontrer que les droites (AB ′) et (BA ′) sont sécantes ou parallèles.

EXERCICE 4
Soit une droite $\mathscr{D}$ sécante à un plan $\mathscr{P}$ en O, et un point A non situé sur $\mathscr{D}$ et sur $\mathscr{P}$
Un point M décrit la droite $\mathscr{D}$ et la droite (AM) coupe en général $\mathscr{P}$ en un point I.
1°) Quel est l'ensemble des droites (AM) ?
Démontrer que tous les points I appartiennent à une droite fixée Δ.
2°) Tout point de Δ est-il un point I ?

EXERCICE 5
Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en O. Une droite Δ est sécante à $\mathscr{P}$ en A, A n'appartenant pas à $\mathscr{D} \cup \mathscr{D}'$. Soit M un point de Δ distinct de A.
1°) Déterminer l'intersection Δ ' des plans (M, $\mathscr{D}$) et (M, $\mathscr{D}'$).
2°) Lorsque M décrit Δ, démontrer que toutes les droites Δ ' sont incluses dans un plan fixe.

EXERCICE 6
Soit un tétraèdre ABCD et β, γ, δ les milieux respectifs de [CD], [DB], [BC].
1°) Démontrer que (BC) n'est pas dans le plan (ADδ).
2°) Démontrer que les trois plans (ADδ), (ABβ), (ACγ) ont une droite commune que l'on précisera.

EXERCICE 7
Démontrer que trois droites, deux à deux sécantes, et non coplanaires ont un point commun.
Application :

Soit un tétraèdre ABCD, A', B', C', D' les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.
1°) Soit β le milieu de [DC]. Démontrer que (AA'), (BB') sont dans le plan (ABβ).
2°) En déduire que (AA') et (BB') sont concourantes en un point G.
3°) Démontrer que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.

<u>EXERCICE 8</u>
On donne trois points non alignés A, B et C. Soit D un point de la droite (AB) et E un point de la droite (AC). Démontrer que les droites (BC) et (DE) sont sécantes ou parallèles.

<u>EXERCICE 9</u>
Soient dans un plan P deux points B et C.
Soit D un point n'appartenant pas au plan P.
1°) Démontrer que les points B, C, D ne sont pas alignés ; en déduire qu'ils déterminent un plan.
2°) Soit E un point du plan (BCD).On suppose que la droite (DE) coupe le plan P en F. Démontrer que les points B, C, F sont alignés.

<u>EXERCICE 10</u>
Soit un tétraèdre ABCD et trois points M, N, P, appartenant respectivement aux arêtes (AB), (AC), (AD) de ce tétraèdre. On suppose que les droites (MN), (NP), (MP) percent le plan (BCD) respectivement en P′, M′, N′.
Démontrer que que les points M′, N′, P′ appartiennent à la fois au plan (MNP) et au plan (BCD).
En déduire que M′, N′, P′ sont alignés.

<u>EXERCICE 11</u>
Soit un plan $\mathscr{P}$, A et B deux points distincts non situés dans $\mathscr{P}$. La droite (AB) perce $\mathscr{P}$ en I. Soit M un point de l'espace distinct de A et B, et A' et B' les points d'intersection de $\mathscr{P}$ et des droites (MA) et (MB) lorsqu'ils existent.
Démontrer que A', B' et I sont alignés.

<u>EXERCICE 12</u>
Soit Ox, Oy, Oz trois demi-droites concourantes non coplanaires. On marque deux points A et A' sur Ox, B et B' sur Oy, C et C' sur Oz.
1°) Démontrer qu'en général les droites (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A'), (AB) et (A'B') se coupent respectivement en α, β, γ.
2°) Dans le cas où α, β, γ existent, démontrer que ces points sont alignés.

EXERCICE 13

Deux plans distincts $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ se coupent suivant la droite $\mathscr{D}_1$.
Soit $\mathscr{D}_2$ une droite de $\mathscr{P}$ non parallèle à $\mathscr{D}_1$ et A un point de $\mathscr{Q}$ non situé sur $\mathscr{D}_1$.
Démontrer que le plan (A, $\mathscr{D}_2$) coupe $\mathscr{Q}$ suivant une droite $\mathscr{D}_3$ concourante avec $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

EXERCICE 14

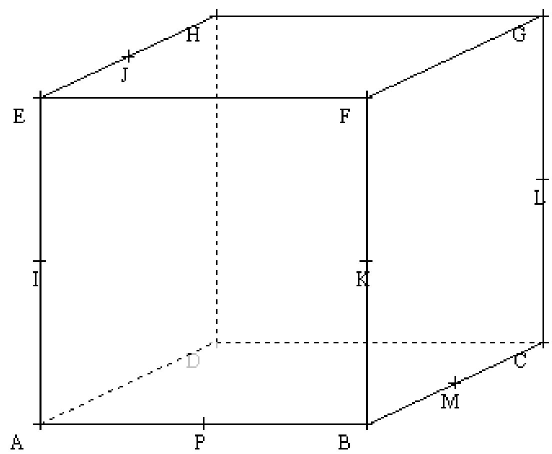
Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ se coupent suivant la droite $\mathscr{D}$.
Soit A un point de $\mathscr{P}$ et une droite (BC) de $\mathscr{Q}$.
Déterminer l'intersection des plans (ABC) et $\mathscr{P}$.

EXERCICE 15

Dans le cube ci-dessous, les points I, J, K, L, M, P sont des milieux d'arêtes. Dans chaque cas, préciser la position respective des deux droites :

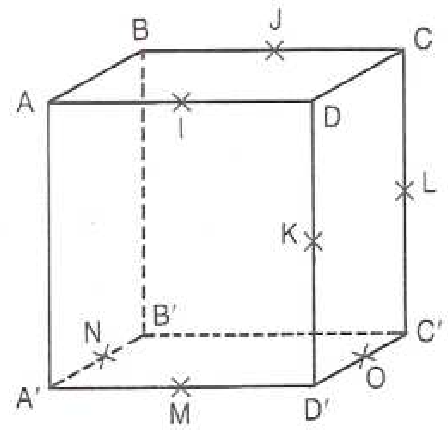
a) (AK) et (BG) ;
b) (IJ) et (BG) ;
c) (IP) et (LM).

Sont-elles strictement parallèles ? Sont-elles sécantes ? Sont-elles coplanaires ?



EXERCICE 16 :

On considère un cube. Les points indiqués sont les sommets et les milieux de certaines arêtes



Dire si les droites suivantes sont sécantes, parallèles ou non coplanaires :

a) (IJ) et (D'C') ; **b)** (MK) et (B'C) ; **c)** (AB) et (KC) **d)** (AJ) et (KC)

e) (A'I) et (B'J) ; **f)** (MD) et B'J) ; **g)** (AM) et (CO).

EXERCICE 17 : Configuration de Desargues

Soient trois droites non coplanaires D_1, D_2 et D_3 concourantes en O.
Soient deux points A et A′ de D_1, deux points B et B′ de D_2, deux points C et C ′ de D_3.
1°) Démontrer que les droites (AB) et (A′ B′) sont coplanaires. Etablir des résultats analogues pour les droites (BC) et (B′C′), pour les droites (CA) et (C′A′).
2°) On suppose que les droites (BC) et (B′C′) se coupent en A_1, que les droites (CA) et (C′A′) se coupent en B_1, que les droites (AB) et (A′B′) se coupent en C_1.
Démontrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

EXERCICE 18 : Configuration des triangles homologiques

Soient Pet Q deux plans sécants et D leur droite d'intersection. Soient ABC et A′B′C′ deux triangles respectivement contenus dans les plans P et Q. On suppose que les triangles ABC et A′B′C′ sont tels que (BC) et (B′C′) se coupent en A_1, (CA) et (C′A′) se coupent en B_1, (AB) et (A′B′) se coupent en C_1.
(Deux triangles vérifiant ces propriétés sont dits homologiques).
1°) Etablir que A_1, B_1 et C_1 sont alignés et préciser la droite contenant A_1, B_1 et C_1.
2°) On suppose que les droites (BB′) et (CC′) sont sécantes en O.
Démontrer que le point O appartient au plan (ACA ′) et au plan (ABA ′) ; en déduire que O appartient à la droite (AA ′), donc que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes.

EXERCICE 19

On donne un plan $\mathscr{P}$ et une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à $\mathscr{P}$.
A chaque plan $\mathscr{Q}$ non parallèle à $\mathscr{P}$, on associe la droite $\mathscr{D}$ ', intersection du plan $\mathscr{Q}$ et du plan $\mathscr{P}$. Démontrer que toutes les droites $\mathscr{D}$ ' passent par un point fixe.

EXERCICE 20

Soit un plan $\mathscr{P}$ et trois points A, B, C non alignés et n'appartenant pas à $\mathscr{P}$
On suppose que les droites (BC), (CA) et (AB) percent respectivement le plan en A′, B ′ et C ′.
1°) Démontrer que A ′, B ′, C ′ sont alignés.
2°) Soit M un point de l'espace tel que les droites (MA), (MB), (MC) percent respectivement $\mathscr{P}$ en A_1, B_1 et C_1.
Démontrer que les droites (A_1B_1), (B_1C_1), (C_1A_1) passent chacune passent chacune par un point qui ne dépend pas du point M choisi.

EXERCICE 21

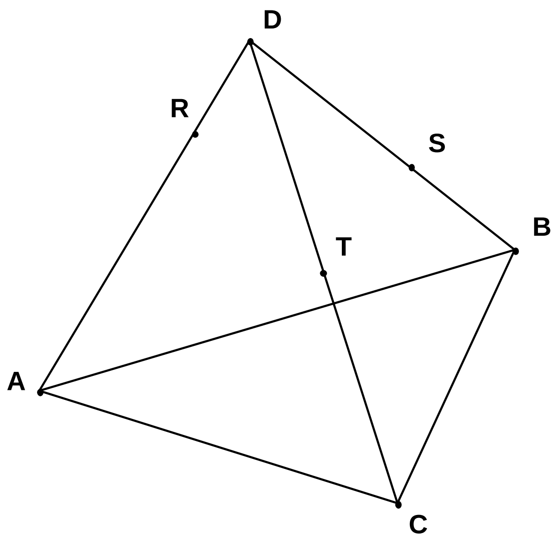
Soit un tétraèdre ABCD ; E, F et G trois points pris respectivement sur] AB [,] AC [et] BD [. On suppose que (EF) n'est pas parallèle à (BC) et que (FG) n'est pas parallèle à (CD). Construire :
1°) l'intersection des plans (EFG) et (BCD) ;
2°) l'intersection de chacune des droites (AD) et (CD) avec le plan (EFG).

EXERCICE 22

Soit un tétraèdre ABCD. une droite Δ du plan (BCD) rencontre les côtés du triangle BCD en trois points distincts D', B', C'. Soit I un point de] AC [; I détermine avec Δ un plan $\mathscr{P}$.
1°) Dessiner l'intersection de $\mathscr{P}$ et du plan (ABC), puis l'intersection de $\mathscr{P}$ et du plan (ACD).
2°) Construire les points d'intersection de (AB) et (AD) avec $\mathscr{P}$, en déduire l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABD).

EXERCICE 23

Les trois points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$. Le point D n'appartient pas à $\mathscr{P}$.
Le point R appartient à [AD] ; le point S appartient à [BD] ; le point T appartient à [CD].
Dessiner l'intersection du plan contenant R, S, et T avec le plan $\mathscr{P}$ et expliquer la construction en indiquant les théorèmes que l'on a utilisés.



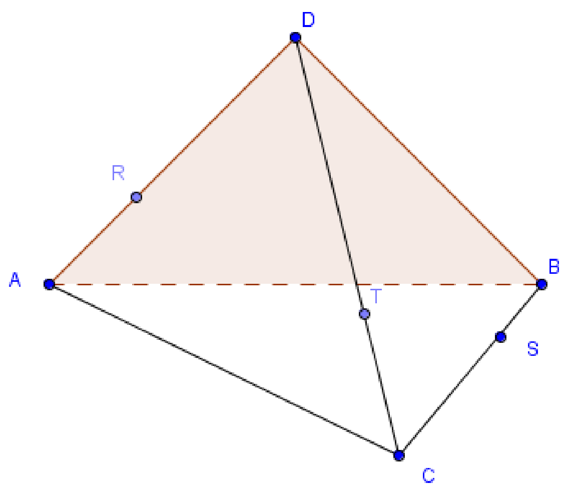
EXERCICE 24

Les 3 points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$. Le point D n'appartient pas à $\mathscr{P}$.
Le point R appartient à [AD] ; le point S appartient à [BC] ; le point T appartient à[CD] .

a) Dessiner l'intersection du plan contenant R, S et T avec le plan $\mathscr{P}$.

b) Dessiner l'intersection du plan contenant R, S et T avec le plan contenant A, B et D.

c) Tracer en couleur l'intersection du plan contenant R, S et T avec le tétraèdre ABCD, c'est -à- dire avec chacun **des** triangles ABC, DAB , DAC et DBC .



PARALLELISME

EXERCICE 25

Soit un tétraèdre ABCD. On désigne par I , J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [AD].

1°) En raisonnant dans le plan (BCD), établir que les droites (JK) et (BD) sont parallèles.

2°) Démontrer que les droites (JK) et (IL) sont parallèles, ainsi que les droites (IK) et (LJ).

3°) Démontrer que I, J, K, L sont coplanaires, et préciser la nature du quadrilatère IJKL.

4°) Démontrer que les segments [IJ] et [KL] ont le même milieu noté O.

5°) Soient M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD]. Démontrer que O est le milieu de [MN].

EXERCICE 26

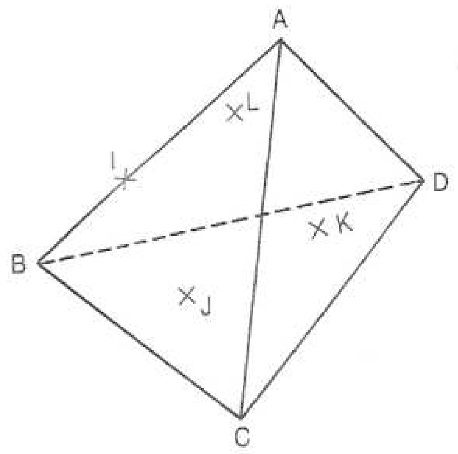
On donne deux droites parallèles distinctes D et D′. Soit O un point n'appartenant pas au plan déterminé par les droites D et D′. On désigne par P le plan contenant le point O et la droite D, par P′ le plan contenant le point O et la droite D′.
Démontrer que la droite d'intersection des plans P et P′ est parallèle à D et à D′.

EXERCICE 27

Soit un tétraèdre ABCD et M un point de l'arête [AD]. On désigne par Q le plan contenant M et parallèle aux droites (AB) et (CD).
Etudier la nature de l'intersection du plan Q et du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 28 :

On considère le tétraèdre ABCD. I appartient à [AB]. J appartient au plan ABC. K appartient au plan ACD. L appartient au plan ABD.



1°) Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan BCD
2°) On veut déterminer l'intersection de la droite (IK) et du plan BCD.
Soit M un point de (AC). Déterminer l'intersection des plans IMK et BCD
Déterminer l'intersection de (IK) et du plan BCD
3°) a) Construire la parallèle à (CD) passant par K
b) Construire la parallèle à (BD) passant par K et déterminer son intersection avec le plan ABC.

EXERCICE 29

Deux plans P et P′ sécants suivant une droite Δ sont parallèles à une droite D. Soit D′ la parallèle à D passant par un point A de Δ.
1°) Démontrer que $D' \subset P$ et que $D' \subset P'$. En déduire que $D' = \Delta$.
2°) Conclure par une propriété.

EXERCICE 30

Soit un tétraèdre ABCD et M un point de]A, B[. On mène par M le plan parallèle à (AC) et (BD), qui coupe (BC) en N, (CD) en P, (DA) en Q. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

EXERCICE 31

On donne deux plans strictement parallèles P et P′. Soit trois points non alignés A, B, C de P et trois points non alignés A′, B′, C′ de P′. tels que les droites (BC) et (B′C′) ne soient pas parallèles.
Construire l'intersection des plans (AB′C′) et (A′BC).

EXERCICE 32

Soient D et D' deux droites strictement parallèles et A un point n'appartenant pas au plan déterminé par D et D'. Quelle est l'intersection des plans (A, D) et (A, D') ?

EXERCICE 33
Soit un plan P et une droite (AB) strictement parallèle à P.
M et N étant deux points de P, que peut-on dire des droites d'intersection Δ et Δ' des plans (ABM) et (ABN) avec P ? Peut-on avoir $\Delta = \Delta'$?

EXERCICE 34
Soient P et P' deux plans parallèles. Une droite D perce P en A et P' en A'.
Soit une droite Δ, parallèle à D.
1°) Démontrer que Δ perce P et P' en B et B'.
2°) Que peut-on dire du quadrilatère $ABB'A'$?

EXERCICE 35
Soit dans un plan P un parallélogramme ABCD et soit S un point non situé dans P.
Un plan P' parallèle à P coupe (SA) en A', (SB) en B', (SC) en C' et (SD) en D'.
Démontrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

PROJECTIONS

EXERCICE 36
On donne un plan P et une droite D non parallèle à P.
Soient D_1 et D_2 deux droites. On suppose que les « projetées » des droites D_1 et D_2 sur le plan parallèlement à la droite D sont deux droites distinctes D'_1 et D'_2.
1°) On suppose que D_1 et D_2 sont sécantes. Démontrer que D'_1 et D'_2 sont sécantes. Quelle est l'intersection des droites D'_1 et D'_2 ?
2°) On suppose que D'_1 et D'_2 sont sécantes : peut-on en déduire que D_1 et D_2 sont sécantes?

EXERCICE 37
Trois points alignés peuvent-ils se projeter dans un plan suivant trois points alignés ? Si oui, préciser dans quel cas.

EXERCICE 38
Soient deux droites non coplanaires D_1 et D_2 qui percent un plan P en deux points A_1 et A_2.
A chaque point M_1 de D_1 on associe le plan Q contenant M_1 et parallèle à P.
On désigne par M_2 l'intersection du plan Q et de D_2 et par M le projeté de M_2 dans P parallèlement à D_1.

1°) Comparer les distances M_1M_2 et A_1M.
2°) Démontrer que lorsque M_1 varie sur D_1 le point M appartient à une droite fixe.
3°) Déterminer le point M_1 pour que la distance M_1M_2 soit la plus courte possible.

EXERCICE 38

Soient deux droites D et D' non coplanaires et un plan P. Déterminer la direction Δ de projection pour que D et D' se projettent suivant deux droites parallèles.

EXERCICE 39

Soit un plan P, une droite Δ et un parallélogramme ABCD situé dans un plan P non parallèle à Δ.
Montrer que la projection de ABCD sur P parallèlement à Δest un parallélogramme.

EXERCICE 40

Un quadrilatère plan ABCD se projette sur un plan P suivant un parallélogramme $A'B'C'D'$. Déterminer la nature de ABCD.

EXERCICE 41

Trouver un plan P et une droite Δ tels qu'un quadrilatère gauche donné ABCD se projette sur P parallèlement à Δ suivant un parallélogramme.

EXERCICE 42

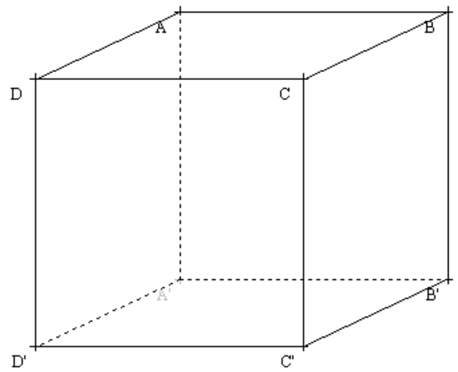
Soit $A'B'C'$ la projection sur un plan P parallèlement à une droite Δ d'un triangle ABC situé dans un plan non parallèle à Δ.
Montrer que les milieux des côtés de $A'B'C'$ sont les projections des milieux des côtés de ABC et que le centre de gravité de $A'B'C'$ est la projection du centre de gravité de ABC.

EXERCICE 43

Soit un tétraèdre ABCD, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].
1°) Construire la projection du tétraèdre sur le plan BCD parallèlement à la droite (IJ).
2°) Quelle est la nature de la figure obtenue ?
3°) La figure peut-elle être un carré ; à quelles conditions ?

EXERCICE 44

Soit un cube $ABCDA'B'C'D'$.



1°) Construire l'image du cube par la projection sur le plan $A'B'C'$ parallèlement à la droite (AA').
2°) Construire l'image du cube par la projection sur le plan $A'B'C'$ parallèlement à la droite (AD').
3°) Construire l'image du cube par la projection sur le plan $A'B'C'$ parallèlement à la droite (AC').

PROBLEMES DE CONSTRUCTION

EXERCICE 45

Soient deux droites strictement parallèles D et D' et deux droites quelconques Δ et Δ' sécantes avec le plan déterminé par D et D'.
Si une droite $(x'x)$ rencontre D et D', dans quel plan se trouve-telle ?
Construire une droite rencontrant D, D', Δ et Δ'. Est-ce toujours possible ?

EXERCICE 46

Soit une droite D et une droite δ non parallèle à D.
1°) Démontrer que toutes les droites Δ parallèles à δ et sécantes à D sont dans un même plan P.
2°) Soit D' une droite non coplanaire avec D et sécante avec P.
Construire une droite Δ parallèle à δ et sécante à D et D'.

EXERCICE 47

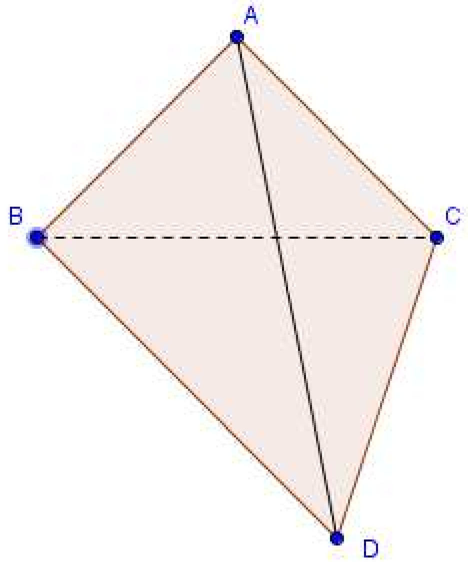
Soit deux droites non coplanaires D et D' et A un point n'appartenant ni à D ni à D'.
Dans quel cas peut-on mener par A une droite parallèle à D et sécante à D' ?

EXERCICE 48

On donne un plan P, une droite D sécante avec P, et un point A n'appartenant ni à D ni à P.
Construire une droite Δ passant par A rencontrant D et parallèle à P.

VECTEURS ET REPERES

Dans les exercices 49 à 51, on considère un tétraèdre ABCD (voir figure ci-dessous) :



EXERCICE 49

1°) Construire les représentants d'origine A des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ **c)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ **d)** $\overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DB}$

EXERCICE 50

Soit k un réel non nul et α, β, γ et δ les points définis par :
$\overrightarrow{A\alpha} = k\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\beta} = k\,\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{D\gamma} = k\,\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{D\delta} = k\,\overrightarrow{DB}$.
Démontrer que $\alpha\beta\gamma\delta$ est un parallélogramme.

EXERCICE 51

Soit A′, B′, C′ et D′ les centres de gravité des triangles BCD, ACD, ABD et ABC.

1°) Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AA'}$.

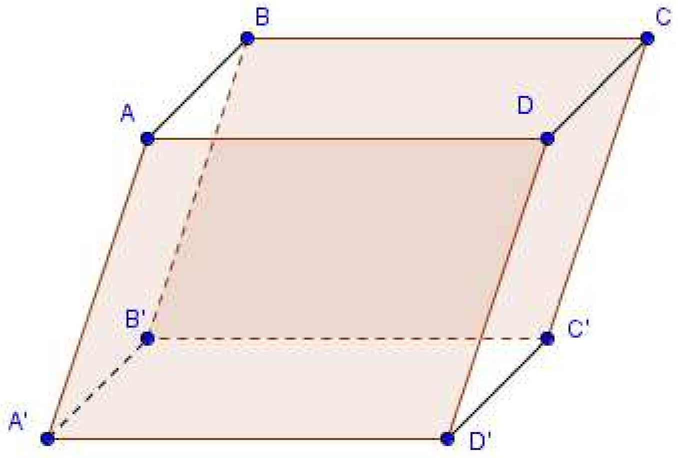
2°) Simplifier la somme : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}$.

3°) Soit M un point quelconque, montrer que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'}$$

EXERCICE 52

On considère le parallélépipède ABCDA′B′C′D′ ci-dessous.



Construire un représentant d'origine A des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{C'D'}$ **b)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AD'}$ **c)** $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC'} + \ \frac{1}{2}\ \overrightarrow{B'D}$

EXERCICE 53

On considère toujours le parallélépipède ABCDA′B′C′D′ de l'exercice 52.

1°) Construire l'isobarycentre G du parallélépipède.

2°) Calculer $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC'}$.

3°) Montrer que G est centre de symétrie du parallélépipède.

4°) Construire les isobarycentres I de A, B, B′, A′ ; J de D C, D′, C′ ; K de A, B, C, D ; L de A′, B′, C′, D′.

5°) Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont concourantes.

6°) Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?

EXERCICE 54

On considère encore le parallélépipède ABCDA′B′C′D′ de l'exercice 52.

Soit I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}$. Soit J le point défini par : $\overrightarrow{A'J} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{BD'}$.

1°) Montrer que A, A′, I et J sont coplanaires.

2°) Quelle est la nature du quadrilatère AA′JI ?

EXERCICE 55

Soit un tétraèdre ABCD. Quelles sont dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ les coordonnées des sommets du tétraèdre, des centres de gravité des faces du tétraèdre, et les coordonnées de l'isobarycentre des quatre points A, B, C et D.

EXERCICE 56

Soit un parallélépipède ABCDA’B’C’D’(ABCD est un parallélogramme et on a $\overrightarrow{AA'}$= $\overrightarrow{BB'}$=$\overrightarrow{CC'}$=$\overrightarrow{DD'}$.

Quelles sont, dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$) les coordonnées des sommets de ce parallélépipède, des centres des six faces et du centre du parallélépipède ?

EXERCICE 57

L’espace est muni du repère (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). On considère les points A(1, 2, 3), B(−1, 3, 3) et C(−2, 1, 4).

1°) a) Existe-t-il des points d’abscisse 3 alignés avec A et B ?

b) Existe-t-il des points d’ordonnée 5 alignés avec A et B ?

c) Déterminer deux points coplanaires avec A, B et C.

d) Déterminer un point d’abscisse 0 et d’ordonnée 1 coplanaire avec A, B et C.

2°) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ définissent-ils une base de l’ensemble des vecteurs de l’espace ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ définissent-ils une base de l’ensemble des vecteurs de l’espace ?

Si oui, donner dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CO}$.

EXERCICE 58

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires et E tel que BDCE soit un parallélogramme.

Soient B’, C’ et D’ les milieux de [AB], [AC] et [AD] et I le milieu de [BE].

1°) a) Montrer que les droites (EB) et (C’D’) sont parallèles.

b) Les droites (BC’) et (ID’) sont-elles sécantes ou non coplanaires ?

c) Que peut-on dire des plans (B’C’D’) et (BCD) ?

d) On trace par B’ la droite parallèle à (ED). Déterminer son intersection avec le plan (ACD).

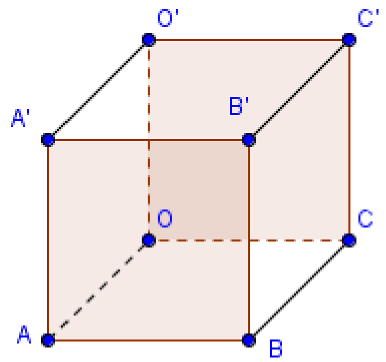
2°) On considère le plan (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$).

a) Donner les coordonnées des différents points de la figure.

b) Démontrer analytiquement les résultats du 1°.

EXERCICE 59

On considère un cube (cf. figure ci-dessous)



1°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ définissent une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2°) Donner dans le repère (O; $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OO'}$) les coordonnées des points de la figure.

3°) Donner un système d'équations paramétriques des droites (A'I) et (C'J) et étudier l'intersection de ces deux droites.

Retrouver le résultat géométriquement.

4°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (BB') et du plan (AA'C).

5°) Soit M un point de (BB') et G l'isobarycentre de O, A et M. Montrer que G appartient au plan AA'C' (analytiquement puis géométriquement).

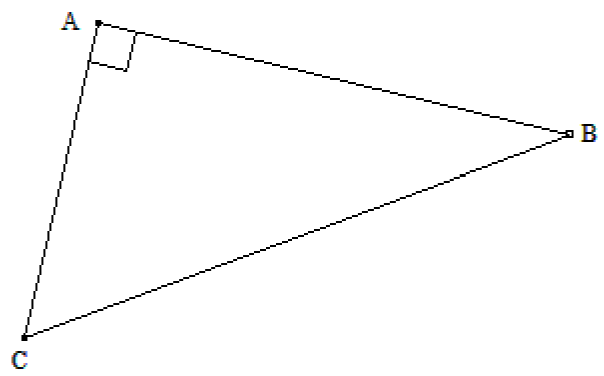
6°) M décrit la droite (BB') ; quel est l'ensemble des points G ? (On pourra démontrer le résultat géométriquement ou analytiquement).

CHAPITRE 7 : ORTHOGONALITE ET PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

1.PRODUIT SCALAIRE

1.1 Introduction

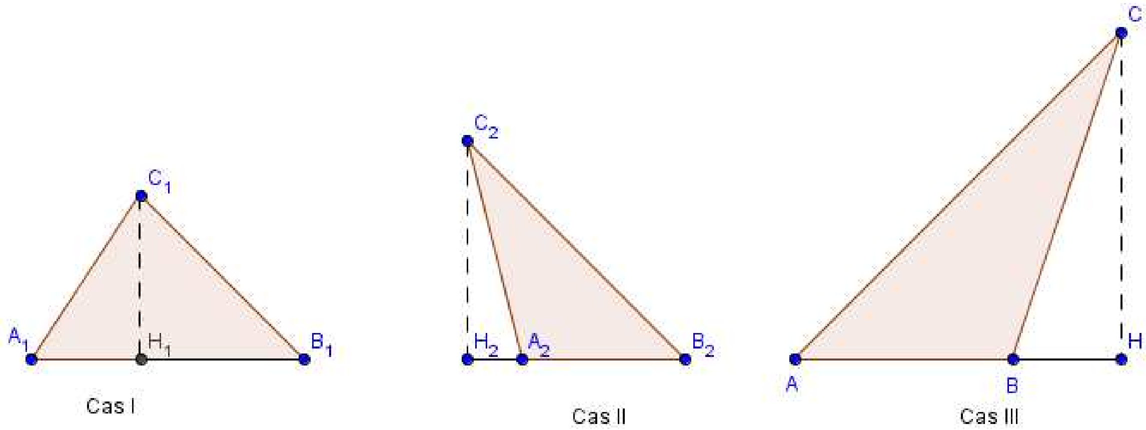
On connaît depuis la classe de troisième le fameux théorème de PYTHAGORE : « pour tout triangle ABC du plan, rectangle en A, on a la relation : « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ». En d'autres termes, l'expression $AB^2 + AC^2 - BC^2$ est nulle pour un triangle du type ci-dessous :



On se propose de calculer l'expression $AB^2 + AC^2 - BC^2$ pour un triangle quelconque.

Activité : *Soit ABC un triangle quelconque. H le projeté orthogonal de C sur [AB]. Montrer que dans chacun des cas de figure suivants, et pour une quelconque orientation de l'axe (AB), on a :*

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\,\overline{AB} \times \overline{AH}.$$



<u>Solution</u>: Dans chaque cas, on a par application du théorème de PYTHAGORE :

$$AC^2 = HA^2 + CH^2 \quad (1)$$

$$BC^2 = HB^2 + HC^2 \quad (2)$$

D'où par différence (1) – (2):

$AC^2 - BC^2 = HA^2 - HB^2 = \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 = (\overline{HA} - \overline{HB})(\overline{HA} + \overline{HB}) = \overline{BA}.(2\overline{HA} + \overline{AB})$

$= 2\overline{AH} \times \overline{AB} - AB^2$.

D'où, en transposant : $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\,\overline{AB} \times \overline{AH}$.

<u>Autre expression de la quantité $AB^2 + AC^2 - BC^2$</u>

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan. Il existe (Axiome d'Euclide) des points uniques B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$.

D'où : $AB^2 + AC^2 - BC^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

Dans la suite, nous allons considérer en fait la *moitié* de cette expression.

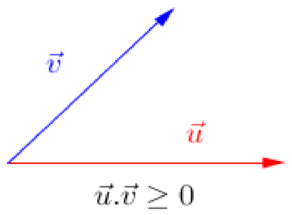
1.2. Définition

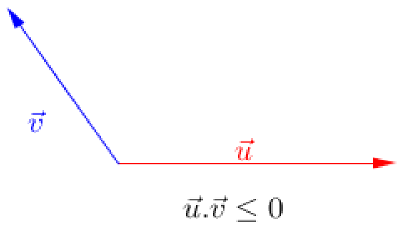
<u>Définition</u> : On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le réel défini de l'une des deux manières équivalentes suivantes

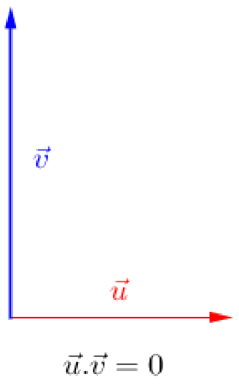
1) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$
2) Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} \text{, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).}$$

Le produit scalaire ainsi défini peut être positif, négatif ou nul.

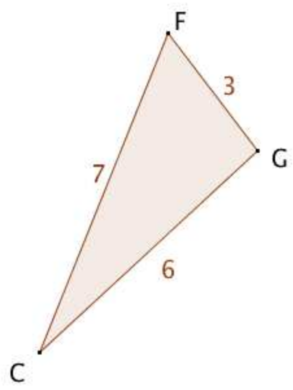






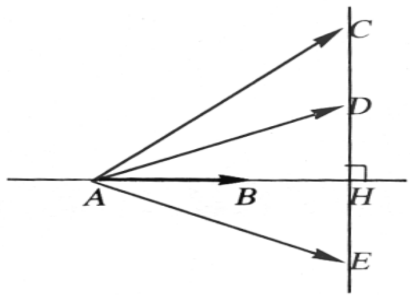
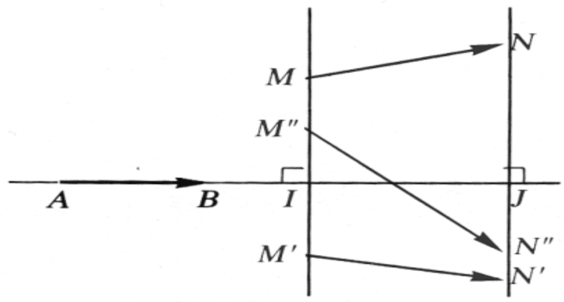
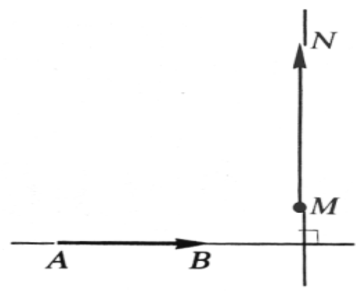
Remarque : Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors C appartient à (AB) d'où H = C et par conséquent : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC}$.

<u>Exemple</u> :



$$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)$$
$$=38$$

1.3. Configurations fondamentales

		
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{M''N''}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0.$

1.3 Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel α du plan, on a :

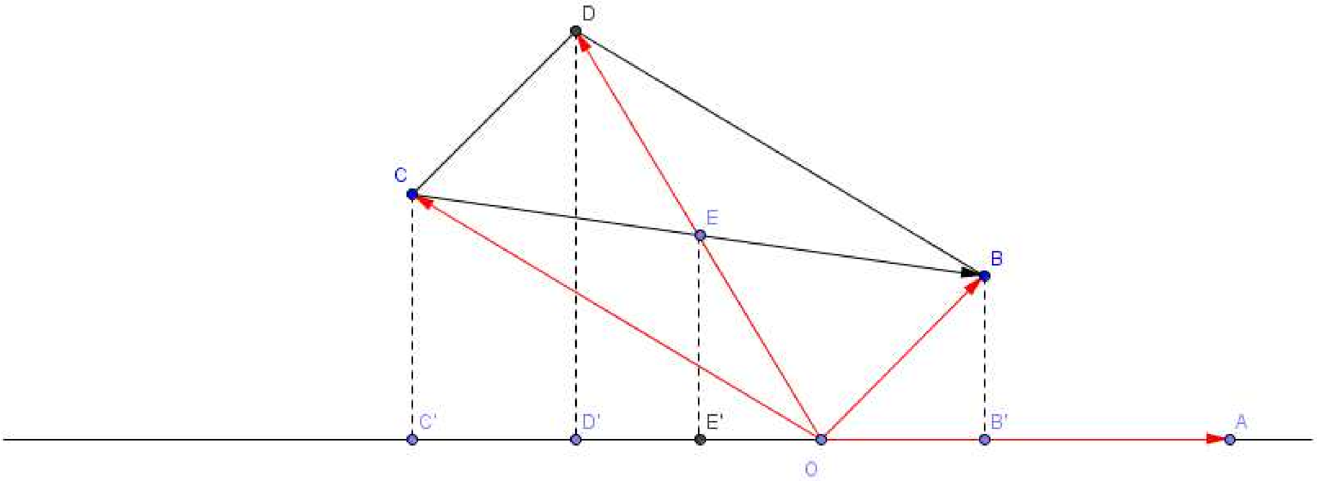
1) $\vec{u}.\vec{v}$ = $\vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$ = $\vec{u}.\vec{v}$ + $\vec{u}.\vec{w}$
3) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}$ = $\vec{u}.\vec{w}$ + $\vec{v}.\vec{w}$
4) $(\alpha\vec{u}).\vec{v}$ = $\alpha(\vec{u}.\vec{v})$

Démonstration :

1) C'est clair si on utilise la première expression du produit scalaire de la définition ci-dessus car on a alors : $\vec{v}.\vec{u}$ = $\frac{1}{2}$ $[\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2]$ = $\vec{u}.\vec{v}$.

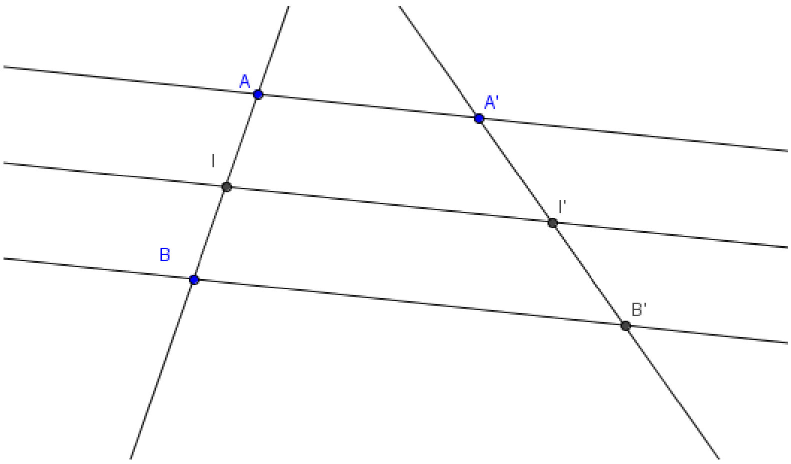
2) Sur la figure ci-dessous, on a posé $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

Alors $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{OD}$.



On a $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \overline{OA} \times \overline{OD'}$ et $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} = \overline{OA} \times \left(\overline{OB'} + \overline{OC'}\right)$.

Or OBDC est un parallélogramme, donc OB'C'D' est un parallélogramme aplati. En effet, il résulte immédiatement du théorème de THALES étudié au chapitre sur les vecteurs que *si deux points A et B d'un axe se projettent respectivement en A' et B' sur un autre axe, alors le milieu I du segment [AB] a pour projeté le milieu I' du segment [A'B']*.



Ici, le quadrilatère OBDC étant un parallélogramme, les segments [OD] et [BC] ont même milieu E, donc les segments projetés [OD'] et [B'C'] ont également même milieu E' d'après la propriété évoquée ci-dessus. Il en résulte que OB'C'D' est un parallélogramme aplati.

On en déduit que : $\overline{OB'} + \overline{OC'} = \overline{OD'}$ et on a bien : $\overline{OA} \times \overline{OD'} = \overline{OA} \times \left(\overline{OB'} + \overline{OC'}\right)$, soit :

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

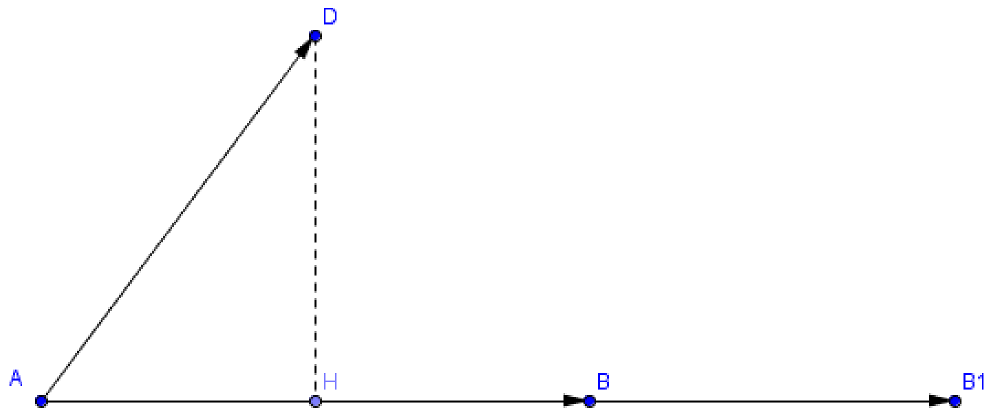
3) D'après la propriété 1) de symétrie du produit scalaire, $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w}$ = $\vec{w}.(\vec{u} + \vec{v})$ et d'après la propriété 2), on a : $\vec{w}.(\vec{u} + \vec{v})$ = $\vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$, puis en utilisant de nouveau la symétrie,

$\vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$. Donc $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.

4) Sur la figure ci-dessous, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ par définition du produit scalaire :

$$(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \overline{AB_1} \times \overline{AH} \text{ et } \alpha(\vec{u}.\vec{v}) = \alpha\,(\overline{AB} \times \overline{AH}).$$

Il est clair que $\overline{AB_1} = \overline{AB}$. D'où le résultat.



<u>Remarque</u> : D'après les propriétés 2 et 4 précédentes, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a aussi:

$\vec{u}.(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} + (-\vec{w})) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.(-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{w}$.

<u>1.4 Carré scalaire</u>

On appelle carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\vec{u}^2$ le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$. On a donc :

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$$

<u>Propriétés</u> : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
2) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
4) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
5) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire ou de Minkowsky)

Démonstration : 1) Evident d'après la définition du produit scalaire ($\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$)

2) D'après les propriétés 2 et 3 du § 1.3,
$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} + (\vec{u}+\vec{v}).\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
la dernière égalité résultant de la symétrie du produit scalaire.

3) Preuve analogue à celle de 2)
4) Soit t un réel. Considérons l'expression $A = (t\vec{u}+\vec{v})^2 = \|t\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Elle est positive pour tout réel t. En développant, $A = t^2\,\vec{u}^2 + 2t\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ est un trinôme en t qui est positif ou nul pour tout réel t. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or $\Delta' = (\vec{u}.\vec{v})^2 - \vec{u}^2 \times \vec{v}^2$. Donc $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 \times \vec{v}^2$, soit en prenant les racines carrées des deux membres de cette inégalité :

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.$$

5) D'après 2), $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$. Or, pout tout réel x, on a $x \leq |x|$.
Donc :
$(\vec{u}+\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\,|\vec{u}.\vec{v}| + \vec{v}^2$. D'après 4), $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, donc
$\vec{u}^2 + 2\,|\vec{u}.\vec{v}| + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\,\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$ et *a fortiori*
$(\vec{u}+\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\,\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$. Cette dernière inégalité s'écrivant :
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$, on conclut en prenant les racines carrées des deux membres et en remarquant que :

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

2. ORTHOGONALITE DANS LE PLAN

2.1 Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarques :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

- Deux droites D et Δ sont perpendiculaires si et seulement si tout vecteur directeur de D est orthogonal à tout vecteur directeur de Δ.

2.2 Bases orthonormées. Expression analytique du produit scalaire

Une base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\bullet \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1 \quad \text{et} \quad \bullet\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$$

Un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est dit orthonormé si et seulement si la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est orthnormée.

Soit ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconque du plan. Il existe des réels x, y, x' et y' tels que $\vec{u}$ = x$\vec{\imath}$ + y$\vec{\jmath}$ et $\vec{v}$ = x'$\vec{\imath}$ + y'$\vec{\jmath}$. Alors : $\vec{u}.\vec{v}$ = (x$\vec{\imath}$ + y$\vec{\jmath}$).(x'$\vec{\imath}$ + y'$\vec{\jmath}$) et d'après les propriétés du § 1.3, $\vec{u}.\vec{v}$ = xx'$\vec{\imath}.\vec{\imath}$ + xy'$\vec{\imath}.\vec{\jmath}$ + yx' $\vec{\jmath}.\vec{\imath}$ + yy'$\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$. Or, $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\imath}\|^2 = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$. Donc

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

Nous admettrons que cette valeur du produit scalaire est **la même** dans toute base orthonormée du plan.

Dans les paragraphes qui suivent, le plan sera supposé être muni d'un repère orthonormé (sauf mention explicite du contraire).

2.3 Condition d'orthogonalité de deux droites

Théorème :

1) $\left.\begin{array}{r} D : ax+by+c=0 \\ D' : a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\} D \perp D' \Leftrightarrow aa'+bb'=0$ 2) $\left.\begin{array}{r} D : y=mx+p \\ D' : y=m'x+p' \end{array}\right\} D \perp D' \Leftrightarrow mm'=-1$

Démonstration : 1) D et D' ont pours vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\left(-b, a\right)$ et $\vec{v}\left(-b', a'\right)$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $(-b)(-b') + aa' = 0$, ce qui est équivalent à : $aa' + bb' = 0$.

2) D et D' ont pours vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\ (1, m)$ et $\vec{v}\ (1, m')$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $1 \times 1 + mm' = 0$, ce qui est équivalent à : $mm' = -1$.

2.4. Vecteur normal à une droite

Un vecteur **normal** à une droite D est un vecteur orthogonal à un vecteur directeur de D. En repère orthonormé : $\vec{n}(a\ , b)$ est un vecteur normal à

D : ax + by + c = 0 .

En effet, un vecteur directeur de D est $\vec{u}\left(-b, a\right)$ et $\vec{n}.\vec{u} = a \times (-b) + b \times a = 0$. De plus, tout vecteur directeur de D est de la forme k $\vec{u}$.

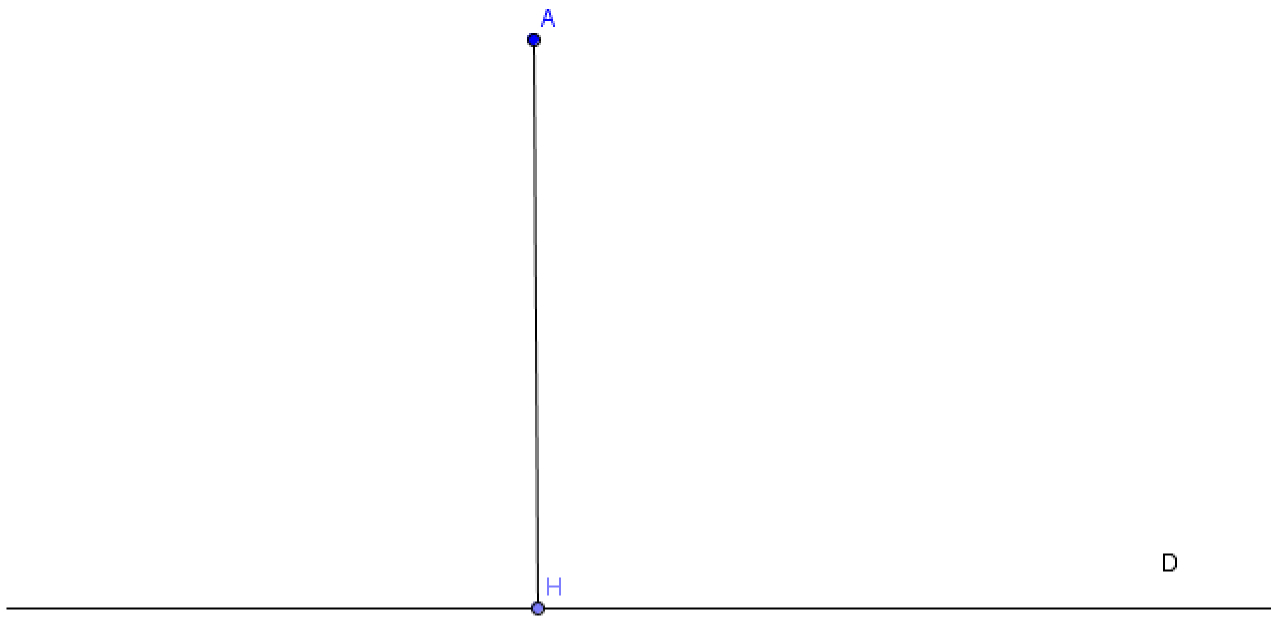
Exercice : Déterminer un vecteur normal à chacune des droites suivantes :

D_1 : 2x − 3y − 5 = 0; D_2 : y = 3x + 2; D_3 : 5x = 3; D_4 : 3y = 4; D_5 : 2y − x + 5 = 0

Réponses : $\overrightarrow{n_1}(2, -3)$; $\overrightarrow{n_2}(-3,1)$; $\overrightarrow{n_3}(5, 0)$; $\overrightarrow{n_4}(0, 3)$; $\overrightarrow{n_5}(-1, 2)$.

2.5 Distance d'un point à une droite

Définition : Soit D une droite et A un point du plan. On appelle **distance** de A à D la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur D. Elle est notée d(A, D).



Théorème : Le plan étant muni d'un repère orthonormé, soit D la droite d'équation : ax + by + c = 0, et A le point de coordonnées (x_0, y_0).

Alors : $d\,(M_0, H) = \dfrac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Démonstration : Soit H (x_H, y_H) le projeté orthogonal de A sur D. Alors H ∈ D, d'où :

$$ax_H + by_H + c = 0 \quad (\mathbf{1})$$

$\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de D et $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(x_H - x_0, y_H - y_0)$. $\overrightarrow{AH}$ étant normal à D par hypothèse, on a :

$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -b(x_H - x_0) + a(y_H - y_0) = 0$, relation équivalente à :

$$-bx_H + ay_H = ay_0 - bx_0 \ (\mathbf{2})$$

Résolvons le système formé par les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} ax_H + by_H + c = 0 \ (1) \\ -bx_H + ay_H = ay_0 - bx_0 \ (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par b et (2) par a et ajoutons membre pour obtenir :

$(b^2 + a^2)y_H = a^2y_0 - abx_0 - bc$, soit : $y_H = \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2}$.

De même, en multipliant (1) par a et (2) par $(-b)$, on obtient : $x_H = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}$.

En utilisant ces expressions de x_H et y_H, on a alors :

$AH^2 = (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 = \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2} - y_0\right)^2$

$= \left[\frac{-a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{-b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right]^2 = \frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2} \times (ax_0 + by_0 + c)^2$

$= \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)}$.

En prenant les racines carrées des deux membres, qui sont des réels positifs, on a bien :

$$AH = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

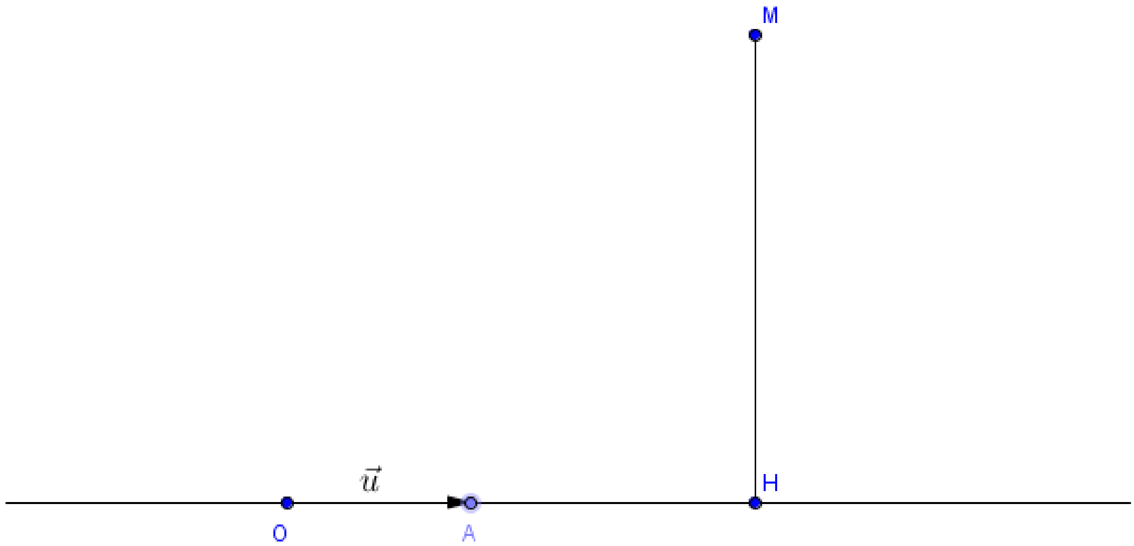
3. Lignes de niveau

On appelle **fonction scalaire** du plan $\mathscr{P}$ toute fonction f : $\mathscr{P} \to \mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau** k (k ∈ R) de la fonction scalaire f l'ensemble des points M du plan tels que : f (M) = k .

3 .1 Lignes de niveau de M ↦ $\vec{u}$. $\vec{OM}$:

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



Soit M un point quelconque de projeté orthogonal H sur D.

$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OM} = \vec{u}\,.\,\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) = \vec{u}.\,\overrightarrow{OH}$.

Soit A le point de D tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. D'après le calcul précédent :

$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OM} = \mathrm{k} \Leftrightarrow \vec{u}.\,\overrightarrow{OH} = \mathrm{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\,\overrightarrow{OH} = \mathrm{k} \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OH} = \mathrm{k} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{OH}} = \frac{\mathbf{k}}{\boldsymbol{\overline{OA}}}$. (*)

Cette dernière égalité montre que H est unique car le second membre de la relation (*) est constant. Tous les points M de l'ensemble cherché ont donc **le même** projeté orthogonal H sur D. On en conclut que :

{M ∈ $\mathscr{P}$ / $\vec{u}$. $\vec{OM}$ = k} est une droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ en H tel que :

$$\overline{\mathbf{OH}} = \frac{\mathbf{k}}{\overline{\mathbf{OA}}} .$$

3.2 Lignes de niveau de M $\mapsto$ MA² — MB²

Soient A et B deux points du plan et k un réel fixé. On cherche l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k$. Soit I le milieu de [AB]. On a :

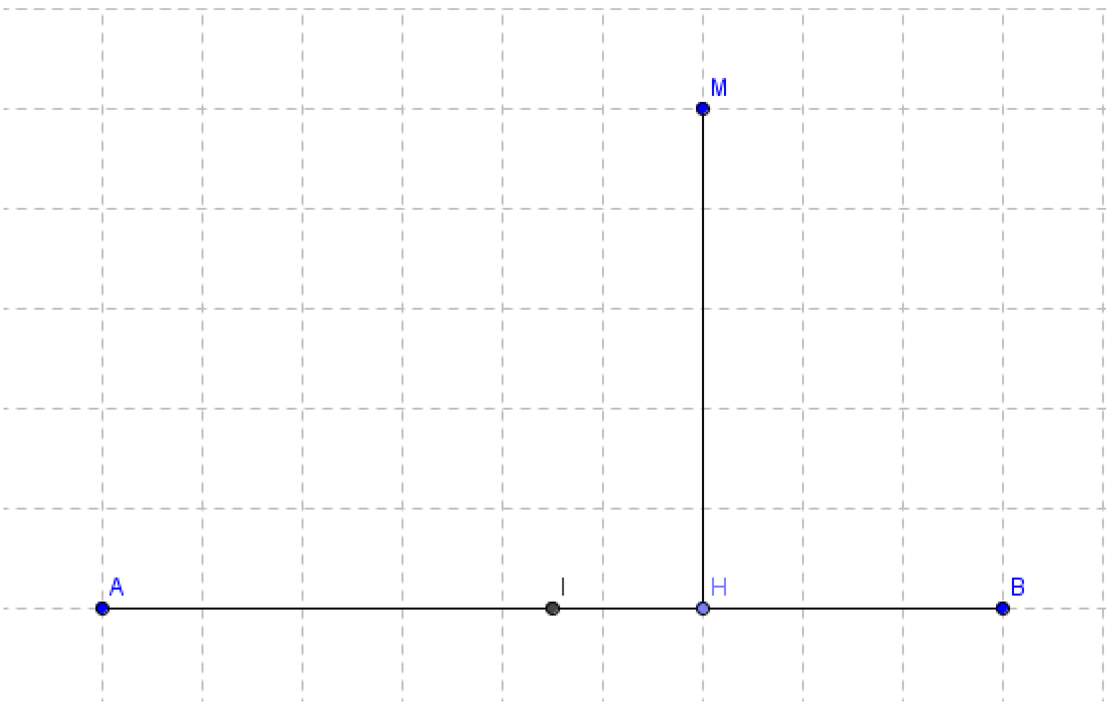
$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^{\,2} - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right)$

$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

Ainsi, $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \frac{k}{2}$.

On est ramené à un problème analogue à celui du § 3.1. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).



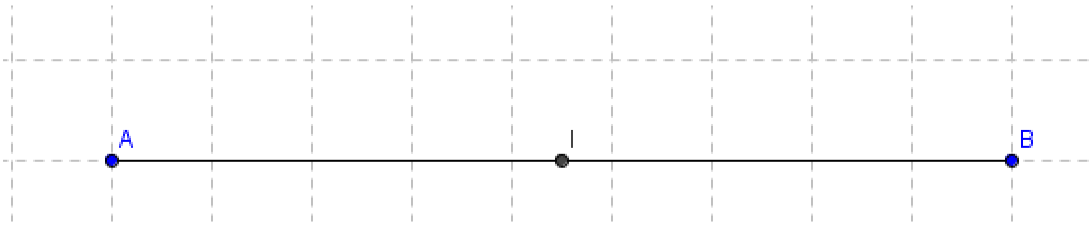
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}\right) = \overline{AB} \times \overline{IH}$. Donc H est unique, puiqu'il doit être tel que $\boldsymbol{\overline{IH}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2\overline{AB}}}$.

Par conséquent, **{M $\in \mathscr{P}$ / MA² — MB² = k } est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que :**

$$\overline{IH} = \frac{k}{2\,\overline{AB}}.$$

3.3 Lignes de niveau de M ↦ MA² + MB²

Soit I le milieu de [AB].



MA² + MB² = $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2}$ (car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et IA = IB = $\frac{AB}{2}$).

Ainsi, MA² + MB² = k $\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)$.

On discute alors suivant le signe du second membre pour conclure :

{M ∈ $\mathscr{P}$ / MA² + MB² = k } est :

- **∅ si k < $\frac{AB^2}{2}$,**
- **réduit à {I} si k = $\frac{AB^2}{2}$,**
- **le cercle $\mathscr{C}$(I, $\frac{\sqrt{2k-AB^2}}{2}$) si k > $\frac{AB^2}{2}$.**

3.4 Lignes de niveau de M ↦ α MA² + β MB²

1^er cas : si $\alpha + \beta = 0$

Alors $\alpha = -\beta$ et αMA² + βMB² = k $\Leftrightarrow \alpha$(MA² − MB²) = k $\Leftrightarrow$ MA² − MB² = λ, avec $\lambda = \frac{k}{\alpha}$.

On est ramené alors à la situation du § 3.2.

2ème cas : si $\alpha + \beta \neq 0$

Soit G le barycentre de {(A , α) (B , β) }.

$$\alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\underbrace{\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right)}_{=\vec{0}\ par\ définition\ de\ G} + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

Ainsi, $\alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k-(\alpha GA^2 + \beta GB^2)}{\alpha + \beta}$.

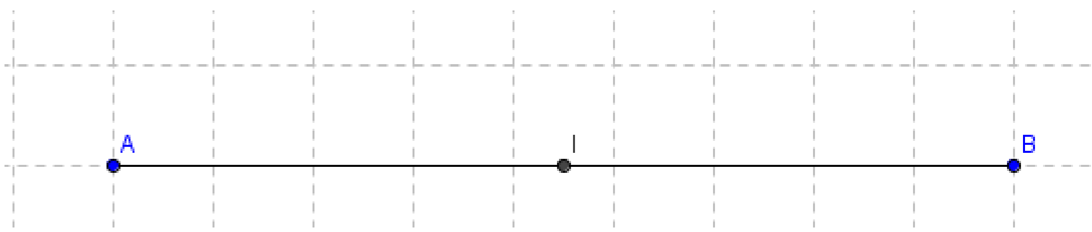
Posons $\lambda = \dfrac{k - \alpha\, GA^2 + \beta\ GB^2}{\alpha + \beta}$. On discute suivant le signe de λ :

{M $\in \mathscr{P}$ / $\alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2 = k$ } est :

- **$\varnothing$ si $\lambda < 0$,**
- **réduit à {G} si $\lambda = 0$,**
- **le cercle $\mathscr{C}(G, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 0$.**

3.5 Lignes de niveau de M $\mapsto$ $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}$

Soit I le mileu de [AB].



$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Leftrightarrow IM^2 - \frac{AB^2}{4} = k$. Posons $\lambda = k + \dfrac{AB^2}{4}$

.

{M $\in \mathscr{P}$ / $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k$ } est :

- **$\varnothing$ si $\lambda < 0$,**
- **réduit à {I} si $\lambda = 0$,**

• le cercle $\mathscr{C}$ (I, $\sqrt{\lambda}$) si λ > 0 .

Si k = 0, cet ensemble n'est autre que le cercle de diamètre [AB] .

<u>3.6 Lignes de niveau de M $\mapsto \frac{MA}{MB}$</u>

$\frac{MA}{MB}$ = k ⇔ MA = k MB ⇔ $MA^2 - k^2MB^2 = 0$. Pour étudier les lignes de niveau de M → $\frac{MA}{MB}$, on peut donc se ramener aux résultats du § 3.4 en remplaçant α par 1, β par – k², et k par 0.

On peut également procéder ainsi :

$\frac{MA}{MB}$ = k ⇔ ($\overrightarrow{MA}$ – k$\overrightarrow{MB}$). ($\overrightarrow{MA}$ + k$\overrightarrow{MB}$) = 0. Si k ≠1, considérons les barycentres :

I = bar{(A, 1) ; (B, −k)} et J = bar{(A, 1) ; (B, −k)}.

Alors d'après les propriétés du calcul barycentrique, $\frac{MA}{MB}$ = k ⇔ (1 – k²)$\overrightarrow{MI}$.$\overrightarrow{MJ}$ = 0 ⇔ $\overrightarrow{MI}$.$\overrightarrow{MJ}$ = 0.

L'ensemble cherché est alors **le cercle de diamètre [IJ].**

N.B. *Les formules de cette section ne doivent pas être retenues par cœur. On doit savoir les retrouver en développant des carrés scalaires et en utilisant les propriétés du milieu ou du barycentre.*

Au cours des démonstrations des paragraphes précédents, nous avons établi au passage les relations suivantes, qui sont très utilisées dans la pratique et qu'il importe de retenir :

Soit MAB un triangle et I le milieu de [AB].

1° $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ **2°** $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

3° $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

La première de ces relations est appelée **formule de la médiane**. Elle exprime que *dans tout triangle, la somme des carrés de deux des côtés est égale au double du carré de la médiane relative au troisième côté augmenté de la moitié du carré de ce dernier.*

4. Etude analytique du cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

4.1 Cercle défini par son centre et son rayon

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω (a, b) et de rayon R. Un point M(x, y) appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si ΩM = R ⇔ ΩM² = R² ⇔ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Ainsi, une équation du cercle de centre Ω (a , b) et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

4.2 Cercle défini par un diamètre

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] avec A (x_A, y_A) et B (x_B, y_A). Un point M(x, y) appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ⇔ $(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - x)(y_B - x) = 0$. Ainsi, une équation du cercle de diamètre [AB] , avec A(x_A , y_A) et B(x_B , y_B) est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

4.3 Ensemble Γ des points M (x, y) / $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (1)

La relation (1) peut s'écrire, en regroupant les termes en x, puis les termes en y et en reconnaissant des débuts de carrés (forme canonique) :

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0\,,$$

Soit après transposition au second membre :

$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\lambda$, en posant $\lambda = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} - \gamma$.

On discute alors suivant le signe de λ :

Γ est : • $\varnothing$ si $\lambda < 0$,

• réduit à $\{\Omega\,(-\frac{\alpha}{2}\ ;-\frac{\beta}{2})\}$ si $\lambda = 0$,

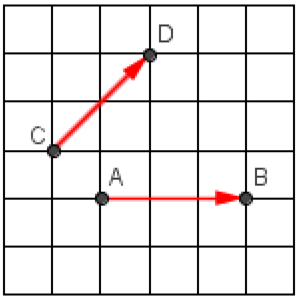
• le cercle $\mathscr{C}(\Omega, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 0$.

I. EXERCICES ET PROBLEMES

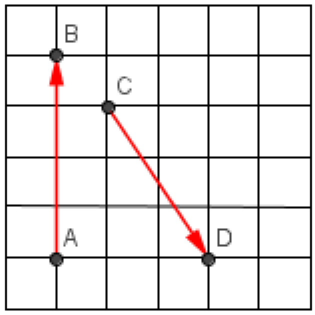
EXERCICE 1

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ dans les figures ci-dessous :

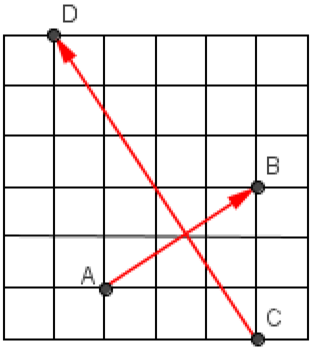
1)



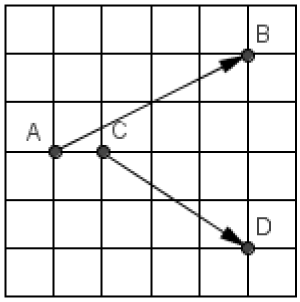
2)



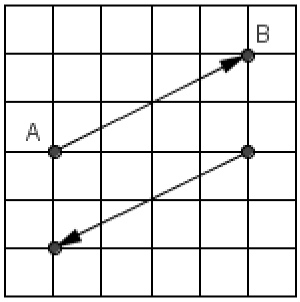
3)



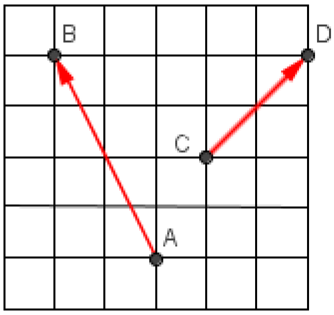
4)



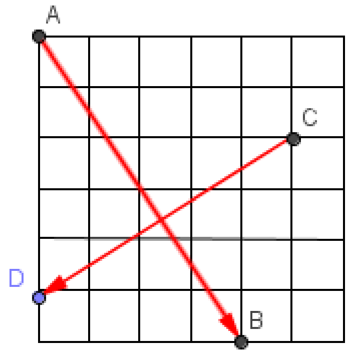
5)



6)



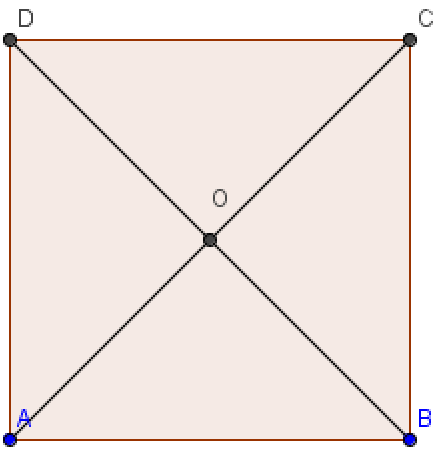
7)



EXERCICE 2

Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = 4. Calculer les produits scalaires :

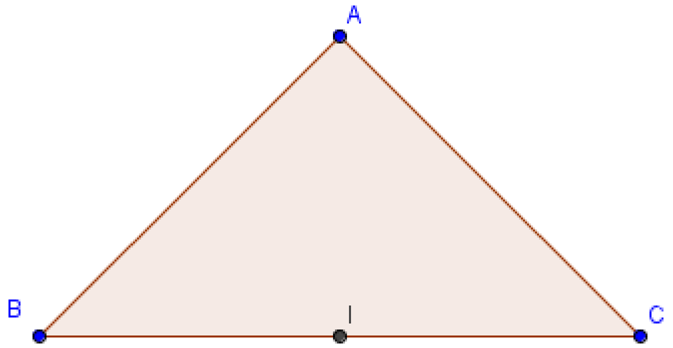
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DO}$.



EXERCICE 3

ABC est un triangle isocèle de sommet A, BC = 4. Le point I est le milieu de [BC] . Calculer :

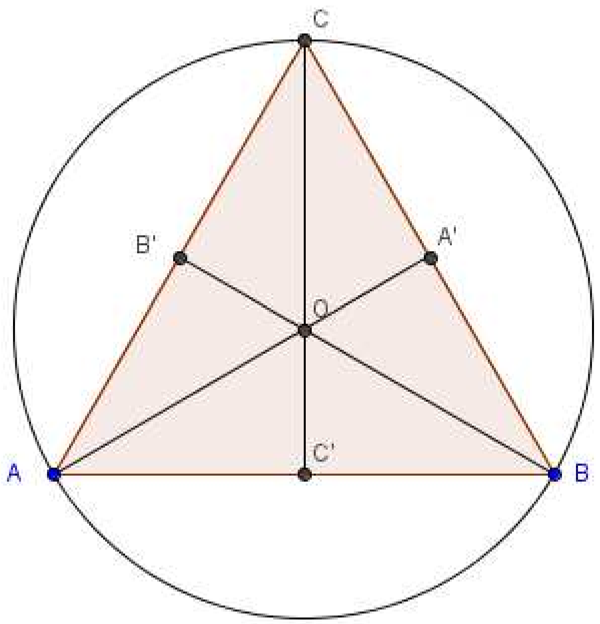
$\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CI}$.



EXERCICE 4

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6, O le centre de son cercle circonscrit, A' , B' , C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB] .
Calculer les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{CB'}$



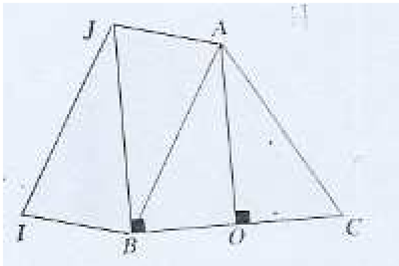
EXERCICE 5

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle de sommet A et ABIJ est un parallélogramme. On pose BC = *a* .

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{v}$ en fonction de *a* dans chacun des cas suivants :

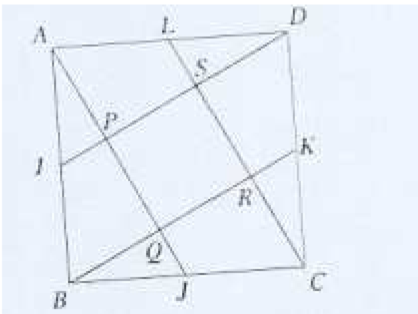
1°) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$ **2°)** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{JC}$ **3°)** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AI}$ **4°)** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CI}$

5°) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OJ}$ **6°)** $\overrightarrow{v} = 2\,\overrightarrow{OI}$ **7°)** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AJ}$ **7°)** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{OJ}$.



EXERCICE 6

ABCD est un carré. I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du carré. Les droites (AJ) et (DI) se coupent en P, les droites (AJ) et (KB) se coupent en Q, les droites (CL) et (DI) se coupent en S, les droites (CL) et (KB) se coupent en R .



1°) a) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$.

b) En déduire que : $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.

2°) a) Etablir que $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire l'expression de PS en fonction du côté *a* du carré ABCD.

c) Montrer que le quadrilatère PQRS est un carré et exprimer son aire en fonction de celle du carré ABCD.

EXERCICE 7

Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2\right)$$

EXERCICE 8

Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.
Application : Soit un parallélogramme ABCD. Démontrer que les diagonales [AC] et [BD] sont orthogonales si et seulement si AC = BD.

(*Indication* : On pourra poser $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$).

EXERCICE 9

Soit ABCD un quadrilatère. Démontrer que l'on a :

$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 + 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires.

EXERCICE 10

Démontrer que quels que soient les points A, B, C, D : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
Déduire de cette relation que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

EXERCICE 11

1°) Montrer que dans un triangle ABC d'orthocentre H, on a :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}$$

2°) Réciproquement, soit M un point tel que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$. En déduire que M = H.

EXERCICE 12

Soit ABC un triangle, H l'orthocentre, A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur le coté opposé.

1°) Utiliser $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ pour démontrer que : $\overline{A'A}\,.\,\overline{A'H} = -\,\overline{A'B}\,.\,\overline{A'C}$.

2°) Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\overline{AH}\,.\,\overline{AA'} = \overline{AB}\,.\,\overline{AC'} = \overline{AC}\,.\,\overline{AB'}$.

3°) Démontrer de même que : $\overline{HA}\,.\,\overline{HA'} = \overline{HB}\,.\,\overline{HB'} = \overline{HC}\,.\,\overline{HC'}$.

• EXERCICE 13

Démontrer que si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que :
la droite d_1 contenant A et orthogonale à (B'C')
la droite d_2 contenant B et orthogonale à (C'A')
la droite d_3 contenant C et orthogonale à (A'B') sont concourantes, alors
la droite d_1' contenant A' et orthogonale à (BC)
la droite d_2' contenant B' et orthogonale à (CA)
la droite d_3' contenant C' et orthogonale à (AB) sont concourantes .
Indications :

1° Etablir d'abord que $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{A'C'}$ en utilisant le point de concours de d_1, d_2, d_3.
2° Justifier l'existence d'un point Ω' tel que : $\overrightarrow{\Omega'A}.\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{\Omega'B}.\overrightarrow{C'A'} = 0$
3° Démontrer alors que $\overrightarrow{\Omega'C}.\overrightarrow{A'B'} = 0$ et conclure.

EXERCICE 14

Le triangle OAB est rectangle en O. Une droite Δ passant par A coupe la hauteur (OH) en M et le cercle de diamètre [AB] en N. Montrer que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AN} = AO^2$.

EXERCICE 15

Soit Γ le cercle de centre O circonscrit à un triangle ABC.

La hauteur issue de A coupe (BC) en A ' et Γ en D.

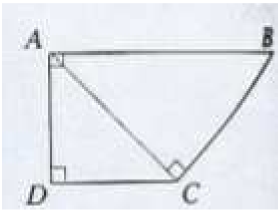
Soit E le point diamétralement opposé à A sur Γ. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AA'} .$$

EXERCICE 16

Dans le trapèze rectangle ABCD, la diagonale [AC] est orthogonale au côté [BC].

En calculant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



EXERCICE 17

Soit ABC un triangle équilatéral de côté m .
1°) I est le barycentre de (B , 4) et (A , 1) et J le barycentre de (C , 2) et (A , 3) .

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de m .
b) Prouver que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AC) .

2°) Soit a, b, c trois réels.
On désigne par K le barycentre de (A, a) et (B , b) et par L celui de (A , $a + b - c$) et (C , c) .
Montrer que les droites (KL) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $b = 2c$.

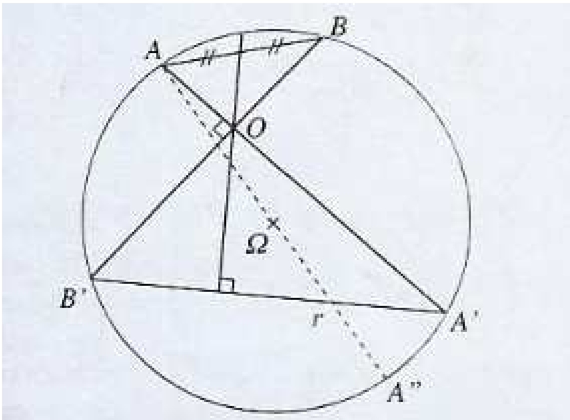
EXERCICE 18

Soit ABCD un carré, I et J les milieux de [AB] et [AD] .

Montrer que la médiane issue de A du triangle AID est une hauteur de triangle ABJ.

EXERCICE 19

Sur un cercle de centre Ω et de rayon *r*, on place quatre points A, B, A ' et B ' tels que les droites (BB ') et (AA ') soient orthogonales et sécantes en O.

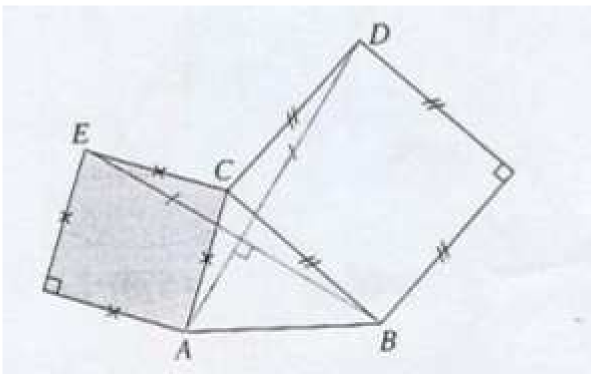


1°) En utilisant le diamètre [AA''] , montrer que : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = O\Omega^2 - A\Omega^2$.
2°) Montrer que la médiane issue de O du triangle OAB est une hauteur de triangle OA ' B '.

(On pourra prouver que $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0$.)

EXERCICE 20

A l'extérieur d'un triangle ABC, on construit deux carrés.

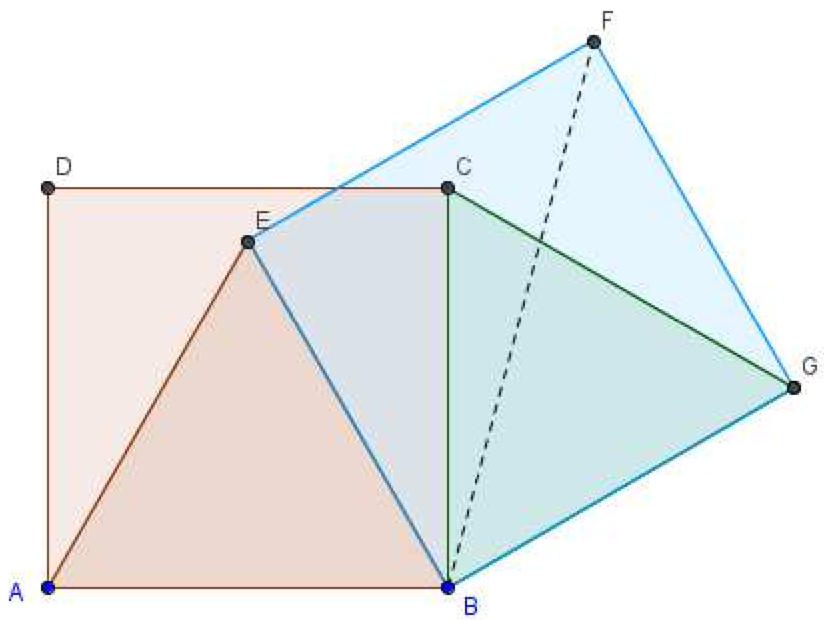


1°) Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$.

2°) Montrer que les droites (AD) et (EB) sont orthogonales et que AD = EB.

EXERCICE 21

A partir d'un triangle équilatéral ABE de côté 2, on construit deux carrés.



1°) a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$.

b) Montrer que le triangle BCG est équilatéral. En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$ puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF}$.

c) Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF}$.

d) Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$.
En déduire que les points D, E, G sont alignés.

2°) En utilisant le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$. Conclure.

EXERCICE 23

Soit ABCD un carré de côté 6. I le barycentre de (A , 2) et (B , 1) , J celui de (A , 1) et (D , 2), et K le point d'intersection des droites (ID) et (JC).

1°) Faire une figure.

Montrer que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.

2°) En utilisant un produit scalaire, montrer que : DK × DI = $\frac{1}{2}$ DA².

3°) Calculer les distances KD et KI.

4°) a) Soit L le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).

A l'aide d'un produit scalaire, calculer IL, puis LK

b) En déduire la construction d'un carré de côté $\frac{6}{5}\sqrt{10}$.

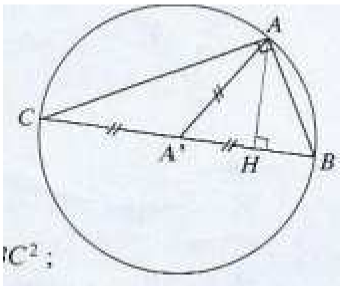
EXERCICE 24

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2 AB . on désigne par A' le milieu de [BC] et par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Le point H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC).
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AA') et (IJ) sont orthogonales.
1°) Calcul vectoriel
Etablir que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Conclure.
2°) Calcul analytique

a) On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Justifier que (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormal
du plan.
b) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.
c) Déterminer une équation de la hauteur issue de A à l'aide d'un vecteur normal.
Déterminer les coordonnées du point H , puis les coordonnées des points I et J .

d) Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$. Conclure.

EXERCICE 25 : Relations metriques dans un triangle rectangle



On se propose de démontrer que les six phrases suivantes sont équivalentes :

(1) ABC est rectangle en A. **(2)** $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(3) $AA' = \frac{1}{2} BC$ **(4)** $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

(5) $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$ **(6)** $AB \times AC = AH \times BC$.

A) 1°) En utilisant deux écritures de $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$, justifier que les propriétés « $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ » et «ABC est rectangle en A » sont équivalentes.

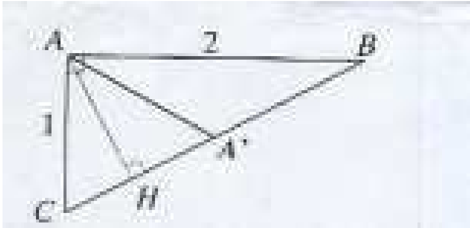
2°) Démontrer qu'il est équivalent d'écrire :

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 0$ et $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

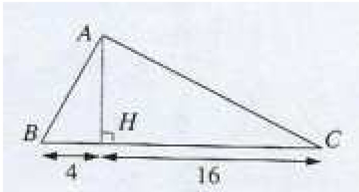
3°) En donnant deux écritures de l'aire d'un triangle ABC, montrer que **(6)** et **(1)** sont équivalentes.

4°) Déduire des égalités **(2)** et **(6)** que, si ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH], alors on a l'égalité : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

B) ABC est un triangle rectangle en A. Calculer BH, AH et AA' .



C) L'aire du triangle ABC étant égale à 80 unités d'aires, ce triangle est –il rectangle ?



D) On donne deux segments de longueurs *a* et *b* .Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{ab}$. (Penser à utiliser une des relations métriques dans un triangle rectangle) .

LIGNES DE NIVEAU

<u>EXERCICE 26</u>

Soient A, B deux points distincts tels que AB = $2a$.

Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :

1°) $MA^2 - MB^2 = a^2$. **2°)** $MA^2 + MB^2 = 3a^2$. **3°)** MA = 3 MB **4°)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -2a^2$

5°) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\dfrac{3a^2}{4}$ **6°)** $MA^2 + 3MB^2 = 4a^2$. **7°)** $MA^2 - 4MB^2 = 4a^2$.

EXERCICE 27

Soient les points A, B, C et α, β, γ des réels dont la somme n'est pas nulle. Soit G le barycentre du système $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

1°) Démontrer que, pour tout point M du plan :
$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$.

2°) Les points A, B, C et les réels α, β, γ étant fixés, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, k réel fixé.

3°) ***Application*** : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = $2a$ et I le milieu de [BC].

a) Démontrer que G, défini par $4\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ est le symétrique de I par rapport à A.

b) Déterminer $\mathscr{E}$, ensemble des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2 \text{ (on notera que } A \in \mathscr{E}\text{)}.$$

4°) ***Application*** : Soit a réel positif fixé et A, B, C points du plan tels que BC = $2a$, CA = $3a$, AB = $3a$.

a) Déterminer G barycentre de $\{(A , -2) (B , 3) (C , 3)\}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 54a^2$$

EXERCICE 28

Soient les points A, B, C et α, β, γ des réels dont la somme est nulle.

1°) Démontrer que, pour tout point M du plan :

a) $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe $\vec{V}$.

b) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 2\,\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} + \beta AB^2 + \gamma AC^2$

2°) Les points A, B, C et les réels α, β, γ étant fixés ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, k réel fixé.

3°) ***Application*** : Soit A, B, C points du plan tels que BC = $5a$, CA = $3a$, AB = $4a$. (a réel positif fixé) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 5a^2$
Construire cet ensemble.

4°) ***Application*** : Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$.

EXERCICE 29

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

1°) Etablir que : $GA^2 + GC^2 = \frac{1}{2}\ GA^2 + \frac{BC^2}{2}$ (*on pourra utiliser le théorème de la médiane*).

2°) En déduire que : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

3°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = BC^2 + CA^2 + AB^2$?

EXERCICE 30

On donne un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M , tels que :

1°) $(2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{BC}$

2°) $(3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AB}$

3°) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0.$

4°) $(2\,\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0.$

EXERCICE 31

On donne un rectangle ABCD tel que AB = a et AD = b et l'on considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans **R**, définie par : f : M $\mapsto$ $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

1°) Pour tout point M, démontrer que : $f(M) = 4\,OM^2 + h$, où O est le centre du rectangle et h un réel que l'on exprimera en fonction de a et b.

2°) En déduire les lignes de niveau de l'application f .

Comment choisir le réel k pour que la ligne de niveau k soit le cercle circonscrit au triangle ?

EXERCICE 32

Soit ABC un triangle rectangle en A, de centre de gravité G, et A' le milieu du segment [BC].

On pose BC = a.

1°) Exprimer 4 $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

2°) Exprimer $GB^2 + GC^2$ en fonction de a.

En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{3} a^2$.

3°) Prouver que, pour tout point M du plan, on a :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\, MG^2$.

4°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4} a^2 .$$

EXERCICE 33

Soit ABC un triangle isocèle tel que: AB =AC = 5 et BC = 6 .

1°) Montrer que $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 7$.

2°) Soit G le barycentre de { (A , 2) (B , 3) (C , 3) } . Construire G et montrer que AG = 3 .

3°) Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe :

$$f(M) = 2\, \overrightarrow{MB} . \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} . \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} .$$

Montrer que $f(M) = f(G) + 4\, MG^2$.

4°) Calculer f (A) et f (G) .

5°) Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) = f (A) et représenter cet ensemble .

EXERCICE 33

Construire un triangle ABC tel que : AB = 8, AC = 5 et BC = 6. I est le milieu de [AB].

1°) Construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 82$.

2°) Choisir k pour que la ligne de niveau $\mathscr{L}_k$ de la fonction $f : M \mapsto MA^2 + MB^2$ passe par C.

3°) Construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que : $61 \leq MA^2 + MB^2 \leq 82$.

4°) On note $\mathscr{G}_k$ l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$, où k est un réel donné.

a) Quelle est la nature de $\mathscr{G}_k$?

b) Choisir k pour que $\mathscr{G}_k$ passe par B , et construire $\mathscr{G}_k$ dans ce cas particulier.

EQUATIONS DE CERCLES

EXERCICE 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M (x ; y) du plan défini par :

$x^2 + y^2 - 2\,mx - 4\,my + 6\,m^2 - 4 = 0$, avec $m \in \mathbb{R}$..

1°) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ dans chacun des cas suivants :
a) $m = 0$? **b)** $m = 2$? **c)** $m = 3$?
2°) Peut-on déterminer le réel m pour que l'origine O du repère appartienne à l'ensemble $\mathscr{E}$?
3°) Existe-t-il un ensemble $\mathscr{E}$ contenant le point H (4 ; — 2) ?
4°) pour quelles valeurs de m l'ensemble $\mathscr{E}$ est-t-il un cercle ? Préciser alors son centre Ω et son rayon r en fonction de m .
5°) Montrer que, lorsque m varie, l'ensemble des centres Ω de ces cercles est un segment de droite.

EXERCICE 35

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du ou des cercles déterminés par les conditions :

1°) $\mathscr{C}$ a pour centre A(1 , 1) et passe par B (2 , 3) .

2°) $\mathscr{C}$ a pour centre Ω (2 , 0) et est tangent à la droite d'équation x + y + 1 = 0 .

3°) $\mathscr{C}$ passe par A (1 , 0) ; B (0 , 2) ; C (1 , 2) .

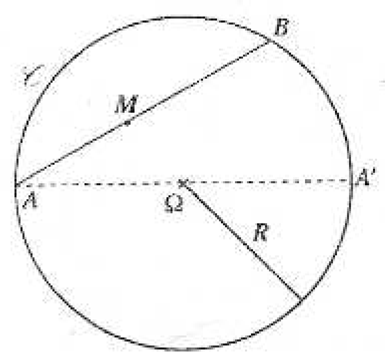
4°) $\mathscr{C}$ a pour diamètre [AB] avec A (3 , 2) et B (— 1 , 5) .

5°) $\mathscr{C}$ est circonscrit au triangle ABC avec A (2 , 3) ; B (— 2 , — 1) ; C (1 , — 1) .

EXERCICE 35 : Puissance d'un point par rapport a un cercle

A) Puissance d'un point par rapport à un cercle et lignes de niveau

Dans un plan P , soit un cercle C de centre Ω et de rayon R et M un point quelconque. On mène par M une sécante au cercle C qui le coupe en deux points A et B. A' est le point du cercle C diamétralement opposé à A.



1°) a) Etablir que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$.

b) Montrer alors que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$.

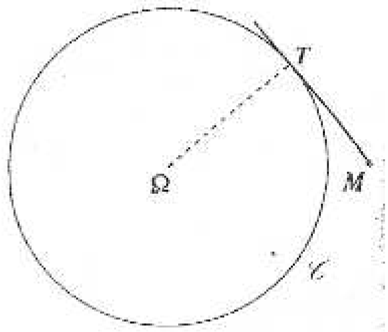
c) En déduire que ce produit scalaire est indépendant de la sécante issue de M.

2°) On pose $\Phi(M) = \Omega M^2 - R^2$.

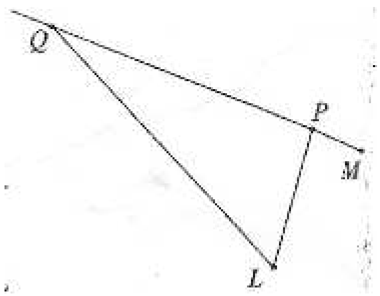
Le réel Φ(M) est appelé la puissance du point M par rapport au cercle C .

a) Lorsque M est un point extérieur au cercle C , on considère la tangente (MT) au cercle C en T.

Montrer que $\Phi(M) = MT^2$.



b) Soit un triangle MQL et M un point de la droite (PQ) tel que l'on ait : $\overline{MP} \times \overline{MQ} = ML^2$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PQL est tangent en L à la droite (ML).



3°) Etudier le signe de $\Phi(M)$ suivant la position de M dans le plan $\mathcal{P}$.

4°) Soit L_k la ligne de niveau k de l'application $\Phi : M \mapsto \Phi(M) = \Omega M^2 - R^2$

L_k est donc l'ensemble des points M tels que $\Phi(M) = k$.

a) Discuter suivant les valeurs de k la nature de la ligne L_k.

b) Déterminer et, lorsqu'elle existe, représenter L_k pour les valeurs suivantes de k : $k = -2R^2$, $k = -\frac{3}{4}R^2$ et $k = 0$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$R^2 \leq \Phi(M) \leq 3R^2 .$$

On retiendra de cette étude les résultats suivants :

Soit C un cercle de centre O et de rayon R, et M un point du plan.

La puissance de M par rapport au cercle C est :

$$\Phi(M) = OM^2 - R^2.$$

· Pour toute sécante passant par M et coupant le cercle en A et B,

$$\Phi(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

· SM est extérieur au cercle et (MT) est tangente en T au cercle C ,

alors : $\Phi(M) = MT^2$.

B) Axe radical de deux cercles

On considère deux cercles de centres distincts :C_1 de centre Ω_1 et de rayon R_1, et

C_2 de centre Ω_2 et de rayon R_2.

On note $\Phi_1(M)$, respectivement $\Phi_2(M)$, les puissances de M par rapport aux cercles C_1 et C_2 .

1°) a) Montrer que l'ensemble Δ des points M du plan tels que

$\Phi_1(M) = \Phi_2(M)$, est une droite perpendiculaire à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$.

b) Cette droite est appelée **axe radical** des cercles C_1 et C_2 .

Quel est l'axe radical de deux cercles sécants en A et B ?

2°) Construire Δ dans les *cas suivants (on suppose que l'unité choisie est le centimètre) :*

a) $R_1 = 2$, $R_2 = 5$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$; **b)** $R_1 = 3$, $R_2 = 4$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$.

3°) On considère maintenant trois cercles dont les centres sont distincts et non alignés :

C_1 de centre Ω_1 et de rayon R_1,

C_2 de centre Ω_2 et de rayon R_2,

$\mathcal{C}_3$ de centre Ω_3 et de rayon R_3.

Soit Δ_1 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$,

Δ_2 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$,

Δ_3 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

a) Montrer que les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point O.

Ce point est appelé **centre radical** des trois cercles $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
b) *Application* : construction de l'axe radical de deux cercles n'ayant aucun point commun.
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres Ω_1 et Ω_2 et de rayons R_1 et R_2 avec : $R_1 = 3$, $R_2 = 2$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$.
En utilisant un cercle $\mathcal{C}_3$ convenablement choisi, déterminer un point de l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Construire alors cet axe.
c) Démontrer que le centre radical de trois cercles est soit intérieur aux trois cercles, soit extérieur aux trois cercles, soit sur les trois cercles.

C) Cercles orthogonaux

On dit que deux cercles sont **orthogonaux** si, et seulement si,

ils sont sécants et si leurs tangentes respectives en chaque poin

d'intersection sont orthogonales.

1°) Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre Ω_1 et de rayon R_1.
Soit $\mathcal{C}_2$ un cercle de centre Ω_2 et de rayon R_2.
Donner un encadrement de la distance $\Omega_1\Omega_2$ de façon à ce que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient sécants.

2°) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .
On définit les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ par les équations cartésiennes suivantes :
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$ et $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$.
a) Déterminer les coordonnées des points Ω_1 et Ω_2 et calculer R_1, puis R_2.
b) En utilisant la question **1° ,** montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants.
c) Soit I et J les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, I désignant le point d'intersection d'abscisse nulle.

Déterminer les coordonnées de I et J.
d) Déterminer une équation de la tangente au cercle C_1 en I , ainsi qu'une équation de la tangente au cercle C_2 en I.
Montrer alors que C_1 et C_2 sont orthogonaux.
e) Calculer la puissance du point Ω_1 par rapport au cercle C_2 , et la puissance du point Ω_2 par rapport au cercle C_1 .
Comparer les nombres obtenus.

f) Soit D la droite passant par Ω_1 et parallèle à l'axe (O, $\vec{i}$) .
Donner les coordonnées des points d'intersection P_1 et Q_1 de D avec le cercle C_1 , puis les coordonnées des points d'intersection P_2 et Q_2 de D avec le cercle C_2 .

Montrer alors que : $\Omega_1P_1^2 = \Omega_1Q_1^2 = \overrightarrow{\Omega_1P_2} \cdot \overrightarrow{\Omega_1Q_2}$.

CHAPITRE 8 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

1. LE RADIAN (Rappels de Seconde)

La notion d'angle géométrique est supposée connue.

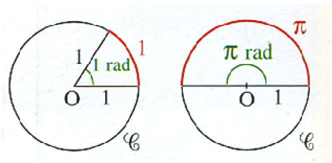
<u>Définition du radian</u>

Le radian (en abrégé rad) est une unité de mesure d'angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians. On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de x radians et inversement.

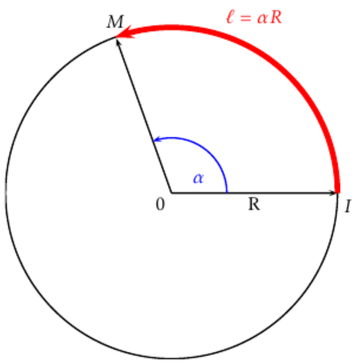
degrés	180	x
radians	π	α

Sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.



Un angle de π rad intercepte sur le cercle $\mathcal{C}$ un arc de longueur π. Cet angle a aussi pour mesure 180°.

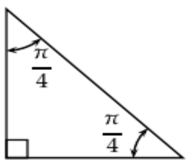
Si I et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon R tels que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ soit égale à ℓ, alors la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ est égale à $\frac{\ell}{R}$.



On obtient le tableau de conversions suivant :

Angle	plein	plat	droit	fig.b	fig.a	fig.b
Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en redians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Figure a :
triangle rectangle isocèle



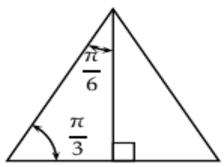


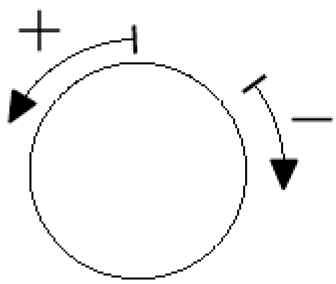
Figure b :
triangle équilatéral

2. ARCS ORIENTES

1.1 Orientation du plan

Nous admettrons que, sur un cercle, il n y a que **deux** sens de parcours possibles.

Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces sens de parcours : le sens choisi est généralement *le sens contraire des aiguilles d'une montre*, sens dit **direct** ou trigonométrique. l'autre est dit **indirect**.

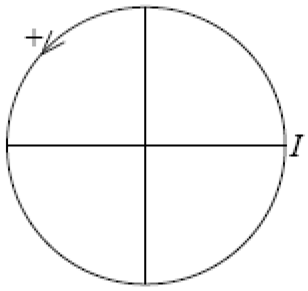


Orienter le plan, c'est c'est choisir une fois pour toutes :

a) un point fixe O appelé **origine** ;

b) l'un de ces sens de parcours sur tous les cercles du plan.

Dans le plan orienté, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un autre point I appelé **origine des arcs**.



<u>1.2 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique</u>

A tout point M du cercle trigonométrique, on sait associer une famille de nombres réels appelés <u>abscisses curvilignes</u> de M. Cette association peut être conçue, par exemple, par le procédé suivant :

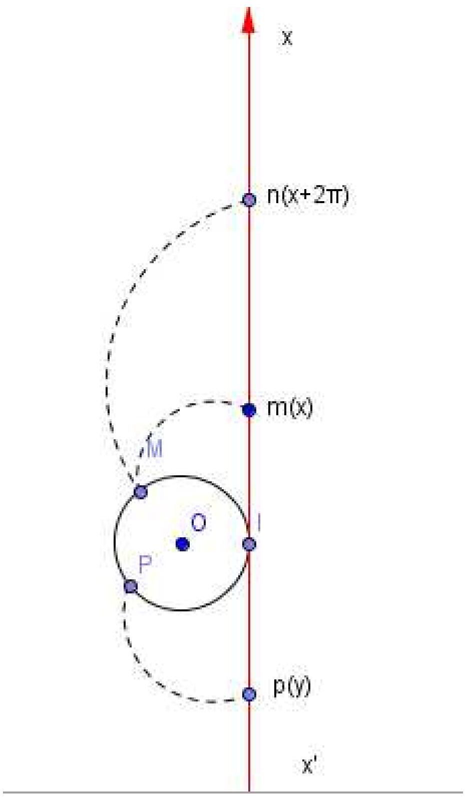
On considère la droite Δ tangente à $\mathscr{C}$ en I : en la munissant du repère $(I, \vec{j})$, cette droite graduée représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On enroule la droite *d* autour du cercle $\mathscr{C}$ de la manière qui suit :

— La demi-droite [Ix) des points de Δ d'abscisses positive est enroulée dans le sens direct ;

— La demi-droite [Ix') des points de Δ d'abscisses positive est enroulée dans le sens indirect.

Un point m d'abscisse x de Δ vient coïncider avec un unique point M de $\mathscr{C}$. On dit que le point M est l'**image** du réel x.

Par ce procédé de l'enroulement de la droite des réels, on peut associer à chaque nombre réel x un point M et un seul du cercle. Réciproquement, à chaque point du cercle on associe un infinité de nombres réels. Si x est l'un de ces nombres, les autres sont de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.



Chacun de ces nombres …., $x - 4\pi$, $x - 2\pi$, x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$,…. , $x + 2k\,\pi$ est appelée **abscisse curviligne** du point M. Ainsi, tout point M de $\mathscr{C}$ a *une infinité d'abscisses curvilignes*.

Deux quelconques d'entre elles x et x' ont pour différence un multiple entier de 2π. En effet,

$$(x + 2k\pi) - (x + 2p\pi) = 2(k - p)\pi.$$

On dit qu'elles sont **congrues modulo 2π** et on note $x \equiv x' \ [2\pi]$.

1.3 Mesures d'un arc orienté

Un arc orienté est un couple (M, N) de points du plan. On le note $\widehat{MN}$.

Soit x_M une abscisse curviligne du point M et x_N une abscisse curviligne du point N.

Alors le réel $x_N - x_M$ est appelé **mesure en radians** de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

Tout arc orienté a une infinité de mesures, d'après la définition des abscisses curvilignes. Si α est l'une d'elles, les autres sont de la forme α + 2kπ, k ∈ $\mathbb{Z}$. On note mes $\widehat{MN} \equiv \alpha\ [2\pi]$.

Les propriétés suivantes sont immédiates et valables pour tous points M, N et P du cercle trigométrique :

1) mes $\widehat{MN} \equiv -$ mes $\widehat{NM}\ [2\pi]$.

2) mes $\widehat{MN}$ + mes $\widehat{NP}$ = mes $\widehat{MP}$ (Relation de CHASLES)

Nous admettons qu'il existe une et une seule mesure en radians de l'arc $\widehat{MN}$ appartenant à

]— π; π] : on dit que c'est la *mesure principale* de l'arc orienté.

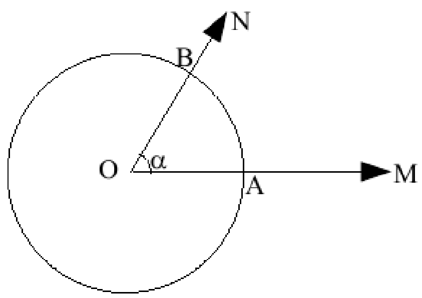
3. ANGLE D'UN COUPLE DE VECTEURS

On appelle **angle orienté de vecteurs** tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls du plan. On le note $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Soient M et N les points (leur existence est assurée par l'axiome d'EUCLIDE) tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{ON} = \vec{v}.$$

La demi-droite [OM) coupe le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ en A.
La demi-droite [ON) coupe le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ en B.
Par définition, on appelle **mesure en radians de l'angle de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$. Elle est notée $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$.



Il est clair qu'on obtient une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ en calculant la longueur parcourue sur le cercle trigonométrique pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Comme il y a une infinité de mesures en radians de l'arc orienté $\widehat{AB}$, tout angle de vecteurs a également une infinité de mesures. Si α est l'une d'elles, les autres sont de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une seule d'entre elles appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Elle est appelée **mesure principale** de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

Remarque :

La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

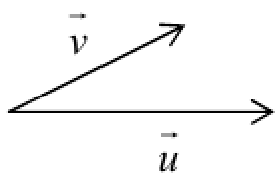
L'angle géométrique associé à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est noté $\widehat{BAC}$.

Propriétés :

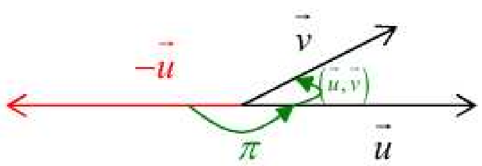
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a la relation suivante, dite de Chasles :

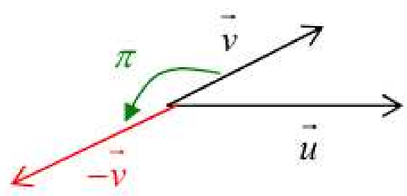
$$\overline{(\vec{u},\vec{v})} + \overline{(\vec{v},\vec{w})} = \overline{(\vec{u},\vec{w})} \quad [2\pi] .$$

- $\overline{(\vec{v},\vec{u})} = -\overline{(\vec{u},\vec{v})} \quad [2\pi]$.

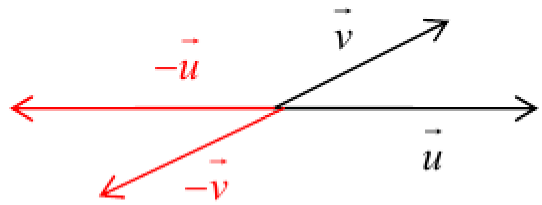


- $\overline{(\vec{u},-\vec{v})} = \overline{(-\vec{u},\vec{v})} = \overline{(\vec{u},\vec{v})} + \pi \quad [2\pi]$.





• $\overline{(-\vec{u}, \overline{-\vec{v}})}$ = $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ [2π].



La relation de CHASLES pour les mesures d'angles orientés est une conséquence directe de la relation analogue relative aux mesures d'arcs orientés.

Les autres propriétés se justifient aisément en utilisant la relation de Chasles et le fait que :

$$\overline{(\vec{u}, \overline{-\vec{u}})} = \pi\ [2\pi].$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

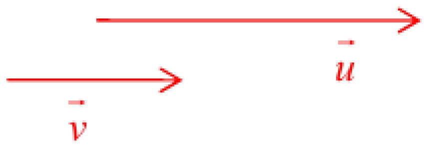
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k et k' deux réels non nuls.

a) Si k et k' sont de même signe, alors $\overline{(k\vec{u}, k'\vec{v})}$ = $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ [2π] ;

b) Si k et k' sont de signes contraires, $\overline{(k\vec{u}, k'\vec{v})}$ = $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ + π [2π].

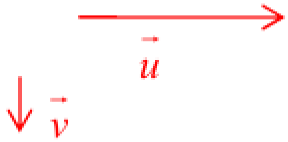
<u>Colinéarité et orthogonalité</u>

• Si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, alors $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ = 0 + 2kπ, k ∈ ℤ.



• Si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraires, $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ = π + 2kπ, k ∈ ℤ.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on a : $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$



<u>Egalité d'angles de vecteurs</u>

Deux angles de vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})}$ sont dits **égaux** si et si et seulement si ils ont les mêmes ensembles de mesures.

On note alors $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ [2π].

Dans la pratique, on ne distingue pas un angle de vecteurs de sa mesure. Par exemple, l'écriture $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ signifie qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $-\frac{\pi}{3}$. Toutes les autres mesures sont alors les nombres de la forme $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ **[π]** signifie que :

• ou bien, on a : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ [2π].

• ou bien, on a : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) + \pi$ [2π].

<u>Exercices d'application :</u>

<u>Exercice 1</u> :

Déterminer les mesures principales des angles orientés de vecteurs dont l'une des mesures est respectivement : $\frac{37\pi}{3}, \frac{157\pi}{4}, \frac{-1115\pi}{6}$ *puis représenter ces points sur le cercle trigonométrique*

Réponses : $\frac{37\pi}{3} = \frac{36\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 12\pi + \frac{\pi}{3}$, et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$, donc la mesure principale de cet angle est $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$.

On peut également procéder ainsi : la mesure principale cherchée est de la forme + 2kπ, k ∈ ℤ. Cherchons k. On doit avoir : $-\pi < \frac{37\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$, soit en simplifiant par π et en réduisant au même dénominateur : $-\frac{20}{3} < k\ \ g \leq -\frac{17}{3}$. Comme k est un entier, il vient k = − 6.

Donc la mesure principale cherchée est : $\frac{37\pi}{3} + 2(-6)\pi = \frac{37\pi}{3} - \frac{36\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2 :

Représenter sur le cercle trigonométrique les points dont les abscisses curvilignes sont les nombres
de la forme $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit (ABC) un triangle équilatéral tel que $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{3}$ *[2π].*

Calculer $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ *,* $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})}$ *et* $\overline{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})}$ *.*

Exercice 4

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs non nuls tels que* $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{3\pi}{7}$ *[2π]. Calculer :*

$\overline{(\vec{u},\overline{-\vec{v}})}$ *,* $\overline{(\vec{v},2\vec{u})}$ *,* $\overline{(\vec{v},\overrightarrow{-3u})}$ *et* $\overline{(-\vec{u},-\vec{v})}$ *.*

4. LIGNES TRIGONOMETRQUES

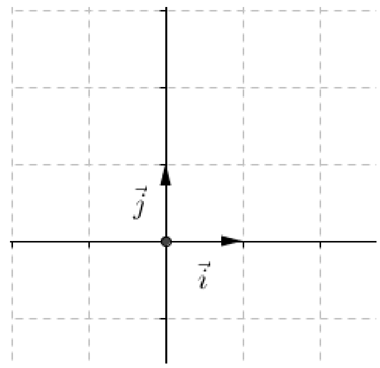
4.1 Bases orthonormées directes

Une base orthonormée (on dit aussi orthonormale) est dite **directe** si et seulement si une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $+\frac{\pi}{2}$ rad.

Une base orthonormée est dite **indirecte** si et seulement si une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $-\frac{\pi}{2}$ rad.

Un **repère** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit **direct** si et seulement si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est directe.

Exemple : Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée directe.



Comment sont les bases $(\vec{j}, \vec{i})$, $(\vec{j}, -\vec{i})$, $(-\vec{i}, \vec{j})$, $(-\vec{j}, -\vec{i})$.

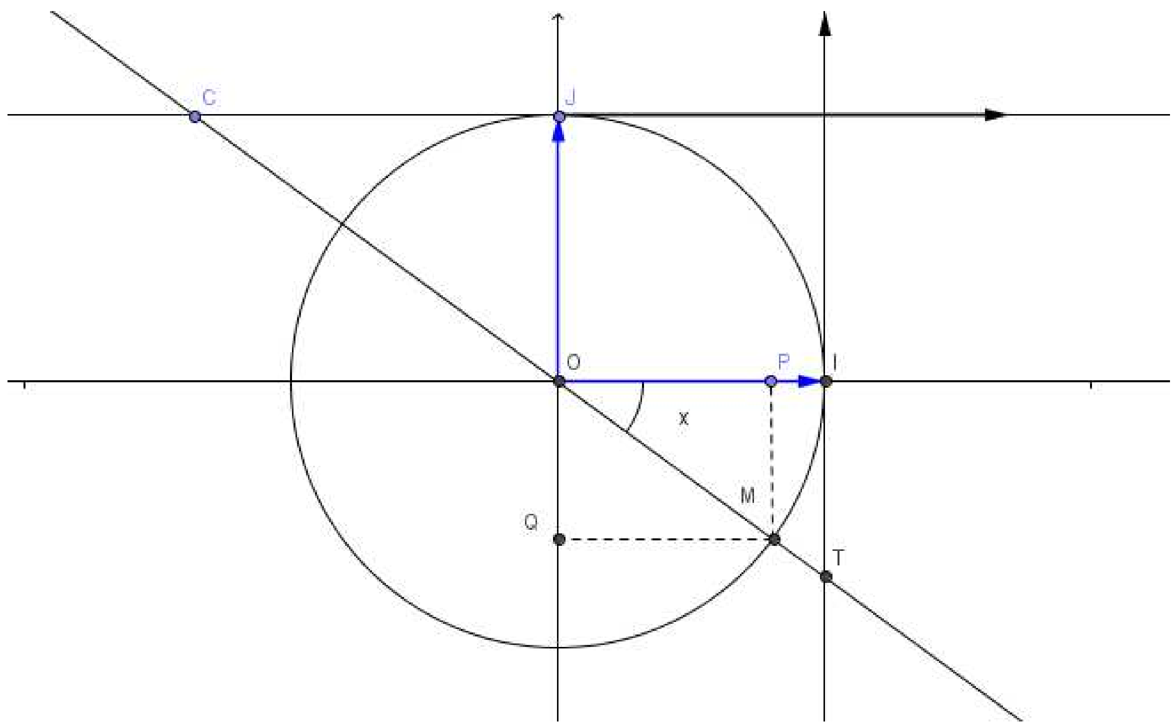
Réponses : La base $(\vec{j}, \vec{i})$ est indirecte ; la base $(\vec{j}, -\vec{i})$ est directe ; la base $(-\vec{i}, \vec{j})$ est indirecte ; la base $(-\vec{j}, -\vec{i})$ est indirecte.

4.2 Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit x un réel quelconque et M un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'abscisse curviligne x, c'est-à-dire tel qu'une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ soit le réel x.

Par définition, on appelle cosinus et sinus de x (notés en abrégé cos x et sin x) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Sur la figure ci-dessus, P et Q étant les projetés orthogonaux respectifs de M sur (O, $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$), on a :

$$\cos x = \overline{OP} \quad \text{et} \quad \sin x = \overline{OQ}$$

<u>Propriétés élémentaires du cosinus et du sinus</u>

Pour tout réel x, on a :

1 . $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin x(x + 2k\pi) = \sin x$ $(k \in \mathbb{Z})$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Ces propriétés sont des conséquences immédiates des définitions. On s'en convainc en examinant la figure précédente.

<u>Tangente et cotangente</u>

Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $\mathbf{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ et pour tout $x \neq k\pi$, on pose $\mathbf{\text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}}$.

On a $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, soit :

$$\boxed{\mathbf{4.}\quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

De même, on montre que :

$$\boxed{\mathbf{4a.}\quad 1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}}$$

D'après la figure ci-dessus, on a en considérant les triangles OIM et OPM (configuration de THALES) :

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{IT}}$, d'où l'on déduit que : $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\overline{IT}}$, soit $\overline{IT} = \tan x$. Par conséquent :

$\overrightarrow{IT} = \tan x\,\vec{j}$

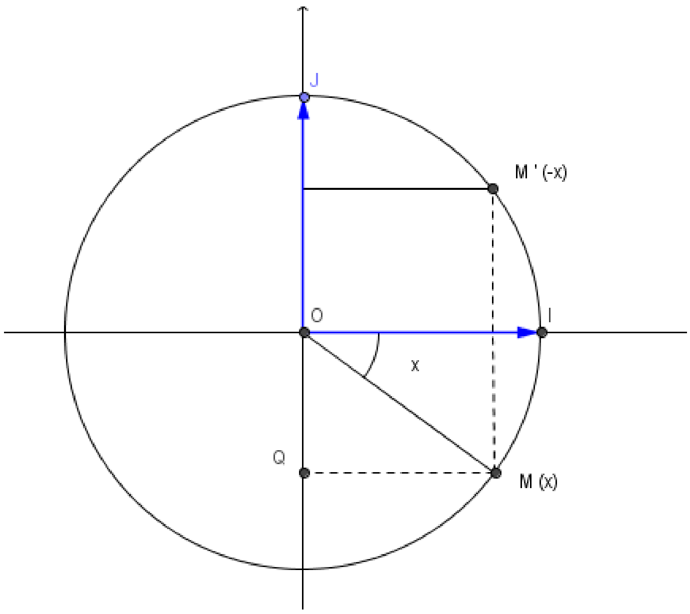
Pour cette raison, l'axe (IT) est appelé **axe des tangentes**.

De même, en considérant les triangles OJC et OQM, on a : $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{JC}}$, d'où l'on déduit que : $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\overline{JC}}$, soit $\overline{JC}$ = cotan x.

L'axe (JC) est appelé **axe des cotangentes**.

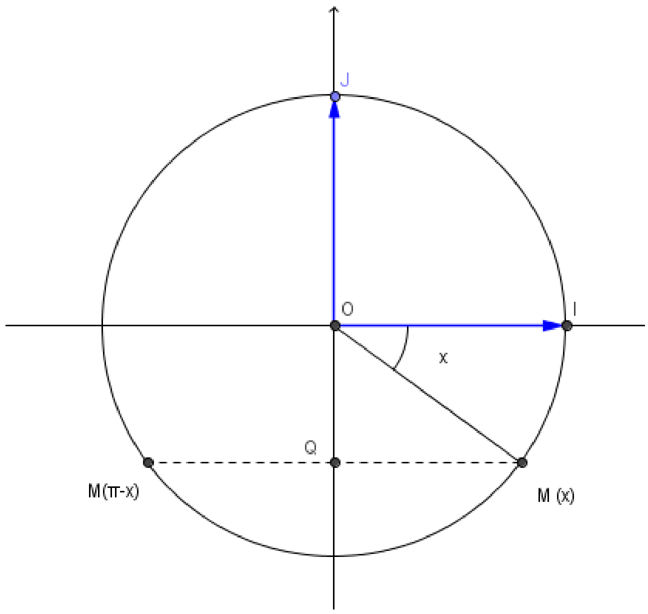
4.3 Formules des angles associés

Soit x un réel. Les angles associés à x sont : $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$. Les lignes trigonométriques de ces réels sont reliés à celels de x, comme on le voit en examinant les configurations ci-dessous :



Les points M et M' du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'abscisses curvilignes respectives x et $(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$. Ils ont donc même abscisse et des ordonnées opposées dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On en déduit que :

5.a	**$\cos(-x) = -\cos x$**
5.b	**$\sin(-x) = \sin x$**
5.c	**$\tan(-x) = -\tan x$**



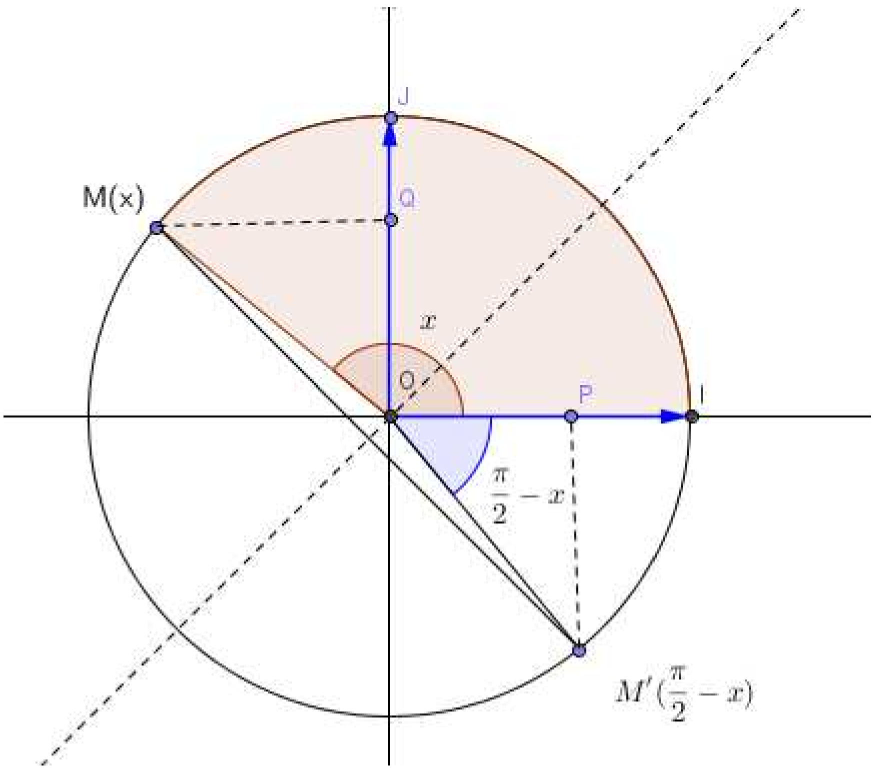
Les points M et M' du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'abscisses curvilignes respectives x et (π−x) sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{j}$). Ils ont donc même ordonnée et des abscisses opposées dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{j}$). D'où :

6.a cos (π − x) = cos x
6.b sin(π −x) = − sin x
6.c tan(π −x) = − tan x

En remplaçant x par (−x) dans les formules (6) et en utilisant les formules (5), on en déduit que :

7.a cos (π + x) = −cos x
7.b sin(π +x) = − sin x
7.c tan(π +x) = tan x

En examinant la figure ci-dessous, on se convainc que les arcs $\widehat{JM}$ et $\widehat{IM'}$ ont même longueur



Par consequent, les angles $\widehat{QOM}$ et $\widehat{POM'}$ sont égaux, et dans les triangles rectangles OQM et OM'P, ona : $\begin{cases} OM' = OM \\ PM' = QM \\ OP = OQ \end{cases}$. Il en résulte que :

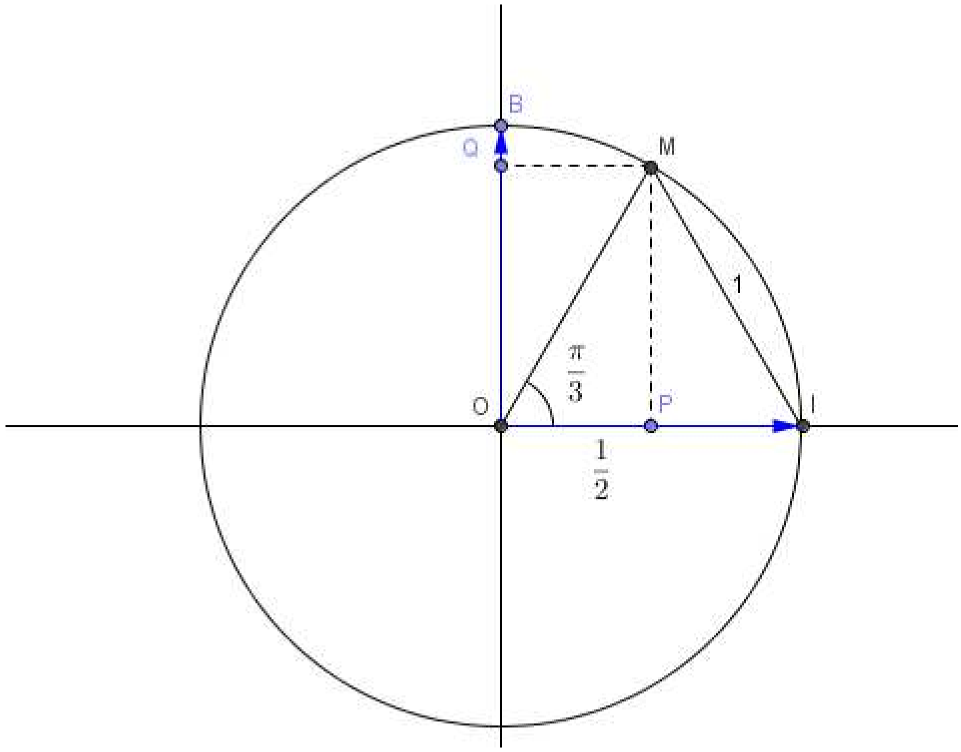
8.a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
8.b $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
8.c $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan } x$

Dans les formules (8), en remplaçant x par (−x), et en utilisant les formules (5), on obtient :

9.a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
9.b $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
9.c $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{cotan } x$

4.4 Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente

Pour obtenir le point M du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$, on reporte sur $\mathscr{C}$, à partir du point I un arc de cercle de longueur 1.



Le triangle OIM est alors équilatéral (car OI et OM sont des rayons du cercle) et par conséquent le projeté orthogonal P de M sur (OI) est tel que : OP = $\frac{1}{2}$.

D'autre part, une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est $\frac{\pi}{3}$ (car 60°= $\frac{\pi}{3}$ rad).

Il résulte de tout cela que $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$. Du fait que $\sin\frac{\pi}{3} = \overline{OQ} > 0$, et de la relation fondamentale

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit facilement que $\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

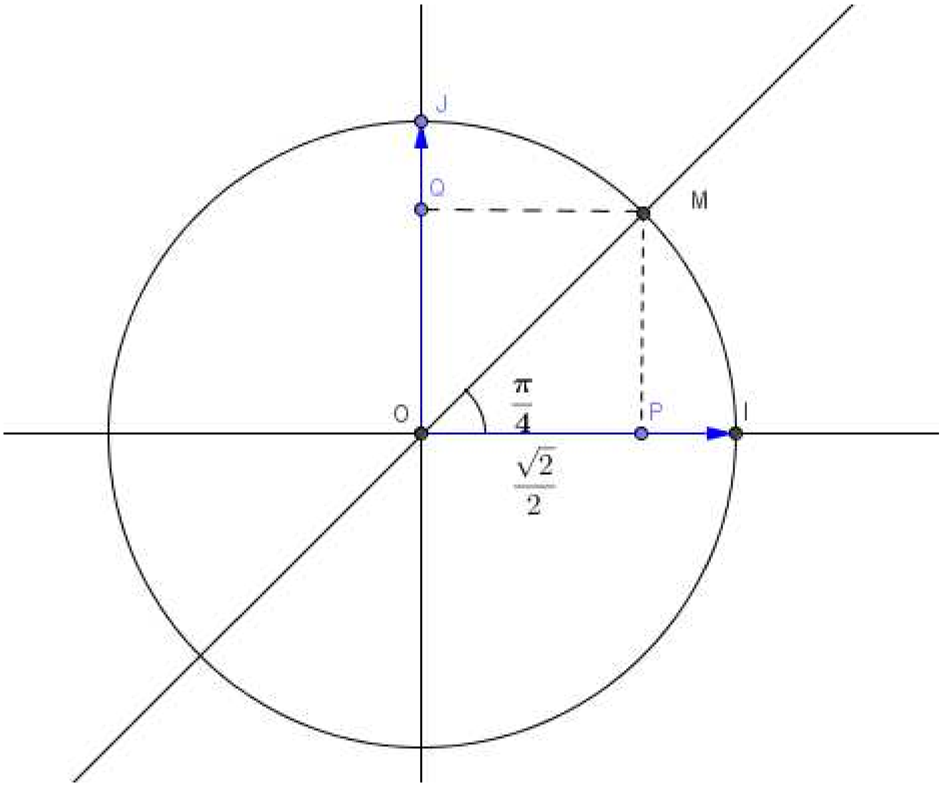
En utilisant les formules (8), on en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, soit :

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

De même, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, soit :

$$\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$$

Considérons maintenant la figure suivante, où M est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ avec le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

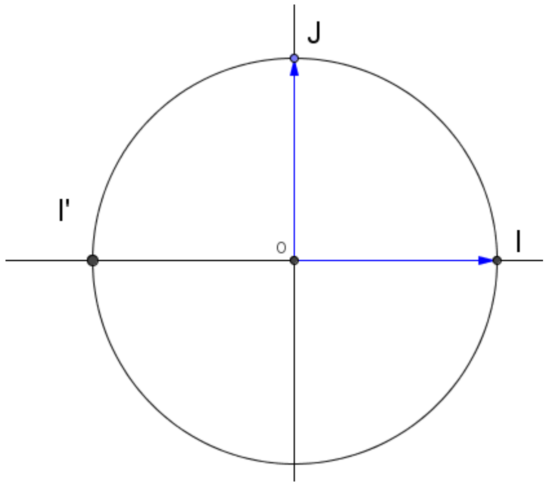


M est équidistant (propriété classique de la bissectrice) des côtés de l'angle et il en résulte aussitôt que le quadrilatère OPMQ est un carré. D'autre part, il est clair qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est $\frac{\pi}{4}$ rad (car l'arc $\widehat{IM}$ est la moitié de l'arc $\widehat{IJ}$ dont la longueur est $\frac{\pi}{2}$).

Par suite, on a : OP = OQ = $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$, d'où l'on déduit que $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$, soit $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ $\mathbf{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (car $\overline{OP} > 0$) et par suite :

$$\mathbf{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Enfin, sur la figure ci-dessous, les points I, J et I' ont pour abscisses curvilignes respectives 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

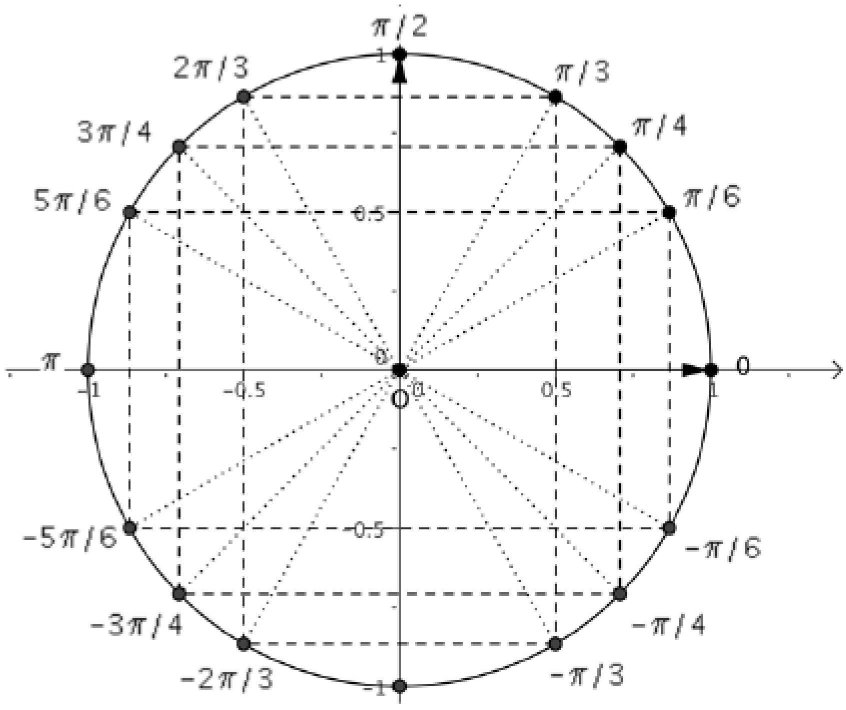


On en déduit que : **cos 0 = 1** et **sin 0 = 0** ; **cos $\frac{\pi}{2}$ = 0** et **sin $\frac{\pi}{2}$ =1** et enfin **cos π = − 1** et sin π = **0**.

Nous résumons tous ces résultats dans le tableau suivant, à connaître par cœur :

α		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin α		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan α		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DEFINIE !	0

La figure suivante permet d'en déduire quelques autres valeurs :



Exercice d'application

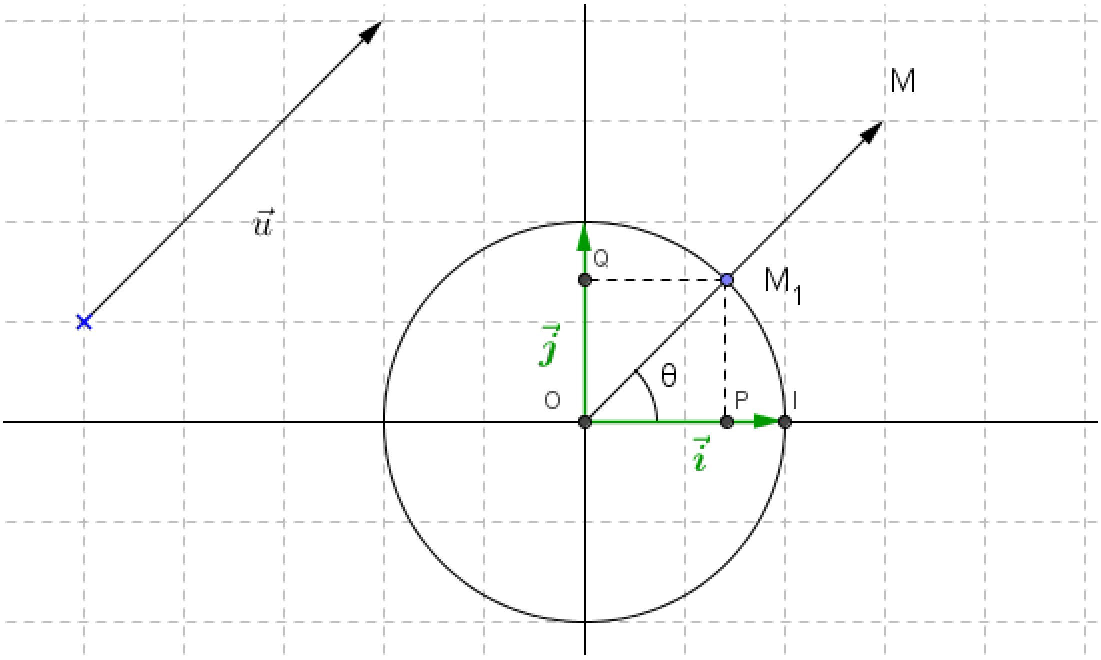
Calculer : a = cos $\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, b = sin $\left(\frac{176\pi}{3}\right)$, c = cos $\left(-\frac{139\pi}{6}\right)$ et d = tan $\left(\frac{173\pi}{4}\right)$

<u>Réponses</u> : $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $d = 1$

4.5 Formules d'addition

a) coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée directe

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et M le point du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Posons $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$. Alors, on vérifie facilement que $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur unitaire (c'est-à-dire que $\|\overrightarrow{u_1}\| = 1$) et si M_1 désigne le point tel que $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{u_1}$, M_1 est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



Soit θ une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On a alors $\overrightarrow{u_1}$ = cos θ $\vec{\imath}$ + sin $\vec{\jmath}$.

D'où : $\overrightarrow{OM}$ = OM $\overrightarrow{u_1}$ = $\|\vec{u}\|$ $(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$.

Il en résulte immédiatement que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(\|\vec{u}\|\cos\theta, \|\vec{u}\|\sin\theta)$ dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Théorème : Dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tout vecteur $\vec{u}$ non nul a des coordonnées de la forme (a, b) avec : ***a*** **=** $\boldsymbol{\|\vec{u}\|\cos(\vec{\imath}, \vec{u})}$ et **b =** $\boldsymbol{\|\vec{u}\|\sin(\vec{\imath}, \vec{u})}$

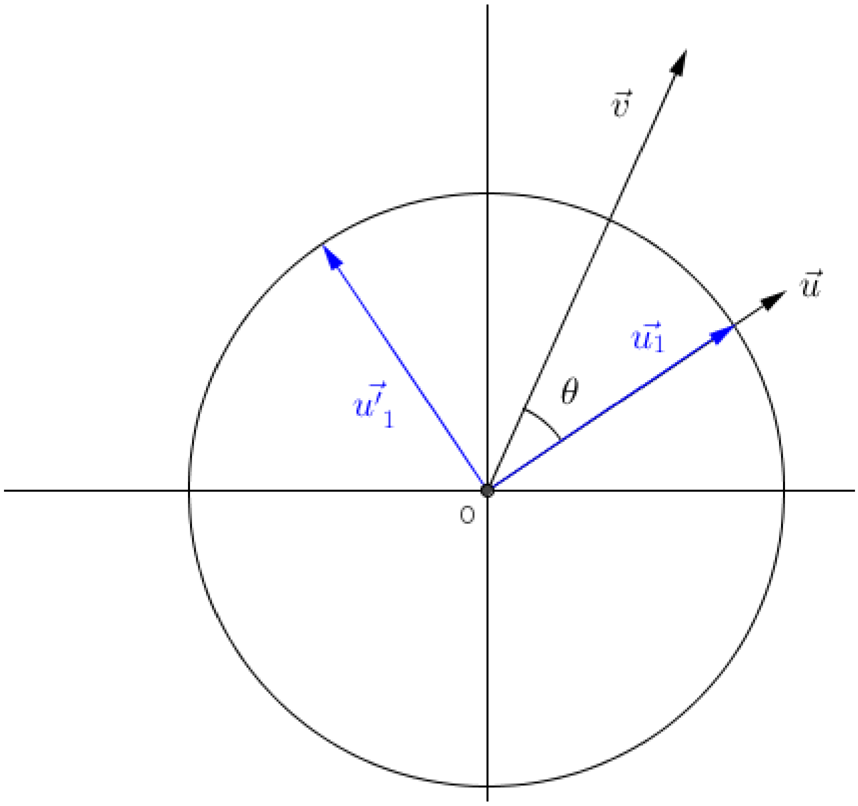
b) Expression trigonométrique du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls quelconques, θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Posons $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ ($\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur unitaire) et soit $\overrightarrow{u'_1}$ le vecteur tel que :

$$\left\|\overrightarrow{u'_1}\right\| = 1 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u'_1}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

On dit que $\overrightarrow{u'_1}$ est le vecteur **directement perpendiculaire** à $\overrightarrow{u_1}$.



$\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u'_1}\right)$ est alors une base orthonormée directe et dans cette base, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives :

$\vec{u}\ (\|\vec{u}\|, 0)$ et $\vec{v}\ (\|\vec{v}\| \cos\theta, \|\vec{v}\| \sin\theta\ )$, d'après a), puisque θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \vec{v})$.

Il en résulte alors que :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\theta + 0 \times \|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\theta$.

> **<u>Théorème</u>** : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté. On a alors :
>
> $$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\theta}$$
>
> où θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

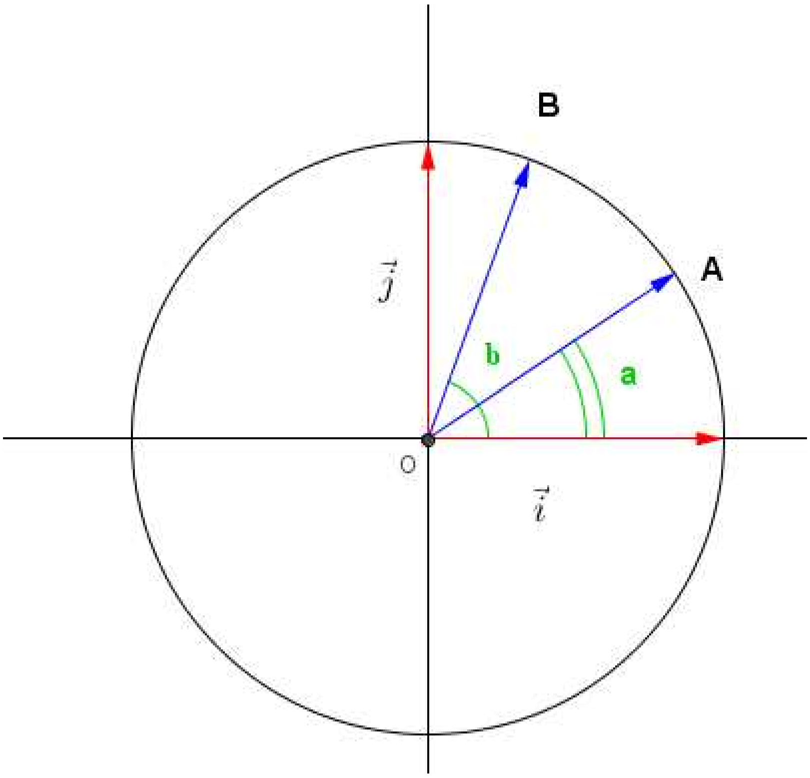
<u>c) Formules d'addition</u>

<u>Théorème</u> : Pour tous réels *a* et *b*, on a :

10. a $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	**10. b** $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
10. c $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	**10. d** $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, de centre O muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on a placé le point A tel que ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OA}$) = a et le point *B* tel que : ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$) = b. Les coordonnées de A sont donc d'après le a) ci-dessus (cos a, sin a) et celles de B, sin b, cos b).



Par ailleurs, d'après la relation de CHASLES, ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = ($\overrightarrow{OA}$, $\vec{\imath}$) + ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$) et puisque

($\overrightarrow{OA}$, $\vec{\imath}$) = − ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OA}$) = − a et que ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$) = b, on obtient : ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = $b - a$.

Exprimons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

− en utilisant les coordonnées des vecteurs dans la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \textbf{(1)}$$

− en utilisant l'expression trigonométrique du produit scalaire (voir b) ci-dessus) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad \textbf{(2)}$$

Or OA = OB = 1 et ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = $b - a$, donc (2) s'écrit :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a - b) \quad \textbf{(3)}$$

Comparant alors (1) et (3), on obtient la formule (10.a).

Dans cette dernière formule, remplaçons b par (−b). Il vient :

$$\cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b).$$

Or $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$, d'après les formules d'angles associés ; d'où :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Dans la formule (10.a), remplaçons a par $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$. Il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

et puisque, pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, on en déduit aisément la formule (10.d).

Enfin, la formule (10.c) s'obtient de manière analogue à partir de la formule (10.d) en y remplaçant b par $(-b)$.

<u>Exemple</u> : En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$.

En effet, on peut écrire d'après la formule (10.b) :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Or les valeurs des sinus et cosinus de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont connues d'après les formules d'angles remarquables (§). On obtient donc :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} - \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}.$$

<u>Remarque</u>: Les formules d'addition permettent de retrouver les formules d'angles associés. Par exemple, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$, puisque $\sin\frac{\pi}{2} = 0$.

<u>EXERCICE D'APPLICATION</u>

Soit x un nombre réel . simplifier les expressions:

$$A = \sin(x+\pi) + \cos(x-\pi) - \sin(x-7\pi) + \cos(x-121\pi)$$

$$B = \sin(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x-\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{117\pi}{2} - x) - \cos(x - \frac{119\pi}{2})$$

Activité : Calcul de tan (a + b) et de tan (a – b)

Soit a et b deux réels tels que l'on ait : cos $a \neq 0$, cos $b \neq 0$, cos $(a + b) \neq 0$ et cos $(a - b) \neq 0$.

1°) Exprimer tan(a + b) sous forme de quotient en fonction de sin a, cos a, sin b et cos b.

2°) En divisant le numérateur et le dénominateur de ce quotient par cos a cos b, en déduire la formule :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \textbf{(11.a)}$$

3°) En remplaçant b par $(-b)$ dans (11.a) , vérifier que l'on a aussi :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad \textbf{(11.b)}$$

d) Formules de duplication

Dans les formules (10.b) et (10.d), remplaçons b par a. On obtient les formules suivantes, dites de duplication :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \textbf{(12)}$$

En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient aussi :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{et} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \textbf{(13)}$$

Les formules (13) s'écrivent aussi :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad \textbf{(14)}$$

Dans la formule 11.a, remplaçons b par a pour obtenir :

(15) $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-ta^2a}$

.

e) Formules de linéarisation et de factorisation

Activité : *1°) Par addition ou soustraction de certaines des formules (10), vérifier les formules :*

16.a $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$	**16.c** $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
16.b $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$	**16.d** $2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

2°) On pose $p = a + b$ et $q = a - b$.
Montrer que les formules (15) s'écrivent :

17.a $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	**16.c** $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
16.b $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	**16.d** $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

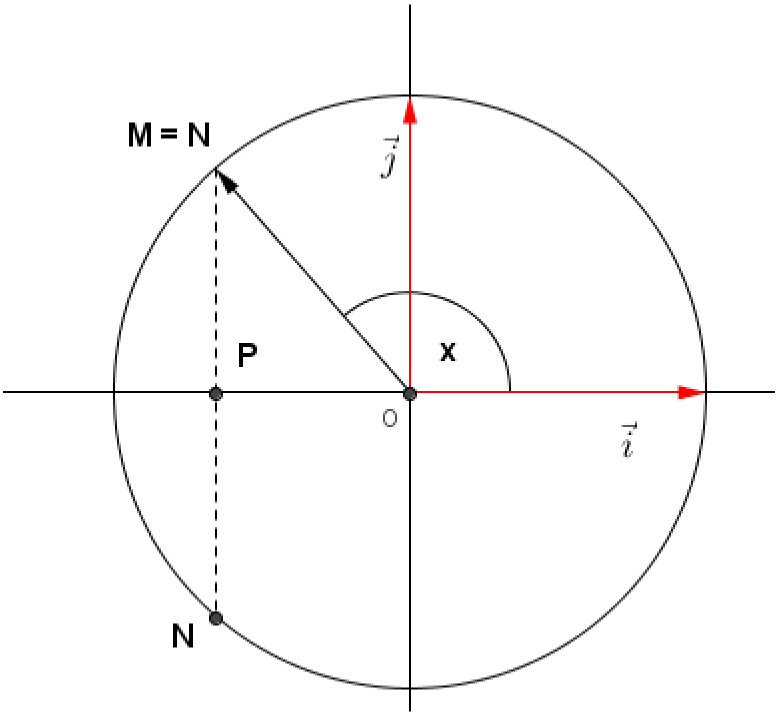
Remarque: L'intérêt des formules (16) est qu'elles permettent de mettre sous forme de produit les expressions trigonométriques. On s'en sert par exemple pour résoudre des équations (voir § ci-dessous). Elles ne sont pas exigibles, d'après le programme, et on ne doit donc pas chercher à les retenir par cœur. Mais elles se déduisent facilement des formules d'addition, qui elles, doivent absolument être retenues.

5. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

5.1 Equations de la forme cos x = cos a

Soit x et a deux réels et M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'abscisse x.

Soit N le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.



Dire que cos x = cos α revient à dire que M et N ont la même abscisse dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On ne peut alors avoir que deux situations :

— Soit M = N ce qui signifie que x = α + 2kπ

— Soit M et N sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{\imath}$) et alors : x = − α + 2k'π.

<u>Théorème</u> :
L'équation cos x = cos α, d'inconnue réelle x, a pour solutions dans $\mathbb{R}$ les réels x tels que :

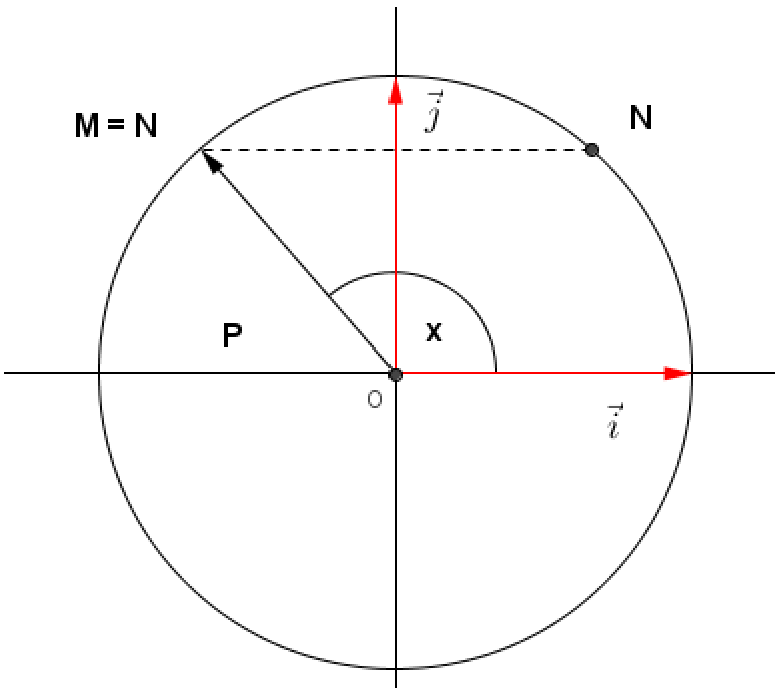
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \alpha + 2k\pi} \\ \quad \textbf{ou bien} \\ \boldsymbol{x = -\alpha + 2k'\pi} \end{cases} \quad \textbf{k, k' étant des entiers relatifs}$$

<u>5.2 Equations de la forme sin x = sin α</u>

Avec les mêmes notations qu'au 5.1, dire que cos x = cos α revient à dire que M et N ont la même ordonnée dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). De deux choses l'une :

— Soit M = N ce qui signifie que x = α + 2kπ

— Soit M et N sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{\jmath}$) et alors : x = π − α + 2k'π.



<u>Théorème</u> :
L'équation sin x = sin , d'inconnue réelle x, a pour solutions dans $\mathbb{R}$ les réels x tels que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + 2k\pi} \\ \quad \textbf{ou bien} \\ \boldsymbol{x = \pi - a + 2k'\pi} \end{cases} \quad \textbf{k, k' étant des entiers relatifs}$$

5.2 Equations de la forme tan x = tan α

Avec les mêmes notations qu'au 5.1, dire que tan x = tan α revient à dire que les droites (OM) et (ON) coupent l'axe des tangentes au même point. De deux choses l'une :

— Soit M = N ce qui signifie que x = α + 2kπ

— Soit M et N sont symétriques par rapport à O et alors : x = α + π + 2k'π.

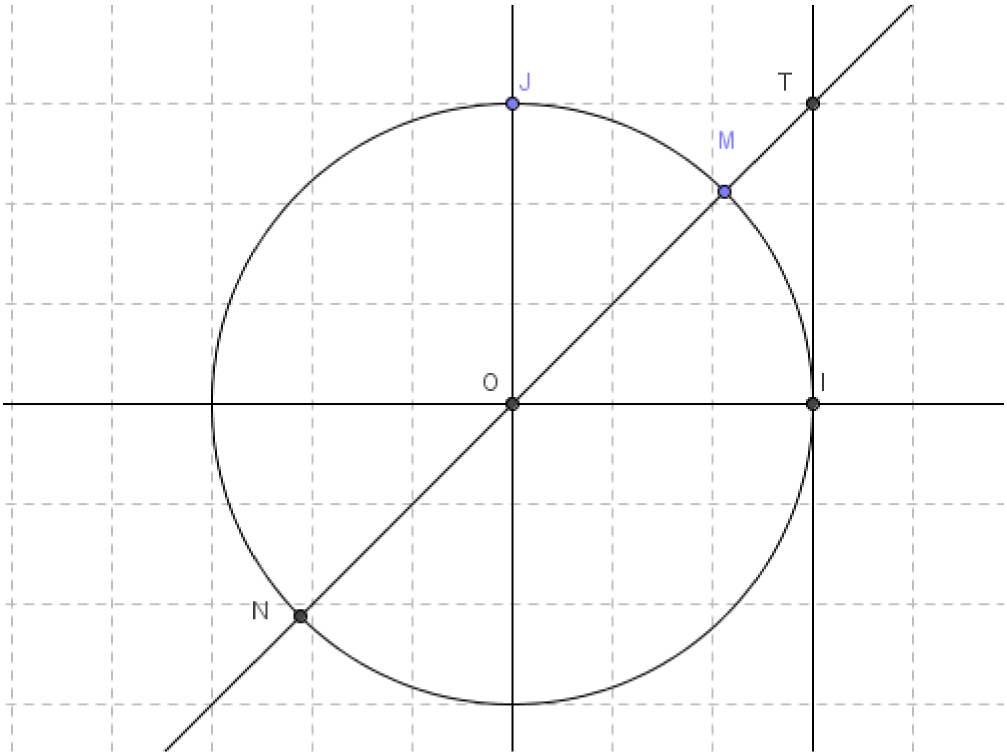
Remarque : Dans le dernier cas, on peut écrire : x = α +(2k' +1)π, donc dans tous les cas on:

x = α + h π,   h étant un entier relatif quelconque.

<u>Théorème</u> :

L'équation sin x = sin α, d'inconnue réelle x, a pour solutions dans $\mathbb{R}$ les réels x tels que :

$\boldsymbol{x = \alpha + \mathrm{h}\pi}$**, h étant un entire relatif**



<u>5.3 Equations de la forme cos x = *a* et sin x = *a*</u>

Si a n'appartient pas à [— 1 ; 1] , alors ces équations n'ont pas de solutions .

Si a $\in$ [— 1 ; 1] , elles en ont une infinité, car il existe alors un réel α de $[0; \pi]$ tel que cos x = cos α (ou de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que sin x = sin α) et on a alors:

$$\boxed{\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}}$$

Certaines valeurs de a ne nécessitent que la connaissance du cercle trigonométrique. Elles s'expriment généralement à l'aide de π.

Exemple 1: Soit à résoudre l'équation cos (2x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur]-π ; π], puis dans $\mathbb{R}$

On doit exprimer $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en fonction d'un cosinus. On peut prendre par exemple cos $\left(\frac{\pi}{6}\right)$. On se ramène alors à l'équation cos (2x) = cos $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, qui, d'après le § 5.1, est équivalente à :

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases} \quad k \text{ et } k' \text{ éléments de } \mathbb{Z}$$

soit : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi.$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont tous les nombres qui ont ces deux formes. On écrit :

S = $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi\,; -\frac{\pi}{12} + k'\pi, (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Si on résout dans]-π ; π], on ne relève que 0 et 1 pour valeurs de k. Si k = 0, les solutions sont $-\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}$. Si k = 1, elles sont $-\frac{\pi}{12} + \pi$, soit $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12} + \pi$, soit $\frac{13\pi}{12}$, autrement dit $-\frac{11\pi}{12}$.

Exemple 2: Soit à résoudre l'équation : sin (3x) = 1 dans $[0; 2\pi[$.

De même que dans l'exemple 1, cette équation est équivalente à sin (3x) = sin $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ce qui est, d'après le § 5.2, est équivalent à :

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \end{cases} \quad k \text{ et } k' \text{ éléments de } \mathbb{Z}$$

soit : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, k ∈ $\mathbb{Z}$ (ici, il est inutile de considérer la seconde famille de solutions).

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : S = $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Si on résout dans $[0; 2\pi[$, on ne relève que 0, 1 et 2 pour valeurs de k. l'ensemble des solutions est alors : S= $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

<u>Exemple 3</u>: Soit à résoudre l'équation : $\left|tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{3}$ dans]-π ; π].

Elle est équivalente à la réunion des deux équations : $tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ et $tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$.

On a par exemple tan $\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, donc d'après le § 5.2, la première de ces équations est équivalente à :

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ soit } x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

tandis que la seconde est équivalente à :

$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \text{ soit } x = \frac{\pi}{36} + \frac{k'\pi}{3}, k' \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions dans]-π ; π] sont obtenues en donnant à k et k' des valeurs « convenables ». On obtient :

$$S = \left\{\frac{5\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}, -\frac{7\pi}{36}, -\frac{19\pi}{36}, -\frac{31\pi}{36}, \frac{\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{25\pi}{36}, -\frac{11\pi}{36}, -\frac{23\pi}{36}, -\frac{35\pi}{36}\right\}$$

<u>EXERCICES D'APPLICATION</u>

A. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\left]-\pi; \pi\right]$ les équations suivantes :

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ 2) $2\cos x - 1 = 0$ 3) $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ 4) $\sin x - \cos x = 0$

5) $\tan x - 1 = 0$ 6) $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

7) $\tan(3x) - \tan(x) = 0$ 8) $\tan(3x) + \tan(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$

Solution :

1) S = $\left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$ 2) S = $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$ 3) S = $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

4) Remplacer sin x par cos $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$: S = $\left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$ 5) S = $\left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

6) S = $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

7) S = $\{0;\pi\}$ 8) S = $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12};-\frac{\pi}{3};-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{6}\right\}$

B. Résoudre dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

1) $\sin(x-\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{4}-x)=0$ 2) $\sqrt{3}\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-1=0$

3) $-2\sin^2 x+\cos x+1=0$

Solution :

1) S = $\left\{\frac{25\pi}{24};\frac{\pi}{24}\right\}$ 2) S = $\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right\}$ 3) S = $\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\pi\right\}$ (remplacer $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$, puis faire le changement de variable X = cos x pour se ramener à une équation du second degré).

5.4 Equations du type a cos x + b sin x = c

Lemme : *Soient a et b deux réels tels que $a^2+b^2=1$. Alors, il existe un réel θ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$.*

Démonstration : si $a^2+b^2=1$, le point M(a, b) est un point du cercle trigonométrique.
Soit θ = $(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) . On sait que le point M a pour coordonnées (cos θ, sin θ)) et donc que a = cos θ et b = sin θ (d'après l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base).

Méthode de résolution de l'équation a cos x + b sin x = c

On multiplie et on divise les deux membres par $\sqrt{a^2+b^2}$ pour obtenir :

a cos x + b sin x = c ⇔ $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\sin x\right)=c$. Les nombres $a'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $b'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sont tels que : $a'^2+b'^2=1$, donc d'après le lemme précédent, il existe un réel θ tel que $a'=\cos\theta$ et $b'=\sin\theta$. L'équation s'écrit alors : $\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos x+\sin\theta\sin x)=c$, soit :

$\cos\theta\cos x+\sin\theta\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, ou encore en utilisant une formule d'addition : $\cos(x-\theta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On est alors ramené à une situation de l'un des types étudiés au § 5.3.

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation cos x + sin x = 1.
On multiplie puis on divise les deux membres de l'équation par $\sqrt{2}$ ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \end{cases} k,k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \quad ou \\ x=2k'\pi \end{cases} k,k' \in \mathbb{Z}.$$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi; 2k'\pi,\ k,k' \in \mathbb{Z}\right\}$

Remarque:
On aurait pu aussi écrire : $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et se ramener à une équation de la forme sin x = sin α.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}$ cos x $-$ sin x = 3.
On multiplie puis on divise les deux membres de l'équation par 2 ce qui donne :
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{3}{2}$, soit : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ (cette équation n'a pas de solution car $\frac{3}{2} > 1$.

Remarque:
On aurait pu aussi écrire : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{3}{2}$, soit : $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ et conclure de la même manière à l'impossibilité de l'équation.

Exercices d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi[$ les équations suivantes :
1) *sin x – cos x =* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ***2)*** $\sqrt{3}$ *sin 3x + cos 3x = 1* ***3)*** *Cos 2x – 2 sin 2x = 1*
4) *3 sin x – 4 cos x = 2*

INDICATION: Pour 4), introduire un réel α tel que cos $\alpha = \frac{3}{5}$ et sin $\alpha = -\frac{4}{5}$, puis un réel β tel que sin $\beta = \frac{2}{5}$. On précisera dans quel intervalle peuvent varier α et β.

6. INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les inéquations trigonométriques de la forme cos ≥ *a* , sin x ≥ *a* ou tan x ≥ *a* se résolvent par lecture graphique sur un cercle trigonométrique.

Les solutions d'une inéquation trigonométriques sont généralement une réunion d'intervalles,

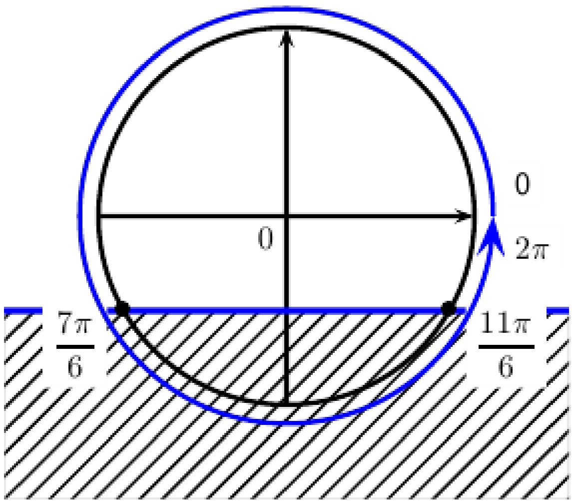
dont les bornes sont les solutions de l'équation correspondante.

Exemple 1 : Soit à résoudre, dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ l'inéquation : sin x $> -\frac{1}{2}$

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle sin x = $-\frac{1}{2}$. Ici on prendra x = $-\frac{\pi}{6}$.

On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point correspondant à $-\frac{\pi}{6}$.

Attention on travaille dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, les valeurs retenues seront donc $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.



D'après la figure ci-dessus, les valeurs pour lesquelles sin x $> -\frac{1}{2}$ sont les valeurs situées au dessus de la droite horizontale en bleu.

On conclut que S = $\left[0; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Exemple 2 : Soit à résoudre, dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation :

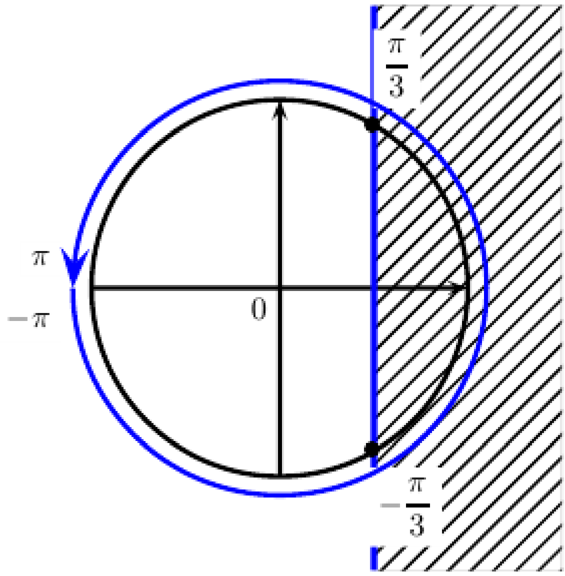
$$2 \cos x - 1 < 0.$$

Elle est équivalente à cos x $< \frac{1}{2}$. On commence par chercher une valeur simple pour laquelle

cos x = $\frac{1}{2}$. Ici on prendra x = $\frac{\pi}{3}$. On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$.

Attention on travaille sur l'intervalle]-π ; π], les valeurs retenues seront donc $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

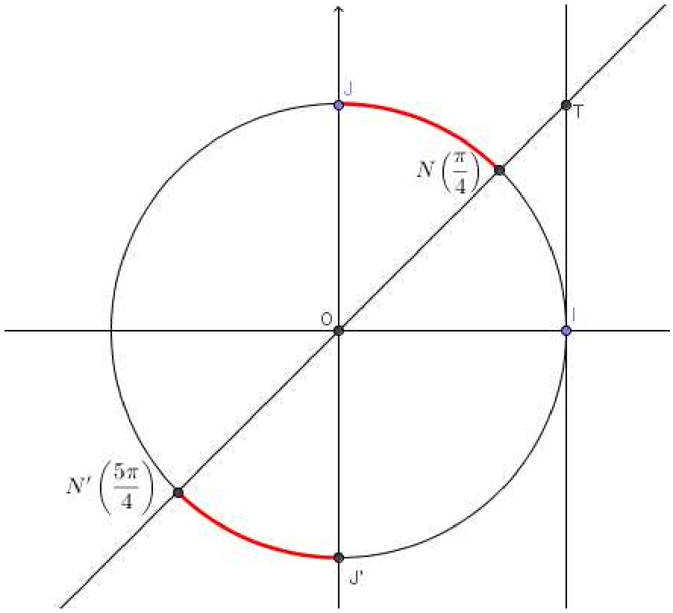
Les points M d'abscisse x pour lesquels cos x $< \frac{1}{2}$ sont les points situés à gauche de la droite verticale en bleu sur le schéma ci-dessous.



On conclut que : S = $\left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Exemple 3 : Soit à résoudre, dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ l'inéquation : tan x $>$ 1.

Elle est équivalente à tan x $>$ tan $\frac{\pi}{4}$. D'après l'interprétation géométrique de la tangente vue au § 4.2, pour que le réel x soit solution, il faut que le point M d'abscisse x soit situé sur l'un des arcs de cercle en rouge de la figure ci-dessous :



On en conclut que : **S =** $\left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.

<u>Exemple 4</u> : Soit à résoudre, dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation :

$$\frac{1}{sin^2 x} - (\sqrt{3} + 1)\, cotan\, x + \sqrt{3} - 1 > 0$$

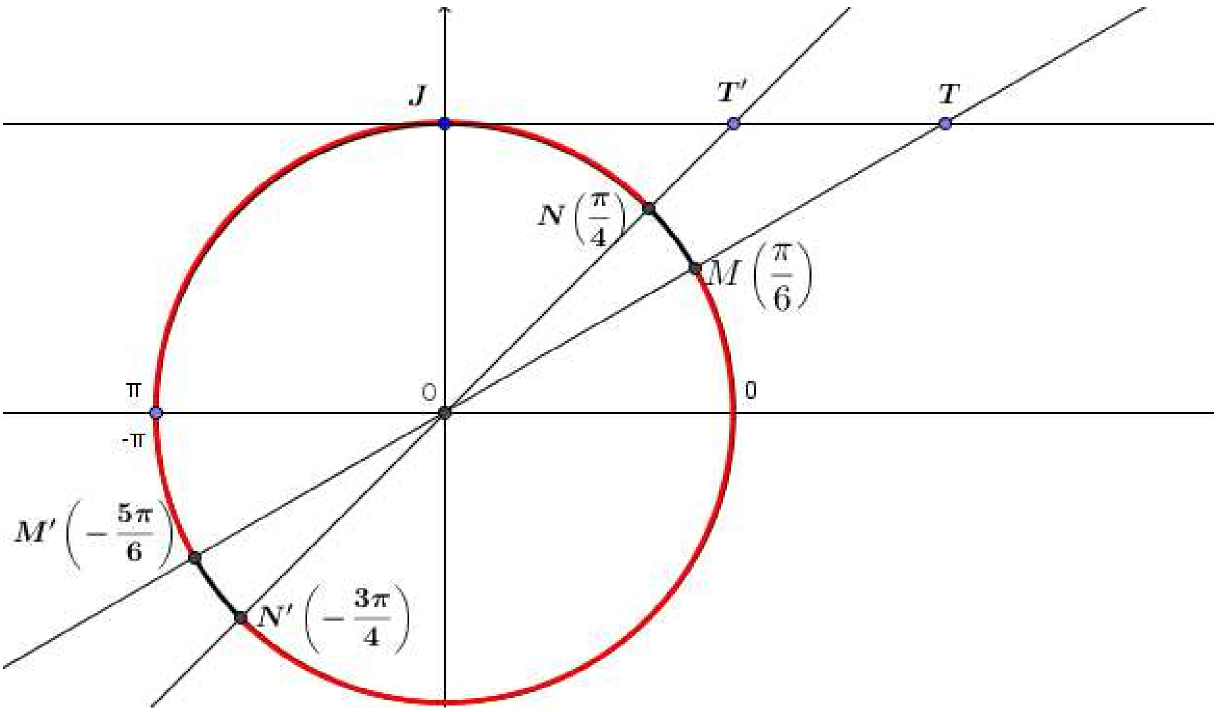
On commence par transformer le premier membre de l'inéquation en utilisant la relation 4.a. L'inéquation devient : $1 + cotan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\, cotan\, x + \sqrt{3} - 1 > 0$, ou encore :

$$cotan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\, cotan\, x + \sqrt{3} > 0.$$

Le premier membre est alors un trinôme en cotan x, dont les racines sont 1 et $\sqrt{3}$: il est positif si :

$$cotan\, x < 1 \text{ ou } cotan\, x > \sqrt{3}.$$

Pour qu'un réel x de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ vérifie ces conditions, il faut et il suffit que son image M sur le cercle trigonométrique appartienne à l'un des arcs en rouge de la figure ci-dessous.



Les points T et T' ont pour abscisses respectives $\sqrt{3}$ et 1 sur l'axe des cotangentes.

EXERCICES D'APPLICATION

I) *Résoudre dans IR les inéquations suivantes :*

1) *2 sin x –* $\sqrt{3} \geq 0$ ***2)*** *2 sin x + 1* < 0 ***3)*** $\sqrt{2}$ *cos (2x) + 1* < 0

4) *cos* $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$ ***5)*** *tan* $\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$

Indication : On pourra commencer par résoudre dans un intervalle de longueur 2π. Puis on ajoutera 2kπ aux extrémités de chaque intervalle de l'ensemble des solutions.

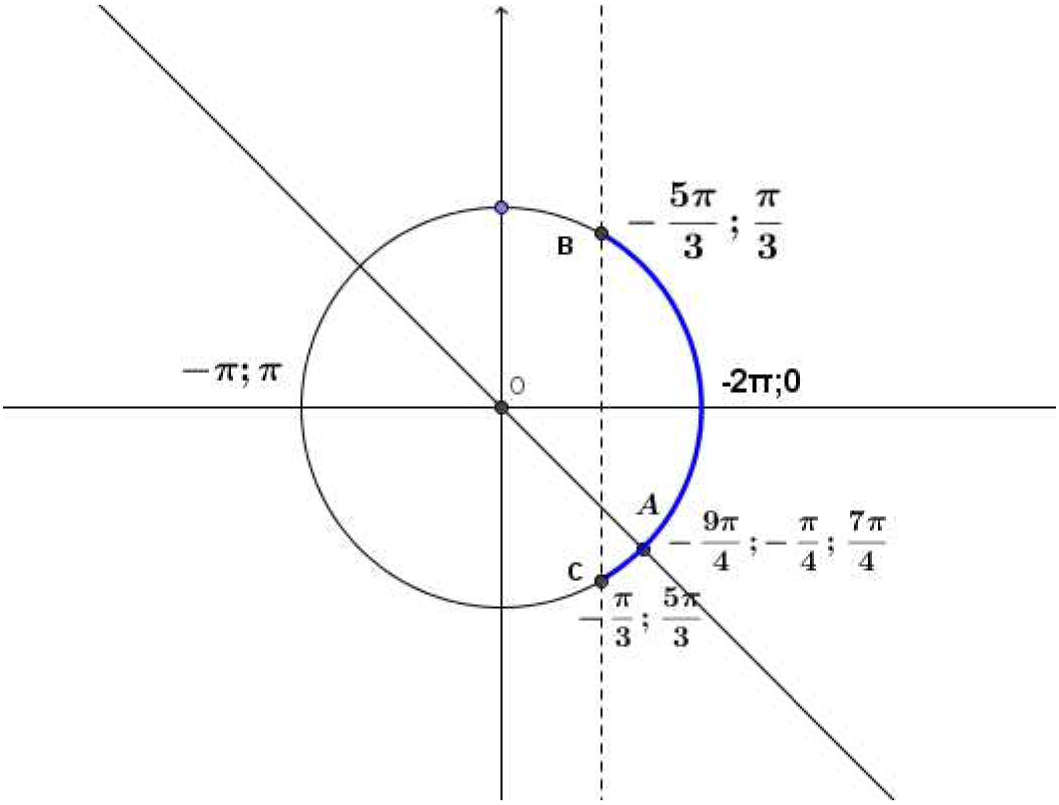
Nous détaillerons les solutions de 4) et 5).

• **4) Inéquation cos** $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$

Commençons par la résoudre dans un intervalle de longueur 2π, par exemple dans]-π ; π]. Si x est dans cet intervalle, on a la double inégalité : $-\pi < x \leq \pi$, d'où en multipliant les 3 membres par 2 :

$-2\pi < 2x \leq 2\pi$, et en ajoutant $-\frac{\pi}{4}$ aux 3 membres : $-\frac{9\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$. En posant t = $2x - \frac{\pi}{4}$, l'inéquation proposée est donc équivalente à : cos t $\geq \frac{1}{2}$, où t varie dans l'intervalle $\left[-\frac{9\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Pour décrire ce dernier intervalle sur le cercle trigonométrique, on part du point A d'abscisse curviligne $-\frac{\pi}{4}$, et on fait deux tours complets pour revenir au point de départ, c'est-à-dire le point A, car l'intervalle $\left[-\frac{9\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ a une longueur totale de 4π. Sur le schéma ci-dessous, nous indiquons successivement les abscisses curvilignes des points rencontrés en se déplaçant dans le sens trigonométrique.



L'ensemble des solutions est obtenu en parcourant les arcs AB, CB, puisCA.

En conclusion, t doit appartenir à : $\left[-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$, d'où l'on déduit que

$-$ soit $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{3}\right]$, ce qui équivaut à : $x \in \left[-\pi; -\frac{17\pi}{24}\right]$;

$-$ soit $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, ce qui équivaut à : $x \in \left[-\frac{\pi}{24}; -\frac{7\pi}{24}\right]$;

– soit $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$, ce qui équivaut à : $x \in \left[\frac{23\pi}{24}\ ; \pi\right]$.

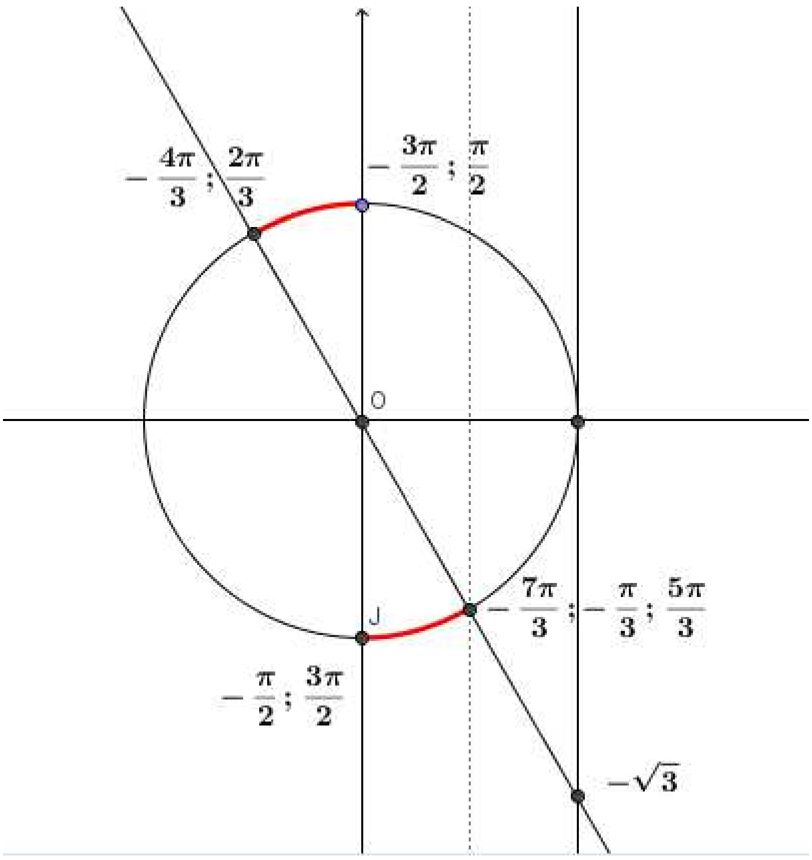
Ainsi, dans]-π ; π], l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left[-\pi; -\frac{17\pi}{24}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{24}; -\frac{7\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{24}\ ; \pi\right]$$

et dans $\mathbb{R}$, S est la réunion de tous les intervalles de la forme $\left[-\boldsymbol{\pi} + \mathbf{2k\pi}; -\frac{\mathbf{17\pi}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2k\pi}\right]$, $\left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2k\pi}; -\frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2k\pi}\right]$ **et** $\left[\frac{\mathbf{23\pi}}{\mathbf{24}} + \mathbf{2k\pi}\ ; \boldsymbol{\pi} + \mathbf{2k\pi}\right]$, k étant un entier relatif quelconque.

• 5) Inéquation tan $\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ + $\sqrt{3} \leq 0$

Elle est équivalente à : tan $\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\sqrt{3}$, soit tan $\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq$ tan $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
On vérifie comme précédemment que $x \in$]-π ; π] $\Rightarrow \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ qui est un intervalle de longueur 4π. Cette fois, on conclut à l'aide du schéma ci-dessous.



La variable auxiliaire t = $2x - \frac{\pi}{3}$ doit appartenir à $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right]$, d'où après encadrements : $x \in \left[-\frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{12}}; -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right] \cup \left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}; \mathbf{0}\right] \cup \left[\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{12}}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right] \cup \left[\frac{\mathbf{11\pi}}{\mathbf{12}}; \boldsymbol{\pi}\right]$. Dans $\mathbb{R}$, il suffit d'ajouter 2kπ à chaque intervalle.

II) *Résoudre dans IR les inéquations suivantes :*

1) *$2\cos 3x + 1 > 0$* ***2)*** *$\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 1$* ***3)*** *$2\cos^2 x > 1$*

4) *$2\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2} - 2)\sin x - 1 \geq 0$*

Nous laissons au lecteur le soin de résoudre ces inéquations. Nous nous bornons à suggérer que pour 3) et 4), on peut faire le changement de variable X = cos x (respectivement X = sin x) et se ramener dans un premier temps à une inéquation du second degré.

7. Relations métriques dans un triangle

ABC est un triangle quelconque. L'usage est de noter :

• BC = a, AC = b, AB = c;

• S l'aire du triangle ABC

• $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, les mesures respectives en radians des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

Mais on notera sin A, cos A au lieu de sin $\hat{A}$, cos $\hat{A}$, ….

<u>Théorème 1 : Formule d'AL KASHI</u>
Avec les notations usuelles ci-dessus, on a : $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc}$ **cos A**

<u>Démonstration</u> : D'après la relation de CHASLES, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Donc BC² = $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ = AC² + AB² − 2 AC × AB × cos A. D'où, en utilisant les notations :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \textbf{(1)}}$$

Deux autres relations s'en déduisent par « permutation circulaire », c'est-à-dire en remplaçant a par b, b par c et c par a, ainsi que A par B, B par C et C par A. On obtient ainsi :

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Remarque : Si le triangle ABC est rectangle en A, on a $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ rad, d'où cos A = 0. On retrouve alors le théorème de PYTHAGORE comme cas particulier de la formule d'AL KASCHI.

Pour cette raison, la formule d'AL KASHI est parfois appelée **théorème de PYTHAGORE généralisé**.

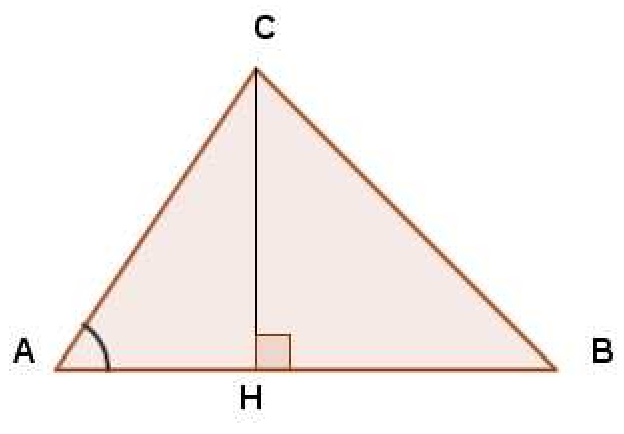
Exemple : Un triangle ABC est tel que AB = 66 m, AC = 78 m et l'angle $\widehat{BAC}$ a pour mesure 55°.

Alors $BC^2 = 78^2 + 66^2 - 2 \times 78 \times 66 \cos(55°) \Longrightarrow BC \approx 67{,}3$ m.

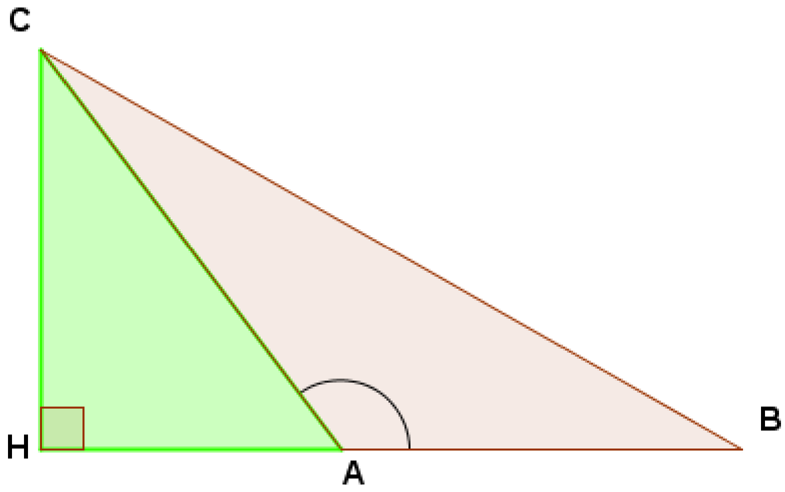
Théorème 2 : Avec les notations usuelles, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$

Démonstration : L'aire S du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}$ AB × CH.

Lorsque l'angle $\hat{A}$ est aigu, on a : CH = AC sin A



Lorsque l'angle $\hat{A}$ est obtus, on a : CH = AC sin $\widehat{CAH}$.



Or $\widehat{CAH} = \pi - \hat{A}$, donc : sin $\widehat{CAH}$ = sin (π − A) = sin A.

Dans les deux cas, on peut dire que : S = $\frac{1}{2}$ AB × AC × sin A.

Avec les notations usuelles, cette égalité s'écrit : S = $\frac{1}{2}\,bc$ sin A.

On démontrerait de manière analogue que **S = $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{ac}$ sin B** et que **S = $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{ab}$ sin C**.

<u>Théorème 3</u> : Avec les notations usuelles, $\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = \frac{abc}{2\mathrm{S}}$

D'après le théorème précédent, S = $\frac{1}{2}\,bc$ sin A = $\frac{1}{2}\,ac$ sin B = $\frac{1}{2}\,ab$ sin C.

En multipliant ces égalités par $\frac{2}{abc}$, on obtient : $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \mathrm{A}}{a} = \frac{\sin \mathrm{B}}{b} = \frac{\sin \mathrm{C}}{c}$, et en passant aux inverses (les sinus des angles d'un triangle étant non nuls), on obtient :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = \frac{abc}{2\mathrm{S}}.$$

<u>Remarque : triangles isométriques et triangles semblables</u>

1°) On dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont **isométriques** si et seulement si :

AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'.

a) Lorsque deux triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, on a $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$ (autrement dit leurs trois angles sont respectivement égaux).

En effet, en appliquant la formule d'AL KASHI aux deux triangles, on a par exemple : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ et $a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A'$.
Donc si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, il en résulte que cos A = cos A'.
Or deux angles géométriques qui ont même cosinus sont égaux ? D'où $\hat{A} = \widehat{A'}$.
On démontrerait de manière analogue que $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$.
b) Si AB = A'B', AC = A'C' et $\hat{A} = \widehat{A'}$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.
En effet, il suffit d'appliquer encore la formule d'AL KASHI pour conclure que BC = B'C'.

c) Si $\hat{B} = \widehat{B'}$, $\hat{C} = \widehat{C'}$ et BC = B'C', alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.
En effet, la somme des angles d'un triangle étant constante (180° ou π), les égalités $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$ entraînent que $\hat{A} = \widehat{A'}$.
De plus, BC = a = B'C' = a'.
On en déduit donc, en utilisant le théorème des sinus (théorème 3) que $b = b'$ et $c = c'$.

2°) On dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$ et $\hat{C} = \widehat{C'}$ (autrement dit si leurs trois angles sont égaux). Cela n'implique pas que les trois côtés sont égaux mais seulement qu'ils sont proportionnels, c'est-à-dire que :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

En effet, on a les formules : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ et $\frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'} = \frac{c'}{\sin C'}$. Soit t la valeur commune des trois premiers rapports et t' celle des trois suivants. On a a = t sin A et a' = t' sin A' et puisque $\hat{A} = \widehat{A'}$, il vient aussitôt sin A = sin A' puis $\frac{a}{a'} = \frac{t}{t'}$. On démontre de même que $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{t}{t'}$. D'où le résultat.

8. ANGLES INSCRITS

8.1 Angles inscrits et angles au centre

Définition : **a)** Un angle est **inscrit** dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un de ses côtés peut être tangent au cercle.

b) Un angle **au centre** est un angle $\widehat{AOB}$ ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (incrit ou géométrique) dont le sommet est au centre du cercle. On dit qu'il **intercepte** l'arc orienté $\widehat{AB}$.

Sur la première figure ci-dessous, $\widehat{OB}$ est un angle au centre associé à chacun des angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

Sur la seconde figure, $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{TAB}$.

Figure 1

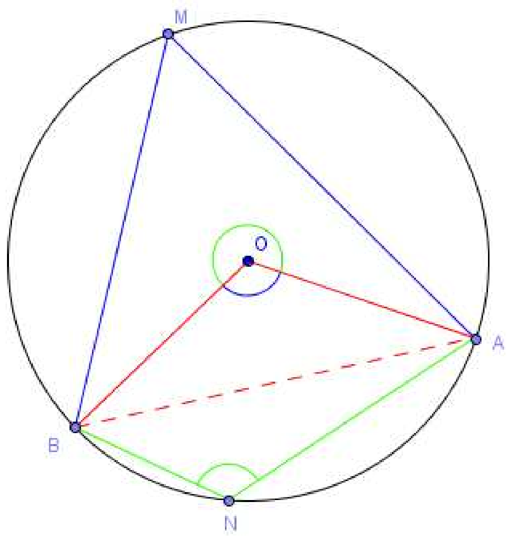
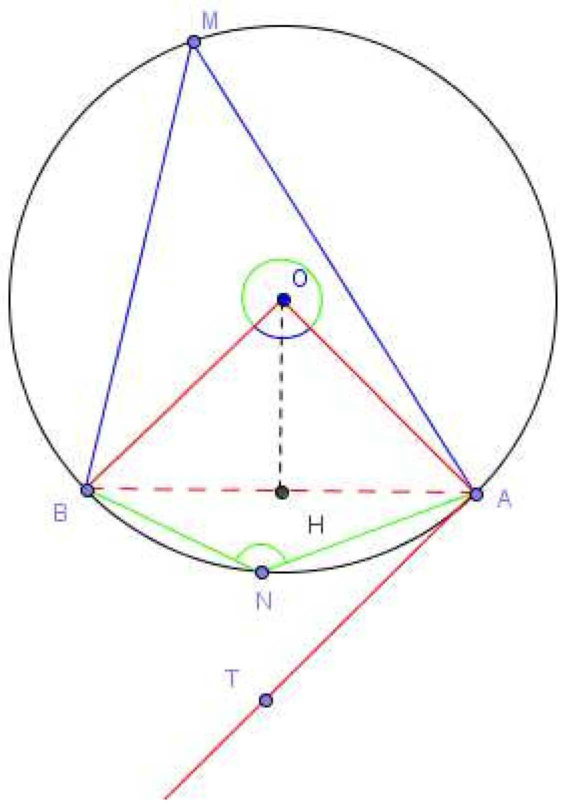


Figure 2



Activité 1 : *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ un angle inscrit dont une mesure est α.*

1° On suppose d'abord que $[MA]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$. La demi-droite [Oz) d'origine O parallèle à la demi-droite [MB) et de même sens que la demi-droite [MB) coupe $\mathscr{C}$ en C.

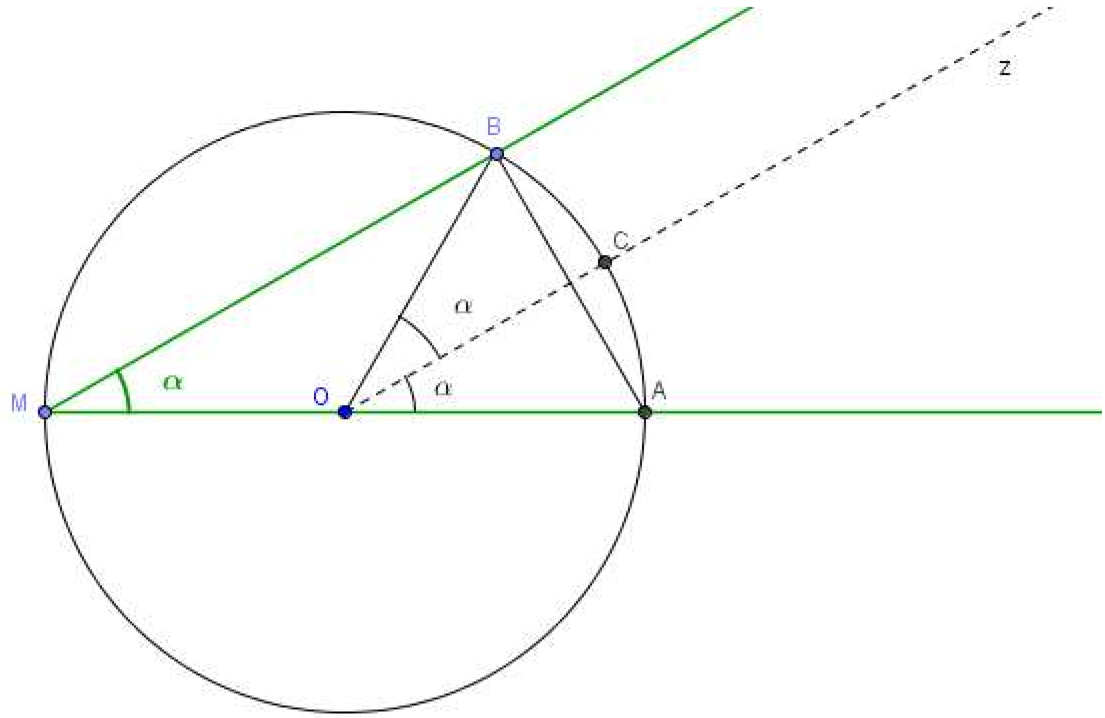
a) Démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha$.

b) Démontrer que la droite (OC) est la médiatrice du segment [AB]. En déduire que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$.

c) Démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\alpha$.

On s'appuiera sur la figure 3 ci-dessous.

Figure 3



2° On suppose maintenant que l'angle inscrit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est quelconque.

Soit M' le point diamétralement opposé à M et soit β une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA})$.

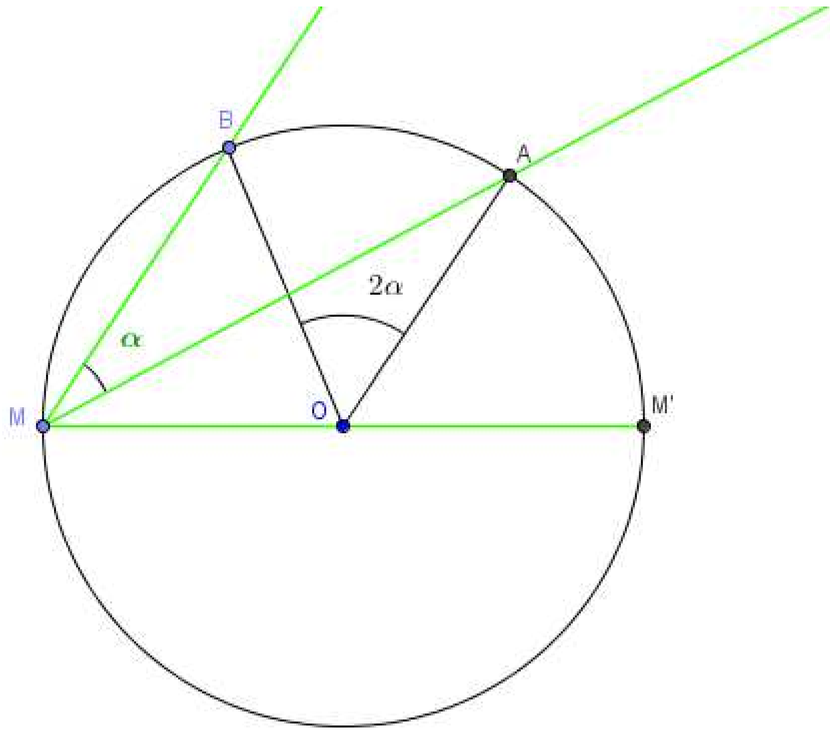
a) Démontrer que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \beta$.

b) Trouver une mesure de $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})$ *et une mesure de* $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB})$.

En déduire qu'une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *est* 2α.

On s'appuiera sur la figure 4 ci-dessous.

Figure 4



3° Soit $\mathscr{T}$ la tangente en B à $\mathscr{C}$ et T un point de $\mathscr{T}$ tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BT}) = \alpha$.
Démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\alpha$.
On pourra s'appuyer les démarches des questions 1° et 2° en s'appuyant sur les figures ci-dessous.

Figure 5

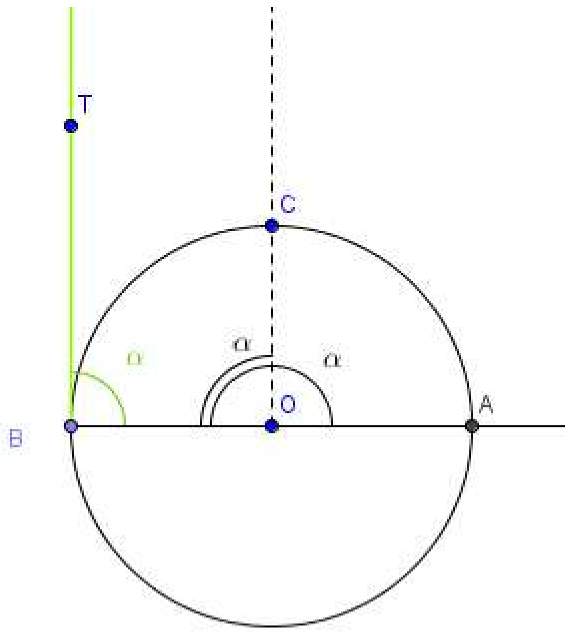
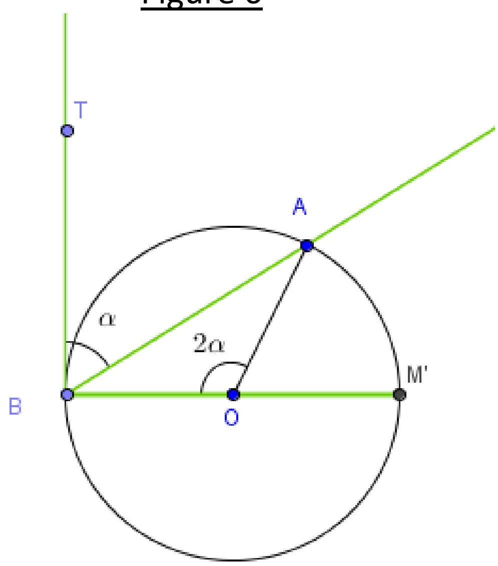


Figure 6



On conclut cette étude par le théorème suivant :

Théorème 1 : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

1°) Pour tous points A, M et B de $\mathscr{C}$, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ [2π]

2°) Si (BT) est tangente en B à $\mathscr{C}$, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BT})$ [2π]

Le théorème suivant est une conséquence directe du précédent :

<u>Théorème 2</u> : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

A, B, M et N sont quatre points distincts de $\mathscr{C}$.

Alors, on a : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ [π]

N.B. On dit que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ (modulo π) signifie que les mesures de ces deux angles ont pour différence un multiple quelconque de π.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème précédent, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ [2π], c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$. De même, il existe un réel k' tel que :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + 2k'\pi$. Par différence membre à membre de ces deux égalités, il vient :

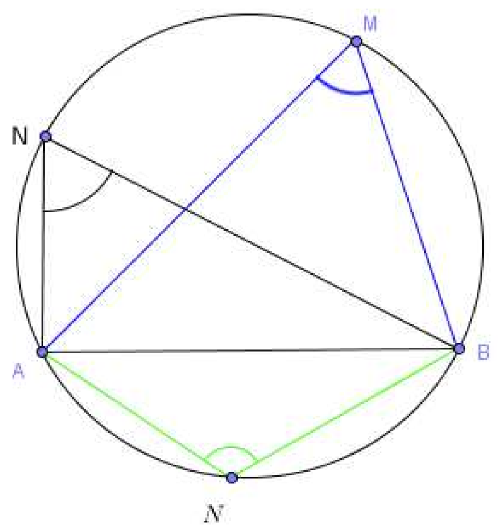
$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = 2(k' - k)\pi$, d'où en divisant par2 et en transposant :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (k' - k)\pi$$

Le résultat en découle aussitôt.

<u>Remarque</u> :

Les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ sont égaux (modulo 2π) lorsque M et N sont dans le même demi-plan de frontière (AB) et ont pour différence un multiple impair de π lorsque M et N ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB).



Points cocycliques

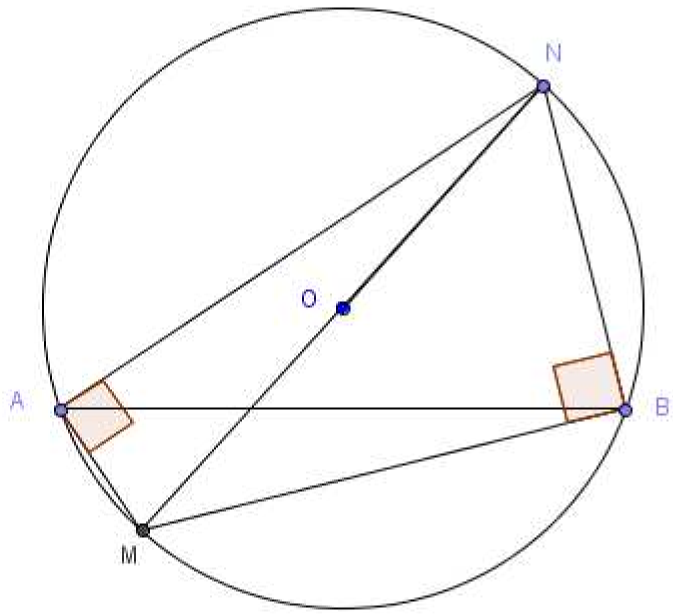
Définition : n points du plan ($n \geq 4$) sont dits **cocycliques** si et seulement si ils appartiennent à un même cercle.

Le but de l'activité suivante est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient cocycliques.

Activité 2 : *1°) Angles à côtés perpendiculaires*

Soient A, B, M et N quatre points distincts du plan tels que les droites (MA) et (NA) d'une part, (MB) et (NB) d'autre part, soient perpendiculaires.

Les angles ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) et ($\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$) sont dits à côtés perpendiculaires.



a) Justifier que A, B, M et N appartiennent à un même cercle.

b) En déduire que : ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) = ($\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$) [π].

2° Propriété de la tangente

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O ; A et B sont deux points distincts de $\mathscr{C}$ et T un point de la tangente en A à $\mathscr{C}$ distinct de A.

a) En utilisant le théorème 1, justifier que ($\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$) = ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) [π]

b) Réciproquement, soit T' un point distinct de A et tel que ($\overrightarrow{AT'}$, $\overrightarrow{AB}$) = ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$) [π].

En utilisant la relation de CHASLES, montrer que ($\overrightarrow{AT}$,$\overrightarrow{AT'}$) = 0 [π]. En déduire que T' appartient à la tangente en A à $\mathscr{C}$.

c) Conclure de cette étude que l'ensemble des points T distincts de A tels que

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [\pi]$$

avec M ∈ $\mathscr{C}$ est la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$, privée du point A.

<u>3° Points cocycliques</u>

A, B, C et D sont quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose que A, B et C sont non alignés.

a) En utilisant le théorème 2, montrer que si D appartient au cercle qui passe par A, B, C, alors

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ [\pi].$$

b) Réciproquement, soit D un point tel que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ [\pi]$.

(i) Vérifier que A, B et D ne sont pas alignés.

(ii) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC et $\mathscr{C}$' le cercle circonscrit à ABD. Soit T un point de la tangente en A à $\mathscr{C}$ distinct de A.

- *Montrer que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ [\pi]$*
- *En déduire que T est sur la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$' (utiliser le 2° ci-dessus).*
- *En déduire que les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont confondus.*

On conclut cette étude par le théorème suivant :

<u>**Théorème 3**</u> : Quatre points A, B, C et D du plan non alignés sont cocycliques si et seulement si :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ [\pi].$$

<u>**ARCS CAPABLES**</u>

Soient A et B deux points donnés et α un réel donné.

L'ensemble E des points M du pan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ [\pi]$ est appelé **arc capable** de α (relativement aux points A et B). Le but de l'activité suivante est de déterminer et construire E pour certaines valeurs de α.

<u>**Activité 3**</u>

1° On suppose que α est un multiple de π ($\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Vérifier que E est la droite (AB) privée des points A et B.

2° On suppose que α n'est pas un multiple de π.

a) On choisit par exemple $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Placer un point M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ [\pi]$.

b) En utilisant les résultats de l'Activité 2, Montrer que E est le cercle circonscrit au triangle ABM *privé des points A et B.*

c) En utilisant la droite (AT) telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$, *construire le centre de ce cercle.*

d) Quel est l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$?

3° reprendre les questions du 2° avec :

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 1

Vérifier les identités suivantes :

1°) $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$.

2°) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x$.

3°) $\dfrac{1 - \sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ **4°)** $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2$.

5°) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

6°) $\sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{1}{1 + \tan^2 y} - \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$.

EXERCICE 2

Exprimer en fonction des lignes trigonométriques de l'angle α les lignes trigonométriques des angles suivants:

a) $\alpha - 5\pi$ **b)** $-\alpha - \pi$ **c)** $-\alpha - 2\pi$ **d)** $-\alpha - \frac{\pi}{2}$ **e)** $\alpha - \frac{9\pi}{2}$ **f)** $-\alpha + \frac{5\pi}{2}$

EXERCICE 3

Calculer les lignes trigonométriques des angles suivants:

a) 3π ; -5π ; $\frac{3\pi}{2}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$ **c)** $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; **d)** $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{31\pi}{6}$.

EXERCICE 4

Simplifier les expressions suivantes:

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(-\alpha + 2k\pi) + \cos(3\pi + \alpha) + \sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$B = 2\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + 3\,\text{cotan}(\alpha + k\pi) - \text{cotan}\,[(2h+1)\pi - \alpha]$$

$$C = \frac{\cos\left(3\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 3\alpha\right) + \sin(3\alpha + k\pi)}{\cos(3\alpha - \pi) + \cos(k\pi + 3\alpha) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)}$$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de sin α et l'intervalle où varie α. On demande cos α et tan α .

1°) $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ et $\sin\alpha = -0{,}6$ **2°)** $\alpha \in [0; \pi]$ et $\sin\alpha = \frac{15}{17}$

3°) $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ et $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de cos α et l'intervalle où varie α. On demande sin α et tan α .

1°) $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ et $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **2°)** $\alpha \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ et $\cos\alpha = -0{,}8$

3°) $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ et $\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de $\tan\alpha$ et l'intervalle où varie α. On demande $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

1°) $\alpha \in [0; \pi]$ et $\tan\alpha = -2$ **2°)** $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ et $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$

3°) $\alpha \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ et $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ **4°)** $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$

EXERCICE 8

Résoudre les équations suivantes:

1°) $\cos\ = \cos 3x$ **2°)** $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ **3°)** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

4°) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ **5°)** $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$ **6°)** $4\cos^2 x - 3 = 0$

7°) $2\,\text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ **8°)** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$

9°) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ **10°)** $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

11°) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ **12°)** $4\sin^2 x - 1 = 0$ **13°)** $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

14°) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **15°)** $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

16°) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **17°)** $\sqrt{3}\tan x = 3$ **18°)** $\tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

N.B. *Les équations de n° pair sont à résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ et celles de n° impair dans $]-\pi ; \pi]$*

EXERCICE 9

Résoudre dans **R** les équations suivantes :

1°) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **2°)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3°) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$ **4°)** $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{cotan } 2x$

5°) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \text{ cotan}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **6°)** $\tan^2 4x \tan^2 x = 1$.

EXERCICE 10

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations suivantes :

1°) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ **2°)** $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

3°) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 x = 0$ **4°)** $\cos^2 4x - \sin^2 3x = 0$

5°) $\tan 2x \text{ cotan}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$ **6°)** $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

EXERCICE 11

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

1°) $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$ **2°)** $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

3°) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

4°) $\text{cotan}^2 x + (1 - \sqrt{3})\text{ cotan } x - \sqrt{3} = 0$

• EXERCICE 12

Soit l'équation : $\cos^2 x + 3\cos x + m = 0$.

1°) Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation qui appartiennent à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

2°) Résoudre l'équation pour $m = -\frac{7}{4}$.

• EXERCICE 13

1°) Pour quelles valeurs de m, paramètre, l'équation $\tan x + \text{cotan } x + m = 0$ a-t-elle des solutions ?

2°) Montrer que , lorsque l'équation admet des solutions, une de ces solutions et une seule appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$.

3°) Résoudre l'équation pour $m = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 14

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{2} \cos x - 1 < 0$ **2°)** $2 \sin x - \sqrt{3} > 0$

3°) $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} < 0$

4°) $4 \sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3}) \sin x - 4 + \sqrt{3} > 0$

5°) $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 > 0$

6°) $\tan^2 x - 3 \leq 0$ **7°)** $3 \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 1 < 0$ **8°)** $\frac{\tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 1} < \frac{1}{2}$

9°) $-4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \cos x + 4 + \sqrt{2} \leq 0$

10°) $\tan x - \sqrt{3} \text{ cotan } x + 1 - \sqrt{3} > 0$

11°) $4 \sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3}) \cos x - 4 + \sqrt{3} > 0$ **12°)** $\frac{2}{4 \cos^2 x - 1} < 1$

13°) $\sqrt{.1 - 4 \sin^2 x} < 2 \cos x - 1$ **14°)** $\frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0$

EXERCICE 15

1°) Former l'équation du second degré dont les racines sont les réels sin x et sin y tels que :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \sin x \sin y = k \end{cases}$$

Discuter suivant les valeurs de k .

2°) Déterminer x et y sachant qu'ils appartiennent à [0 ; 2 π [et que k = 0,24 .

FORMULES D'ADDITION

EXERCICE 16

Factoriser les expressions suivantes :

A (x) = 1 + cos x + cos $\frac{x}{2}$ B (x) = 1 — cos x + sin $\frac{x}{2}$

EXERCICE 17

Exprimer A (x) = cos ² 2x — cos ² x en fonction de sin x .

EXERCICE 18

Exprimer les expressions suivantes en fonction de cos 2x :

a) 2 cos ² x + 4 sin ² x ;   **b)** cos ^{4} x — 2 sin ² x cos ² x + sin ^{4} x   **c)** cos ^{4} x — sin ^{4} x

EXERCICE 19

1°) Soit le réel x tel que : cos x = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et 0 < x < $\frac{\pi}{2}$. Calculer cos 2x et en déduire x .

2°) Soit le réel x tel que : six x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et 0 < x < $\frac{\pi}{2}$. Calculer sin 2x et cos 2x . En déduire x .

EXERCICE 20

Calculer cos $\frac{\pi}{8}$ et sin $\frac{\pi}{8}$. En déduire cos $\frac{3\pi}{8}$ et sin $\frac{3\pi}{8}$.

(On pourra utiliser cos $\frac{\pi}{4}$ et sin $\frac{\pi}{4}$) .

EXERCICE 21

Montrer que, pour tout réel x :

a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\ \cos(x - \frac{\pi}{4})$ **b)** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\ \cos(x + \frac{\pi}{4})$.

EXERCICE 23

Démontrer que $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 24

1°) En utilisant la relation : $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, démontrer que , pour tout x réel :

a) $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$ **b)** $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$

2°) Calculer : $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

EXERCICE 25

En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 26

Calculer les sinus, cosinus et tangentes des réels suivants :

a) $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

c) $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{23\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 27

Démontrer les identités suivantes:

1°) $\cos a \sin(b - c) + \cos b \sin(c - a) + \cos c \sin(a - b) = 0$

2°) $\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0$

3°) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$

EXERCICE 28

1°) Calculer $\cos(a + b + c)$. En déduire $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$.

2°) Calculer $\sin(a + b + c)$. En déduire $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$.

3°) Calculer $\tan(a + b + c)$. En déduire $\tan 3a$ en fonction de $\tan a$.

EXERCICE 29

Démontrer les identités suivantes :

1°) $2\cos(a + b)\sin(a - b) = \sin 2a - \sin 2b$

2°) $2\sin(a + b)\sin(a - b) = \cos 2b - \cos 2a$

3°) $\tan 2a - \tan a = \frac{\tan a}{\cos 2a}$ **4°)** $\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cos 3a$.

• EXERCICE 30

Soit α, β, γ, trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Par exemple, α, β, γ peuvent être les mesures en radians des angles non orientés d’un triangle ABC. Démontrer les relations suivantes :

1°) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}$

2°) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \dfrac{\alpha}{2} \sin \dfrac{\beta}{2} \sin \dfrac{\gamma}{2}$.

3°) $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.

4°) $\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma = 4 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \sin \dfrac{\gamma}{2}$

5°) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

6°) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$.

7°) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2$.

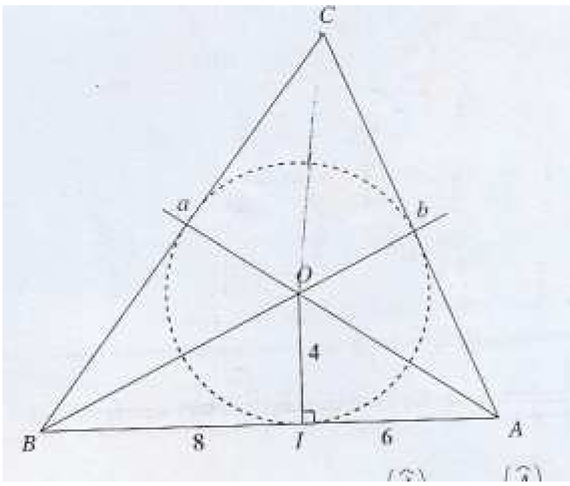
8°) $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \dfrac{1}{\tan \beta} + \dfrac{1}{\tan \gamma}$ **9°)** $\sin \gamma = \dfrac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$

• EXERCICE 31

Dans la figure ci-dessous, on a AI = 6, BI = 8, et OI = 4 .

Le point O, intersection des bissectrices, est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

OI est donc un rayon de ce cercle et l'angle OIB est droit.



1°) Calculer OA et OB, puis sin $\left(\frac{A}{2}\right)$, cos $\left(\frac{A}{2}\right)$, sin $\left(\frac{B}{2}\right)$ et cos $\left(\frac{B}{2}\right)$.

2°) Calculer sin A, cos A, sin B et cos B.

3°) Montrer que sin C = sin (A + B) . Calculer sin C .

4°) Calculer les distances BC et AC.

<u>EXERCICE 32</u>

On considère l'équation : $\sin 3x = -\sin 2x$ **(1)** .

1°) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2°) a) Démontrer que $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.

b) En déduire que l'équation **(1)** est équivalente à : $\sin x\,(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$.

c) Parmi les solutions trouvées pour **(1)** , lesquelles sont aussi solutions de l'équation :

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0 \ ?$$

3°) On pose X = cos x. Résoudre $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

<u>• EXERCICE 33</u>

Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ muni d'un repère orthonormal direct et tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, on considère les points B, C et D tels que :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$, avec $x \in \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3}$.

1°) a) Faire une figure. Donner une mesure de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$.

b) Démontrer que le triangle BCD est équilatéral quelle que soit la position du point B.

c) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

d) Préciser une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ en fonction de x.

2°) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x,

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 .$$

3°) Vérifier les deux égalités précédentes en utilisant les formules d'addition.

EXERCICE 34

1°) En regroupant judicieusement les termes et en utilisant les angles associés, montrer que :

$$S_1 = \sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8} = 0 \ ;$$

$$S_2 = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} = 2 \ ;$$

$$S_3 = \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2} .$$

2°) a) Vérifier que, tout réel x, $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$.

b) En déduire la valeur exacte de : $S_3 = \sin^3\frac{\pi}{8} + \sin^3\frac{3\pi}{8} + \sin^3\frac{5\pi}{8} - \sin^3\frac{7\pi}{8}$.

EXERCICE 35 Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

On considère un triangle ABC, isocèle en A, tel que BC = a et B mesure $\frac{2\pi}{5}$ rad.

La bissectrice de l'angle B coupe [AC] en D.
1°) Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles.
En déduire que : DA = DB = a.

2°) Démontrer que AB = $2a\cos\frac{\pi}{5}$ et CD = $2a\cos\frac{2\pi}{5}$.

En déduire que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

3°) Démontrer que BC = BD $\cos\frac{\pi}{5}$ + CD $\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

.

4°) On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$. On sait que $x - y = \frac{1}{2}$ et que $xy = \frac{1}{4}$.
En utilisant $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer x + y et en déduire x et y .
5°) *Application* : Calculer les longueurs des côtés du pentagone régulier convexe et du décagone régulier convexe inscrits dans un cercle de rayon R.(On exprimera ces longueurs en fonction de R) .

EXERCICE 36

On considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] de centre O et de rayon R. La droite passant par O et orthogonale à (AB) coupe $\mathscr{C}$ en O. Soit M un point de l'arc BC distinct de B et C. On note x la mesure en radians de l'angle MAB.

1°) Démontrer que MOB = 2x.

2°) La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe le droite (AB) en D.

a) Exprimer MA et MD en fonction de R et x.

b) Déterminer x de manière que MA = MD.

c) Déterminer x de manière que MA = 2 MD.

EXERCICE 37

1°) Construire un triangle ABC tel que $A - C = \frac{\pi}{2}$.

Exprimer C en fonction de B et démontrer que : $0 < C < \frac{\pi}{4}$.

2°) Calculer en fonction de C et de la longueur a = BC :

a) le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) les longueurs b = AC et c = AB.

c) l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 38

Etablir que dans un triangle ABC avec AB = c, AC = b et BC = a, on a les formules suivantes :

$a = b \cos C + c \cos B \qquad b = c \cos A + a \cos C \qquad c = a \cos B + b \cos A.$

EXERCICE 39

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus.

Soient O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.

1°) Démontrer que : $AH = 2R \cos A$ et que l'angle OAH est égal à $| B - C |$.

2°) Calculer OH^2 en fonction de R, A et $(B - C)$.

3°) En déduire que : $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

EXERCICE 40: RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

Dans tout ce paragraphe, on considère un triangle ABC. S désigne son aire, a, b et c désignent le côtés oppo

à A, B et C respectivement. On notera (par abus) $\cos A$ au lieu de $\cos \hat{A}$ etc ...

On a alors les trois relations fondamentales suivantes :

Formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$

Formule de l'aire du triangle : $S = \frac{1}{2}\,bc\sin A$

Formule des sinus : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

p désigne le demi périmètre du triangle ABC ($p = \frac{1}{2}(a + b + c)$) .

On note R le rayon du cercle circonscrit à ABC, r le rayon du cercle inscrit.

On note enfin h_A, h_B et h_C les longueurs des hauteurs [AA'], [BB'] et [CC '].

1°) Montrer l'égalité : $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ (on pourra utiliser l'expression de cos A tirée de la formule d'Al-Kashi et la relation :

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$).

2°) Montrer l'égalité : $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ (on pourra utiliser la formule de l'aire d'un triangle).

3°) Donner une expression de h_A à l'aide des nombres réels a, b et c uniquement (utiliser **2°**) .

4°) On introduit le point B_1 diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit. Utiliser une relation entre les angles BAC et B_1BC pour en déduire l'égalité : S = 2R sin A .

Etablir les égalités : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

5°) Montrer l'égalité : $h_A = \frac{2S}{a}$.

6°) Montrer l'égalité : S = pr.

On pourra diviser le triangle ABC en six triangles à l'aide du point ω, centre du cercle inscrit.

Les résultats précédents permettent de calculer S, h_A, r et R à l'aide de a, b et c uniquement. On pourra les utiliser dans les exercices qui suivent.

EXERCICE 41

Un triangle ABC a des côtés de longueurs 5, 6 et 7. Calculer son aire, les longueurs de ses hauteurs, le rayon des cercles inscrit et circonscrit à ce triangle, les hauteurs de ses médianes.

EXERCICE 42

Dans chacun des cas suivants, on demande de calculer les angles et les côtés du triangle ABN sachant que certains éléments sont donnés :

1°) On donne : a + b = 480 ; A = 70° , B = 50° .

2°) On donne : S = 25 ; ab = 78 ; B + C = 70° .

3°) On donne : $h_A = 8$; $h_B = 12$; $h_C = 18$.

• EXERCICE 43

Soit ABC un triangle. montrer les relations :

1°) $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$. **2°)** $\frac{abc}{a + b + c} = 2\,rR$. **3°)** $a^2 + b^2 > \frac{c^2}{2}$ **4°)** $bc = 2Rh_A$
.

• EXERCICE 44

Deux cercles de centres O et O ' , de rayons respectifs R et R ' sont tangents extérieurement en A, et tangents en B et C à la droite (BC). Démontrer que le cercle de diamètre [BC] est tangent en A à
(OO '). Calculer BC en fonction de R et R '.

• EXERCICE 45

Soit a un réel strictement positif. Soit α un réel fixé.
Soit AOB un triangle rectangle en O, tel que OA= $3a$ et OB = $4a$.

1°) a) Déterminer Γ_α , ensemble des points M du plan tels que :$\alpha MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2$.

b) Lorsque Γ_α est un cercle de centre Ω_α ,déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.

c) Le point O est sur Γ_α . Démontrer que Δ, tangente en O à Γ_α est une droite indépendante de α. Caractériser Δ.

d) Soit N un point quelconque de Δ. Démontrer que N a même puissance pour tous les cercles Γ_α .

e) Soit E un point fixé de Δ. On mène par E deux tangentes à un cercle Γ_α . L'une d'elles est (EO) ;l'autre est tangente à Γ_α en T_α .Déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : 4MA = 3MB.
Déterminer les points M du plan vérifiant à la fois :
$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2$ et 4MA = 3MB.

CHAPITRE 9 : LIMITES ET CONTINUITE

Nous nous contenterons de donner une notion intuitive de la limite et quelques méthodes de calcul de limites.

Limites en un point

Limites finies

Considérons la fonction f définie par f(x) = $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; son ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; examinons le tableau suivant :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,9999	1,99999	2,00001	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,0001	1,00001	0,99999	0,9999	0,999	0,99	-0,9

Nous constatons que la fonction n'est pas définie pour 2 mais quand les valeurs de x « s'approchent » de 2 en restant dans le domaine de définition de f, les valeurs de f(x) semblent s'approcher de la valeur -1. Pour traduire ce fait nous dirons que f a pour limite -1 en 2. Nous notons $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$.

Définition intuitive

Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un réel a (sauf peut être en a). Lorsque x prend des valeurs de plus en proches de a, si les valeurs de f(x) deviennent de plus en plus proches d'un réel l on dit que f a pour limite l en a et on note

La limite lorqu'elle existe, elle est unique

Nous verrons qu'il n'en est pas toujours ainsi, mais nous allons nous arrêter sur les cas similaires à celui-ci. Le numérateur de notre fonction s'annule pour la valeur 2 ainsi que le dénominateur. Nous allons d'abord examiner ces cas.

Mais voyons d'abord la signification de notre notation. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

veut dire que les valeurs de x peuvent s'approcher de 2 aussi près que nous le voulons ou pouvons l'imaginer sans jamais atteindre 2 mais, et c'est le plus important, en restant dans le domaine de définition de la fonction. Nous ne pouvons donc pas parler de limite en a si la fonction n'est pas définie sur un intervalle contenant a (sauf peut être en a) **nous disons que x tend vers a.**

Il faut donc toujours vérifier si le domaine de définition de la fonction permet de faire tendre x vers a. il est clair que l'on ne peut pas à chaque fois faire un tableau, nous allons donc examiner quelques méthodes pour déterminer des limites.

Revenons à la fonction du début :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3 \quad \text{lorsque } x \in D_f$$

Nous admettrons que lorsque f est une fonction polynôme définie sur un domaine contenant a alors la limite en a de f est f (a).

Méthode 1.

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule en même temps le numérateur et le dénominateur d'une fonction rationnelle (numérateur et dénominateur polynômes) on factorise le numérateur et le dénominateur par (x – a), on simplifie la fonction et celle que l'on obtient devient un prolongement g de f en a et on calcule g (a) (lorsque c'est possible). Dans ce cas $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Exemple :

Calculer la limite en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$

L'ensemble de définition de la fonction est $D_f = IR \setminus \{-2;1\}$. Nous pouvons constater que si nous posons $\begin{matrix} N(x) = x^3 + 6x^2 - x - 6 \\ D(x) = x^2 + x - 2 \end{matrix}$ alors N (1) = 0 et D (1) = 0.

Nous pouvons donc factoriser le numérateur chacun par (x – 1) (voir leçon sur les polynômes en 2^nde ou en révision de 1^ère). On obtient :

$$N(x) = x^3 + 6x^2 - x - 6 = (x-1)(x^2 + 7x + 6)$$
$$D(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Et donc $f(x)=\dfrac{x^3+6x^2-x-6}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)(x^2+7x+6)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x^2+7x+6}{x+2}$ si $x\in D_f$

La fonction que nous obtenons est un prolongement de f en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{14}{3}$

Méthode 2

Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en un réel a qui annule en même temps le numérateur et le dénominateur d'une fonction irrationnelle (expression avec radical au dénominateur comme au numérateur), on factorise toujours par (x – a) mais cette fois ci en utilisant la ou les expressions conjuguées du numérateur et du dénominateur. L'on obtient encore un prolongement de f.

Exemples

Calculer la limite en a de la fonction f :

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $\quad a = 3$

$f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ $\quad a = 2$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ $\quad a = 1$

Exemple1

La fonction est définie si : $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$ on trouve aisément $D_f=[-1;3[\cup]3;+\infty[$

Nous constatons que le numérateur et le dénominateur s'annulent pour x = 3. Réécrivons f (x) en utilisant l'expression conjuguée du numérateur ; il vient :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

si $x\in D_f=[-1;3[\cup]3;+\infty[$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{1}{4}$

Exemple2

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} \quad est \text{ définie si } \begin{cases} x+7\geq 0 \\ \sqrt{x+7}-3\neq 0 \end{cases}$$

$\sqrt{x+7}-3=0$ donne $\sqrt{x+7}=3$ donc $x+7=9$ et par suite $x=2$

$D_f=[-7;2[\cup]2;+\infty[$

Nous constatons aussi que le numérateur et le dénominateur s'annulent pour x = 2. Transformons l'écriture de f (x) en utilisant l'expression conjuguée du dénominateur, il vient :

$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2}=\sqrt{x+7}+3$ pour x dans l'ensemble de définition de f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$

Exemple3

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} \qquad a = 1$$

$$f \text{ est définie si } \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x+8\geq 0 \\ \sqrt{x+8}-3\neq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $D_f=[-3;1[\cup]1;+\infty[$.

Comme pour les autres exemples, le numérateur et le dénominateur s'annulent pour x = 1. Nous allons transformer en utilisant les expressions conjuguées du numérateur et du dénominateur. Il vient :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$

Ou encore $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ en simplifiant dans le domaine de définition de la fonction.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{3}{2} \quad .$$

Limites infinies en un point

Limites à droite, à gauche

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}$ son ensemble de définition est $IR\setminus\{4\}$

Examinons le tableau suivant. Nous constatons que les valeurs de x « s'approchent » de 4 en restant dans le domaine de définition de f, les valeurs de f(x) deviennent de plus en plus grandes en valeurs absolues :on dit qu'elles deviennent infinies. remarquons que pour certaines valeurs de x , f(x) est positif et pour d'autres f(x) est négatif.

x	3,9	3,99	3,999	3,9999	3,99999	4,01	4,001	4,0001	4,00001
f(x)	-17	197	1997	19997	199997	203,01	2003,001	20003	200003

La valeur 4 annule le dénominateur et non le numérateur. Pour x = 4 le numérateur est égal à 2 qui est positif. Donc le changement de signe est dû au dénominateur. En regardant le tableau nous remarquons que pour les valeurs de x inférieures à 4, les valeurs de f(x) sont négatives. Cela est dû au fait que le numérateur est positif et le dénominateur négatif.

Lorsque les valeurs de x « s'approchent »de 4 en étant inférieures à 4, on dit que l'on cherche la limite de f en 4 à gauche.

Lorsque les valeurs de x « s'approchent » de 4 en étant supérieures à 4, on dit que l'on cherche la limite de f en 4 à droite.

Revenons à la fonction de départ et étudions le signe du dénominateur. (celui du numérateur étant connu).

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
x-4	- 0 +

A gauche de 4, nous pouvons écrire : $\lim\limits_{x \to 4^-}(x-4) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 4 \\ <}}(x-4) = 0^-$. « lire limite de x – 4 quand x tend vers 4 à gauche. » les deux notations sont valables mais il faut savoir qu'il n'ya aucun lien entre le signe – sur le 4 et celui sur 0. Il n'en est pas toujours ainsi. Donc pas de remarque hâtive.

Le signe - sur 4 traduit le fait que x est inférieur à 4 donc il est positif, celui sur 0 traduit aussi que la valeur de (x – 4) est inférieure à 0 mais un nombre inférieur à 0 est négatif.

En conclusion

$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 5x + 6) = 2$$
$$\lim_{x \to 4^-}(x-4) = \lim_{\substack{x \longrightarrow 4 \\ <}}(x-4) = 0^-$$
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 4 \\ <}} f(x) = -\infty$$

Nous procédons de même pour la limite à droite et nous obtenons :

$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 5x + 6) = 2$$
$$\lim_{x \to 4^+}(x-4) = \lim_{\substack{x \longrightarrow 4 \\ >}}(x-4) = 0^+$$
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 4 \\ >}} f(x) = +\infty$$

La fonction f n'admet pas de limite en 4 (ou au point 4) car la limite à droite est différente de celle à gauche.

Remarque : lorsque $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ <}} f(x)$ alors f admet une limite en a.

On peut être amené à calculer la limite à droite et celle à gauche lorsqu'il n'est pas possible de conclure directement. C'est le cas en général avec les valeurs absolues

exemple

calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{|x-3|}$

la fonction est définie pour tous les réels x différents de 3, il est donc légitime de chercher à calculer sa limite en 3. Nous remarquons cependant que le numérateur et le dénominateur s'annulent pour x = 3 mais nous ne pouvons pas simplifier sans parler de la valeur absolue.

Nous avons d'une manière simple :

$$f(x)=1 \quad \text{si } x>3$$
$$f(x)=-1 \quad \text{si } x<3$$

D'où $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 3} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 3} f(x)$

Si le dénominateur de la fonction étudiée garde un signe constant, alors la limite à droite et celle à gauche sont égales.

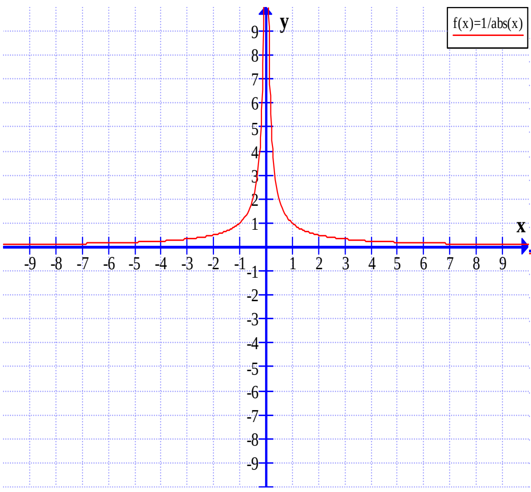
Définition intuitive

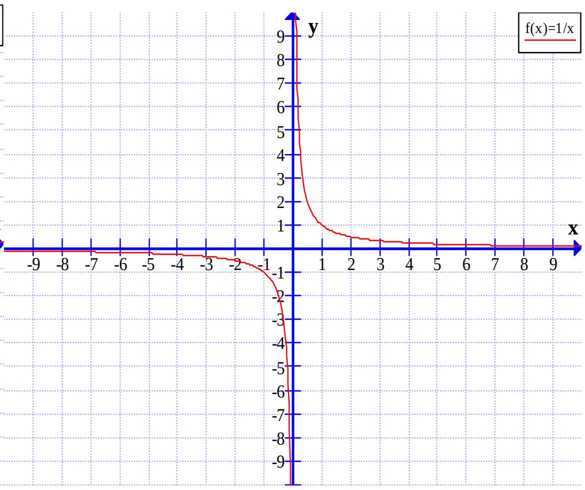
Soit en f une fonction définie sur un domaine D contenant a (sauf peut être en a).lorsque x prend des valeurs de plus en proches de a. si les valeurs de f(x) deviennent de plus en plus

1. *Grandes, on dit que f a pour limite* $+\infty$ *en a. on note* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

2. *Grandes en valeur absolue mais en étant négatives, on dit que f a pour limite* $-\infty$ *en a on note* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Graphiquement





$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}=+\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} \dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} \dfrac{1}{x}=-\infty$

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, on demande

d'étudier la limite en x_o de la fonction f

1. $f(x) = x^2 + x + 1 \quad x_o = 2$
2. $f(x) = -x^2 - x + 2 \quad x_o = 1$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x} \quad x_o = -2$
4. $f(x) = \dfrac{3x-1}{7x-4} \quad x_o = 1$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \quad x_o = -1$
6. $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2} \quad x_o = 2$
7. $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+1} \quad x_o = -1$
8. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1} \quad x_o = 1$
9. $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \quad xo=9$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad x_o = 3$
11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3} \quad x_o = 3$
12. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} \quad x_o = 0$
13. $f(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{x-\sqrt{x+6}} \quad x_o = 3$
14. $f(x) = \dfrac{2x-\sqrt{x+1}-4}{(x+1)(x-3)} \quad x_o = 3$
15. $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \quad x_o = 2$
16. $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+2}} \quad x_o = 0$
17. $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} \quad x_o = 1$
18. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16} \quad x_o = 4$

EXERCICE 2 Calculer : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^2-4x-12}$, $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{6x^3+5x^2-x-1}{2x^2-9x+4}$

Limites d'une fonction en $+\infty$

Définitions intuitives

Limites infinies à l'infini

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les valeurs de f (x) deviennent de

Plus en plus grandes, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

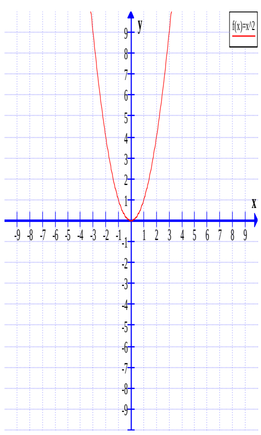
De plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Si x est suffisamment grand, il en est de même pour x^n pour tout n entier naturel non nul. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ pour $n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

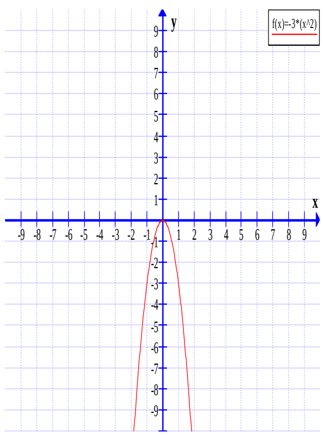
Les définitions sont les mêmes pour $-\infty$ sauf que $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}\ ) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(2-\sqrt{1-\frac{3}{x}})=-\infty$ ceci est évident compte tenu des résultats sur le signe d'un produit ou d'une puissance.

Exemples

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

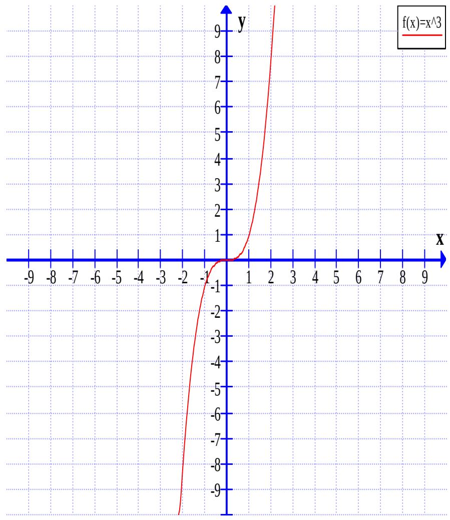


$\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+3\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$$

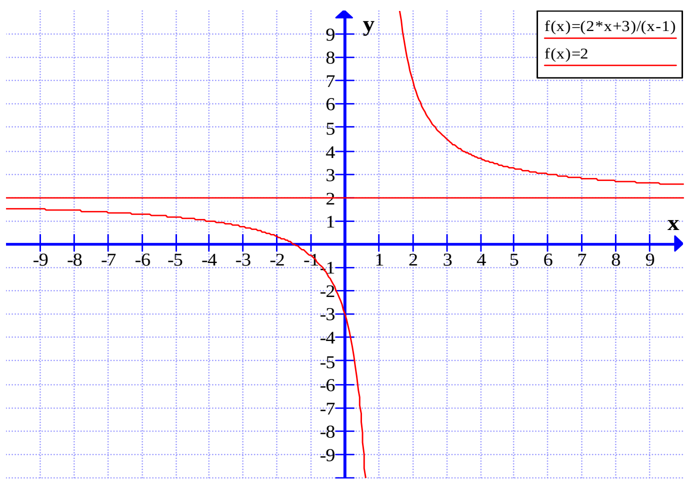


Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les valeurs de f (x) deviennent de plus en plus proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en + ∞ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

On définit de même à - ∞ .

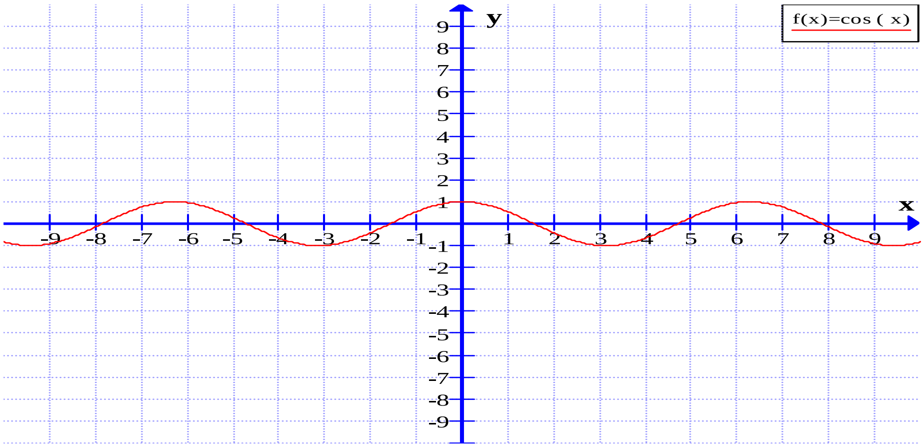
Si x est suffisamment grand il en est de pour (x-2)² et donc $\frac{1}{(x-2)^2}$ est arbitrairement petit donc tend vers zéro. D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

Exemple



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x-1}=2$$

Certaines fonctions n'ont pas de limite à l'infini. C'est le cas de la fonction cosinus



Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou non), la somme f + g admet une limite que nous allons essayer de déterminer

limf / limg	l	+ ∞	− ∞
l'	l+l'	+ ∞	- ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞	On peut conclure
− ∞	− ∞	On ne peut conclure	− ∞

Lorsqu'on ne peut pas conclure, on a une « forme indéterminée ».on verra plus loin d'autres formes indéterminées et surtout comment lever ces indéterminations.

Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+3+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+5)$ (forme indéterminée) car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+5)=-\infty$

Pour la forme indéterminée, nous verrons plus loin qu'en mettant x² en facteur on peut avoir la limite à condition de connaitre la limite d'un produit.

Limite d'un produit

limf / limg	l≠0	+ ∞	-∞
l'≠0	l×l'	± ∞	± ∞
+ ∞	± ∞	+ ∞	-∞
- ∞	± ∞	-∞	+∞
0	0	on ne peut conclure	On ne peut conclure

Remarque si l et l' sont nulles alors le produit tend aussi vers zéro, mais infini que multiplie zéro est une autre forme indéterminée.

Exemples

$\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$

<u>Méthode</u>

Pour les fonctions <u>polynômes à l'infini</u> il faut factoriser par le terme de plus haut degré. Cette factorisation n'étant pas celle rencontrée dans les classes antérieures où le facteur commun était *apparent*.

Limite d'un quotient

limf limg	l	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	l/l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	On ne peut conclure	On ne peut conclure
$-\infty$	0	On ne peut conclure	On ne peut conclure

Le cas où l' est nul et celui où l et l' sont nulles sont déjà étudiées lorsque x tend vers a. nous étudierons les autres cas.

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} 2=2 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to0}(x-1)=-1 \text{ et } \lim_{x\to0}(x^2)=0^+$$

Méthodes

Pour les limites à l'infini :

1. Pour les fonctions polynômes, lorsque on a une forme indéterminée

(+∞)+(-∞) on met en facteur le terme de plus haut degré pour avoir des termes qui tendent vers 0 sauf un dans la parenthèse et on applique la limite d'un produit.

2. Pour les fonctions rationnelles, on met en facteur au numérateur et au dénominateur les termes de plus hauts degrés et on applique la limite d'un quotient après simplification.

3. Pour les fonctions irrationnelles, on peut encore utiliser les expressions conjuguées, mais on peut quelques fois les éviter :

Exemples

Exemple 1.

$f(x) = x - \sqrt{x^2+3x}$ definie sur $]-\infty;-3] \cup [0;+\infty[$ lorsque nous élevons au carré les deux termes de cette somme nous obtenons des polynômes de même degré. Dans ce cas, lorsque la limite est sous forme indéterminée, on utilise l'expression conjuguée.

Pour calculer

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x}) \quad \text{écrivons: } f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+3x})(x+\sqrt{x^2+3x})}{(x+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$ou\ f(x) = \frac{x^2-x^2-3x}{(x+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \frac{-3x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

La dernière expression est obtenue en mettant x² en facteur et « sortant » sa racine carrée qui est égale à valeur absolue de x. x tendant vers plus l'infini est donc positif et on peut écrire : $f(x) = \frac{-3x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{-3x}{x(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}})} = \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$ on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-3}{2}.$$

Exemple 2

$f(x) = 2x + \sqrt{x^2-3x}$ définie sur $]-\infty;0] \cup [3;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{x^2-3x}) = \lim_{x\to-\infty}(2x+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}})$$

x tendant vers moins l'infini est négatif donc

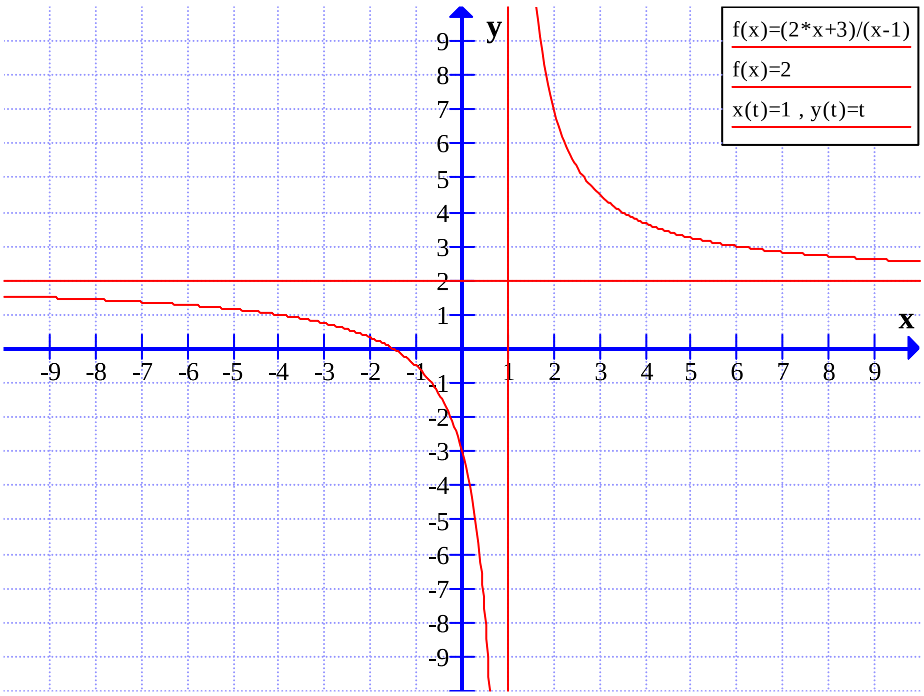
$$\lim_{x\to-\infty}(2x+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}) = \lim_{x\to-\infty}x(2-\sqrt{1-\frac{3}{x}})=-\infty$$

Les formes dites indéterminées sont : $"\frac{0}{0}"$ $"\frac{\infty}{\infty}"$ $"0\times\infty"$ $"+\infty-\infty"$ *Dans ces cas on ne peut pas conclure sans calculs supplémentaires. Il ne faut pas écrire ces formes , il ne faut pas dire zéro sur zéro est une forme indéterminée mais dire par exemple le quotient de fonctions tendant vers zéro est une forme indéterminée.*

Interprétation graphique de certaines limites :asymptotes

asymptote horizontale

si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$ ou $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$ alors la droite d'équation y = b est une asymptote horizontale (ou parallèle à l'axe des abscisses) à la courbe C_f en $+\infty$ ou $-\infty$.



La droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe de f.

La droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f.

Asymptote verticale

si $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ <}} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation x = a est asymptote verticale (ou parallèle à l'axe des ordonnées) à la courbe C_f .

Ordre et limites

Théorèmes de comparaisons (admis)

Théorème

Soient f, g et h définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

Si , pour x assez grand, on a $f(x) \geq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$,alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si , pour x assez grand, on a $f(x) \leq \mathrm{g}(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en a et en -∞ .

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ .si pour x assez grand on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{g}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en a et en -∞ .

Exemples

Soit la fonction définie pour x > 0 par $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x} = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$
$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0$$
$$1 - \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\sin x}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$$

En posant $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ on $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

EXERCICE 1

EXERCICE 301 : Trouver les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 1}{2x^4 + x - 2}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 4x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 4x + 1}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - x + 3}{2x - 1}$;

EXERCICE 2 : La fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{|x - 2|}$ a-t-elle une limite pour x arbitrairement voisin de + 2 ?

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

EXERCICE 3 : La fonction f définie par

$f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ a-t-elle une limite pour arbitrairement voisin de 0 ?

EXERCICE 4 : Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x^2 - x - 1}$; $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{4x + 3}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x + 4}}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}}{x^2 - 6x + 5}$

EXERCICE 5 : Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x - 1} - (x - 1)]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 1}]$

EXERCICE 7: Trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x-3}} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+x-3}}$$

EXERCICE 8 : Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{2x-1-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x-3+\sqrt{3x^2-x+2}}$ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$.

CONTINUITE

Fonction continue en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a ; f est continue en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Remarque :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Signifie que on peut faire tendre x vers a , que f admet une limite en a et que cette limite est égale à f(a).

Si f n'est pas continue en a, il y'a donc trois possibilités :

1. f n'est pas définie en a

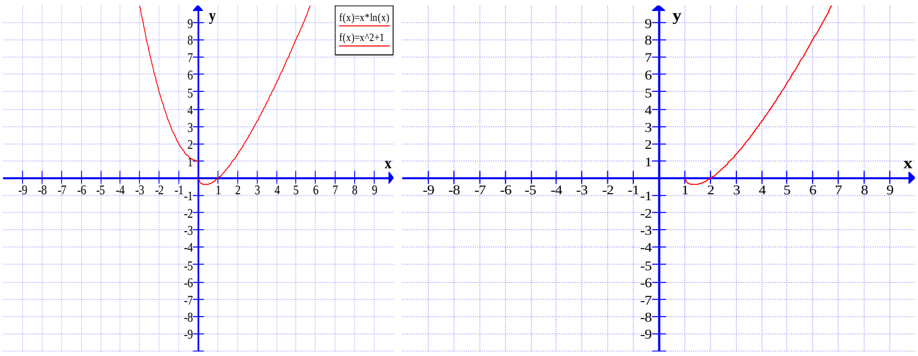
2. f est définie en a mais f n'admet pas de limite en a

3. f est définie en a f admet une limite en a mais $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

une fonction est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

une fonction est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

3. Graphiquement



4. f n'a pas de limite en a.

continuité sur un intervalle

f définie sur un intervalle est continue sur cet intervalle si elle est continue en chaque point de l'intervalle.

Théorèmes (opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et α un réel. Alors
f + g est continue sur I
αf est continue sur I
fg est continue sur I
si de plus g est non nulle sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I
si f set une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J contenant f (I) alors $g \circ f$ est continue sur I.

conséquence

Toute fonction polynôme est continue sur IR.

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Prolongement par continuité

Nous savons que si une fonction f est définie sur IR \ {a} il est possible de définir plusieurs prolongements de cette fonction en a. il est possible mais obligatoire que l'un de ces prolongements soit une fonction continue en a. elle est alors appelée prolongement par continuité de f en a.

Exemple : soit la fonction f définie sur IR\{2} par $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ nous savons que

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$ donc la fonction g définie par :

$\begin{cases} g(2)=-1 \\ g(x)=f(x) \quad \text{si } x\neq 2 \end{cases}$ est définie sur IR et elle est continue en 2. C'est **le** prolongement de f par continuité en 2.

Donc pour définir le prolongement par continuité, il faut que f ne soit pas définie en a, que l'on puisse calculer la limite de f en a et que cette limite soit finie .

EXERCICE 1

Calculer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ et trouver un prolongement par

continuité de f dans les cas suivants :

1°) $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}$; $x_0 = a$

2°) $f(x)=\frac{6x^2+5x-4}{2x-1}$; $x_0=\frac{1}{2}$

EXERCICE 2

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1°) $f : x \mapsto x^2-7x+\sqrt{2}$ **2°)** $f : x\mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2+7x-8}$

3°) $f\begin{cases} x\mapsto \frac{x+1}{x+2} \text{ si } x\in[-1\,;1] \end{cases}$ **4°)** $\begin{cases} f: x\mapsto \frac{x}{x+1} \text{ si } x\in\mathbb{R}^- \end{cases}$

$x \mapsto \dfrac{3x+3}{x+4}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1\,;1]$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x+3}$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$

EXERCICE 3

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition, en discutant éventuellement suivant les valeurs de *a* et *b* :

1°) f (x) = x + 1 si x **≤** 1

2°) $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \\ f(x) = x \text{ pour } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 3 - ax^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

3°) $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x - 2 \text{ pour } 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = 4 - x \text{ pour } x \geq 3 \end{cases}$

4°) $\begin{cases} f(x) = x^2 - \text{si } x < 1 \\ f(x) = 3x + a \quad \text{si } x > 1 \\ f(1) = b \end{cases}$

5°) $\begin{cases} f(x) = x^2 - ab \text{ si } x < -2 \\ f(x) = \text{si } -2 \leq x < 1 \\ f(x) = x - a \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

EXERCICE 4

1°) Déterminer *a* et *b* réels pour que la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{x - a} \text{ si } x < 0 \\ g(x) = x - b \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

soit continue sur son domaine de définition.

2°) Soit f_a la fonction définie par : $\begin{cases} f_a(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+ax+a}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f_a(2) = k \end{cases}$

Quelles valeurs faut-il donner à *a* et *k* pour que f soit continue au point $x_o = 2$?

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur IR\{3} par : $f(x) = \begin{cases} mx + \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x > 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-2} & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Déterminer $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

Pour quelle valeur de m f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur]1 ;+∞[par : $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

Déterminer la limite de f en 2

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Si oui définir ce prolongement.

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie sur IR\{0} par $f(x) = \dfrac{2x^2+|x|}{x}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x + a + \sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{ax-b+a}{2x+4} & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{2}{3}bx - \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Montrer que le domaine de définition de f est IR.
2. Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en (-1).
3. Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en 1.

4. Déterminer a et b pour que f soit continue en (-1) et (1).

CHAPITRE 10 : DERIVEES ET APPLICATIONS

L'évolution d'une population de bactéries, la diffusion d'une maladie, les variations de l'intensité dans un circuit électrique sont des phénomènes qui peuvent être modélisés par des fonctions continues dont la variable est le temps. Pour étudier ces phénomènes, on utilise des modèles qui, à partir d'hypothèses raisonnables, permettent d'écrire une relation entre la fonction à étudier et ses dérivées successives.

Bertrand Russel, logicien et philosophe disait : « bien que cela semble être un paradoxe, toute science exacte est dominée par l'idée d'approximation »

Dérivabilité en un point

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I contenant a est dérivable en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

La fonction est donc dérivable si la limite existe et est finie.

Cette limite finie s'appelle nombre dérivé de la fonction f en a.il se note $f'(a)$ lire « f prime de a »

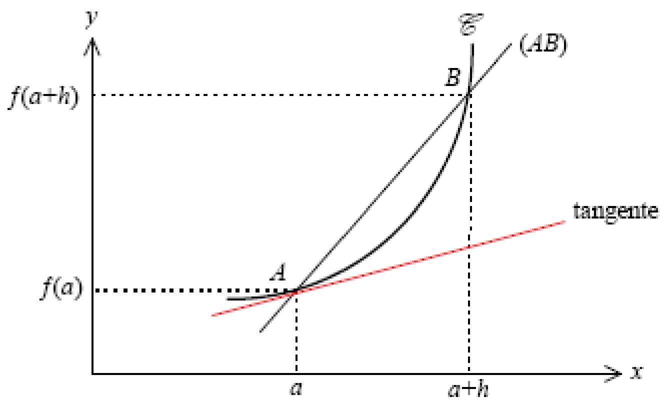
Autre formulation de la définition

Une fonction f définie sur un intervalle I contenant a est dérivable en a si C_f

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

résultat obtenu en posant x = a + h .

Interprétation géométrique du nombre dérivé.



Soit une fonction f dérivable en a élément de I. soit h non nul tel que a + h est élément de I ; les points A(a ;f(a)) et B (a+h ; f(a+h)) sont deux points distincte de la courbe C_f . le réel $\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB). (nous reconnaissons le taux d'accroissement) lorsque h tend vers zéro le point B se rapproche du point A et la droite (AB)se rapproche de la tangente à C_f en A.

Le coefficient directeur de cette tangente est donné par la valeur limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers zéro c'est-à-dire le nombre dérivé $f'(a)$.

Définition et théorème

Soit f une fonction dérivable en a et A(a ;f(a)) le d'abscisse a de la courbe C_f *.la tangente à la courbe* C_f *au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur* $f'(a)$.

L'équation réduite de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

<u>Démonstration</u>

La fonction est dérivable en a et le coefficient directeur de la tangente à C_f en A d'abscisse a est $f'(a)$. Cette tangente admet donc une équation de la forme : $y = f'(a)x+b$ où b est à déterminer. Cette tangente passe par A donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où : $f(a) = f'(a).a+b$ et donc $b = -a.f'(a)+f(a)$ .en remplaçant b dans l'équation, on obtient le résultat.

Une fonction définie en a n'est pas dérivable en a si :

1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$ dans ce cas la courbe de f admet en son point d'abscisse a un tangente (ou demi tangente) verticale.

2. $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nous disons dans ce cas que le nombre dérivé à droite (limite à droite) est différent du nombre dérivé à gauche. La limite n'existe donc pas et la courbe possède deux demi tangentes de coefficients directeurs distincts, elle présente alors ce qu'on appelle un point anguleux.

Interprétation cinématique de la dérivée : vitesse instantanée.

Supposons que la distance parcourue par un mobile (à partir d'un point donné) soit exprimé par rapport à la durée du parcours par une fonction notée x dépendante du temps t comme variable.

La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 ($t_2 \geq t_1$) est $f(t_2) - f(t_1)$; nous savons que le quotient de la distance parcourue et du temps mis donne la vitesse moyenne. lorsque cette durée est très petite c'est-à-dire lorsque t_1 tend vers t_2, alors la limite de la vitesse moyenne qui est la dérivée de la fonction x s'appelle vitesse instantanée du mobile ; on note :

$$v(t) = x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Remarquons qu'il ne faut donner aucune signification (pour l'instant) aux deux termes du rapport $\frac{dx}{dt}$.

Théorème : toute fonction dérivable en a est continue en a.

Exercice : montrer que les nombres dérivés en a des fonctions suivantes sont :

$$\begin{array}{ll} f(x) = k & f'(a) = 0 \\ f(x) = x & f'(a) = 1 \\ f(x) = x^2 & f'(a) = 2a \\ f(x) = \frac{1}{x} & f'(a) = -\frac{1}{a^2} \\ f(x) = \sqrt{x} & f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{array}$$

Fonction dérivée

Définitions

On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel a de I.

La fonction qui à tout x élément de I associe le nombre dérivé de f en x, s'appelle fonction dérivée de f et est notée $f' : x \mapsto f'(x)$

Donnons les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles

Fonction f définie par	Dérivable sur	Fonction dérivée f ' (x)
f(x)= k, avec k réel	IR	0
f(x)= x	IR	1
f(x)= x^2	IR	2x
f(x)= x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	IR	nx^{n-1}

f(x)= $\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
f(x)= $\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarquons que pour la fonction puissance n il faut recourir à la démonstration par récurrence étudiée dans d'autres chapitres.

<u>Opérations sur les fonctions dérivables</u>

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et dont les fonctions dérivées respectives sont notées u' et v'.

Fonction f	Dérivable sur	Fonction dérivée f '
ku avec k réel	I	ku'
u +v	I	$u'+v'$
uv	I	$u'v+v'u$
$\frac{1}{v}$	Pour tout x de I tel que $v(x)\neq 0$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	Pour tout x de I tel que $v(x)\neq 0$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
u^n avec $n\in \mathbb{N}^*$	I	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$	Pour tout x de I tel que $v(x)\ \frac{v'}{2\sqrt{v}}$ > 0	$\frac{v'}{2\sqrt{v}}$

Il découle des formules de dérivation que :

Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition..

Compléments

Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit g une fonction dérivable sur $f\langle I\rangle$.

En un point a de I, $(g\circ f)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}$ (par définition).

En divisant et en multipliant par le réel non nul $f(a+h)-f(a)$, on obtient $(g\circ f)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{f(a+h)-f(a)}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ou encore

$(g\circ f)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g\left[f(a+h)\right]-g\left[f(a)\right]}{f(a+h)-f(a)}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. La première limite est $g'\left[f(a)\right]$ nombre dérivé de g au point f(a) ; la seconde est f ' (a).

Théorème :

Si f est une fonction dérivable sur I, intervalle de IR, et g une fonction dérivable sur $f\langle I\rangle$,alors la fonction $(g\circ f)$ est dérivable sur I, et pour tout x élément de I $(g\circ f)'(x)=g'\left[f(x)\right]\times f'(x)$.

Remarquons que ce théorème permet de démontrer les deux dernières formules du tableau précédent.

Dérivée d'une bijection réciproque

Soit *f* une bijection dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout x élément de I $f'(x)\neq 0$. Soit g la réciproque de *f*, supposons que g est dérivable sur $f\langle I\rangle$. Pour tout x élément de I $(g\circ f)(x)=x$ .admettons aussi (dans le cadre de ce cours) que si deux fonctions dérivables sont égales alors leurs dérivées sont égales : pour tout x élément de I $g'\left[f(x)\right]\times f'(x)=1$ d'où $g'\left[f(x)\right]=\frac{1}{f'(x)}$

Théorème

Soit *f* une bijection dérivable sur I, et dont la dérivée ne s'annule pas sur I. la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $f\langle I\rangle$ et pour tout x élément de I

$$(f^{-1})'[f(x)]=\frac{1}{f'(x)} \text{ ou } \left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable et dont la dérivée f' est elle-même dérivable. On dit que f est deux fois dérivable. La dérivée de f' se note (f')' ou simplement f'' et se nomme dérivée seconde de f.

Si la fonction f est n fois dérivable, on note f' ;f'' ;f''' ; . . . $f^{(n)}$.. ses dérivées première, seconde, troisième,….n-ième (ou dérivée d'ordre 1,2,3,…,n)

Avec la notation en cinématique la dérivée seconde de x se note $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$, le numérateur n'a plus aucune signification.

<u>Applications de la dérivation</u>

Variation d'une fonction numérique

Il est facile de montrer en utiliser le taux d'accroissement que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si *f* est constante sur I alors sa dérivée est nulle en tout point de I
- Si *f* est croissante sur I alors sa dérivée est positive ou nulle en tout point de I
- Si *f* est décroissante sur I alors sa dérivée est négative ou nulle en tout point de I.

Nous admettrons les résultats réciproques suivants :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si pour tout x élément de I f'(x)=0 alors f est constante sur I

- Si pour tout x élément de I f’(x) ≤ 0 alors f est décroissante sur I
- Si pour tout x élément de I f’(x) ≥ 0 alors f est croissante sur I

Nous déduisons du premier résultat que si deux fonctions ont même dérivée sur un intervalle alors leur différence est constante.

<u>Extrémums d’une fonction</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. si f présente un extrémum en a point de I alors f ‘(a) = 0

En effet si par exemple *f* (a) est un minimum de la fonction, alors il existe J intervalle ouvert contenu dans I tel que pour tout x élément de I, $f(x) \geq f(a)$

Pour x < a $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ donc $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

Pour x > a $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ donc $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

La fonction *f* étant dérivable en a, les deux limites sont égales. Donc *f* ‘ (a) = 0.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. si au point de I, f ‘ (x) s’annule en changeant de signe, alors f présente un extremum au point a.

<u>Remarque</u> : le changement de signe est nécessaire.

Nombre de solutions d’une équation

<u>Théorème1</u> (de la bijection)

Toute fonction dérivable sur un intervalle I et strictement monotone sur I est bijective sur I.

<u>Théorème2</u> .

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et telle f (a) x f (b) < 0 alors il existe au moins un réel β de]a ;b[tel que f (β) = 0

<u>Théorème3</u>

Si f est dérivable et strictement monotone sur [a ;b] et si f(a)xf(b)<0 alors il existe un réel α unique dans]a ;b[tel f(α) = 0.

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants,

— en utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_o.

— dans les cas où f est dérivable en x_o, écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point M_0 d'abscisse x_o.

— dans les cas où f n'est pas dérivable, interpréter géométriquement les résultats.

— Construire les tangentes et demi-tangentes correspondantes.

1°) $f(x) = x^3 + 3x^2$ $(x_o = -1)$ **2°)** $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ $(x_o = 3)$ **3°)** $f(x) = \sqrt{x+5}$ $(x_o = 4)$

4°) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ $(x_o = -2)$ **5°)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$ $(x_o = -2)$

6°) $f(x) = |\, x(x-1) \,|$ $(x_o = 0 ; x_o' = 1)$ **7°)** $f(x) = x\,|\, x - 3 \,|$ $(x_o = 3 ; x_o = 0))$

7°) : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $(x_o = 1)$

8°) $f(x) = \sqrt{|\, x^2 - x \,|}$ $(x_o = 0 ; x_o' = 1)$

9°) $f(x) = x^2 - |\, x \,|$ $(x_o = 0)$

EXERCICE 2

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer a et b pour que $\mathscr{C}_f$ passe par A (0 ;1) et admette en A une tangente d'équation y = 4x + 3.

EXERCICE 3

Soit a un réel. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$.

Déterminer a pour que $\mathscr{C}_f$ admette au point d'abscisse $x_o = 1$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 4

Soit a, b et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}.$$

Déterminer a, b, c pour que $\mathscr{C}_f$:

— admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

— coupe la courbe Γ de la fonction g définie par : $g(x) = -2x^2 + x + 5$ au point d'abscisse

$x_o = 1$ et admette en ce point la même tangente que Γ.

EXERCICE 5

Soit a et b deux paramètres réels. On définit la fonction f de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x_o = 3$.

EXERCICE 6

Déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ dans las cas suivants :

a) $\begin{cases} \text{si } x \leq 2,\ f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 1} \\ \text{si } x > 2,\ f(x) = m(x - 4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{si } x \leq 0,\ f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 - 2)x + 2 \\ \text{si } x > 0,\ f(x) = \dfrac{x + 2m}{x + 1} \end{cases}$

EXERCICE 7

Soit f (x) = $\frac{ax + b}{cx + d}$. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c*, d pour que $\mathscr{C}_f$ admette pour asymptotes les droites d'équations respectives y = 3 et x = — 2 et admette au point d'abscisse x_o = 1 une tangente de coefficient directeur $\frac{8}{9}$.

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f.

1°) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2)$ **2°)** $f(x) = (x + 1)^6 (x - 1)^5$ **3°)** $f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 - 1}$

4°) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ **5°)** $f(x) = \frac{3}{4x^2 + 2}$ **6°)** $f(x) = \frac{-1}{(2x + 1)^2(x + 2)}$

7°) $f(x) = \frac{1}{2x + 1} - \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x}$ **8°)** $f(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3$ **9°)** $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$

10°) $f(x) = (1 - x)\sqrt{2 - 3x}$

19°) $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3x - 2}$ **20°)** $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}}$ **21°)** $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

EXERCICE 10

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

1°) $f(x) = E(x) \sin^2 \pi x$ (où E(x) désigne la partie entière de x) .

2°) $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{x}}$ pour $x \neq 0$ et f (0) = 0 . **3°)** $f(x) = x^2 + | x - 1 |$

4°) $f(x) = \sqrt{| x |}$ **5°)** $f(x) = \frac{| x |}{x}$ et f (0) = 0

EXERCICE 11

En utilisant la définition de la dérivabilité, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x+3} - 2}{2x^2 + 7x - 4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}{x}$$

EXERCICE 12

Dresser le tableau de variation des fonctions f suivantes :

1°) $f(x) = x^2 + 4x - 1$ **2°)** $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ **3°)** $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 1}$

4°) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ **5°)** $f(x) = x^3 - 4x + 5$ **6°)** $f(x) = -4x^3 + 3x$

7°) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 10$ **8°)** $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$ **9°)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

10°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4}$ **11°)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 2x - 11}{x^2 - x - 2}$ **12°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2}$

13°) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x^2}$ **14°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ **15°)** $f(x) = \sqrt{-x + 3}$

16°) $f(x) = \dfrac{2x^2 + |x - 3|}{x^2 - |x - 1|}$

• EXERCICE 13

On considère la fonction $f_m : x \mapsto mx^2 - (2m + 1)x + m + 1$où m est un paramètre réel.

Soit $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m.

2°) Montrer que quel que soit m, $\mathscr{C}_m$ passe par un point fixe A (dont les coordonnées sont indépendantes de m) . Montrer que les courbes $\mathscr{C}_m$ admettent la même tangente en A.

3°) Construire dans le même repère les courbes $\mathscr{C}_m$ pour $m \in \{-1, 0, 1\}$.

• EXERCICE 14

Déterminer suivant les valeurs de m le sens de variation de la fonction fm dans les cas suivants :

a) $f_m : x \mapsto \dfrac{(5m+1)x+m+2}{2mx+1}$ **b)** $f_m : x \mapsto \dfrac{mx+m+4}{x+m+1}$

c) $f_m : x \mapsto \dfrac{mx-5}{x^2+1}$ **d)** $f_m : x \mapsto (m+1)x^3+(2m-1)x+2$

EXERCICE 15 Problèmes d'extremum

Les différentes questions sont totalement indépendantes.

1°) Le triangle IJK est équilatéral de côté a. on construit un rectangle ABCD en choisissant :

• A sur [JK] de sorte que : JA = x ($0 < x < \frac{a}{2}$)

• $D \in [IJ]$, $C \in [IK]$, $B \in [JK]$.

Comment faut-il choisir x pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximum ?

2°) On veut enclore le long d'une rivière, avec 1000 m de clôture, un champ rectangulaire d'aire maximale (aucune clôture n'est nécessaire le long de la rivière et cette rivière est rectiligne).

Quelles sont les dimensions du champ obtenu et quelle est son aire ?

3°) On veut réaliser une boite de conserve cylindrique avec un minimum de métal, le volume de la boite étant 1 dm^3. On note h la hauteur de la boite et r son rayon exprimé en dm.

a) Exprimer le volume V de la boite en fonction de r et h, puis en faisant V = 1, exprimer h

en fonction de r .

b) Déterminer en fonction de h et r la surface S de métal nécessaire à la réalisation de la oite. Exprimer S uniquement en fonction de r .

c) Pour quelle valeur de r la surface S est-elle minimale ?

Quelle est la valeur de h correspondante ?

4°) On dispose d'une feuille de carton carrée de côté 10 cm. Aux quatre coins de cette feuille, on découpe un carré de côté x cm, puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte en forme de parallélépipède rectangle sans couvercle. On désigne par V (x) le volume de cette boite exprimé en cm^3.

1°) a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.

b) Démontrer que : $V(x) = x\,(100 — 2x)^2$.

2°) Etudier le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue et dresser son tableau variation.

3°) En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximum.

Calculer ce volume maximum.

EXERCICE 16

A quelle condition la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x - a} - \dfrac{1}{x - b}$ (où a et b sont des réels distincts) admet-elle un maximum? un minimum ?

EXERCICE 17

Déterminer b et c pour que $f : x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + 2$ admette en $x_o = 1$ un extremum égal à 2.

Etudier alors le sens de variation de f.

EXERCICE 18

Déterminer b et c pour que $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + bx + c}{x - 2}$ admette en $x_o = -1$ un maximum égal à -3.

Etudier alors le sens de variation de f.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + bx + 3}{x - 1}$ (où b est un paramètre réel).

1°) Comment faut-il choisir b pour que f n'admette pas d'extremum ?

2°) Déterminer alors b pour que la courbe représentative de f admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $2x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 20

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$

Déterminer suivant les valeurs de a et b le nombre d'extremums de f.

EXERCICE 21

Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. on suppose que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = -1$ .Soit $x_o \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_o .

1°) Déterminer en fonction de x_o une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ en M_0.

2°) Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathscr{D}$.

a) Démontrer que $M_0J = M_0H_0$, puis que (T_0) est la médiatrice de $[JH_0]$.

b) En déduire une construction géométrique simple de M_0 et de (T_0) connaissant H_0.

3°) *Application* : Construire géométriquement les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -2 et 3 puis les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

EXERCICE 22

1°) Démontrer que si f est une fonction dérivable en x_o , alors :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x\,f(x_o) - x_o\,f(x)}{x - x_o} = f(x_o) - x_o\,f'(x_o) .$$

2°) Prouver que si f et g sont deux fonctions dérivables en 0, telles que :

$$f(0) = g(0) \text{ et } g'(0) \neq 0$$

alors $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$

EXERCICE 23

1°) Soit f une fonction dérivable sur un ensemble D de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que tel que , pour tout x de D, $-x \in D$) .

Montrer que que si f est paire (respectivement impaire), alors f' est impaire (respectivement paire) .

2°) Montrer que si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T, dérivable sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction dérivée est également périodique, de période T.

EXERCICE 24

Soit a un nombre réel. On dit qu'un polynôme P est factorisable par $(x - a)^2$ lorsqu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$.

1°) Montrer que si P est factorisable par $(x - a)^2$, alors $P(a) = P'(a) = 0$.

2°) On suppose que $P(a) = 0$ et on désigne par f le polynôme tel que $P(x) = (x - a) f(x)$.

Montrer que si $P'(a) = 0$, alors f est factorisable par $x - a$.

3°) En déduire que les propriétés sont équivalentes :

(1) Le polynôme P est factorisable par $(x - a)^2$.

(2) On a $P(a) = P'(a) = 0$.

Applications

A_1 : Montrer que $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x\ \ 12$ est factorisable par $(x - 2)^2$.

Résoudre ensuite l'équation $P(x) = 0$.

A_2 : Soit n un entier naturel non nul . A l'aide des questions précédentes, montrer que le polynôme $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ est factorisable par $(x - 1)^2$.

A_2 : Soit P un polynôme de degré 3 admettant trois racines distinctes x_1, x_2 et x_3.

Montrer que P ' ne s'annule ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3 , puis que :

$$\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)} = 0 .$$

CHAPITRE 11: ETUDE DE FONCTIONS

<u>Etude de fonctions</u>

Compléments

<u>Asymptotes obliques, branches infinies</u>.

Soit f une fonction numérique :

Si $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ alors la droite (D) d'équation réduite y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe C_f .

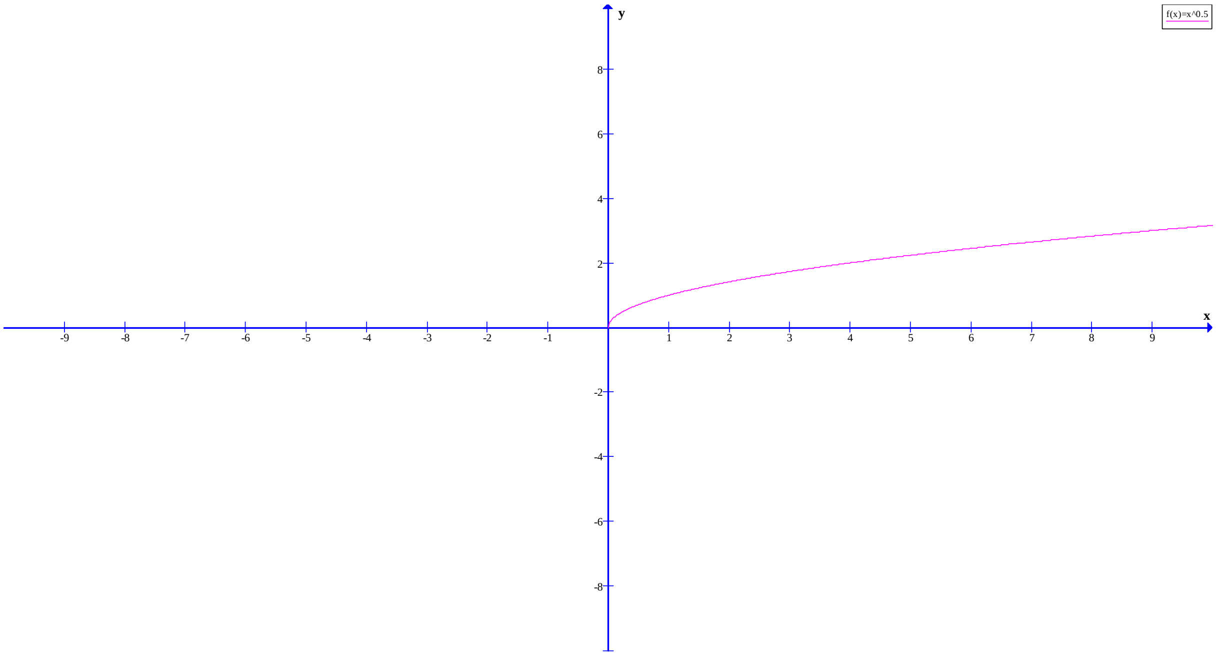
Remarquer que ce résultat est utilisé lorsque la droite est donné dans l'énoncé par son équation.

Il est possible la courbe C_f présente une asymptote oblique si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ .dans ce cas la courbe a une branche infinie qu'il faut étudier.

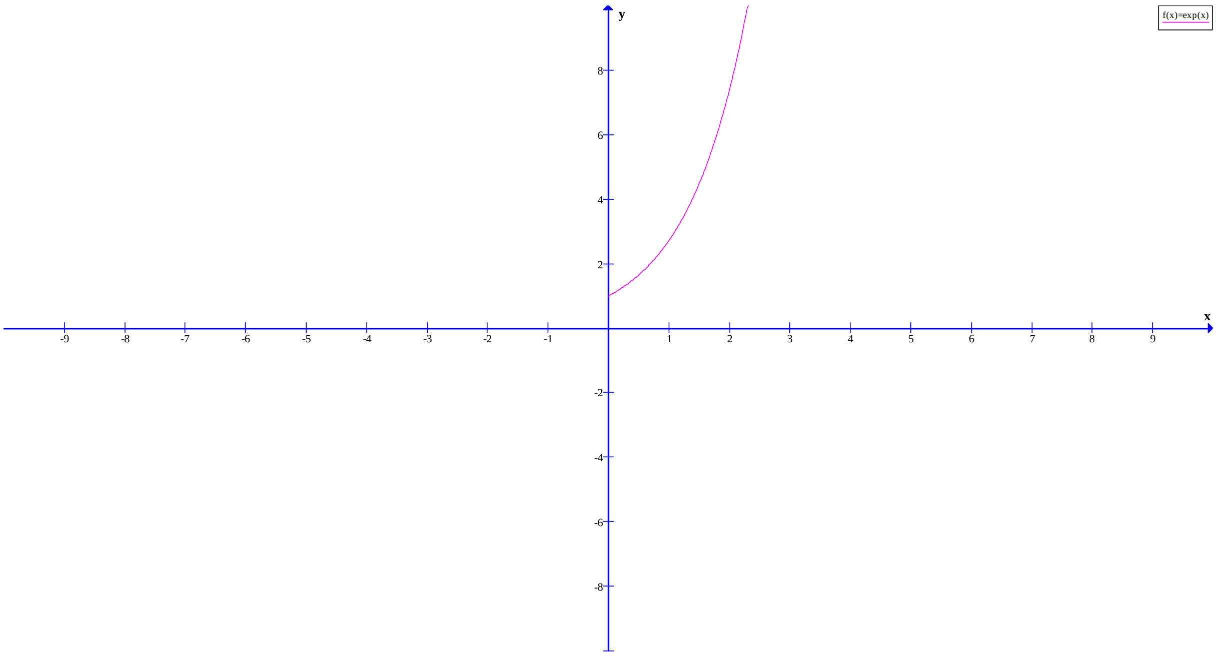
Marche à suivre :

Calculer $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ = 0 alors la courbe C_f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

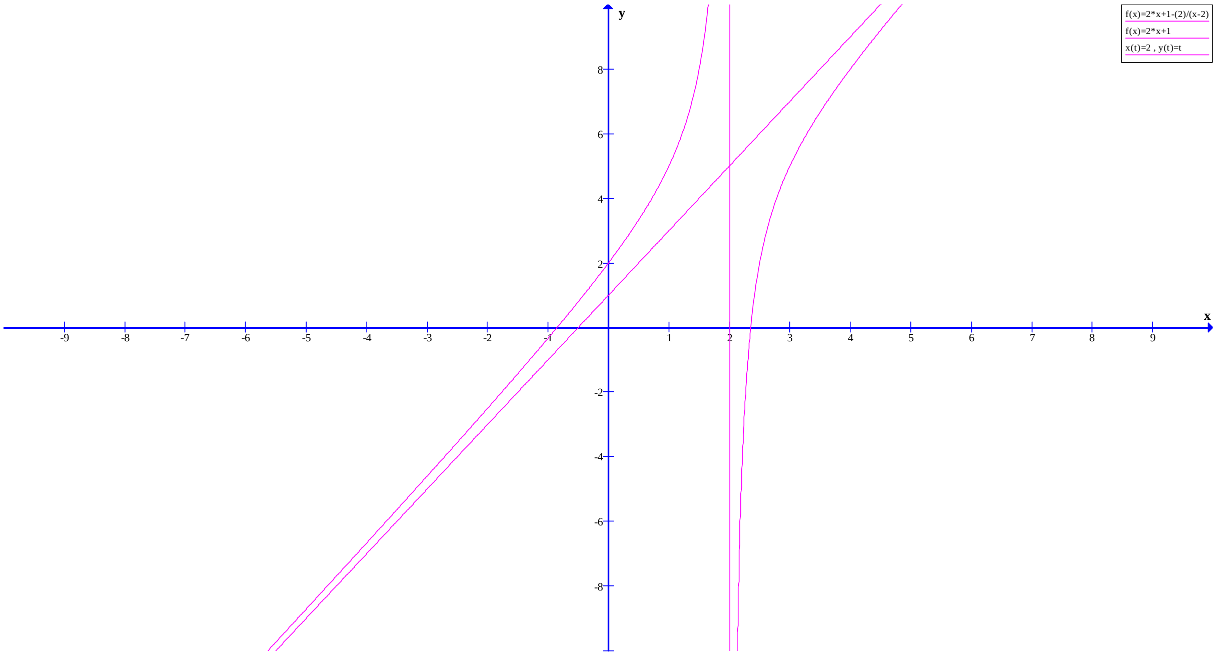


Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe C_f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

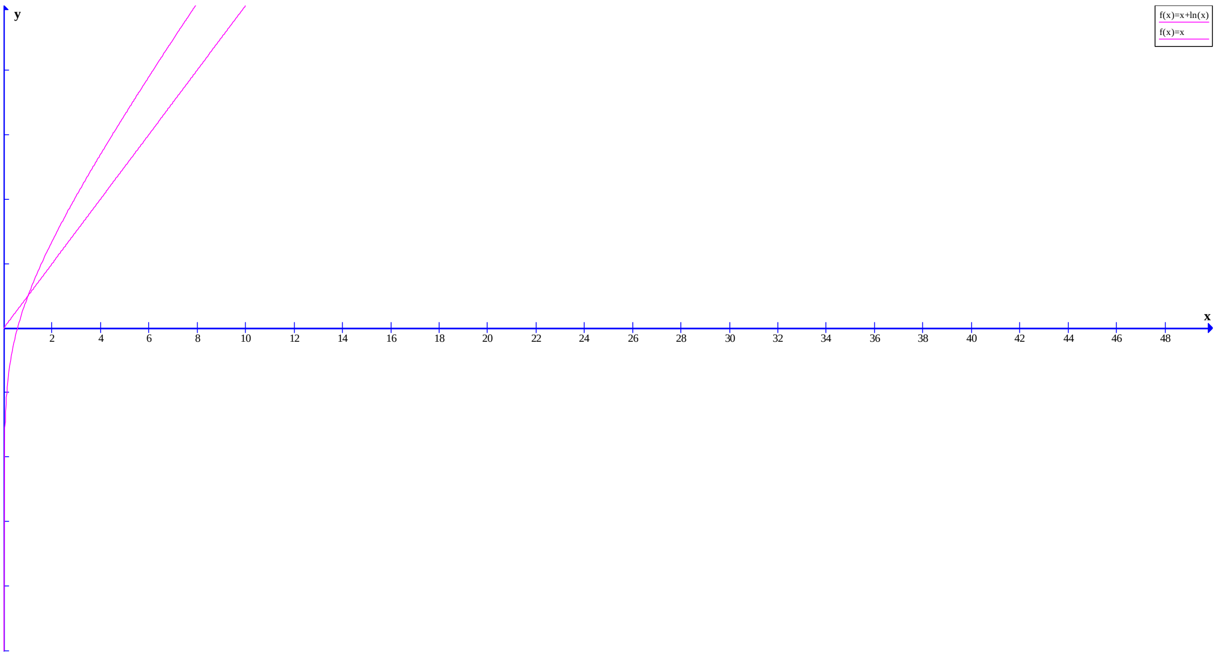


Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ = a réel non nul alors on calcule $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$

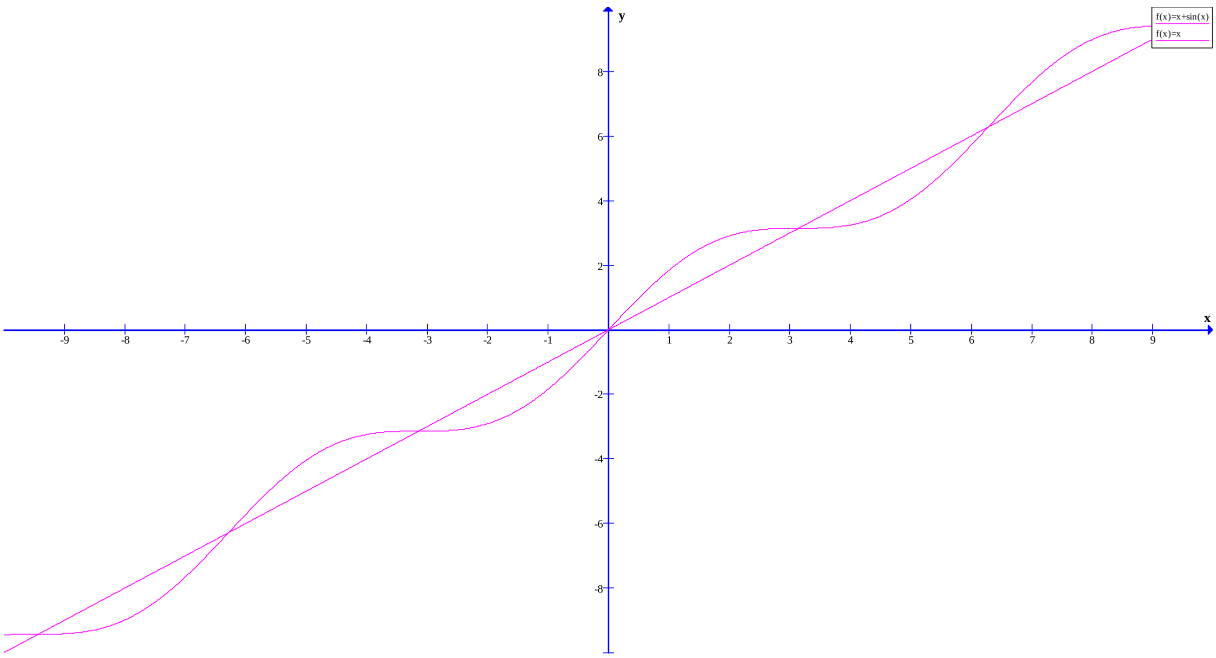
Si $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$ = b réel alors la droite (D) d'équation : y = a x + b est asymptote à la courbe C_f .



Si $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$ alors la courbe C_f présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation y = a x



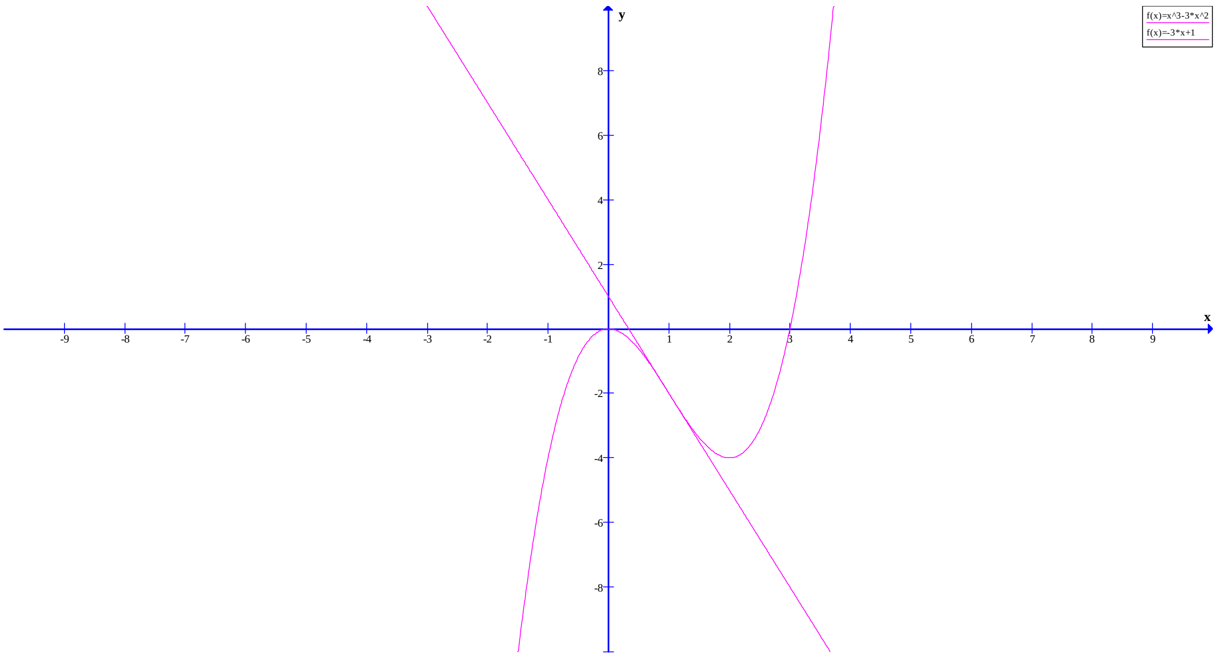
Il est possible que $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ n'existe pas. Nous en parlerons plus tard.



N.B La position d'une courbe par rapport à son asymptote est déterminée par le signe de l'expression $[f(x) - (ax + b)]$

Point d'inflexion

Considérons la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2$. Traçons sa courbe et la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.



Nous remarquons que la courbe traverse la tangente. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I et A(a, f(a)) un point de C_f . Si la courbe C_f traverse sa tangente au point A alors A est un point d'inflexion de C_f .

Théorème (condition suffisante)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. si au point a de I f'(x) s'annule en changeant de signe, alors le point A (a , f(a))est un point d'inflexion de la courbe C_f .

Nous verrons une autre condition suffisante

La réciproque du théorème est fausse.

Plan d'étude d'une fonction

1. Détermination des ensembles de définition, de continuité et, si possible de dérivabilité

2. Etude des propriétés de la fonction : parité, périodicité. En déduire les propriétés éventuelles de la courbe représentative. Choisir le domaine d'étude.

3. Calcul des limites aux bornes du domaine d'étude ; détermination des branches infinies, des asymptotes éventuelles.

4. Calcul de la dérivée, après avoir déterminé le domaine de dérivabilité. Etude du signe de la dérivée.

5. Tableau de variation de la fonction

6. Tracé de la courbe représentative. Préciser, si possible, les points particuliers (inflexion, anguleux, etc…) et les tangentes en ces points.

L'ordre n'est pas obligatoire

Exemples

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_f = \mathbb{R}$

f n'est ni paire ni impaire, on va donc l'étudier sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

la courbe présente donc deux branches infinies

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

la courbe présente donc deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.

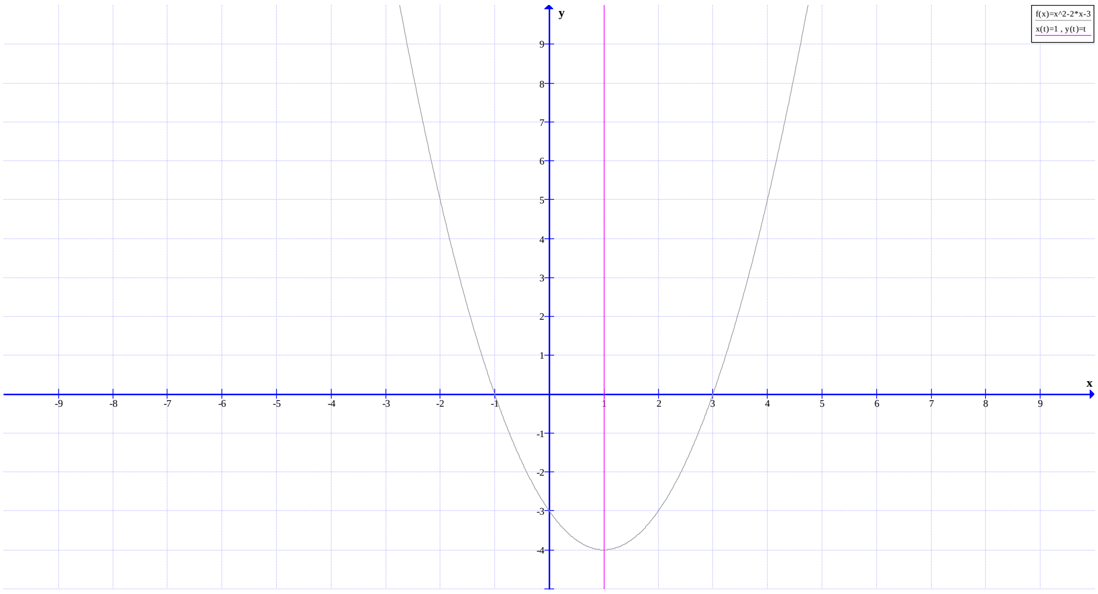
F est dérivable sur IR comme fonction polynôme et pour tout x réel $f'(x) = 2x - 2$. L'étude du signe de cette dérivée est simple et nous avons le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	−4	↗	$+\infty$

Il serait utile pour tracer la courbe de f d'avoir quelques points. Nous voyons que f (1) = -4 mais un seul point ne saurait suffire. Remplissons le tableau suivant et utilisons les points ainsi obtenus.

x	-2	-1	0	2	3	4	5
f(x)	5	0	-3	-3	0	5	12

D'où la courbe suivante



Le tableau des valeurs et la courbe montre qu'il y'a un axe de symétrie qui est la droite d'équation x = 1 . vous le montrerez aisément.

Nous constatons aussi que la courbe coupa l'axe des abscisses en deux points. Pour avoir l'abscisse de ces deux points, il faut résoudre l'équation f (x) = 0 (si possible).

f (0) donne l'ordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

La courbe obtenue est une parabole vue en principe en classe de seconde.

2 $f(x) = x^3 - 3x^2 \quad f'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$

Le signe de la dérivée ne pose aucun problème et nous avons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	--	0	+	
f	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

La courbe de cette fonction a été dessinée pour illustrer la notion de point d'inflexion.

$f''(x) = 6x - 6$. Cette dérivée seconde s'annule pour x = 1 et change de signe. On retrouve une condition suffisante pour l'existence du point d'inflexion.

3 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ une telle fonction est appelée fonction homographique.

elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. Le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0 donc la fonction n'est ni paire ni impaire. Nous avons donc 4 limites à calculer

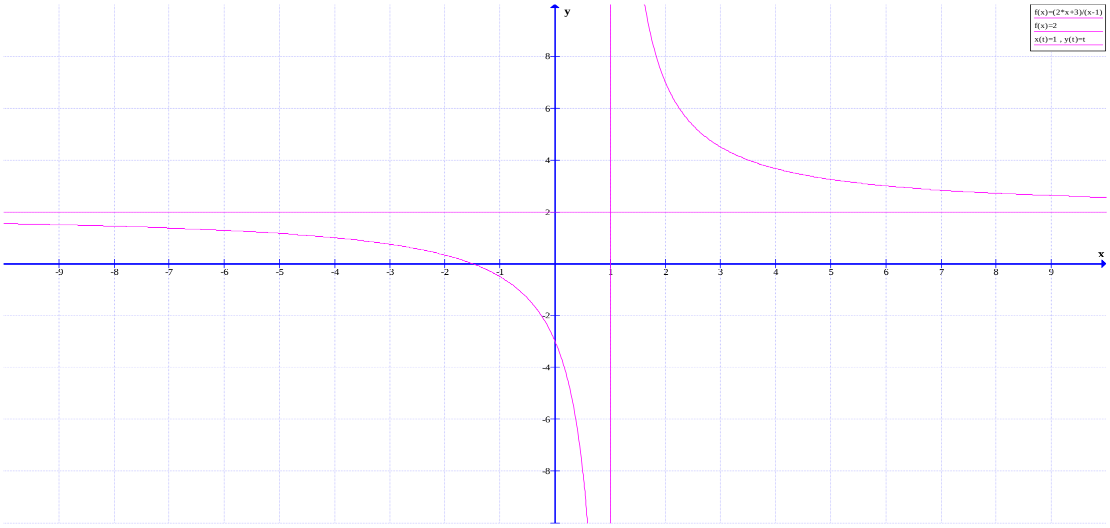
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation y = 2 est asymptote horizotale pour la courbe

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale pour la courbe

f est dérivable sur son domaine de définition comme fonction rationnelle et pour tout x différent de 1 $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$ nous voyons aisément que cette dérivée est toujours négative et la fonction est strictement décroissante dans chaque intervalle où elle est définie d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f' (x		-	‖	-	
f	2	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	2

Pour la courbe il convient de faire comme sur le 1er exemple : chercher des points en particulier (lorsqu'ils existent) les intersections de la courbe avec les axes.



4 $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-3}$

f est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ f est continue et dérivable sur son domaine de définition car c'est une fonction rationnelle.
f n'est ni paire ni impaire car son dimaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.
d'où le domaine d'étude est le domaine de définition.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 3^-} (x-3) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-3} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

La droite d'équation x = 3 est asymptote verticale à la courbe de f.

Nous sommes en présence de deux branches infinies mais l'écriture de f (x) suggère l'équation de l'asymptote oblique en effet $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (2x-1) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$ donc la droite d'équation y = 2x – 1 est asymptote (oblique)à la courbe de f.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2\left[(x-3)^2 - 1\right]}{(x-3)^2} = \frac{2(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$$

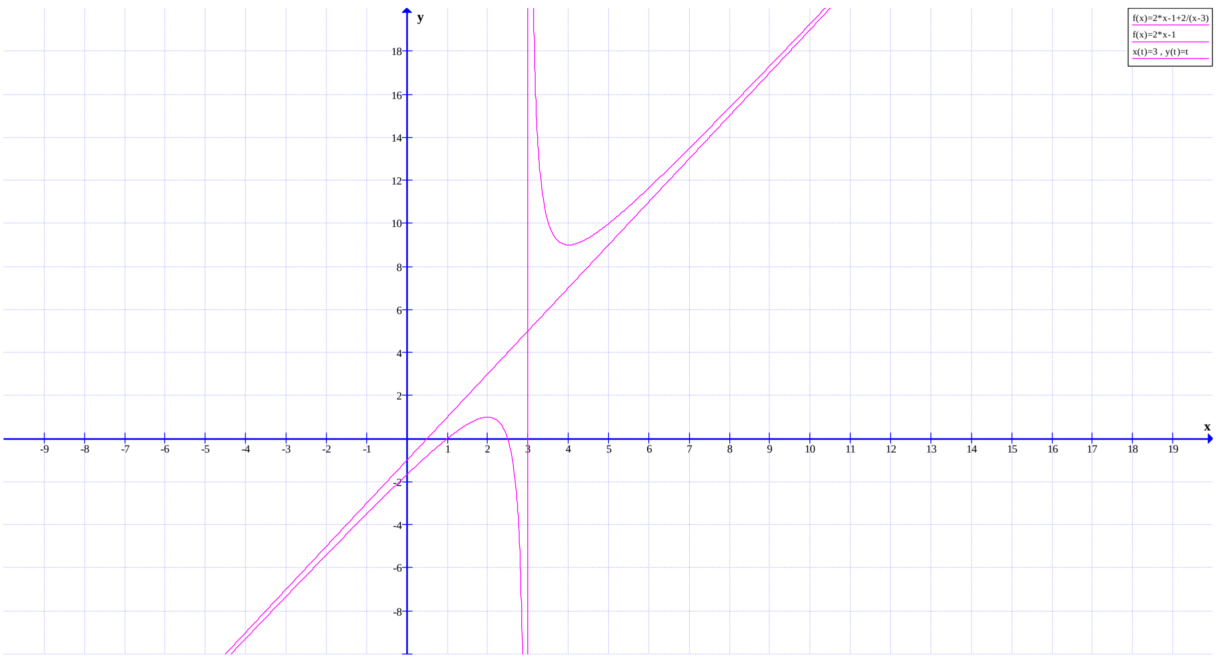
Nous avons le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
f' (x)		+	0	-	||	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	9	↗	$+\infty$

Il faut des points pour dessiner la courbe donc il faut en chercher et il faut dessiner les asymptotes. *On démontre aisément que le point de rencontre des asymptotes est centre de symétrie pour la courbe.*

On peut étudier la position de la courbe et de son asymptote en étudiant le signe de $\left(f(x)-(2x-1)\right)=\dfrac{2}{x-3}$

Lorsque la différence est positive, la courbe est au dessus de la droite et lorsque la différence est négative, la courbe est en dessous de la droite



5 soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de en x = 2. Donner la conséquence graphique de l'étude de la dérivabilité de f en x = 2.

4. Calculer f'(x) dans chaque intervalle où f est dérivable et étudier le signe de f'(x). Dresser le tableau de variations de f.

5. Etudier les branches infinies de la courbe de f et préciser les asymptotes éventuelles.

6. Tracer la courbe de f ainsi que toutes les droites remarquables rencontrées au cours de l'étude de f.

CORRIGE

Sur]-∞ ;2[f est définie par un polynôme donc définie en tout point de cet intervalle.

Sur [2 ; +∞[f est définie par une fonction rationnelle dont le dénominateur s'annule pour x = -1 donc définie en tout point de cet intervalle. D'où $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2}\left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2}\frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} = f(2)$$ f est donc continue en x = 2.

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = f(2)$$

f est dérivable IR privé de 2 et : $f'(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

pour x < 2 la dérivée s'annule pour x = -1 et x = 1. Pour x ≥ 2 la dérivée s'annule pour x = -2 et x = 0 qui n'appartiennent pas à cet intervalle donc la dérivée

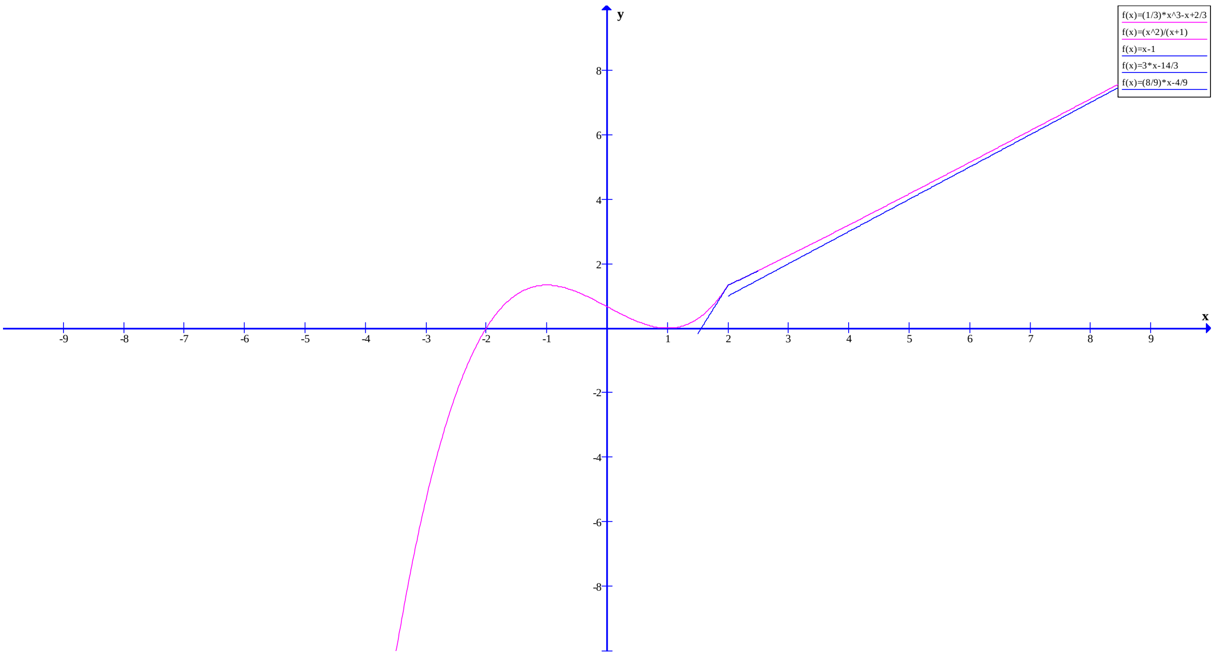
	-∞		-1		1		2		+∞
f'(x)		+	0	-	0 ||	+	3 $\frac{8}{9}$	+	
	-∞	↗	4/3	↘	0	↗		↗	+∞

ne s'annule pas dans cet intervalle. Cela donne le tableau de variations suivant :

en - ∞ la branche infinie est une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (car nous avons un polynôme)

en + ∞ f(x) peut s'écrire $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ par division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et par suite la droite d'équation réduite y = x – 1 est asymptote oblique de la courbe en +∞.

3.



remarquons que comme pour toute courbe, la représentation graphique nécessite la recherche de quelques points en dehors de ceux qui pourraient intervenir sur le tableau de variations.

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 1 Recherche d'asymptotes

Dans chacun des cas suivants :

— Montrer que la droite $\mathscr{D}$ dont l'équation est donnée est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de la

fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

— Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1°) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ $\mathscr{D}$: $y = 3$ **2°)** $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ $\mathscr{D}$: $y = 2x - 1$

3°) $f(x) = \dfrac{-x^2+2}{x+1}$ $\mathscr{D}$: $-x+1$ **4°)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\mathscr{D}$: $y = x$.

5°) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 4x}$ $\quad \mathscr{D} : y = 0$

6°) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ $\quad \mathscr{D} : y = x - \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2 Recherche d'asymptotes

Montrer que la courbe représentant le graphe de chacune des fonctions f suivantes admet une asymptote non parallèle aux axes de coordonnées .(il est recommandé d'étudier d'abord l'ensemble de définition de chaque fonction).

1°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ **2°)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x}$ **3°)** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1}$

4°) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 6}{2x + 3}$ **5°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{|x| + 2}$ **6°)** $f(x) = \left|\dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}\right|$

7°) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$ **8°)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **10°)** $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants :

— Montrer que la droite $\mathscr{D}$ dont l'équation est donnée est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de la Fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

— Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1°) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$ $\quad \mathscr{D} : y = 3$

2°) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x - 2}$ $\quad \mathscr{D} : y = 2x - 1$

3°) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2}{x + 1}$ $\quad \mathscr{D} : -x + 1$

4°) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ $\quad \mathscr{D} : y = x.$

5°) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 4x}$ $\quad \mathscr{D} : y = 0$

6°) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ $\quad \mathscr{D} : y = x - \dfrac{1}{2}$

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

a) Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que f (0) = 4 f ' (0) = 3 f (1) = 3

b) Etudier cette fonction .

EXERCICE 2

Soit la fonction : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°) Démontrer que f est continue en 1 .

2°) Calculer les limites aux bornes(Faites l'étude des branches infinies) .

3°) Etudier la dérivabilité de f en 1.

4°) Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe ($\mathscr{C}_f$) au point d'abscisse 1.

5°) Calculer la dérivée f ' (x) de la fonction f sur] — ∞ ; 1 [et sur (1 ; + ∞ [.

6°) Etudier le sens de variation de f sur] — ∞ ; 1 [et sur (1 ; + ∞ [puis dresser le tableau de variation.

7°) Tracer ($\mathscr{C}_f$) **.**

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

on désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1°) Etudier la fonction f (limites, dérivée, sens de variation et tableau) .

2°) Montrer que ($\mathscr{D}$) : y = x — 1 est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) .

3°) Montrer que I (0 ; — 1) est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$) **.**

4°) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ en I puis préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T) .

5°) Déterminer les points A et B de $(\mathscr{C})$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$ **6°)** Montrer que pour tout réel x : $x - 2 \leq f(x) \leq x$.

7°) Tracer $(\mathscr{C})$, (T) ainsi que les droites (D) et (D ') d'équations $y = x - 2$ et $y = x$.

EXERCICE 4

1°) Montrer que $1 + x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2°) Soit $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 + x - \sqrt{x^2 + 1}}$. Préciser D_h et déterminer les limites aux bornes de D_h .

3°) Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C}_h)$ (On étudiera la position de $(\mathscr{C}_h)$ par rapport à l'asymptote « horizontale » et l'asymptote oblique) .

4°) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variation de h.

5°) Construire $(\mathscr{C}_h)$ dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) .

• EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x + \dfrac{1}{x})$; $x \neq 0$

1°) Calculer f ' (x) et vérifier que pour tout $x \neq 0$, f ' (x) a même signe que $2x^3 + x^2 - 1$.

Pour trouver le signe de f ' (x) , on étudie la fonction g telle que : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

2°) a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que l'équation g (x) = 0 admet une solution et une seule α telle que $0,5 < \alpha < 1$.

Quel est le signe de g (x) sur $] -\infty \, ; \alpha]$? sur $] \alpha \, ; +\infty [$?

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Notons h h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$.

a) Etudier les limites de f (x) — h (x) en $+\infty$ et $-\infty$.

Qu'en déduit-on pour les courbes ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_h$) ?

b) Etudier la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à ($\mathscr{C}_h$) .

5°) Tracer ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_h$) dans un même repère orthonormal (unité : 3 cm) .

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

On note ($\mathscr{C}_f$) la courbe de f et Δ la droite d'équation $y = x + 1$.

1°) Déterminer D_f , puis calculer les limites aux bornes de D_f .

2°) Etudier la dérivabilité de f en -2 puis en 0. Que peut-on en déduire pour ($\mathscr{C}_f$) ?

3°) Calculer f ' (x) pour $x < -2$ et pour $x > 0$.

4°) Etudier le signe de f ' (x) pour $x < -2$ et pour $x > 0$.

5°) Dresser le tableau de variation de f.

6°) Montrer que Δ est une asymptote oblique de ($\mathscr{C}_f$) au voisinage de $+\infty$.

7°) Déterminer l'autre asymptote oblique Δ' de ($\mathscr{C}_f$) .

8°) Soit f_1 la restriction de f à $] -\infty \, ; -2]$ .Montrer que f_1 est bijective de $] -\infty \, ; -2]$ sur un intervalle J à préciser.

9°) Préciser $f_1^{-1}(x)$.

10°) Etudier la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à Δ sur [0 ; + ∞ [, puis celle de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à Δ ' sur] — ∞ ; — 2] .

11°) Construire ($\mathscr{C}_f$) , Δ , Δ ' puis ($\mathscr{C}f_1^{-1}$) courbe de f_1^{-1} dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Etude des fonctions circulaires

L'unité de mesure des angles est le radian

Nous admettrons que la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en 0 et admet comme nombre dérivé en ce point le réel 1. Donc :

Théorème (admis) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Nous donnerons plus loin une démonstration géométrique du résultat admis .

Conséquences : démontrer les résultats suivants

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Avec a réel non nul.

Indication pour la démonstration : poser X=ax

Et remarquer que $\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1 = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$

EXERCICES

Etudier les limites suivantes

$1.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(xgr)}{x}$ $\quad 2.\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$ $\quad 3.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

$4.\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

$5.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x^{gr})}{x}$ $\quad 6.\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{5x}$ $\quad 7.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$

$8.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

Transformer le numérateur de l'exercice 4 de manière à n'avoir qu'un seul sinus.

Lorsque x tend vers un réel x_0 non nul, on peut poser x = x_0 + h et faire tendre h vers 0. .

Théorème
Les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente sont continues en tout point où elles sont définies

Théorème
La fonction cosinus est dérivable sur IR et sa fonction dérivée est : $(\cos x)'=-\sin x$.

Preuve

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\times\frac{\sin h}{h}$$

Donc en utilisant les résultats précédents sur les limites, on a : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$

Théorème
La fonction sinus est dérivable rue IR et sa fonction dérivée est : $(\sin x)'=\cos x$.

Preuve

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\times\frac{\sin h}{h}\right)=\cos x$$

Théorème

Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ la fonction tangente est dérivable (comme quotient) et sa dérivée est : $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Théorème

Pour tout $x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ la fonction cotangente est dérivable et sa fonction dérivée est : $(\cot an x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot an^2 x)$

Par utilisation de la dérivée d'une fonction composée, on obtient les résultats suivants :

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b) \qquad (\sin(u(x))' = u'(x).\cos(u(x))$$

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b) \qquad (\cos(u(x)))' = -u'(x).\sin(u(x))$$

$$(\tan(ax+b))' = a(1+\tan^2(ax+b)) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$$

$$(\tan(u(x)))' = u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$$

Période de $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\cos(a(x+T)+b) = \cos(ax+b)$$

$$\begin{cases} ax + aT + b = ax + b + 2k\pi \\ ax + aT + b = -ax - b + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} aT = 2k\pi \\ aT = -2ax - 2b + 2k\pi \end{cases}$$

$$T = \frac{2k\pi}{a} \quad \text{car la période ne dépend pas de } x$$

EXEMPLES

4. **Etudier les variations de la fonction f et construire la représentation graphique**

$$f(x)=2\sin 2x+1$$

la fonction est définie sur IR , elle n'est ni paire ni impaire et elle est périodique de période T=π. Remarquons que pour les fonctions circulaires, la période est obligatoire car les limites des fonctions sinus et cosinus à l'infini n'existent pas.

Donc l'intervalle d'étude est I = [0 ;π]

La fonction f est dérivable sur I et $f'(x)=4\cos 2x$

$$f'(x)=0 \text{ donne } 4\cos 2x=0$$

$$\cos 2x=0=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

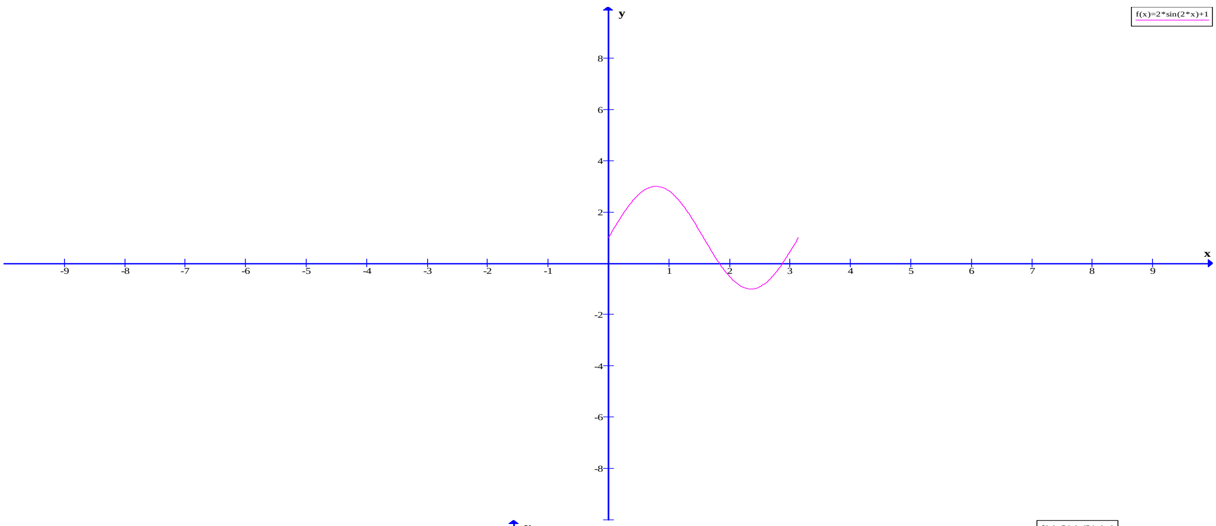
$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$$

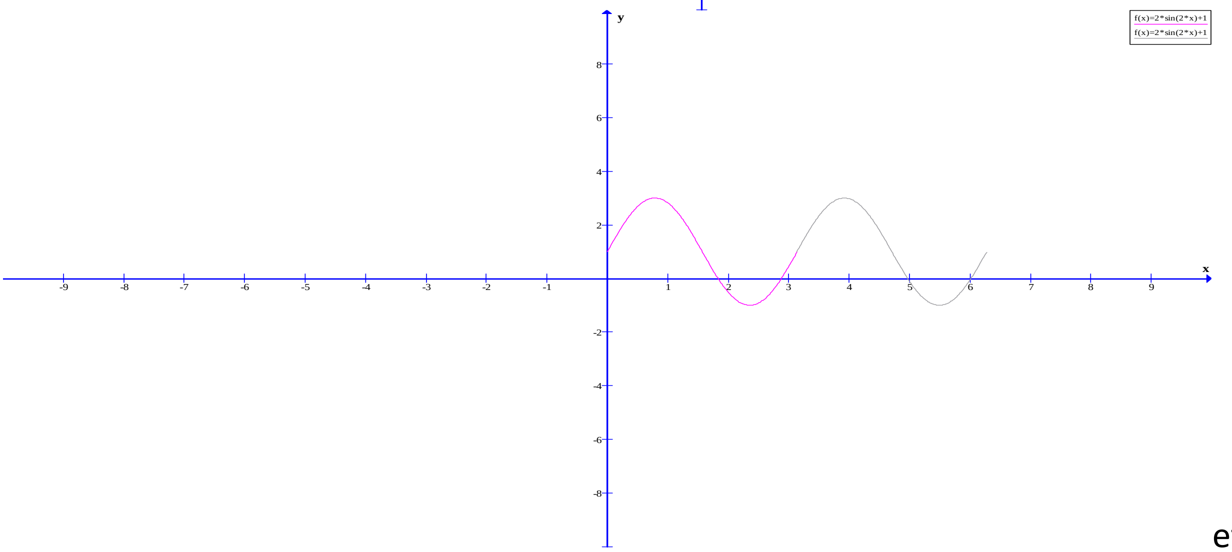
Les valeurs de x qui annulent la dérivée et qui appartiennent à l'intervalle I sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.le tableau de variations de la fonction est le suivant :

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'(x)		+	0	-	0	+	
f	1	↗	3	↘	−1	↗	1

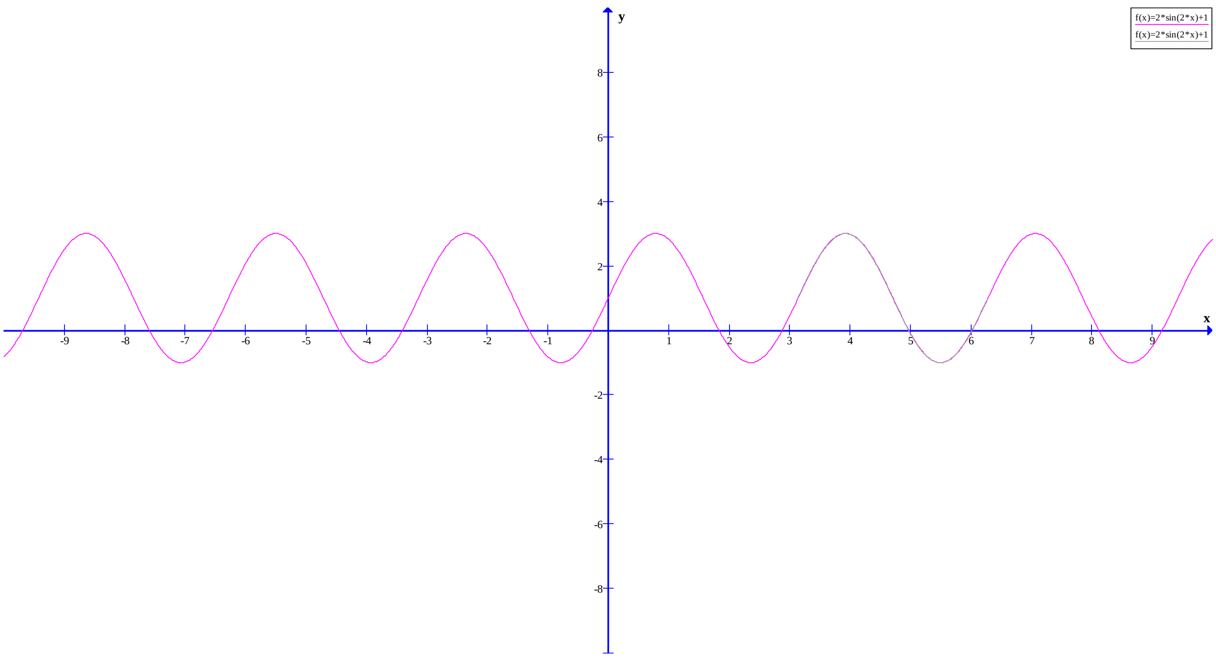
Pour le signe de la dérivée, se rapporter au chapitre équations et inéquations trigonométriques.

Nous allons dessiner la courbe sur une période et sur deux périodes.





et maintenant sur IR



Nous remarquons que la fonction a une infinité d'extrémums et la courbe nous suggère aussi une infinité de points d'inflexion. Calculons la dérivée seconde $f''(x) = -8\sin 2x$

$$f''(x) = 0 \quad \text{si} \quad -8\sin 2x = 0 \text{ donc si } \sin 2x = 0 = \sin 0$$

$$\text{d'où} \quad 2x = k\pi \text{ ou encore } x = \frac{k\pi}{2}$$

Tous les points de la courbe qui ont pour abscisse $\frac{k\pi}{2}$ sont des points d'inflexion car (voir inéquations trigonométriques) sin (ax +b) change de signe chaque fois qu'il s'annule.

5. Même question pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$**.**

La fonction est définie si $2\cos x - 1 \neq 0$

or $2\cos x - 1 = 0$ donne $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $D_f = IR \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Il est donc légitime de penser à étudier la parité de f car le domaine de définition est symétrique par rapport à 0. $f(-x) = f(x)$ car la fonction cosinus est paire donc la fonction f est paire. La fonction cosinus est périodique de période 2π, la fonction f est elle aussi périodique de période 2π. Nous allons donc étudier la fonction sur I = $\left[0;\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$. En utilisant la parité nous tracerons la courbe sur J= $\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3};0\right]$ et en utilisant la période on dessinera sur le domaine de définition.

Calculons les limites en $\frac{\pi}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\cos 2x+1\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(2\cos x-1\right)=0$$

.

$$\left(x\leq\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\left(2\cos x\geq 1\right)\text{ donc }\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left(2\cos x-1\right)=0^+$$

$$\text{et par suite }\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}f(x)=+\infty\text{ de même }\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}f(x)=-\infty$$

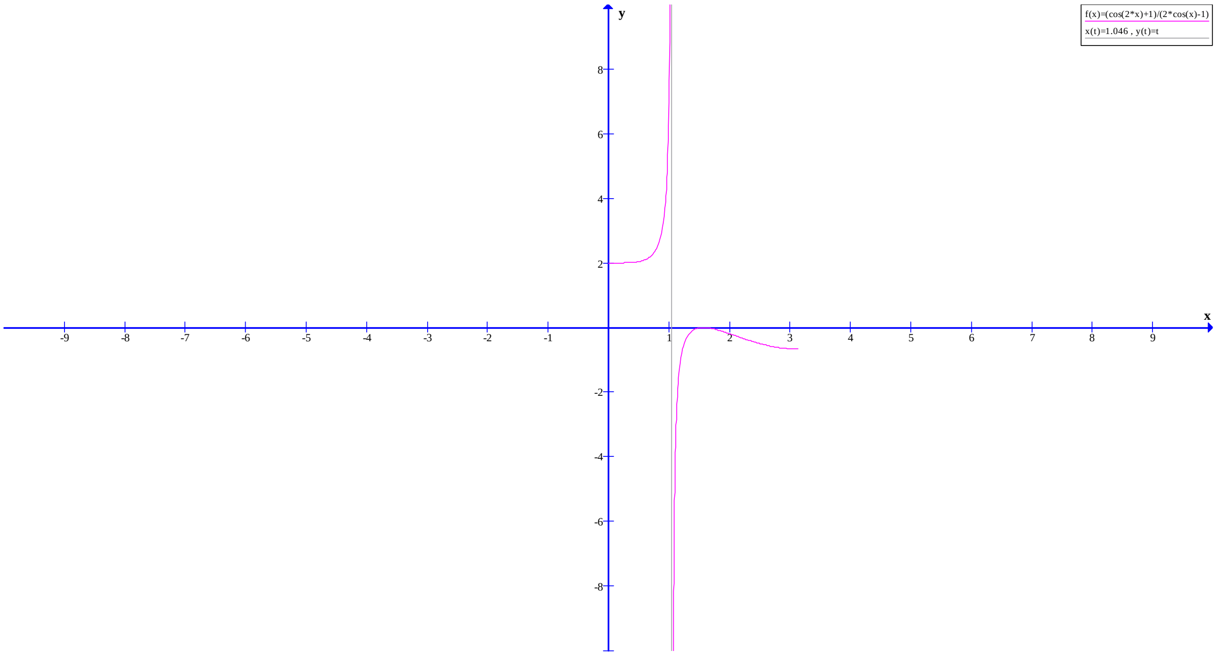
La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation x = $\frac{\pi}{3}$. Remarquons que la coure a une infinité d'asymptotes verticales.

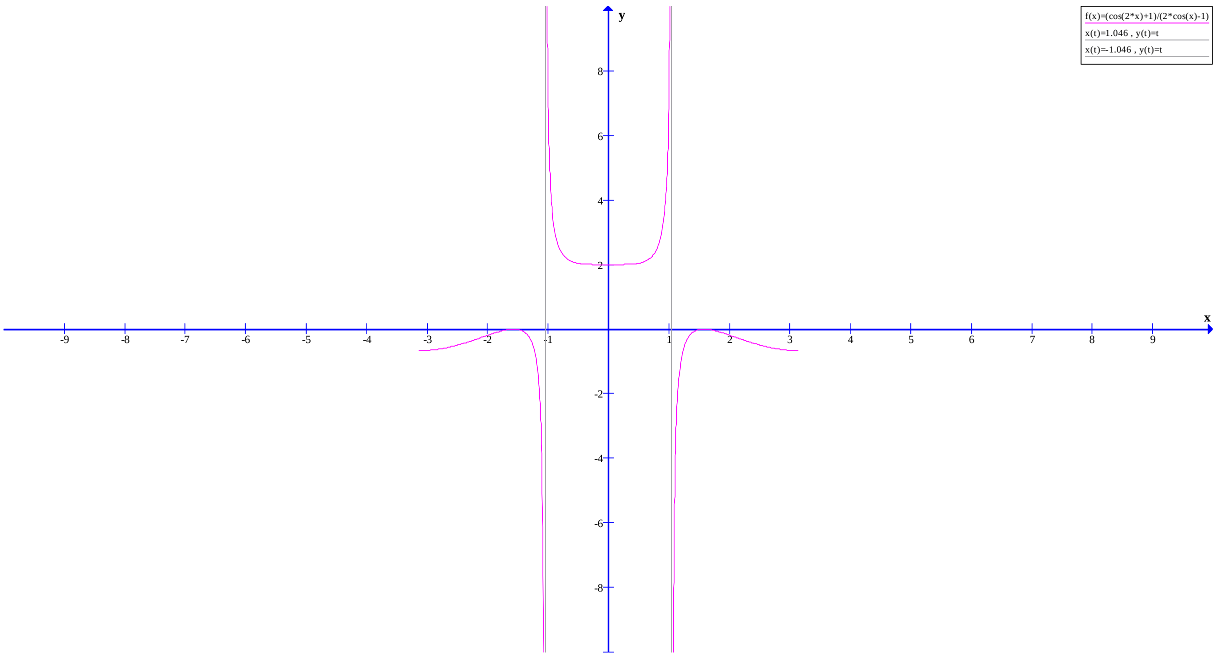
La fonction f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul. $x\mapsto\cos 2x+1$ et $x\mapsto 2\cos x-1$

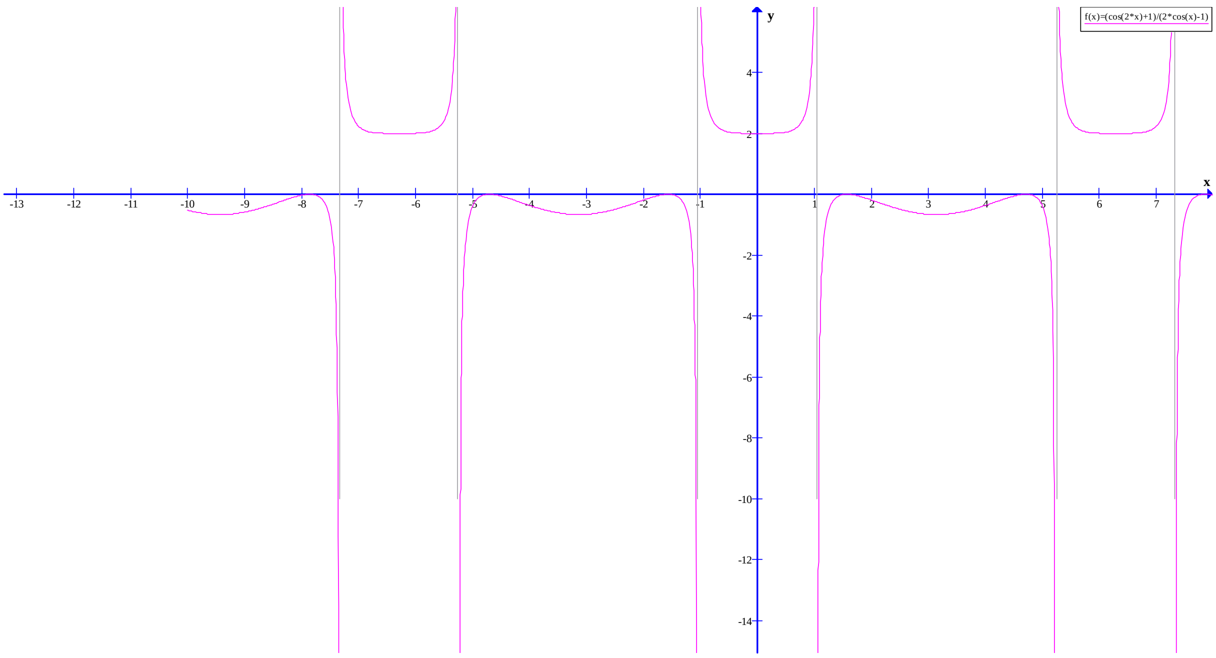
$$f'(x)=\frac{-2\sin 2x\left(2\cos x-1\right)+2\sin x\left(\cos 2x+1\right)}{\left(2\cos x-1\right)^2}=\frac{4\sin x\cos x\left(-\cos x+1\right)}{\left(2\cos x-1\right)^2}$$

Le signe de la dérivée est facile à étudier car sur I, sin x est toujours positif, -cos x +1 aussi et cos x s'annule pour la valeur $\frac{\pi}{2}$ et change signe. Le tableau de variations de f est le suivant :

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)		+	‖	+	0	-	
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$


y
x
f(x)=(cos(2*x)+1)/(2*cos(x)-1)
x(t)=1.046 , y(t)=t


y
x
f(x)=(cos(2*x)+1)/(2*cos(x)-1)
x(t)=1.046 , y(t)=t
x(t)=-1.046 , y(t)=t



EXERCICE 1

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points x_o indiqués ou en $+\infty$.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan x}{x}$ $(x_o = 0)$

2°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} + \tan x$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{2x}$ $(x_o = 0)$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{\tan 2x}{5x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ $(x_o = 0)$

4°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ $(x_o = 0)$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\sin 2x + \sin x}$ $(x_o = 0)$

6°) $f : x \mapsto \dfrac{\tan 6x - \tan x}{1 - 2\sin x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{3})$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{2\cos 2x - 1}{\cos 3x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan x}{\sin 2x - 1}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{4})$

8°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \dfrac{\pi}{4}}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{4})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sqrt{3}\,\sin x}{x - \dfrac{\pi}{6}}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{2})$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ $(+\infty)$ $g : x \mapsto \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$ $(+\infty)$ et $h : x \mapsto -x^3 + 3\sin x$ $(+\infty)$

11°) $f : x \mapsto 3 - x \sin \dfrac{1}{x}$ $(x_o = 0)$ $g : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ $(x_o = 0)$ et $h : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x}$ $(x_o = 0)$

<u>EXERCICE 2</u>

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f.

1°) $f(x) = (1 - x)\sqrt{2 - 3x}$ **2°)** $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$ **3°)** $f(x) = \tan x + x$

4°) $f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{3\cos x + 1}$ **5°)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x + \sin 3x}{\tan 6x}$ **6°)** $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

7°) $f(x) = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\sin x - x\cos x}$ **8°)** $f(x) = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ **9°)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$

<u>EXERCICE3</u>

Etudier les fonctions suivantes et dessiner leurs courbes représentatives dans les intervalles précisés.

1°) $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$ (sur($[0; \pi]$) **2°)** $f(x) = 2\sin x + x$ (sur $[0 ; \pi[$)

3°) $f(x) = 4\cos 2x - \cos 3x$ **4°)** $f(x) = 4\sin x + \dfrac{1}{\sin x - 1}$ (sur $[0 ; 2\pi[$)

5°) $f(x) = \tan^2 x - 2\tan x$ (sur $[0 ; \pi[$) **6°)** $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ (sur $[0 ; 2\pi[$)

7°) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ intervalle à préciser **8°)** $f(x) = \cos x + x \sin x$ $[-\pi. ;\pi]$

EXERCICE 4

Soit la fonction : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°) Démontrer que f est continue en 1 .

2°) Calculer les limites aux bornes(Faites l'étude des branches infinies) .

3°) Etudier la dérivabilité de f en 1.

4°) Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe ($\mathscr{C}_f$) au point d'abscisse 1.

5°) Calculer la dérivée f ' (x) de la fonction f sur $]-\infty ; 1[$ et sur $(1 ; +\infty[$.

6°) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty ; 1[$ et sur $(1 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation.

7°) Tracer ($\mathscr{C}_f$) **.**

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

on désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1°) Etudier la fonction f (limites, dérivée, sens de variation et tableau) .

2°) Montrer que ($\mathscr{D}$) : $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) .

3°) Montrer que I $(0 ; -1)$ est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$) **.**

4°) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) en I puis préciser la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (T) .

5°) Déterminer les points A et B de ($\mathscr{C}$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$

6°) Montrer que pour tout réel x : $x - 2 \leq f(x) \leq x$.

7°) Tracer ($\mathscr{C}$) , (T) ainsi que les droites (D) et (D ') d'équations $y = x - 2$ et $y = x$.

EXERCICE 6

1°) Montrer que $1 + x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2°) Soit $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 + x - \sqrt{x^2 + 1}}$. Préciser D_h et déterminer les limites aux bornes de D_h .

3°) Déterminer les asymptotes de ($\mathscr{C}_h$) (On étudiera la position de ($\mathscr{C}_h$) par rapport à l'asymptote « horizontale » et l'asymptote oblique) .

4°) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variation de h.

5°) Construire ($\mathscr{C}_h$) dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) .

• EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x + \dfrac{1}{x})$; $x \neq 0$

1°) Calculer f ' (x) et vérifier que pour tout $x \neq 0$, f ' (x) a même signe que $2x^3 + x^2 - 1$.

Pour trouver le signe de f ' (x) , on étudie la fonction g telle que :$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

2°) **a)** Etudier les variations de g .

b) En déduire que l'équation g (x) = 0 admet une solution et une seule α telle que $0,5 < \alpha < 1$.
Quel est le signe de g (x) sur $]-\infty ; \alpha]$? sur $]\alpha ; +\infty[$?
3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Notons h h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$.

a) Etudier les limites de f (x) — h (x) en $+\infty$ et $-\infty$.
Qu'en déduit-on pour les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$?

b) Etudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathscr{C}_h)$.

5°) Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ dans un même repère orthonormal (unité : 3 cm) .

<u>EXERCICE 8</u>

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$
On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe de f et Δ la droite d'équation $y = x + 1$.
1°) Déterminer D_f , puis calculer les limites aux bornes de D_f .
2°) Etudier la dérivabilité de f en -2 puis en 0. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C}_f)$?
3°) Calculer f ' (x) pour $x < -2$ et pour $x > 0$.
4°) Etudier le signe de f ' (x) pour $x < -2$ et pour $x > 0$.
5°) Dresser le tableau de variation de f.
6°) Montrer que Δ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
7°) Déterminer l'autre asymptote oblique Δ' de $(\mathscr{C}_f)$.
8°) Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty ; -2]$ .Montrer que f_1 est bijective de $]-\infty ; -2]$ sur un intervalle J à préciser.
9°) Préciser $f_1^{-1}(x)$.
10°) Etudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à Δ sur $[0 ; +\infty[$, puis celle de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à Δ' sur $]-\infty ; -2]$.
11°) Construire $(\mathscr{C}_f)$, Δ , Δ' puis $(\mathscr{C}_{f_1^{-1}})$ courbe de f_1^{-1} dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

CHAPITRE 12 : PRIMITIVES

Définition

Soit F une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f une fonction définie et continue sur I. on dit que F est une primitive de f sur I si pour tout x élément de I on a : $F'(x) = f(x)$
Autrement dit : F est **une** primitive de f sur I si f est **la** dérivée de F sur I.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet primitive sur I.

Remarque : si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité.

Théorème

Deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

Donc si F et G sont des primitives de f sur I alors il existe une constante réelle k telle pour tout x élément de I F(x)= G(x) +k

Pour la preuve voir la variation des fonctions avec l'utilisation des dérivées.

On en déduit que : chacune des primitives de f sur I est déterminée par sa valeur en un point de I.

Remarque : toute primitive de f sur I est dérivable sur I.

Il serait utile de connaitre les résultats figurant sur le tableau suivant :

I= intervalle de définition de f	Remarques ou restrictions	Fonction f	Primitive F où k est une constante réelle
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto 0$	$x \mapsto$ k
$I \subset \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto$ ax+k
$I \subset \mathbb{R}$	n entier naturel		

$I \subset \mathbb{R}^*$ $I \subset \mathbb{R}^{*+}$	n entier relatif $n \neq -1$ n réel $n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$		$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + k$
$I \subset \mathbb{R}^{*+}$		$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
		$x \mapsto$ sinx	$x \mapsto$ -cosx +k
		$x \mapsto$ cos x	$x \mapsto$ sin x +k
$I \subset \mathbb{R}$			
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto$ sin (a x + b)	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$
$I \subset \mathbb{R}$			$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto cos(ax+$	
			$x \mapsto \tan x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ $x \mapsto 1 + \tan^2$	
	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$		
			$x \mapsto \frac{2}{3} x\sqrt{x} + k$

$I \subset \mathbb{R}$	x positif	$x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto (ax+b)^n$ Avec les mêmes contraintes sur n et sur (a x + b)	$x \mapsto \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+k$

Lorsque *U* désigne une fonction dérivable sur I , positive et non nulle dans certains cas, on a :

$$\frac{U'}{U^2} \text{ a pour primitives } -\frac{1}{U}+k$$

$$U' \times U^n \text{ a pour primitives } \frac{U^{n+1}}{n+1}+k$$

$$U' \times \sqrt{U} \text{ a pour primitives } \frac{2}{3}U\sqrt{U}+k$$

$$\frac{U'}{\sqrt{U}} \text{ a pour primitives } 2\sqrt{U}+k$$

$$\frac{U'}{U^n} \text{ peut être ramenée à la forme } U' \times U^{-n}$$

Les contraintes sont les mêmes sur n et sur U.

EXERCICES

Déterminer les primitives de la fonction f puis celle qui s'annule en (+ 2).préciser l'intervalle de définition

1. $f(x) = (x-1)(x-2)$ 2. $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5x$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ 4. $f(x) = (x+1)^3$

5. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ 6. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$7.\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad$ $8.\ f(x)=(2x-1)(x^2-x)^2$

$9.\ f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad$ $10.\ f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

$11.\ f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$ $\quad$ $12.\ f(x)=3sin\dfrac{\pi x}{2}$

$13.\ f(x)=\sin^2 x$ $\quad$ $14.\ f(x)=\sin 3x+\cos(2x+3)$

$15.\ f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ $\quad$ $16.\ f(x)=\sin^2 x\cos x$

CHAPITRE 13 : SUITES NUMERIQUES

Notion de suite numérique :

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres

Exemple 1

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, . . .

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, . . .

−3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, . . .

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . .

En mathématiques, une **suite** u est une liste ordonnée de nombres réels : les éléments de cette liste sont appelés termes de la suite u, et sont tous repérés par leur rang dans la liste ; ainsi le premier terme est souvent noté u_0, le second u_1 et ainsi de suite . . .

I. Définition :

On appelle **suite numérique** réelle une fonction U d'une partie A de ℕ vers ℝ

$$U : A \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow U(n)$$

Le mot suite désigne donc toute fonction dont l'ensemble de départ est inclus dansl'ensemble ℕ des entiers naturels.

N.B Le plus souvent, $A = \mathbb{N}$ ou $A = \mathbb{N}^*$.

On a l'habitude de noter les fonctions numériques par f, g, h, etc … , mais pour les suites, on utilise plutôt les lettres u, v, w, …

Exemples :

La fonction U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U(n)= n^2 + n + 1$ est une suite numérique réelle

La fonction V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V(n) = \frac{1}{n}$ est une suite numérique réelle

II. Notion d'indice - Notation indicielle

1) Terme d'indice n ou terme général :

U étant une suite numérique réelle, U(n) est appelé terme d'indice n de cette suite U et on note $\mathrm{U}(\mathrm{n}) = \mathrm{U}_n$

$\mathrm{U}_n$se lit <<U indice n>> et est appelé terme général de la suite U

Exemple : soit la suite U : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{U}(\mathrm{n}) = \sqrt{n^2 + n + 1}$

Le terme d'indice 0 de cette suite est $\mathrm{U}_0= \sqrt{1}=1$

Le terme d'indice 1 est $\mathrm{U}_1= \sqrt{3}$

Le terme d'indice $n - 1$ s'obtient en remplaçant, dans l'expression de $\mathrm{U}(\mathrm{n})$, n par $n - 1$:

$$\mathrm{U}(\mathrm{n} - 1)= \sqrt{(n-1)^2 \quad + (n-1) + 1}$$

$$= \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Le terme $n + 1$ est $\mathrm{U}_{n+1}= \sqrt{(n+1)^2 \quad + (n+1) + 1}$

$$= \sqrt{n^2 + 3n + 3}$$

Les termes de cette suite sont : U_0 , U_1 , U_3 , U_4 ,….., U_{n-1} , U_n, U_{n+1} , ……U_{2n-1} , U_{2n} , U_{2n+1} ,……….

Remarques :

Soit U une suite numérique réelle.

L'ensemble de définitions I de cette fonction U de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, coïncide avec l'ensemble des indices des termes de cette suite.

Dans ce cas, la suite U est notée $(U_n)_{n \in I}$ et Un qui est un des termes de cette suite.

Remarque :

Ne pas confondre :

– la suite (u_n) qui est une application ;

– le terme de rang n, u_n qui est un réel ;

– $\{u_n , n \in \mathbb{N}\}$, ensemble des valeurs de la suite

III) Modes de génération des termes d'une suite

1) Mode explicite :

Lorsque Un est donné en fonction de n , alors on dit que la suite (Un) est définie de façon explicite.

Exemple : la suite $(U_n)_{n \in I\backslash\{0,1\}}$ telle que $U_n=\sqrt{n-2}$, est définie de façon explicite

L'ensemble des indices de cette suite est $\mathbb{N}\backslash\{0,1\} =\{2,3,4,......\}$

2) Suite récurrente :

On peut définir une suite en donnant certains de ses premiers termes généraux U_{n-1} , U_n, U_{n+1} , …… on dit alors que la suite (U_n est une suite récurrente

Exemple1 : considérons la suite (U_n) telle que $(U_0) = 4$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1}= 3U_n+7$

(U_n) est une suite récurrente définie par la donnée de son premier terme (U_0) et la relation $U_{n+1}= 3U_n+7$ appelée relation de récurrence.

Un terme d'une telle suite ne peut être déterminé que si le terme précédent est connu.

$U_1= 3U_0+7 = 3 \text{ x } 2 + 7= 13$

$U_2= 3U_1+7 = 3 \text{ x } 13+ 7=46$

$U_3= 3U_2+7 = 3 \text{ x } 49 + 7= 154$

………………………………………………

………………………………………………
………………………………………………
………………………………………………

Exemple 2 :

Considérons la suite (t) telle que

t_1 =1, t_2= -3 , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \frac{2}{3} t_n + t_{n-1}$

$t_1 = 1$, t_2= -3 ,$t_3 = \frac{2}{3} t_2 + t_1$ =-1, …………

IV) Opérations sur les suites

Dans l'ensemble des suites définies sur une même partie non vide I de $\mathbb{N}$, on peut définir des opérateurs tels qu'addition, soustraction, inverse, multiplication, quotient

Soient $(U_n)_{n \in I}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n \in I}$ deux suites

− La somme des suites $(U_n)_{n \in I}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n \in I}$ est la suite $(U_n + \mathcal{V}_n)_{n \in I}$de terme général $U_n + \mathcal{V}_n$.
− Le produit des suites $(U_n)_{n \in I}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n \in I}$ est la suite $(U_n\mathcal{V}_n)_{n \in I}$ de terme général $U_n\mathcal{V}_n$.
− Si $U_n \neq 0$, pour tout $n \in$ I , la suite inverse de la suite (U_n) est la suite $(\frac{1}{U_n})_{n \in I}$ de terme général $U_n + \mathcal{V}_n$.
− Si $\mathcal{V}_n \neq 0$, pour tout $n \in$I, le quotient des suites$(U_n)_{n \in I}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n \in I}$est la suite $(\frac{U_n}{\mathcal{V}_n})_{n \in I}$ de terme général $\frac{U_n}{\mathcal{V}_n}$.

V) Monotonie ou sens de variation d'une suite :

1) Suite croissante : une suite $(U_n)_{n \in I}$ est **croissante** si et seulement si
$\forall\, n \in I, b U_n \leq U_{n+1} \quad ou\ U_{n+1} - U_n \geq 0$

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2-(n+1)+2}{2} - \frac{n^2-n+2}{2} = n$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n \geq 0$; la suite (U_n) est alors une suite croissante cela peut se traduire par :

$\mathrm{U}_0 \leq \mathrm{U}_1 \leq \mathrm{U}_3 \leq \mathrm{U}_4 \leq, \ldots \leq \mathrm{U}_{n-1} \leq \mathrm{U}_n \leq \mathrm{U}_{n+1} \leq \ldots$

Remarque : Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est **strictement croissante** si et seulement si

$\forall\, n \in \mathrm{I},\ \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n > 0$ ou $\mathrm{U}_n < \mathrm{U}_{n+1}$

2) Suite décroissante

Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est **décroissante** si et seulement si :

$\forall\, n \in \mathrm{I}, \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n \leq 0$ ou $\mathrm{U}_n \geq \mathrm{U}_{n+1}$

Exemple : soit la suite(U_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_n = -n^2 + n - 2$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n = -2n$; donc$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n \leq 0$

La suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors décroissante ; ce qui équivaut à

$$\mathrm{U}_0 \geq \mathrm{U}_1 \geq \mathrm{U}_2 \geq \cdots \geq \mathrm{U}_n \geq \cdots$$

Remarque : Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est **strictement décroissante** si et seulement si

$\forall\, n \in \mathrm{I},\ \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n < 0$ ou$\mathrm{U}_n < \mathrm{U}_{n+1}$

3) Monotonie d'une suite

Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est ou bien croissante ou bien décroissante. Une suite est dite **strictement monotone** lorsqu'elle est ou bien strictement croissante ou bien strictement décroissante.

Remarque : cas d'une suite strictement positive ou bien strictement négative

Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est dite **positive**, lorsque, $\forall\, n \in \mathrm{I}, \mathrm{U}_n \geq 0$
Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est dite **strictement positive**, lorsque, $\forall\, n \in \mathrm{I}, \mathrm{U}_n > 0$
Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est dite **négative**, lorsque, $\forall\, n \in \mathrm{I}, \mathrm{U}_n \leq 0$
Une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathrm{I}}$ est dite **strictement négative** lorsque, $\forall\, n \in \mathrm{I}, \mathrm{U}_n < 0$

VI) METHODE DE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Exemple 1 :

Soit à démontrer la propriété :

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

a) Remarquons d'abord que cette propriété est vraie pour n = 1, car alors le membre de gauche est égal à $1^2 = 1$ et celui de droite à $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.

b) Supposons que la propriété est vraie pour un entier k, c'est-à-dire que :

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Montrons alors qu'elle est vraie pour n = k + 1. En effet, d'après (2) :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ k^2 \mathbf{+ (k+1)^2} = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} \mathbf{+ (k+1)^2}$

$= (k+1)\left(\dfrac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right) = (k+1)\left(\dfrac{2k^2+7k+6}{6}\right)$

$= \mathbf{\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}$ **(3) .**

(3) est identique à (1) avec n = k + 1.

Ainsi, on a démontré que:

(3) Si la propriété est vraie pour n = k, alors elle est vraie pour n = k + 1.

c) Or (1) est vraie pour n = 1, donc d'après (3) avec n = 1 , elle est vraie pour n = 2.

Donc, d'après (3) avec n = 2, elle est vraie pour n = 3.

Donc, d'après (3) avec n = 3, elle est vraie pour n = 4......

En continuant ce raisonnement, on voit que la propriété (1) est vraie pour tout entier naturel n.

De manière générale, nous admettrons le principe suivant, appelé *principe de récurrence* :

Soit à démontrer une propriété (P_n) dépendant de l'entier naturel n.

(a) Si on démontre qu'elle est vraie pour une certaine valeur $n = n_0$,

(b) Et si on démontre que dès qu'elle est vraie pour n = k, alors elle est

vraie pour n = k + 1

(c) Alors, on peut conclure qu'elle est vraie pour $n \geq n_0$.

Exemple 2 : Démontrer que : $\forall\, n \geq 1$, 7 divise $2^{n+1} + 3^{2n-1}$.

N.B. On dit que l'entier k divise l'entier n (notation : $k \mid n$) si et seulement si :

il existe un entier p tel que : $n = k \times p$.

(a) pour n = 1, $2^2 + 3^1 = 7 = 7 \times 1$ et $7 \mid 7$, donc la propriété est vraie.

(b) Supposons qu'elle est vraie pour n = k, c'est-à-dire que : $7 \mid 2^{k+1} + 3^{2k-1}$.

Il existe donc un entier p tel que $2^{k+1} + 3^{2k-1} = 7p$ (∗).

Alors, $2^{k+2} + 3^{2k+1} = 2(2^{k+1}) + 9 \times 3^{2k-1}$. D'après (∗), ceci est égal à :

$2(7p - 3^{2k-1}) + 9 \times 3^{2k-1} = 14p + 7 \times 3^{2k-1} = 7\,(2p + 3^{2k-1})$.

Donc, $2^{k+2} + 3^{2k+1}$ est aussi un multiple de 7.

On en conclut que : $\forall\, n \geq 1$, 7 divise $2^{n+1} + 3^{2n-1}$.

VII) Suites périodiques

Définition :

Soit p un entier naturel non nul. On dit que la suite $(u_n)_{n \in A}$ est <u>périodique</u> de période p si, pour tout n de A, on a : $u_{n+p} = u_n$.

<u>Exemple</u> : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+2} = u_n$. Cette suite est donc périodique, de période 2.

<u>Exercices</u> :

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont périodiques et déterminer leur période.

a) $u_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ b) $v_n = \tan\frac{n\pi}{3}$ c) $u_n = \cos\frac{n\pi}{7} + \sin\frac{2n\pi}{5}$ d) $u_n = (-1)^n \cos\frac{3n\pi}{7}$.

2. Soit p un entier strictement positif fixé, E la fonction partie entière, (u_n) la suite définie par :

$$u_n = n - pE\left(\frac{n}{p}\right).$$

Démontrer que (u_n) est périodique.

3. Soit u_n le chiffre des unités de n^2. Démontrer que (u_n) est périodique. Préciser la période.

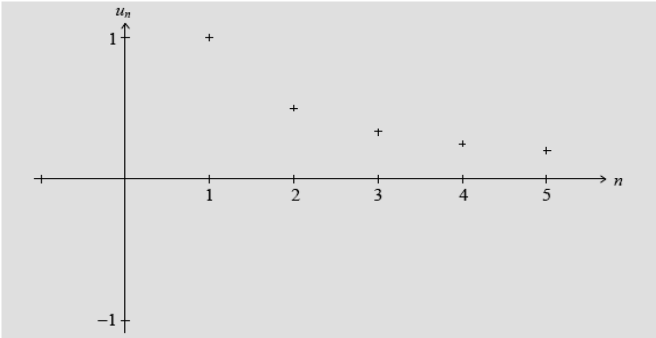
<u>VIII) Représentation graphique d'une suite</u>

<u>Définition</u> :

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La représentation graphique d'une suite (un) est l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u_n)$.

Exemple 1 : (Cas d'une suite définie explicitement)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Sa représentation graphique est l'ensemble des points isolés $(1 ; 1)$, $(2 ; \frac{1}{2})$, $(3 ; \frac{1}{3})$ etc…



Exemple 2 : (Cas d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)

Dans ce cas, on ne cherche pas en général à représenter la suite suivant la définition ci-dessus mais on préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses. Pour ce faire, on suit les étapes suivantes :

a) On trace la courbe représentative C_f de la fonction f définissant la suite récurrente et de la première bissectrice d'équation $y = x$;

b) On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses;

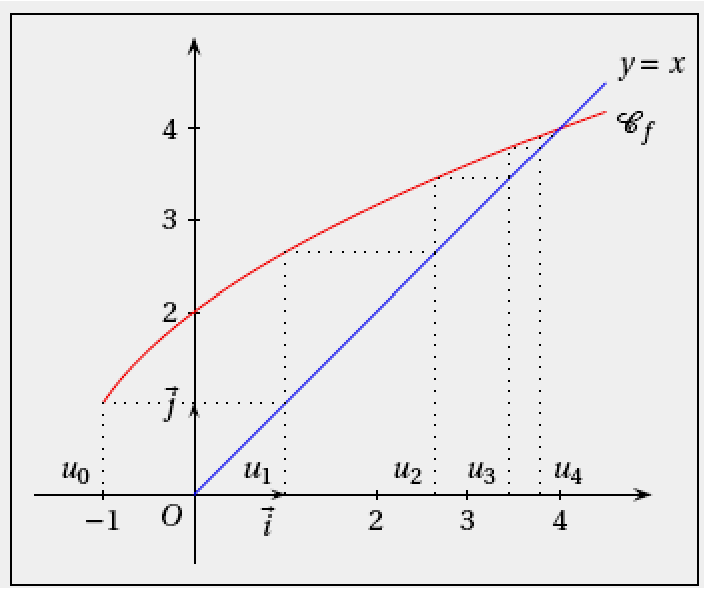
c) On utilise C_f pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées;

d) On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice;

e) On utilise C_f pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées;

f) etc...

Voici un exemple de construction avec la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.



N.B. Ce type de construction permet de faire des conjectures en termes de variation, de comportement à l'infini, etc.

<u>**VII/ LIMITE D'UNE SUITE**</u>

La notion de limite en + ∞ , déjà rencontrée à propos des fonctions, s'étend au cas des suites. Mais cette notion n'est définie que lorsque n tend vers +∞.

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite le réel $\boldsymbol{\ell}$ quand n tend vers +∞ signifie que tout intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{\ell}$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite +∞ quand n tend vers +∞ signifie que quel que soit le réel A, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

On a les résultats suivants :

<u>Théorème 1</u> :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

<u>Théorème 2</u> : Les résultats concernant les opérations sur les limites de fonctions s'étendent aux limites de suites .

<u>Exemple</u> : Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 1}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^3}{2n^3} = \frac{3}{2}$.

Soit (u_n) une suite du type $u_n = f(n)$ **:** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. (*Nous admettrons ce résultat*). Les théorèmes vus sur les limites finies de fonctions s'appliquent donc aux suites de ce type. En conséquence, on récupère dans ce cas tous les théorèmes sur les opérations algébriques, les limites de référence, ainsi que les théorèmes de comparaison, en particulier le théorème des "gendarmes".

<u>Exemples</u> :

1°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2n + 3}{n + 1}$. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$. On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x + 3}{x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sin n}{n}$. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. On sait que pour tout x strictement positif, $|\sin x| \leq 1$ puis : $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$.

Il résulte du théorème des gendarmes vu sur les fonctions et qui sera rappelé plus bas, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

3°) Toute suite constante converge vers son premier terme.

7.3 Propriétés des suites convergentes

Nous admettrons toutes les propriétés suivantes:

P.1 : *Toute suite convergente est bornée.*

Attention! Une suite peut être bornée et divergente (Ex : la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$).

On déduit de cette propriété que *toute suite non bornée est divergente*.

P.2 : *Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.*

Attention! Il se peut que la suite $(|u_n|)$ soit convergente et que la suite (u_n) soit divergente (Reprendre l'exemple précédent: $u_n = (-1)^n$).

P.3 : Règles de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur un même ensemble E et l un réel.

a) Si, à partir d'un certain rang, on a : $|u_n - l| \leq v_n$ et si l'on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

b) Si, à partir d'un certain rang, on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si l'on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, alors on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Ce dernier résultat est aussi connu sous le nom de théorème des gendarmes.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par :définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}.$$

Pour tout entier p élément de {1, 2,…..n}, on a : $n^2 + 1 \leq n^2 + p \leq n^2 + n$, d'où :

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+p} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

En sommant ces inégalités pour p allant de 1 à n, on obtient :

$$\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (Application de la règle analogue sur la limite d'une fonction rationnelle à l'infini).

On en déduit, en utilisant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

P.4 : Limite et ordre

Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et si l'on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = k$, alors on a : $l \leq k$.

Exercice : En déduire les deux propriétés suivantes :

P.5 : *Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq 0$ et si l'on a :*

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors on a $l \geq 0$.

Autrement dit : la limite d'une suite convergente de réels positifs est un réel positif ou nul. $\frac{1}{n!}$

Attention : une suite à termes strictement positifs n'a pas nécessairement une limite strictement positive.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$. $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

P. 6 : *Si, à partir d'un certain rang, on a : $a \le u_n \le b$ et si (u_n) est une suite convergente, alors sa limte appartient à l'intervalle [a , b].*

SUITE ARITHMETIQUE :

Définition :

r étant une constante réelle, on appelle suite arithmétique toute suite récurrente(u_n) définie par la donnée de son premier terme U_{n_0}et par la relation de récurrence $u_{n+1=}u_n$+r vérifiée pour tout $n \ge n_0$.

Tout terme d'une suite arithmétique est obtenu en ajoutant la raison r de cette suite au terme précédent.

Si $(U)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison , alors:

$U_1 = U_0 + r$, $U_2 = U_1 + r$, … , $U_n = U_{n-1} + r$, $U_{n+1} = U_n + r$, …

II) **Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique :**

Si a, b et c sont dans cet ordre, les valeurs de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison , alors:

$r = b - a = c - b$; on a alors $2b = a + c$; ce qui donne $b = \frac{a+c}{2}$

On dit alors que tout terme d'une suite arithmétique, sauf le premier, est la démi-somme ou moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

Par exemple, si $(Un)_n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique alors

$U_1 = \frac{U_0 + U_2}{2}$, $U_{10} = \frac{U_9 + U_{11}}{2}$, …, $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$.

III) Relation entre deux termes quelconques $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{U}_p$ d'une suite arithmétique :

1) si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr}$$

Demonstration : par récurrence

-**inititiation :** $u_0 = u_0 + 0r$

-**hérédité :** supposons que pour > 0 , n fixé , $u_n = u_0 + nr$

Comme$u_{n+1} = u_n + r$ alors d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = (u_0 + nr) + r$, $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

2) u_n et u_p étant deux termes quelconques d'une suite arithmétique de raison r ,

On a $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

Démonstration : on sait que $u_n = u_0 + nr$ et que $u_p = u_0 + pr$

Donc $u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr$

D'où $u_n - u_p = (n-p)r$

on a alors $u_n = u_p(n-p)r$

IV sens de variation d'une suite arithmétique :

(u_n) étant une suite arithmétique de raison r on a : $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout indice n .

on en déduit qu'une suite arithmétique de raison r, est :

-strictement croissante si et seulement si $r > 0$

-strictement décroissante si et seulement si $r > 0$

-constante si et seulement si $r = 0$

V convergence d'une suite arithmétique de raison r :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} (u_0 + nr) = \lim\limits_{x\to+\infty} nr$ si $r \neq 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0$

Si $n = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = u_0$

On a alors :

Une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

-Divergente si et seulement si $r \neq 0$

-Convergente vers son premier terme si et seulement si $r = 0$

<u>VI Somme S_n de N termes consécutifs d'une suite arithmétique :</u>

1) l'égalité suivante peut se démontrer par un raisonnement par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

<u>Démonstration :</u> posons $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, avec $S_1 = 1$

-**<u>Initialisation :</u>** $S_1 = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$

-**<u>Hérédité :</u>** On a $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + n + (n+1)$

Donc $S_{n+1} = S_n + n + 1$; Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a alors $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1))$

$S_{n+1} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$, d'où $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

La propriété est alors héréditaire

-Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>2) Somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ de termes consécutifs d'une suite arithmétique, $p \leq n$</u>:

a) <u>Nombre de termes de S_n :</u> le nombre de termes d'une somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ est $n - p - 1$

<u>b)</u> Comme (u_n) est suite arithmétique :

$$S_n = U_p + (U_p + r) + (U_p + 2r) + \cdots + (U_p + (n-p)r)$$

$$S_n = (U_p + U_p + U_p + \cdots + U_p) + (r + 2r + \cdots + (n-p)r)$$

$$S_n = (n-p-1)U_p + r(1+2+\cdots+(n-p))$$

or $1+2+\cdots+(n-p) = \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$

D'où $S_n = (n-p+1)U_p + r \times \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$

$$S_n = (n-p-1)(U_p + \frac{n-p}{2})$$

$$S_n = (n-p+1)\left(\frac{2U_p + (n-p)r}{2}\right) = (n-p+1)\frac{U_p + U_p + (n-p)r}{2}$$

On a alors $S_n = (n-p+1) \times \frac{U_p+U_n}{2}$

Pour une suite arithmétique (u_n), si $p \leq n$, on a :

$$U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \frac{U_p + U_n}{2}$$

Remarque : $\begin{cases} n-p+1 \text{ } est\ le\ nombre\ de\ termes\ de\ la\ somme\ S_n \\ U_p\ est\ le\ premier\ terme\ de\ S_n \\ U_n\ est\ le\ dernier\ terme\ de\ S_n \end{cases}$

Par exemple si (U_n) est une suite arithmétique, alors :

$$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$$

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}$$

VII Comment montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique :

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique, on montre que : Pour tout indice n, $U_{n+1} - U_n = r$ où r est une constante

Eviter d'utiliser les premier les premiers termes d'une suite (U_n) pour montrer qu'elle est arithmétique :

Montrer que $U_1 - U_0 = U_2 - U_1$ ne suffit pas pour montrer qu'une suite est arithmétique

Par contre, il suffit de montrer que $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ pour montrer qu'une suite **n'est pas une suite arithmétique**

Suite géométrique

I Définition : q étant une constante réelle, on appelle suite géométrique de raison q, toute suite récurrente définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n \times q$

Tout terme d'une suite géométrique, sauf le premier est obtenu en multipliant le terme précédent par la raison q de cette suite.

Par exemple si (U_n) est une suite géométrique de raison q, alors : $U_1 = qU_0, U_2 = qU_1, \dots, U_{n+1} = qU_n, \dots$

II Comment montrer qu'une suite est géométrique :

Pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique, on peut montrer qu'il existe une constante réelle q vérifiant $U_{n+1} = qU_n$, pour tout indien.

Eviter d'utiliser l'égalité $\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1}$, si $U_0 \neq 0$ et $U_1 \neq 0$, pour montrer qu'une suite géométrique.

par contre, il suffit de montrer que $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$, si $U_0 \neq 0$ et $U_1 \neq 0$, pour montrer qu'une suite (U_n) n'est pas géométrique.

III Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soient a, b, c trois réels

Si (a, b, c) est une progression géométrique alors $b^2 = ac$

Démonstration :

Supposons que (a, b, c) progression géométrique donc il existe une constante q telle que $\begin{cases} b = qa \\ c = bq \end{cases}$; on a alors $\begin{cases} b = aq \\ ac = abq \end{cases}$ d'où $ac = b.(aq) = b \times b; donc\ ac = b^2$

IV Relation entre deux termes quelconques U_n et U_p d'une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q non nulle $n \in \mathbb{N}$

1) On a :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 q^n$

Démonstration : Par récurrence

-Initialisation : $U_0 q^0 = U_0 \times 1 = U_0$ donc la propriété est vraie pour n=0

-héréditaire : supposons que $U_n = U_0 q^n$ pour n fixé, $n > 0$

Comme $U_{n+1} = qU_n$ alors $U_{n+1} = q \times U_0 \times q^n = U_0 \times q^{n+1}$

La propriété est alors héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 q^n$

Remarque : Si $q = 0$, $U_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (tous les termes sont nuls sauf peut être U_0)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = U_0 q^n = U_0 \times 0^n = 0$

$$\boxed{2)\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, U_n = U_n \times q^{n-p}}$$

Démonstration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \times q^n = U_n = U_0 \times q^p \times q^{n-p} or\ U_0 q^p = U_p$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, U_n = U_p \times q^{n-p}$

V Sens variation d'une suite géométrique de raison q :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q $n \in \mathbb{N}$

1) Si $U_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \times q^n = 0$

Donc si $U_0 = 0$, la suite géométrique (U_n) est la suite constante nulle

2) Si q=1 et $U_0 \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \times q^n = 1$

Donc une suite géométrique de raison q=1, est une suite constante

3) Si $U_0 \neq 0$ et q=0, une suite géométrique (U_n) de raison q est une suite stationnaire

4) Si $U_0 \neq 0$ et $q < 0$ alors deux termes consécutifs quelconques d'une suite géométrique (U_n) de raison q, sont des signes contraires

On dit alors qu'une suite géométrique non nulle et de raison striquetement négatif, est suite alterné ; elle n'est croissante ni décroissante.

5) Si $U_0 \neq 0, q \neq 1, q > 0$, alors on peut déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ ou comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1, pour étudier la mélatonine de la suite (U_n).

VI Convergence d'une suite géométrique :

1) soit q un réel. On a les résultats suivants :

Si $-1 < q < 1, \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Si $q > 1, \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Si q≤ -1 q^n *n'admet pas de limite lorsque n tend vers* $+\infty$

Démonstration :

-si a est une constante, a > 0, montrons par récurrence que $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout n$\in \mathbb{N}$

Initiation : comme $a > 0, 1 + a \neq 0$, *donc* $(1+a)^0 = 1$ *or* $1 + 0 \times a = 1$ donc $(1+a)^n = 1 + 0 \times a = 1$ d'où $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$

Hérédité : supposons que $(1+a)^n \geq 1 + na$

Déduisons-en que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

Comme $(1+a)^n \geq 1 + na$ et que $1 + a > 0$, *alors* $(1+a)^n \times (1+a) \geq (1 + na)(1+a)$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2$$

$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$

Comme $na^2 \geq 0$ alors 1+$(n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$ donc si $a > 0$ et si $(1+a)^n \geq 1 + na$ alors $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

La propriété est alors héréditaire.

Conclusion : si $a > 0, (1+a)^n \geq 1 + na, n \in \mathbb{N}$

-soit $q > 1$; posons $q - 1 = a$ ou $q = 1 + a, a > 0$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$, donc $q^n \geq 1 + na$ et comme $\lim_{n\to+\infty}(1 + na) = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

-soit $-1 < q < 1$ $ou\ encore\ |q| < 1$

Comme$|q| < 1$, alors $\frac{1}{|q|} > 1$ et par récurrence $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{|q|})^n = +\infty$

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{q^n}\right| = +\infty$;on en déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

-Supposons que $q > -1$

-Si n est pair, posons n=2p

On a $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} q^{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty}(q^2)^p$

Comme q$< -1, alors\ q^2 > 1$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{p\to+\infty}(q^2)^p$=$+\infty$

-Si n est impaire, posons $n = 2p + 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{p\to+\infty} q \times (q^2)^p$$

Comme q$> -1, q^2 > 1\ et\ \lim\limits_{p\to+\infty}(\mathrm{q}^2)^{\mathrm{p}} = +\infty$, $\lim\limits_{p\to+\infty} q \times (q^2)^p = -\infty$

On a alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = -\infty$

-la limite de q^n, pour $q < -1$, dépend donc de la parité de n cette limite n'étant unique, alors q^n n'admet pas de limite

-supposons que q=1 : $q^n = \begin{cases} 1\ si\ n\ est\ pair \\ -1\ si\ n\ est\ impair \end{cases}$ donc q^n n'admet pas de limite.

2) <u>Convergence d'une suite géométrique</u> ($\boldsymbol{U_n}$) <u>raison q :</u>

On a $U_n = U_0 q^n$; supposons $U_0 \neq 0$

On déduit de ce qui précède que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ si -1$< q < 1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$ si q=1, U_n n'admet pas de limite si q≤ -1 et pour q> 1,

U_n n'admet pas de limite si $q \leq -1$ et pour $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si $U_0 > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ si $U_0 < 0$

On a alors le résultats suivant : une suite géométrique de premier terme non nul et de raison q, est convergente si $q \in]-1,1]$ et divergente si $q \notin]-1,1]$

V Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Si q$\neq$ 1, on a : $1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Démonstration : posons $s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n$

On a : $qs_n = q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}$

(q-1) $s_n = qs_n - s_n$

$=q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}-(1+q+q^2+\cdots+q^n)$

Donc (q-1) $s_n = q^{n+1}-1$

D'où $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{\text{q}-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) (U_n) étant une suite géométrique de raison $q \neq 1\ si\ p\ \leq n, alors$:

$$U_p\ + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p\ \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration : soit $S_n = U_p\ + U_{p+1} + \cdots + U_n$ en exprimant chaque terme de S_n en fonction de U_p, on a : $S_n = U_p + U_p \times q + U_p \times q^2 + \cdots + U_p \times q^{n-p}$

D'où $S_n = U_p(1+q+q^2+\cdots+q^{n-q})$ or $1+q+q^2+\cdots+q^{n-q} = \frac{q^{n-p+1}-1}{\text{q}-1} = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Donc $S_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Résumé sur les suites arithmétiques et géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$; ($r \in \mathbb{R}$)	u_{n+1} = q.u_n ; (q $\in \mathbb{R}$)
Raison	$\boldsymbol{r}$	q
Terme général	$u_n = u_0 + \text{n}\, r$	$u_n = \boldsymbol{u}_0\, \text{q}^n$
Relation entre deux termes quelconques	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p\, \text{q}^{n-p}$
Somme des n termes consécutifs	$\text{S} = \frac{n}{2}(\text{a} + \text{b})$ n le nombre de termes a le premier terme de la somme b le nombre de termes de la somme	$\text{S} = \text{a} \times \frac{1-\text{q}^n}{1-\text{q}}$ n le nombre de termes a le premier terme de la somme q la raison de la suite
Relation entre trois termes consécutifs a, b et c	a + c = 2b	a.c = b²
Limite	Si r $>$ 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ Si r $<$ 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	• Si $-1 <$ q < 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ • Si q > 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \; si\; u_0 > 0 \\ -\infty \; si\; u_0 < 0 \end{cases}$ • Si q ≤ -1, alors (u_n) n'admet pas de limite • Si q = 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

EXERCICES ET PROBLEMES

EXERCICE 1 RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1°) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2°) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3°) $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2n-1)^3$ ($n \in \mathbb{N}$). $S_n = 2n^4 - n^2$.

4°) $\forall n \geq 4, 2^n \geq 4$ 5 °) $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$

5°) $\forall n \geq 5, 3^n > n^3$ 6°) $\forall n \geq 7, 3^n < n!$

6°) Pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 .

7°) Pour tout entier naturel non nul n, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 .

8°) Pour tout entier naturel non nul, $3 \times 5^{2n-2} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

9°) Pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 22

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{3n+4}{n+3}$

1°) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2°) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire un minorant pour u_n.

3°) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 3.

EXERCICE 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{3n}{1+n+n^2}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2°) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3°) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 4

Soit (u_n) la suite définie pour n ≥ 1 par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ...+ \frac{1}{2n}$

1°) Calculer u_1, u_2 , u_3 et u_4.

2°) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3°) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$. En déduire un minorant pour u_n. Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 5

Soit (u_n) la suite définie par récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 1$.

1°) Donner les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3. En donner des valeurs approchées avec 3 décimales.

2°) Soit f la fonction définie sur [2; +∞[par $f(x) = \sqrt{2 + x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. Soit (d) la droite d'équation y = x. Tracer $\mathscr{C}$ et (d) dans un même repère.

Représenter les termes u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses. Conjecturer le sens de variation de (u_n) ainsi qu'un minorant et un majorant de u_n

3°) Montrer par récurrence que la suite estmajorée par 2.

4°) Vérifier que $u_0 \leq u_1$. Montrer que si $u_{n-1} \leq u_n$ alors $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

EXERCICE 6

Soit (u_n) la suite définie par récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ et $u_0 = 4$.
1°) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3.
2°) Montrer, par récurrence, que tous les termes sont strictement positifs. En déduire un minorant de u_n.
3°) Tracer dans un repère orthonormal la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction définie sur]0; +∞[par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ et la droite (d) d'équation y = x.
Construire les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. Conjecturer le sens de variation de la suite.
4°) Montrer que si x > 0, alors $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$. Montrer que si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq 1$. En déduire un minorant de u_n différent de celui trouvé en 2°.

5°) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1-{u_n}^2}{u_n}\right)$. Trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

EXERCICE 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r = 6 et de premier terme $u_1 = 1$. Calculer n pour que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 280$. Calculer u_n pour la valeur trouvée de n.

EXERCICE 8

Montrer que si x^2, y^2, z^2 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}$ et $\frac{z}{x+y}$.

EXERCICE 9

Calculer trois termes consécutifs x, y, z d'une suite géométrique sachant que $x + y + z = 312$ et $z - x = 192$.

EXERCICE 10

Calculer trois termes consécutifs x, y, z d'une suite arithmétique sachant que $x + y + z = 312$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 22869$.

EXERCICE 11

On considère les suites géométriques de premier terme u_1 ($u_1 \neq 0$) telles que : $u_2 + u_3 = 2\,u_1$.

Calculer la raison de chacune de ces suites.

Donner l'expression de la somme des n premiers termes.

Application : $u_1 = 4$, $n = 10$.

EXERCICE 12

Montrer que, si 3 nombres a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, ils vérifient la relation :

$$(a + b + c)\,(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Application : Trouver 3 nombres en progression géométrique connaissant leur somme 57 et la somme de leurs carrés 1197.

EXERCICE 13

Déterminer les 3 premiers termes d'une suite géométrique décroissante, sachant que la somme de ces trois termes est égale à 7 et que le rapport du troisième terme au premier est égal à $\frac{1}{4}$.

Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

EXERCICE 14

Trois nombres distincts a, b et c sont tels que dans l'ordre a, b, c ils sont 3 premiers termes d'une suite arithmétique et dans l'ordre b, a, c ils sont 3 premiers termes d'une suite géométrique.

1°) Trouver ces trois nombres sachant que : $a \times b \times c = 27$.

On prolonge la suite géométrique, déterminer le rang du premier terme supérieur à 10 000.

2°) Trouver ces trois nombres sachant que : $a + b + c = 24$.

EXERCICE 15

Les cinq termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 d'une suite géométrique sont strictement positifs. Soit x la raison de cette suite. On pose $u_3 = a$.

1°) Exprimer à l'aide de a et x les sommes : $S = u_1 + u_5$ et $s = u_2 + u_4$.

Montrer que $s^2 = aS + 2a^2$.

2°) Calculer a et x sachant que $s = 34$ et $S = \frac{257}{2}$.

<u>EXERCICE 16</u>

1°) Déterminer 3 termes consécutifs a, b, c d'une suite arithmétique sachant que :

$$a + b + c = \frac{17}{2} \qquad\qquad 5a - 6b + c = -\frac{10}{3}$$

Quelle est la raison de cette suite?

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = \pi$ et de raison $\frac{5}{6}$.

a) Calculer le dixième terme v_{10} de cette suite.

b) Calculer $S_n = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n.

<u>EXERCICE 17</u>

Soit (u_n) une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 35 \end{cases}$.

1°) Calculer le premier terme u_0 et la raison r de cette suite, puis exprimer le terme général u_n en fonction de n.

2°) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 2^{u_n}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique pour laquelle on déterminera v_0 et la raison.

EXERCICE 18

on considère deux suites numériques définies par :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{3^n - 6n + 4}{3}$ et $v_n = \dfrac{3^n + 6n - 4}{3}$.

1°) Soit $a_n = u_n - v_n$.

Montrer que la suite de terme général a_n est une suite arithmétique. Calculer $a_0 + a_1 + \ldots a_{10}$.

2°) Soit $b_n = u_n + v_n$.

Montrer que la suite de terme général b_n est une suite géométrique. Calculer $b_0 + b_1 + \ldots b_{10}$.

3°) En déduire les sommes : $u_0 + u_1 + \ldots u_{10}$ et $v_0 + v_1 + \ldots v_{10}$.

EXERCICE 19

La somme des termes d'une suite finie d'entiers consécutifs (positifs ou négatifs) est égale à 73.

Quels sont les termes de cette suite ?

EXERCICE 20

Déterminer les progressions arithmétiques dans lesquelles le rapport entre la somme des n premiers termes et la somme des 2n premiers termes est constant (c'est-à-dire indépendant de n).

EXERCICE 21

Déterminer une progression arithmétique sachant que la somme Sn des n premiers termes est $3n^2 + 4n$, pour tout n.

Certains termes de cette progression sont des carrés parfaits. Donner l'expression générale de ces termes et calculer les six premiers d'entre eux.

CALCULS DE LIMITES

EXERCICE 22

Etudier le comportement de la suite de terme général u_n quand n tend vers $+\infty$.

1°) $u_n = \dfrac{5n + 1}{2n + 3}$ **2°)** $u_n = \dfrac{7n - 1}{3n - 1}$ **3°)** $u_n = \dfrac{5n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1}$

4°) $u_n = \dfrac{-2n^2 + n - 3}{3n^2 - n + 7}$ **5°)** $u_n = \dfrac{2n + 1}{3n^2 + 2n + 1}$ **6°)** $u_n = \dfrac{5n^2 + 3}{2n + 1}$

7°) $u_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{3n + 2}$ **8°)** $u_n = \dfrac{2n^2 + (-1)^n.n + 1}{n^3 + 1}$

9°) $u_n = 2n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}$ **10°)** $u_n = n + 3 - \sqrt{n^2 - n + 1}$

11°) $u_n = \sqrt{2n^2 + n + 1} - \sqrt{2n^2 + 5}$ **12°)** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1}}$

13°) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n + 1}}$ **14°)** $u_n = \dfrac{n + 1}{\sqrt{n + 2}} - \dfrac{n + 1}{\sqrt{n + 2}}$

15°) $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + n + 3}}$ **16°)** $u_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 3}$ **17°)** $u_n = \dfrac{5^n + 3^{n+1}}{5^n + 2}$

EXERCICE 23

On considère la suite u définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1°) Montrer que la suite S définie par $S_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprimer S_n en fonction de n.

2°) On pose $V_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite (t_n) définie par $t_n = V_{n+1} - V_n$.

Exprimer t_n en fonction de S_n.

3°) Exprimer V_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{8^n}$.

EXERCICE 24

(u_n) est une suite géométrique telle que $81u_n = a^4\, u_5$

1°) Déterminer en fonction de a les valeurs possibles de la raison q de la suite (u_n). Donner l'intervalle I des valeurs de q pour lesquelles (u_n) converge.

Que dire de (u_n) si $a = 3$?

2°) Dans cette question, on considère que $0 < a < 3$ et l'on note $S_n = u_0 + \ldots + u_n$

a) Exprimer S_n en fonction de u_0, a et n.

b) Préciser pourquoi (S_n) converge et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ en fonction de u_0 et a.

c) On donne $u_0 = 243$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 729$.

Déterminer dans ce cas la raison q et l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 25

Une suite (u_n) est définie par son premier terme u_1 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n}$

1°) Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de u_1 $(a < b)$ pour lesquelles la suite est constante.

2°) Montrer que si $u_1 \neq a$ et $u_1 \neq b$, il en est de même de u_n.

3°) On suppose désormais que $u_1 \neq a$ et $u_1 \neq b$. Soit V_n la suite définie par :

$$V_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$

Montrer que V_n est une suite géométrique.

4°) Exprimer V_n puis u_n en fonction de n.

5°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 26

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

1°) Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n > 0$.

2°) Montrer que pour tout entier n non nul, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{u_n}$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \sqrt{2}$.

3°) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

En déduire que pour tout n ∈ ℕ*, $u_n - \sqrt{2} < 2^n$.

4°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 27

a est un réel fixé. p est un réel fixé distinct de 0, 1 et 2.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = pu_{n+1} - (p - 1)u_n$$

1°) On pose $V_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique et exprimer V_n en fonction de n.

2°) On pose $t_n = u_{n+1} - (p - 1)\, u_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante. Calculer t_1. Exprimer u_n en fonction de V_n et t_n.

Pour quelles valeurs de p la suite (u_n) est-elle convergente ?

,

CHAPITRE 14 : LA STATISTIQUE DESCRIPTIVE

L'origine du mot « statistique » remonte au latin classique status (état) qui, par une série d'évolutions successives, aboutit au français statistique, pour la première fois en 1771.

La statistique trouve son application dans de nombreux domaines : économie, biologie, commerce, et industrie, météorologie, physique, politique, sociologie…

Au collège l'enseignement de la statistique descriptive a pour objectif de familiariser les élèves à la synthèse d'informations sous forme numérique ou graphique. Les documents étudiés prennent appui sur des situations de la vie quotidienne, sur des situations d'interdisciplinarité où on peut utiliser des donnés d'autres disciplines telles que la géographie, la démographie, histoire, biologie, physique,…

La synthèse d'informations sous forme numérique peut aboutir à des calculs de moyenne, de médiane, mode, pourcentage, fréquence, effectif, effectif cumulé croissant, effectif décroissant.

Ces calculs sont présents dans beaucoup de domaines autres que les mathématiques : bulletin météo, indice de confiance des prévisions, sondages d'opinion, répartition des êtres vivants, vitesse moyenne, inaptitude dans la mesure, dispersion des mesures.

L'étude de la statistique nécessite la maitre la maitrise des ensembles des nombres tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, le repérage, la notion de droite dans un repère, la lecture de certaines représentations graphiques, de tableaux à deux lègues, de tableau à double entrée.

SERIE A UN CARACTERE

I-définitions :

1) Population :

Une population est l'ensemble de référence sur lequel porte les observations, les prélèvements de données.

2) <u>Unité statistique en individu</u> : tout élément d'une population est appelé unité statistique ou individu

3) <u>Effectif total :</u> l'effectif total est le nombre d'individus observés ou nombre d'individus de la population

4) <u>Caractère :</u> On appelle caractère la propriété particulière d'un individu à laquelle on s'intéresse lors d'une observation, d'un prélèvement de données dans une population.

Un caractère peut être qualificatif ou bien quantitatif. S'il est qualificatif, il peut être discret ou bien continue

a) <u>Caractère qualificatif :</u> lors d'une observation ne pouvant pas donner lieu à une mesure on dit que le caractère étudié est qualificatif

<u>Exemple :</u> lors d'une observation on peut s'intéresser à la « nationalité » de chaque individu ; le caractère « nationalité » ne se prête pas à une mesure ; on dit que c'est un caractère qualificatif.

b) <u>caractère quantitatif :</u> Un caractère est quantitatif lorsqu'il est mesurable (on peut exprimer son intensité par un nombre)

- <u>Caractère quantitatif discret :</u> Un caractère quantitatif est dit discret lorsqu'il prend des valeurs isolées peu nombreuses

-<u>Caractère quantitatif continu :</u> Un caractère quantitatif est dit continu lorsqu'il peut prendre toute valeur d'un intervalle donné non vide de $\mathbb{R}$

<u>Remarque :</u> -on considère comme caractère continu un caractère discret dont le nombre de valeurs est grand ; On regroupe ces valeurs dans des intervalles ou classes de la forme $[C_i, C_{i+1}[$; quand le nombre de valeurs d'un caractère est trop élevé, étudier séparément ces valeurs mène à des calculs longs fastidieux et sans intérêt ; on recueille de meilleurs informations en les regroupant dans les classes choisies de telle sorte à ne pas perdre les informations essentielles sur les individus observés.

-la définition d'une population doit être univoque, non ambivalente, claire et ne doit souffrir d'aucune ambigüité. C'est cela qui conditionne la fiabilité des résultats recueillis auprès de cette population.

5) <u>Modalité :</u>

- Pour caractère quantitatif : une modalité est rubrique possible de ce caractère

Exemple : Si on étudie, dans une population, le caractère « situation matrimoniale », les modalités de ce caractère sont : marié, célibataire, veuf, divorce.

-Pour un caractère quantitatif : les modalités sont les différentes valeurs d'enfants et on a obtenu les résultats suivants :

0-0-1-1-2-0-3-1-2-2

-La population est l'ensemble des 10 familles

-chaque famille constitue un individu de cette famille

-le caractère étudie est le caractère « nombre d'enfants »

-ce caractère quantitatif discret peut prendre chacune des valeurs :

0, 1, 2 et 3

Remarque : dans une population, un individu est associé à une seule modalité du caractère étudié. Les modalités doivent permettre d'avoir une partition de la population **Ω** en des parties non vides, disjointes, de réunion **Ω**.

6) **Effectif n_i** : l'effectif d'une modalité n_i est le nombre n_i de fois que cette modalité est observée.

Dans l'exemple précédent la valeur $x_i = 0$ du caractère, est observée 3 fois ; son effectif est alors $n_i = 3$

7) **Fréquence f_i** : la fréquence f_i d'une modalité m_i est le quotidien $f_i = \frac{n_i}{n}$ où n_i est l'effectif de cette modalité et n l'effectif total

Remarque : il arrive qu'on ait besoin du nombre d'individus présentant au plus ou moins la valeur x_i ou la fréquence f_i d'un caractère quantitatif, on dit dans ce cas qu'on cumule de façon décroissante les effectifs ou les fréquences

- Effectif cumulé croissant d'une valeur x_i : c'est le nombre d'individu présentant une valeur du caractère inférieur ou égale à x_i (ou une valeur au plus égale à x_i)

Exemple : dans l'exemple précédent le nombre de familles qui ont au plus 2 enfants est : 3+3+2+1=9

On dit que la valeur $x_3 = 2$ du caractère à pour effectif cumulé décroissant 9

8) **Série statistique simple ou un caractère :** l'ensemble des couples (x_i, n_i) ou l'ensemble des couples (x_i, f_i), est appelé série statistique à un caractère

9) **Présentation en tableau :**

a) **Caractère qualificatif :**

Modalités m_i	m_1	m_2	…	m_3
Effectifs n_i	n_1	n_2	…	n_3
Fréquences f_i	f_1	f_2	…	f_3

b) **caractère quantitatif discret :**

Valeur x_i du caractère	x_1	x_2		… x_k
Effectifs n_i	n_1	n_2		… n_k
Fréquences f_i	f_1	f_2		… f_k

On peut ajouter dans ce tableau : les effectifs cumulés et les fréquences cumulées

c) **caractère quantitatif continu :**

Classes C_i	$[a_1, a_2[$	$[a_2, a_3[$	…	$[a_k, a_k[$
Centres x_i des classes	x_1	x_2	…	x_k
Effectifs n_i	n_1	n_2	…	n_k
Fréquences f_i	f_1	f_2	…	f_k

On peut ajouter dans ce tableau les effectifs cumulés et les fréquences cumulées.

Remarque : le centre de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $x_1 = \frac{a_{1+} a_{i+1}}{2}$

L'amplitude de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $a_{i+1} - a_i$

La densité de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $d_i = \frac{n_i}{a_{i+1} - a_i}$

Lorsque les classes n'ont pas la même amplitude

II-Caractéristiques ou paramètres de position d'une série statistique simple ensemble des couples $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{n_i})\boldsymbol{ou}\ (\boldsymbol{x_i},\ \boldsymbol{f_i})$,$\boldsymbol{i}$ variant de 1 à $\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{f_i} = \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{n}}$

1) la moyenne $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i = \frac{f_i + f_{2+\cdots+} f_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

2) les quantiles :

1) définition : on appelle quantile d'ordre $\alpha\%$, noté Q_α la valeur x_i du caractère telle que $\alpha\%$ des valeurs observées soient inférieur ou égales à x_i

- la médiane M_e est le quantile d'ordre 50%. Elle partage les valeurs de la série rangées dans l'ordre croissant, en deux sous-séries de même effectifs.

Il y a 50% des valeurs inférieurs ou égales a M_e

-les quantiles $Q_{1,}Q_{2\ et}\ Q_3$ partagent la série en 4 séries de même taille, lorsque les valeurs x_i sont rangées dans l'ordre croissant : pour le premier quantile $Q_{1\ ou}\ Q_{25,}$ 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1

50% des observations sont inférieures ou égales à $Q_{1=}\ \ Q_{50=}\ M_e$ 75% des valeurs sont inférieures ou égales à $Q_3 =\ Q_{75}$

-les 9 déciles $Q_{10}, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40}, Q_{50,}Q_{60,}Q_{70,}\ Q_{80,}et\ Q_{90}$ partagent la série en 10 séries de même effectif

3) le mode :

Pour une série correspondant à un caractère quantitatif discret, on appelle mode une valeur du caractère d'effectif maximum

Une série qui a plusieurs modes est dite plurimodale

Une série qui a un seul mode, noté M_0, est dite unimodale.

-pour un caractère quantitatif continu, dont les valeurs sont groupées en classes d'égales amplitudes, on appelle classe modale, la classe qui a le plus grand effectif.

<u>Remarque :</u> si les classes sont d'amplitudes inégales, une classe qui a le plus grand effectif, n'est pas forcément classe modale

III-<u>Caractéristiques ou paramètres de dispersion d'une série ensemble des couples (x_i, n_i) ou (x_i, f_i), i allant de 1 à k :</u>

1) <u>variance :</u>

La variance est $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{n_1(x_i-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+n_k(x_2-\bar{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_k}$

On a aussi

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\bar{x})^2 = f_1(x_1-\bar{x})^2 + f_2(x_2-\bar{x})^2 + \cdots + f_k(x_k-\bar{x})^2$$

<u>Remarque :</u> on a aussi $V(x) = \frac{n_1{x_1}^2+n_2{x_2}^2+\cdots+n_k{x_k}^2}{n_1+n_2+\cdots+n_k}$ - $\bar{x}^2$

Cette dernière formule est appelé théorème de Koenig.

<u>2) Ecart-type :</u> $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

L'écart-type d'une série statique est la racine carrée de sa variance

<u>Remarque :</u> l'écart-type s'exprime dans la même unité que les valeurs x_i du caractère et permet de mesurer la dispersion de ces valeurs autour de la moyenne $\bar{x}$; plus $\sigma(x)$ est grand plus cette dispersion est importante ; plus $\sigma(x)$ est petit plus les x_i se resserrent autour de $\bar{x}$.

3) <u>Coefficient de variation</u> CV= $\frac{\sigma(\ )}{x}$:

Le coefficient de variation CV est le quotient de l'écart-type $\sigma(x)$ à la moyenne $\bar{x}$. il permet de comparer des séries dont les caractères de même nature mesurés avec des unités différentes, quant à la dispersion des valeurs autour de la moyenne $\bar{x}$.

<u>4) Ecart absolu moyen par rapport à la moyenne :</u>

$$e_{\bar{x}} = \frac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+\cdots n_1+n_k|x_k-\bar{x}|}{n_1+n_2+\cdots+n_k} = f_1(x_1-\bar{x}) + f_2(x_2-\bar{x}) + \cdots + f_k(x_k-\bar{x})$$

<u>5)Ecart absolu moyen par rapport à la médiane :</u>

$$e_{M_e} = \frac{n_1|x_1-M_e|+n_2|x_2-M_e|+\cdots+n_k|x_k-M_e|}{n_1+n_2+\cdots+n_k}$$

$$e_{M_e} = f_1|x_1-M_e| + f_2|x_2-M_e| + \cdots + f_k|x_k-M_e|$$

On a: $e_{M_e} \leq e_{\bar{x}} \leq \sigma(x)$

<u>6) Ecart-interquartile :</u> On appelle intervalle interquartile, l'intervalle $[Q_{1,}Q_3]$ contenant 50% des observations centrales, formé du premier et du dernier quartile. Son amplitude $Q_{3-}Q_1$ est appelée écart-interquartile.

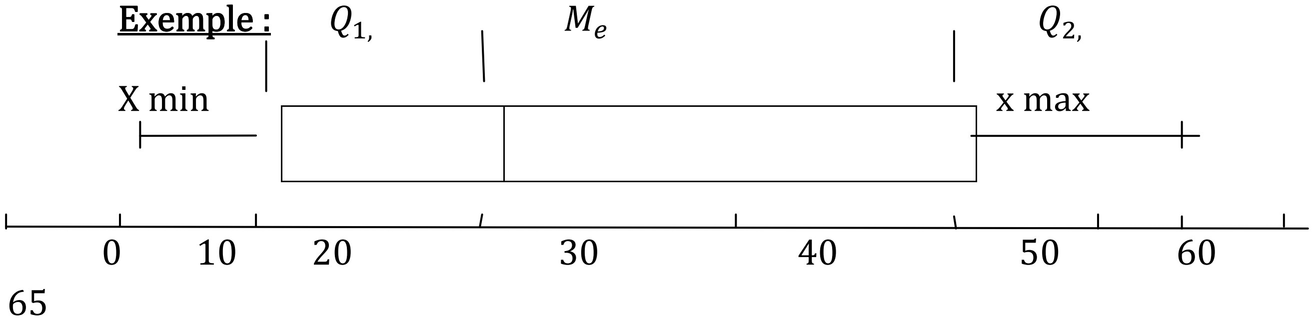
Cet écart permet de mesurer la dispersion des valeurs de la série autour de la médiane.

<u>7) Etendue :</u> l'étendue d'une série est égale à la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur observées.

<u>Remarque : la boite à moustaches ou diagramme à boite :</u>

Elle permet de faire apparaitre dans un diagramme les valeurs minimales, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et la plus grande valeur observée. Elle permet de comparer des séries selon les ces 5 paramètres et l'intervalle interquartile et l'étendue de chaque série

<u>Exemple :</u>



Cette boite à moustache permet d'avoir :

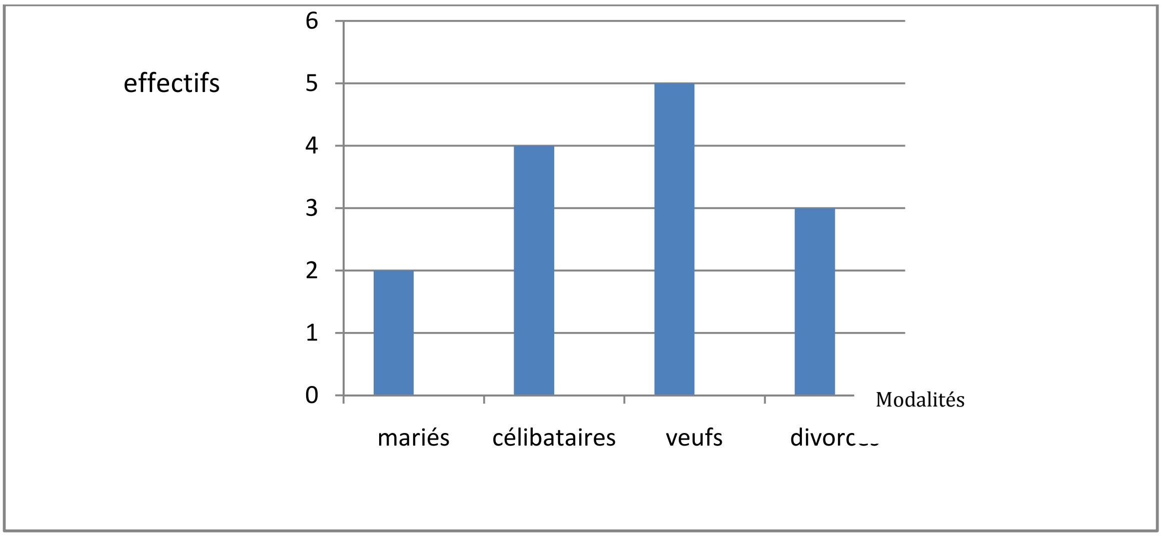
- $X_{min} = 10$, la plus petite valeur du caractère
- $X_{max} = 65$, la plus grande valeur du caractère

- les quartiles $Q_1=20$, $M_e=30$ et $Q_3=50$

IV-Représentations graphiques :

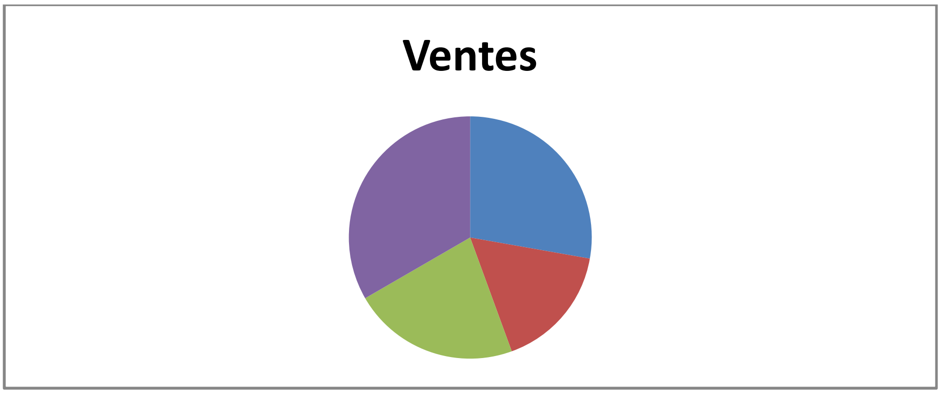
1) pour un caractère quantitatif

a) **Diagramme à bandes** : on place sur une droite horizontale les modalités du caractère et on porte sur un axe vertical les effectifs n_1 ou les fréquences fi . Chaque modalité est représentée par une bande verticale dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif de cette modalité



b) Diagramme circulaire ou diagramme à secteurs :

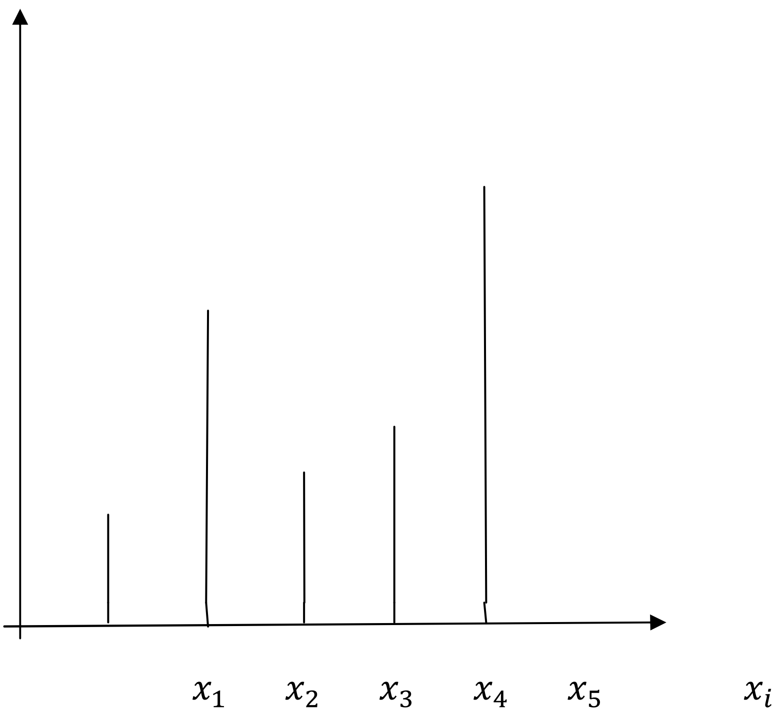
Un disque représente l'effectif total et chaque modalité est représentée par un secteur angulaire dont le sommet est le centre du disque et dont l'aire est proportionnelle à l'effectif n_i de cette modalité. La valeur $\alpha_i$de l'angle au centre de ce secteur est calculée : $\alpha_i = \frac{360\times n_i}{n}$ où n est l'effectif total



2) caractère quantitatif discret :

Diagramme en bâtons :

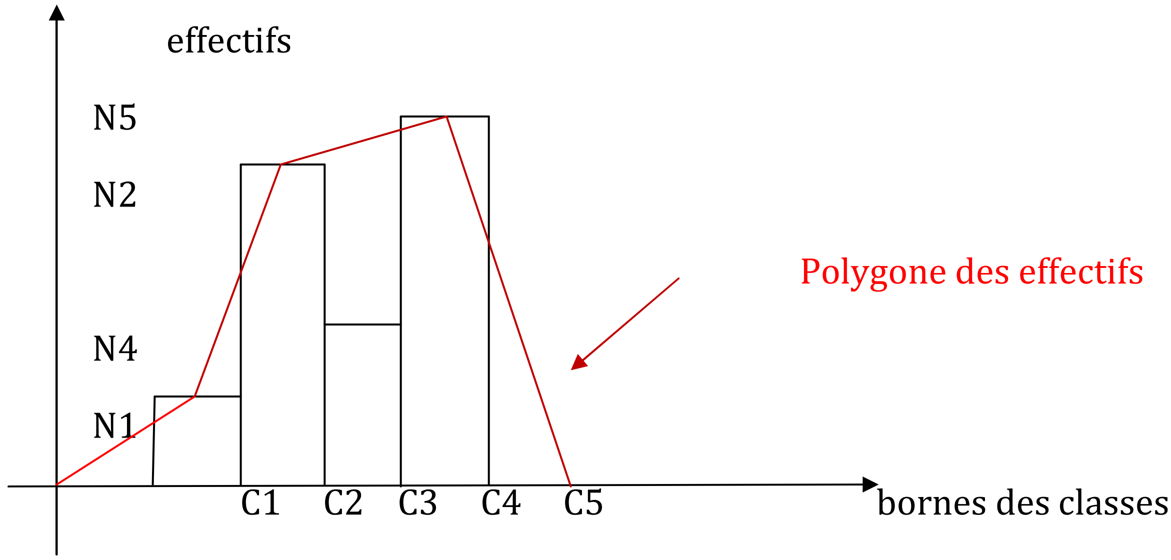
On met en abscisse les valeurs $x_{1,}x_{2,} \dots , x_k$ du caractère, rangées dans l'ordre croissant et en ordonnée les effectifs respectifs $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ de ces valeurs. On trace en $x_{1,}x_{2,} \dots , x_k$ des bâtons de hauteurs $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ (on peut mettre en ordonnée les fréquences $f_1,\ f_2, \dots\ ,\ f_k$



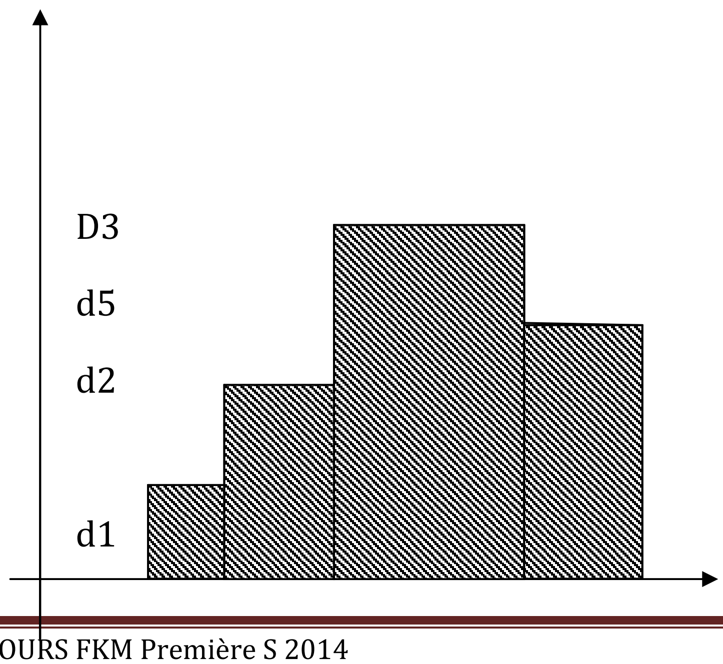
3) Caractère quantitatif continu :

a) <u>histogramme :</u> un histogramme est un ensemble de rectangles contigus, chaque rectangle représentant une classe et ayant une aire proportionnelle à l'effectif de cette classe.

- Dans le cas où les classes ont la même amplitude, chaque rectangle à pour base la classe correspondante et pour hauteur l'effectif de cette classe



- Dans le cas où les classes n'ont pas la meme amplitude, les bases des rectangles sont les classes et les hauteurs les densités d_i des classes



C1 C2 C3 C4 C5

b) Polygone des fréquences :

si les classes sont d'égale amplitude, le polygone des effectifs ou des fréquences est obtenu en joignant les milieux des bases supérieures des rectangles, puis en le fermant l'axe des abscisses en prenant une classe avant et une classe après toutes d'effectif nul

la surface située entre ce polygone et l'axe des abscisses est égale à l' aire totale de l'histogramme (somme des aires des rectangles)

Dans le cas où les classes n'ont même amplitude, on prendra soin à ce que la surface déterminée par ce polygone et l'axe des abscisses ait la même aire que l'histogramme

C) Courbe des effectifs cumulés (ou des fréquences cumulées) :

-la courbe des effectifs cumulés croissants est obtenue en joignant les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et dont les ordonnées sont les effectifs cumulés croissants correspondants

Exemple :

	[2,4[	[4,6[	[6,8[
Effectifs n_i	2	3	5
Effectifs cumulés	2	5	10

La courbe des effectifs cumulés croissants joint les points A(0,2), B(4,2), C(6,5), D(8,10)

- La courbe des fréquences cumulées croissantes est obtenue en joignant par des segments les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et dont les ordonnées sont les fréquences cumulées croissantes correspondantes et en fermant cette courbe sur l'axe des abscisses.
- La courbe des fréquences cumulées décroissantes est obtenue en joignant les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes et dont les ordonnées sont les fréquences cumulées décroissantes correspondantes.

V – **Détermination des quartiles :**

1) <u>Cas d'un caractère quantitatif discret</u> :

On range les valeurs x_i dans l'ordre croissant

- Si l'effectif total $n = 2p + 1$ est impair, la $(p+1)$ $ième$ valeur est la médiane

M_e= : Me= $xp + 1$

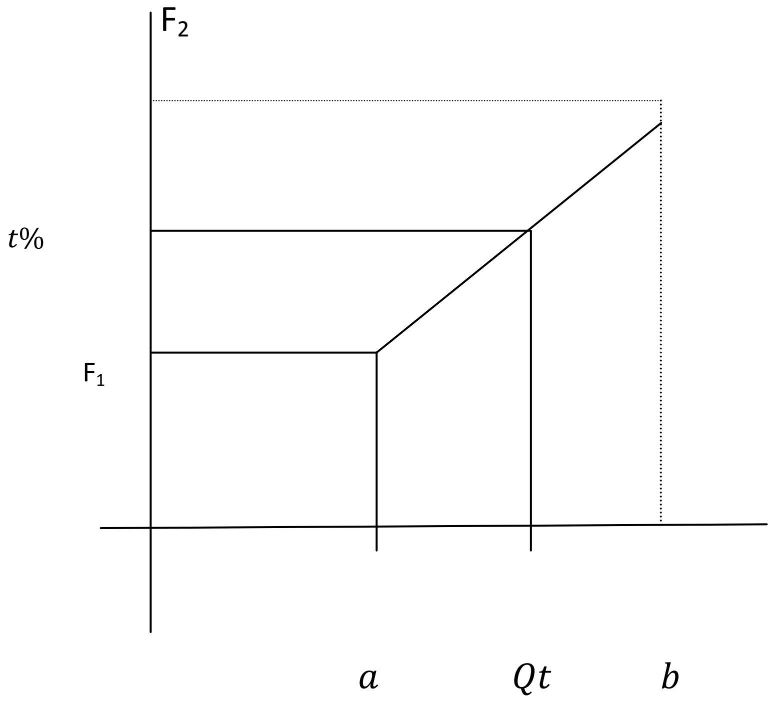
- Si l'effectif total $n = 2P$ est pair et si la $pième$ et la $(p+1)$ $ième$ valeur sont égales alors $Me = xp$
- Si l'effectif total $n = 2P$ est pair et $xp \neq xp + 1$, on convient de prendre Me= $\frac{x_{p+} x_{p+1}}{2}$

2) <u>Cas d'un caractère quantitatif continu :</u>

Pour calculer un quartile Qt d'ordre $t\%$, on détermine la classe $[a, b[$dans laquelle les fréquences cumulées croissantes atteignent $t\%$. Si F_1 est la fréquence cumulée croissante de la classe $[c, b[$ qui précède $[a, b[$et si F_2 est la fréquence cumulée croissante de la classe $[a, b[$, alors : $\frac{t-F_1}{Q_t - a}$ = $\frac{F_{2-F_1}}{b-a}$ avec comme hypothèse l'équirépartition des valeurs de chaque classe.

On obtient : $Qt = a + (b-a)\frac{t - F_1}{F_{2-F_1}}$

Si t= 25% alors $Qt = Q1$, si $t = 50\%$ alors $Qt = Q2$, si $t = 75\%$, $Qt = Q3$



Le segment [AB] correspond à la partie sur $[a, b[$ de la courbe des effectifs cumulés croissants

En exprimant de deux façons le coefficient directeur de (AB), on a $\frac{y_{M-}\, y_A}{x_{M-x_A}} = \frac{y_{B-}\, y_A}{x_{B-x_A}}$ ou encore $\frac{t - F_1}{Q_{t-a}} = \frac{F_{2-}\, F_1}{b-a}$ ou encore $\frac{Qt - a}{b_{-a}} = \frac{t_{-}\, F_1}{F_{2-}\, F_1}$

Remarque :

- le quartile Qt d'ordre $t\%$, graphiquement est l'abscisse du point M d'ordonnée $t\%$, sur le diagramme des fréquences cumulées croissantes
- Me est l'abscisse du point d'intersection de la courbe des effectifs cumulés croissants et de la courbe des effectifs cumulés décroissants (ou abscisse du point d'ordonnée l'effectif moitié sur chacune de ces courbes)
- Me est l'abscisse du point d'intersection de le courbe des fréquences cumulées croissantes et de la courbe des fréquences cumulées décroissantes (ou abscisse du point d'ordonnées 50% sur chacune de ces courbes)

SERIE STATISTIQUE DOUBLE

L'étude simultanée de deux caractères X et Y quantitatifs sur une même population d'effectif total n, donne une série statistique double qui est l'ensemble des triplets (x_i, y_j, n_{ij}) ,i allant de 1 à p, j allant de 1 à q, $x_1, x_2, \dots, x_p$ étant les valeurs du caractère X, $y_1, y_2, \dots, y_q$ étant les valeurs du caractère Y, n_{ij} étant l'effectif du couple (x_i, y_j) ou le nombre de fois que le couple(x_i, y_j) est observé

Remarque : X et Y peuvent être tous les deux quantitatifs discrets ou tous les deux quantitatifs continus, l'un quantitatif discret et l'autre quantitatif continu.

I-Série statistique double injective :

Lorsque X et Y ont le même nombre de valeurs ($p = q$) et que $n_{ij} = 1$ pour $i = j \; et \; n_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors on dit qu'on a une série statistique double injective, qu'on présente dans un tableau du type :

valeur x_i de X	x_1	x_2	…	x_P
Valeur y_j de Y	y_1	y_2	…	y_p

Les moyennes de X et Y sont alors : $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_P}{p}$; $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_p}{p}$

-les variances de X et Y sont alors :

$$v(x) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_p-\bar{x})^2}{p} = \frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_p}^2}{p} - \bar{x}^2$$

$$v(y) = \frac{(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots+(y_p-\bar{y})^2}{p} = \frac{{y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_p}^2}{p} - \bar{y}^2$$

II-tableau à double entrée ou tableau de contingence : c'est le tableau représentant une série double quelconque ensemble des triplets (x_i , y_j , n_{ij}) ; i allant de 1 à p, j allant de 1 à q

Valeur y_j de y → / valeur x_i de X ↓	y_1	y_2	…	y_q	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2q}	$n_{2.}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
x_p	n_{p1}	n_{p2}	…	n_{pq}	$n_{p.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.q}$	Effectif total n

Dans ce tableau : les valeurs de X sont : $x_1, x_2, \ldots, x_p$

Les valeurs de Y sont : $y_1, y_2, \ldots, y_q$

n_{11} est l'effectif du couple (x_1, y_1)

n_{21} est l'effectif du couple (x_2, y_1)

$\vdots$

n_{pq} est l'effectif du couple (x_p, y_q)

$n_{1.}$ est la somme des effectifs de la première ligne :

$n_{1.} = n_{11} + n_{12} + \cdots + n_{1q}$ est l'effectif de x_1

$n_{2.}$ est la somme des effectifs de la 2éme ligne :

$n_{2.} = n_{21} + n_{22} + \cdots + n_{2q}$ est l'effectifs de x_2

$\vdots$

$n_{p.}$ est la somme des effectifs de la $p^{iéme}$ ligne ou effectif de x_p

$n_{.1}$ est la somme des effectifs de la première colonne :

$n_{.1} = n_{11} + n_{21} + n_{31} + \cdots + n_{p1}$, $n_{.1}$ est l'effectif de y_1

$n_{.2}$ est la somme des effectifs de la $2^{éme}$ colonne :

$n_{.2} = n_{12} + n_{22} + n_{32} + \cdots + n_{p2}$, $n_{.2}$ est l'effectifs de y_2

$\vdots$…

$n_{.q}$ est la somme des effectifs de la $q^{iéme}$ colonne, $n_{.q}$ est l'effectif de y_q

1) Première série marginale X : On appelle première série marginale l'ensemble des couples $(x_i, n_{i.})$ ou série simple $\{(x_1, n_{1.}); (x_2, n_{2.}); \ldots; (x_p, n_{p.})\}$, correspondant au tableau suivant :

Valeur x_i de x	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	$n_{1.}$	$n_{2.}$	…	$n_{p.}$

La moyenne de X est alors : $\bar{x} = \frac{n_{1.}x_1 + n_{2.}x_2 + \cdots + n_{p.}x_p}{n_{1.} + n_{2.} + \cdots + n_{p.}}$

La variance de X est : $v(x) = \frac{n_{1.}(x_1 - \bar{x})^2 + n_{2.}(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_{p.}(x_p - \bar{x})^2}{n_{1.} + n_{2.} + \cdots + n_{p.}}$

$$v(x) = \frac{n_{1.}x_1^2+n_{2.}x_2^2+\cdots+n_{p.}x_p^2}{n_{1.}+n_{2.}+\cdots+n_{p.}} - \bar{x}^2$$

2)Deuxième série marginale Y : On appelle deuxième série marginale l'ensemble des couples $(y_j, n.j)$ ou série simple $\{(y_1, n.1); (y_2, n.2); \dots ; (y_q, n_{.q})\}$ correspondant au tableau suivant :

Valeur y_j de y	y_1	y_2	…	y_q
Effectif $n.j$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.q}$

La moyenne de Y est $\bar{y} = \frac{n_{.1}y_1+n_{.2}y_2+\cdots+n_{.q}y_q}{n_{.1}+n_{.2}+\cdots+n_{.q}}$

La variance de Y est :

$$v(y) = \frac{n_{.1}(y_1-\bar{y})^2 + n_{.2}(y_2-\bar{y})^2 + \cdots + n_{.q}(y_q-\bar{y})^2}{n_{.1}+n_{.2}+\cdots+n_{.q}}$$

$$v(y) = \frac{n_{.1}y_1^2+n_{.2}y_2^2+\cdots+n_{.q}y_q^2}{n_{.1}+n_{.2}+\cdots+n_{.q}} - \bar{y}^2$$

Remarque : la fréquence du couple $(x_{i,}y_i)$ d'effectif n_{ij} est $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$ où $n = n_{.1} + n_{.2} + \cdots + n_{.q}$

La fréquence de la valeur x_i de X est $f_{i.} = f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{iq}$

La fréquence de la valeur y_i de Y est $f_{.j} = f_{1j} + f_{2j} + \cdots + f_{pj}$

3) Séries conditionnelles :

a) séries conditionnelle de X sachant que $(y = y_j)$ ou lié par $(y = y_j)$:

C'est l'ensemble des couples : $\{(x_{1,}n_{1j}); (x_{2,}n_{2j}); \dots ; (x_{p,}n_{pj})\}$

Les valeurs sont celles de X et les effectifs ceux de la j$\acute{e}me$ colonne

La moyenne de cette série est :

$$\bar{x}_j = \frac{n_{1j}x_1 + n_{2j}x_2 + \cdots + n_{pj}x_p}{n_{1j}+n_{2j}+\cdots+n_{pj}}$$

b) Série conditionnelle de Y sachant que $(x = x_i)$ ou lié par $(x = x_i)$:

C'est l'ensemble des couples :$\{(y_{1,}n_{i1}); (y_{2,}n_{i2}); \dots; (y_{q,}n_{iq})\}$

Les valeurs sont celles de y et les effectifs ceux de la $iéme$ ligne

La moyenne de cette série est : $\bar{y}_i = \frac{n_{i1}y_{1+}n_{i2}y_{2+\cdots+}n_{iq}y_{q+}}{n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{iq}}$

c) fréquence conditionnelle de $(x = x_i)$ sachant que $(y = y_j)$:

On appelle fréquence conditionnelle de (X=x_i) sachant que $(y = y_j)$ ou lié par $(y = y_j)$ le nombre $f\left({}^{x_i}/_{y_j}\right) = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}$

d) fréquence conditionnelle de $(y = y_j)$ sachant que $(x = x_i)$:

On appelle fréquence conditionnelle de $(y = y_j)$ sachant que (X=x_i) ou lié par (X=x_i) le réel

$$f\left({}^{y_j}/_{x_i}\right) = \frac{n_{ij}}{n_{.i}}$$

On a : $\sum_{j=1}^{q} f\left({}^{y_j}/_{x_i}\right) = 1$ et $\sum_{i=1}^{p} f\left({}^{x_i}/_{y_j}\right) = 1$

On a :

$$\boxed{f_{ij} = f\left({}^{y_j}/_{x_i}\right) \times f_{i.} = f\left({}^{x_i}/_{y_j}\right) \times f_{.j}}$$

$\forall i \in \{1,2, \dots, q\}$ et $\forall j \in \{1,2; \dots, q\}$

Les caractères X et Y sont dits indépendants lorsque :

$\forall i \in \{1,2, \dots, p\}, \forall j \in \{1,2, \dots, q\}, f\left({}^{y_j}/_{x_i}\right) = f_{.j}$ ou $f\left({}^{x_i}/_{y_j}\right) = f_{i.}$

X et Y sont indépendants si et seulement si $f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j}$ ou $n_{ij} = \frac{n_{i.\times}n_{.j}}{n}$ où n est l'effectif total.

X et Y sont indépendants si et seulement si deux lignes quelconques du tableau à double entrée sont proportionnelles ou deux colonnes quelconques sont proportionnelles.

EXERCICES ET PROBLEMES

Exercice 1 :

Les populations suivantes peuvent-elles être utilisées pour une étude statistique, sans ambigüité ?

1) L'ensemble des habitants de Dakar.
2) L'ensemble des étudiants inscrits à l'université de Dakar en 2013.

Réponses :

1) L'ensemble des habitants de Dakar n'est pas une population définie car :
l'année n'est pas précisée
les individus qui sont immigrants a Dakar et qui y résident une partie seulement de l'année sont-ils réellement des habitants de Dakar ?
2) L'ensemble des étudiants de l'UCAD en 2013 est bien défini et peut être utilisé sans ambigüité pour une étude statistique car on connait de façon sure qui est ou n'est pas étudiant inscrit a l'UCAD en 2013.

Exercice 2 :

Dire parmi les caractères suivantes ceux qui sont qualitatifs et ceux qui sont quantitatifs :

le sexe, l'âge, la taille, le poids, la nationalité, la tension artérielle, la situation matrimoniale, le coefficient intellectuel.

Exercice3 :

Dire parmi les caractères suivants ceux qui peuvent être considérés comme discrets et ceux qui peuvent être considérés comme continus :

1) la taille des individus d'une population donnée
2) le coefficient intellectuel
3) la durée des appels d'un téléphone portable d'un individu durant une journée donnée
4) le nombre de candidats d'un jury de baccalauréat en 2013, au SENEGAL
5) les notes de mathématiques sur 20 , de l'ensemble des candidats au baccalauréat au Sénégal en 2013

Exercice 4 :

Déterminer f_4 dans le tableau suivant :

Modalités	**M_1**	**M_2**	**M_3**	**M_4**	**M_5**
Fréquences f_i	**0 ,11**	**0,31**	**0,13**	**0,25**	**f_4**

Exercice 5 :

Les individus d'une population sont regroupés en 6 classes $[C_i , C_{i+1}[$ d'égales amplitudes ayant pour centres respectifs : 22, 32, 42 , 52 , 62, et 72.

1) Quelle est l'amplitude **a** de chaque classe ?
2) Déterminer chacune de ces 6 classes
3) La moyenne de la série statistique correspondante peut-elle être égale à : 20 ? 84 ? 36 ?
4) La variance de cette série peut-elle être égale à : -18 ? 0.32 ?

Exercice 6 :

On donne le tableau statistique suivant :

Poids en kg	**30**	**40**	**60**	**80**	**90**	**100**
Effectifs	**10**	**20**	**10**	**30**	**40**	**n**

Déterminer l'effectif **n** sachant que la moyenne de cette série est 83,5kg.

<u>Exercice7 :</u>

On donne le tableau statistique suivant :

Taille en cm	**[160, 170[**	**[170,180[**	**[180,190[**	**[190,200[**	**Plus de 200**
effectifs	**40**	**30**	**10**	**5**	**2**

1) Quelle est la dernière classe sachant que toutes les classes ont la même amplitude ?
2) Quelle est en pourcentage, la proportion d'individus mesurant au moins de 185 cm ?
3) Quelle est en pourcentage, la proportion d'individus mesurant plus de 200 cm ?

<u>Exercice8 :</u>

Une étude statistique a porté sur les notes sur 20, en mathématiques obtenues par 50 candidats à un examen :

10	**8**	**7**	**14**	**15**	**16**	**12**	**9**	**11**
13	**11**	**12**	**6**	**5**	**13**	**14**	**12**	**19**
11	**18**	**6**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**	**8**
13	**14**	**15**	**8**	**8**	**8**	**10**	**10**	**11**
11	**12**	**13**	**14**	**9**	**10**	**6**	**18**	**7**
4	**4**	**5**	**5**	**10**				

1) Regrouper ces 50 notes dans des classes d'égale amplitude 2 et dresser le tableau statistique contenant les classes, les milieux x_i des classes, les effectifs, les effectifs cumulés croissants, les effectifs cumulés décroissants.
2) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série
3) Construire l'histogramme de cette série

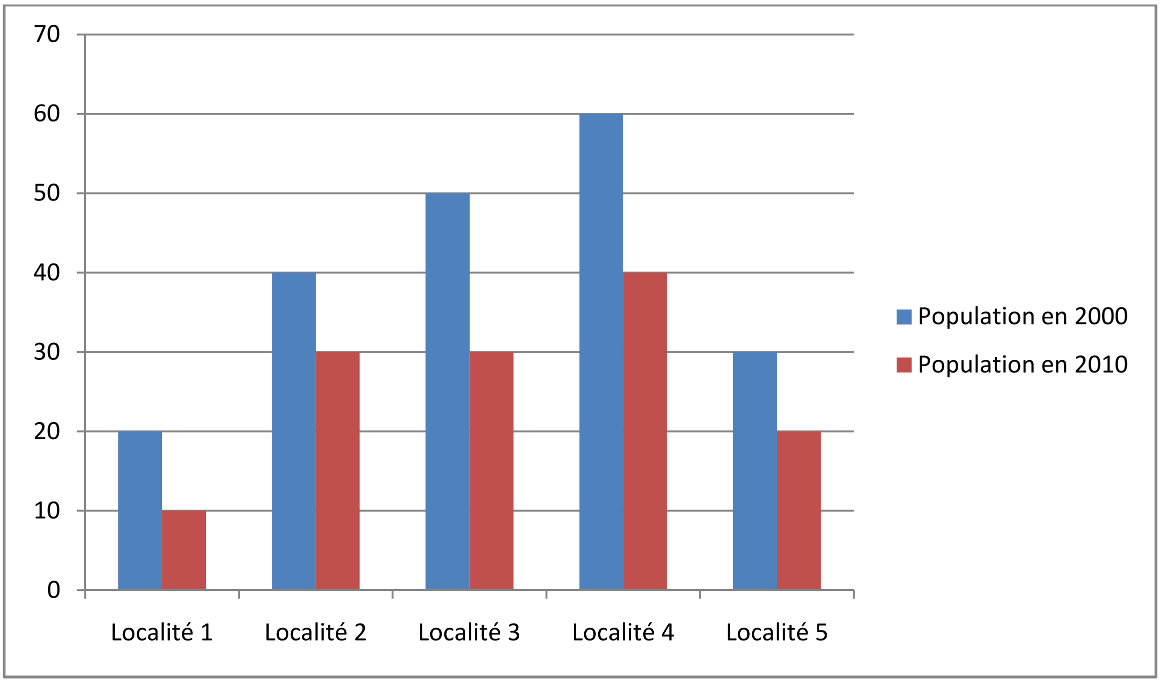
4) Quel est le nombre de candidats ayant obtenu une note strictement supérieure à 15 ?

5) Quel est le nombre de candidats ayant obtenu une note au moins égale à 10 ?

6) Quel est le nombre de candidats ayant obtenu une note appartenant à] 5,20[?

Exercice 10 :

Lors d'une étude sur les populations en milliers d'habitants de certaines localités du Sénégal, en 2000 et en 2010, on a obtenu le diagramme à bandes suivant :

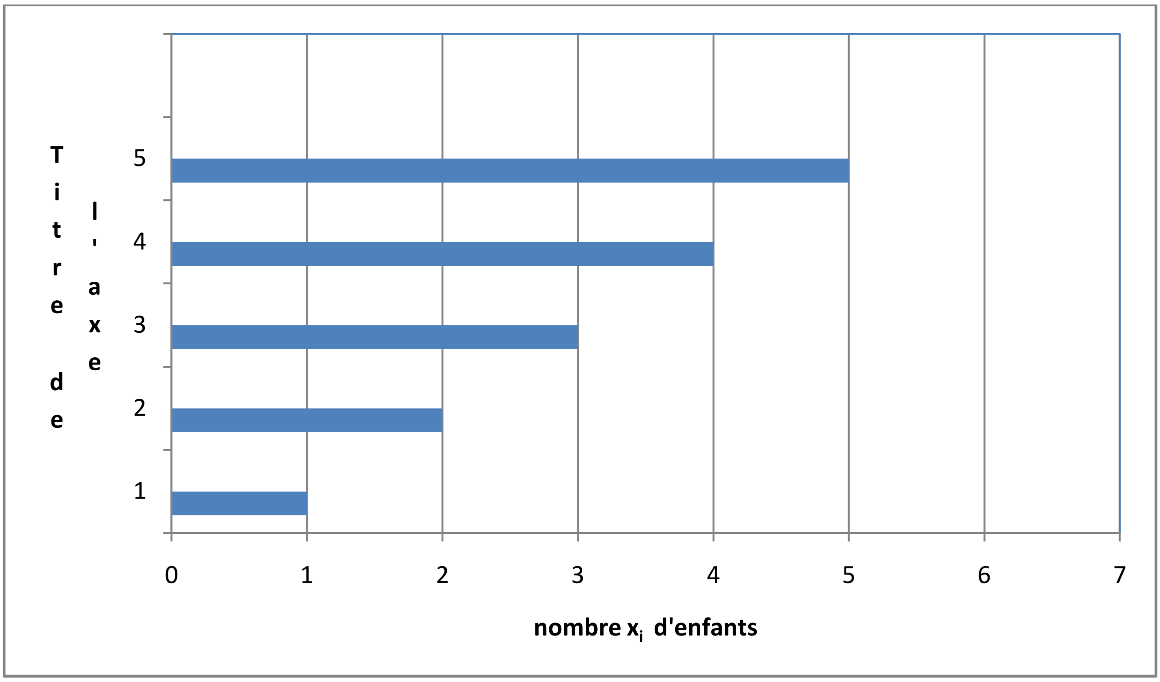


Cette étude avait pour objectif d'étudier l'effet de l'exode sur les populations rurales.

Quelles sont les localités qui ont le plus souffert de l'exode rural ?

Exercice 11

On considère une population de 20 familles, une étude statistique sur le nombre d'enfants de chaque famille a donné le diagramme en bâtons suivants :



1) Quels sont les individus de la population ?
2) Quel est :
a- Le caractère étudié ?
b- L'effectif total ?
c- Les valeurs x_i du caractère ?
d- Les effectifs partiels ?
e- Le mode de cette série ?
3) Dresser le tableau des effectifs
4) Calculer et interpréter la moyenne $\bar{x}$, puis la variance V(X).
5) Déterminer les quartiles Q_1, Q_2, et Q_3 de cette série statistique et en construire le diagramme en boite
6) Calculer le coefficient de variation , l'écart absolu moyen par rapport à la moyenne , l'écart interquartile

Exercice 11 :

On considère le tableau statistique suivant

Classes	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20 ,25[
Effectifs	10	20	10	5	5

1) Construire l'histogramme des fréquences correspondant à ce tableau statistique et le polygone des fréquences

2) Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes et la courbe des fréquences cumulées décroissantes

Donner par lecture graphique la médiane M_e de cette série statistique

3) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type б de cette série statistique

4) Déterminer par le calcul les quartiles de cette série statistique

Exercice 12 :

On considère le tableau statistique suivant :

Classes	[0, 4[	[4,6[	[6 ,8[	[8,12[	[12,17[
Effectifs n_i	20	10	5	5	10

1) Calculer l'amplitude a_i et la densité d_i de chaque classe $[C_i, C_{i+1}[$
2) Construire l'histogramme des effectifs de cette série statistique
3) Quelle est la classe modale ?
4) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la variance V(X) de cette série statistique.
5) Déterminer par le calcul les quartiles de cette série statistique

Exercice13 :

Lors d'un test comprenant 10 questions notées chacune sur 10, un candidat a obtenu les 10 notes suivantes : 3, 5, 9, 9, 9, 10, 7, 8, 3, 6

1) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de ce candidat
2) Déterminer la note médiane

Exercice 14 :

On considère 5 terrains carrés de cotés respectifs 5cm, 6cm, 6cm, 8cm, et 10cm.

1) Déterminer l'aire moyenne de ces terrains et en déduire le coté moyen $\bar{C}$ à 10^{-2} près par excès

2) Calculer le coté moyen $\bar{C}$ d'une autre façon

3) Déterminer le coté médian de ces terrains

Exercices 15 :

On donne le tableau statistique suivant

x_i	1	2	4	5	6	8	9	10
n_i	10	12	11	13	15	20	14	5

Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance V(X) et la médiane de cette série statistique

Exercice 16 :

Soit le tableau statistique suivant :

Classes	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[
Effectifs	10	20	10	5	5

1) Déterminer la classe nodale

2) Calculer les quartiles de cette série statistique

Exercice 17 :

Sur 5 devoirs de mathématiques un élève a obtenu la moyenne de 13 sur 20. Lors d'un 6ème devoir , cet élève a obtenu la note de 17 sur 20

Quelle est la moyenne de cet élève sur l'ensemble des 6 devoirs ?

Exercice 18 :

la moyenne de 3 devoirs d'un élève est de 12 sur 20, la moyenne de 2 autres devoirs de cet élève est de 13 sur 20. Quelle est la moyenne de cet élève sur l'ensemble des 5 notes ?

Exercice 19 :

On considère le tableau statistique suivant :

x_i	200	300	500	600	800	900	1000	1200
n_i	10	15	15	20	5	8	12	15

On pose $y_i = x_i - 700$

1) Calculer $\bar{y}$ et en déduire $\bar{x}$
2) Calculer la variance V(Y) et en déduire la variance V(X)

Exercice 20 :

Lors de l'étude d'un caractère quantitatif X sur une population donnée, une première série de 7 observations a donné une moyenne de 5 et une variance de 6.

Une 2ème série de 13 observations a donné une moyenne de 6 et une variance de 8

Les 7 valeurs de X lors de la première série d'observation sont notées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 et x_7 et les valeurs de X lors de le 2ème série d'observations sont notées x_8 , x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16} , x_{17}, x_{18}, x_{19} et x_{20}

1) En utilisant la formule de Koenig pour chaque série d'observations montrer que : $\sum_{i=1}^{7} x_i^2=217$ et $\sum_{i=8}^{20} x_i^2 = 572$

2) Montrer que la moyenne de X est $\frac{113}{20}$

3) Montrer que la variance de X est de $V(X) = \frac{3011}{400}$

Exercice 21 :

On donne le tableau statistique suivant :

x_i	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
n_i	130	350	210	130	90	50	30	10

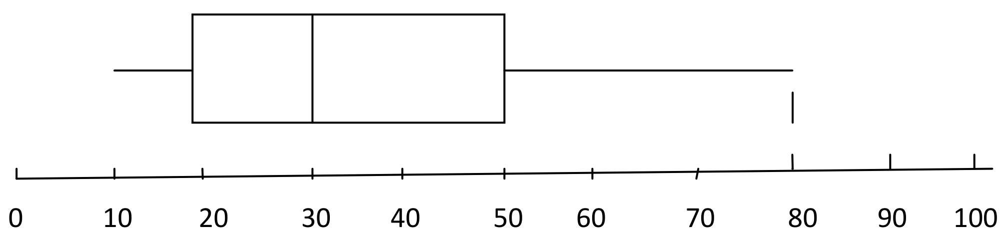
On pose $y_i = \frac{xi-2500}{500}$ pour i allant de 1 à 8.

1) Dresser le tableau statistique de la série statistique des (y_i ,n_i) pour i allant de 1 à 8 .
2) Calculer le moyenne $\bar{y}$ de la série des (y_i , n_i) et en déduire $\bar{x}$ de la série des (x_i ,n_i)
3) Calculer la variance V(Y) et en déduire la variance V(X).
4) Déterminer la médiane de la série des (x_i, n_i)
5) Calculer l'écart absolu moyen de la série des (x_i , n_i), par rapport à la moyenne $\bar{x}$
6) Calculer l'écart absolu moyen de la série des (x_i , n_i), par rapport à la médiane

M_2

Exercice 22 :

On considère la boite moustaches suivante :



Déterminer :

1) La plus petite et la plus grande valeur du caractère
2) L'étendue de la série

3) Les quartiles de cette série
4) L'intervalle interquartile

Exercice 23 :

Une étude sur le nombre d'années d'exercices X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs a donné les résultats indiqués dans le tableau ci –dessous

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de 1ère série marginale X soit $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et la moyenne de la 2ème série marginale Y soit $\bar{y} = \frac{8450}{59}$
2) Donner les valeurs n_{11} , n_{36} , n_5 , n_4
3) Donner l'effectif total N de cette série statistique double
4) a- Etablir le tableau des effectifs de le première série marginale X et celui de la deuxième
série marginale Y
b- calculer les variances marginales V(X) et V(Y)
5) Calculer :
a- Le salaire moyen m_1 des ouvriers qui ont 2 années d'exercices
b- La fréquence du salaire 125 milles francs sachant que c'est lui d'un ouvrier qui a 6 ans d'exercices
c- La fréquence des ouvriers qui ont 18ans d'exercices sachant qu'ils ont un salaire de 175 milles francs
d- Le nombre moyen d'années d'exercices des ouvriers qui ont un salaire de 225 milles francs
e- Calculer la fréquence des individus qui ont 6 ans d'exercices et un salaire de 125 milles francs

f- Dresser le tableau statistique de la série conditionnelle $Y/_{X} = x_2$ et celui de la série conditionnelle $X/_{Y} = y_3$

Exercice 24 :

1) Compléter le tableau suivant :

X \ y	3	6	7	8	Total
2	5	4			16
3		3	4	3	
4	3	5	2		12
Total	10		11		40

2) Calculer $f\frac{x_2}{y_2}$, $f_{.2}$,$f_{.3}$,$f\frac{y_3}{x_1}$, f_{23} et f_{32}

3) X et Y sont-ils indépendants?

Exercice25 :

Compléter le tableau des fréquences suivant sachant que X et Y sont indépendants.

X \ Y	10	30	40	50	Total
2					0,45
3					0,55
Total	0,1	0,3	0,4	0,2	1

Exercice26:

Remplir le tableau des effectifs suivants sachant que X et Y sont indépendants:

X \ Y	12	13	15
5	8	12	2
7		24	
8			5

Exercice27: On donne le tableau suivant :

X \ Y	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[
[0,4[	2	5	2	0	0
[4 ,8[	1	12	10	3	0
[8,12[	0	3	28	12	1
[12 ,16[	0	1	5	10	2
[16,20[	0	0	0	1	2

1) Représenter graphiquement la série statistique double (X, Y) par un nuage de points $M_{ij}(x_i,y_j)$ pondère par n_{ij}

2) Déterminer les séries marginales X et Y et calculer les moyennes marginales $\overline{x}$ et $\overline{y}$ et les variances marginales V (X) et V (Y)

3) Déterminer les distributions conditionnelles de X liées par Y

Déterminer les distributions conditionnelles de Y liées par X

Calculer toutes les moyennes et toutes les variances conditionnelles.

4) Déterminer la distribution des moyennes conditionnelles m_i de Y liées par X.

Calculer sa moyenne et sa variance

5) Déterminer la distribution des variances conditionnelles $\mathcal{V}_i$ de Y liées par X et calculer sa moyenne.

CHAPITRE 14 : Les transformations du plan

1. GENERALITES

1.1 Définitions

Une **transformation** f du plan est une **bijection** du plan $\mathscr{P}$ vers lui-même, c'est-à-dire que tout point M' du plan est l'image par f d'un point M unique.

$$f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$M \mapsto M' = f(M)$$

Cela revient aussi à dire que tout point *M* du plan a un, et un seul, antécédent par f. On appelle **transformation réciproque** de f la fonction qui, à tout point du plan, associe cet unique antécédent ; elle est notée f^{-1}.

$$M \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M'$$

Un point M est dit **invariant** (ou **fixe**) par la transformation f si et seulement si $f(M) = M$.

Une figure $\mathscr{F}$ (un ensemble de points quelconque, ça peut être une droite, un cercle, un parallélogramme, …) est dite **invariante** par la transformation f si et seulement si :

pour tout point M de $\mathscr{F}$, son image $M' = f(M)$ par f appartient aussi à $\mathscr{F}$.

N.B On appelle **image d'une figure par une transformation** l'ensemble des images de tous les points de la figure. C'est l'ensemble des points de la forme f(M) lorsque M décrit $\mathscr{F}$:

$$f(\mathscr{F}) = \{f(M),\ M \in \mathscr{F}\}$$

On dit qu'une figure $\mathscr{F}$ est **globalement invariante** par la transformation f si et seulement si $f(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.

<u>Remarque</u> : Dire que $\mathscr{F}$ est globalement invariante par f ne signifie pas que tous les points de $\mathscr{F}$ sont fixes par f.

• Un segment [AB] est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de [AB],mais seul le milieu de [AB] est un point fixe par cette transformation.

• Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors que cette transformation n'a aucun point fixe.

<u>Définition</u> : La transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la transformation identique ou l'identité et se note $Id_{\mathscr{P}}$ ou Id :

<u>Remarque</u> : Pour cette transformation, tous les points sont invariants.

1.2 Composition

Soient $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$, $M \mapsto f(M)$ et $g : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$, $M \mapsto g(M)$ deux transformations.

La **composée** (f ∘ g) est l'application :

$$f \circ g : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$

$$M \mapsto M' = f[g(M)]$$

<u>Théorème</u> : (f ∘ g) est une transformation du plan et sa réciproque est :

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

<u>Démonstration</u> : Soit M un point quelconque du plan. Posons

$$M' = g(M) \text{ et } M'' = f[M'].$$

Alors $(f \circ g)(M) = M''$. On a $M' = f^{-1}(M'')$ et $M = g^{-1}(M')$, d'où :

$M = g^{-1}[f^{-1}(M'')] = (g^{-1} \circ f^{-1})(M'')$. Il en résulte que : $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

<u>Remarques</u> :

• Si f, g et h sont trois transformations : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

• En général $g \circ f \neq f \circ g$. Lorsque $g \circ f = f \circ g$, on dit que les transformations f et g **commutent**.

2. TRANSFORMATIONS USUELLES

2.1 Translation

a) Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application notée $t_{\vec{u}} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$

$$M \to M'$$

Le point M a pour image M' par la translation de vecteur $\vec{u}$ ($t_{\vec{u}} : M \to M'$) signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b) Point invariant :

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant (un point M est invariant par f s'il est confondu avec son image par f.)

• •Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point du plan est invariant ; $t_{\vec{0}}$ est l'application identique du plan

c) Théorème :

La translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation du plan et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Démonstration : Si M' = $t_{\vec{u}}$ (M), alors on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, d'où $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, donc

$$M = t_{-\vec{u}}(M')$$

d) Propriété fondamentale

Soient A et B deux points du plan d'images respectives A' et B' par la translation $t_{\vec{u}}$. Alors, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Démonstration : D'après la relation de CHASLES, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$.

Or, puisque A' = $t_{\vec{u}}$(A), on a : $\overrightarrow{A'A} = -\vec{u}$ et puisque B' = $t_{\vec{u}}$(B), on a : $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.

D'où : $\overrightarrow{A'B'} = -\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

e) Conséquences de la propriété fondamentale

C.1 : L'image d'une droite D par une translation est une droite D' parallèle à D.

C.2 : La translation conserve les distances c'est-à-dire que si $\begin{cases} \text{A'} = t_{\vec{u}}(\text{A}) \\ \text{B'} = t_{\vec{u}}(\text{B})' \end{cases}$ alors on a : A'B' = AB. On dit que c'est une isométrie.

C.3 : L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon.

C.4 : Une translation conserve les barycentres, c'est-à-dire que :

si G = bar {(A, a) (B, b)} (avec $a + b \neq 0$) et si $\begin{cases} \text{A'} = t_{\vec{u}}(\text{A}) \\ \text{B'} = t_{\vec{u}}(\text{B}) \\ \text{G'} = t_{\vec{u}}(\text{G}) \end{cases}$, alors G' = bar {(A', a) (B', b)}.

Démonstration :

C.1 Soit M un point de la droite (AB).Alors, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Mais d'après le propriété fondamentale, on alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, d'où : $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$ et par conséquent M' ∈ (A'B').

Réciproquement, soit N_1 un point de (A'B') et N le point tel que $t_{\vec{u}}$ (N) = N_1.

On a $\overrightarrow{A'N_1} = \lambda\,\overrightarrow{A'B'}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), D'où (propriété fondamentale) : $\overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, donc

N ∈ (AB).

C.2 D'après la propriété fondamentale, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, d'où : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, soit A'B' = AB.

C.3 Soit $\mathscr{C}$ (O, R) le cercle de centre O et de rayon R. Soit M ∈ $\mathscr{C}$. On a d'après C.2 : O'M' = OM = r. D'où M' ∈ $\mathscr{C}$ (O', R) avec M' = $t_{\vec{u}}$ (O).

Réciproquement, soit N_1 ∈ $\mathscr{C}$ (O', R). Il existe N ∈ $\mathscr{P}$ tel que $t_{\vec{u}}$ (N) = N_1.

D'où, comme $t_{\vec{u}}$ (O) = O', ON = O'N_1 = R ⟹ N ∈ $\mathscr{C}$ (O, R) $\mathscr{C}$ (O, R).

Il en résulte que $t_{\vec{u}}$($\mathscr{C}$ (O, R)) = $\mathscr{C}$ (O', R).

C.4 Soit G le barycentre du système {(A, a) (B, b)}. On a (cf. chapitre sur les barycentres) : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, d'où d'après la propriété fondamentale,

$\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow (a+b)\,\overrightarrow{A'G'} = b\,(\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{G'B'}) \Leftrightarrow a\,\overrightarrow{G'A'} + b\,\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$.

<u>f) Expression analytique</u>

Lae plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Soit M le point de coordonnées (x, y), $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (a, b) et M' = $t_{\vec{u}}$(M).

On a alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, ce qui, en termes de coordonnées, se traduit par :

$\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$, x' et y' étant les coordonnées de M' dans (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Le dernier système constitue une définition analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.

Exemples : Reconnaitre les applications de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ définies analytiquement par :

$f\begin{cases} x' = x + 7 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ $\quad g\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 8 \end{cases}$ $\quad h\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

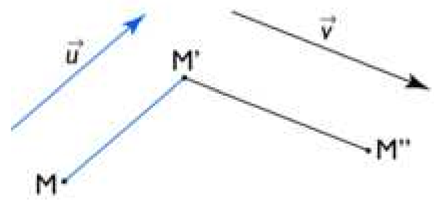
<u>Réponses</u> : f est la translation de vecteur $\vec{u}$ $(7, -1)$; g est la translation de vecteur $\vec{u}$ $(0, -8)$; h n'est pas un translation.

<u>g) Composée de deux translations</u>

<u>Théorème</u> : La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$. Cette composée est commutative (i. e $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$).

<u>Démonstration</u> : Soit M $\xrightarrow{t_{\vec{v}}}$ M' $\xrightarrow{t_{\vec{u}}}$ M''. On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{u}$.

D’où, d’après la relation de CHASLES, $\overrightarrow{MM''} = \vec{v} + \vec{u}$.



2.2 Homothéties

a) Définition

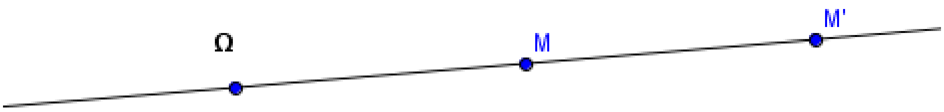
Soit k un réel non nul et Ω un point du plan. L’**homothétie** de centre Ω et de rapport k est l’application $h_{\Omega,k}$ de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ définie par :

$$h_{\Omega,k} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

M’ est tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$ (1).

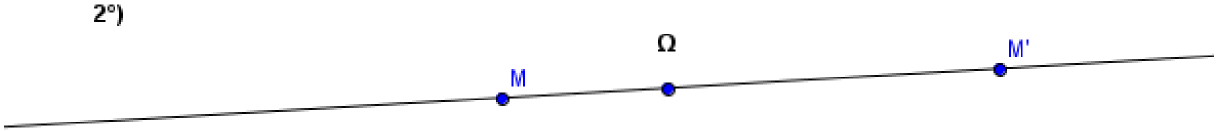
Exemples :

1°)



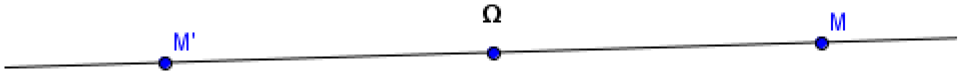
$$M' = h_{\Omega,2}(M)$$

2°)



$$M' = h_{\Omega,-2}(M)$$

3°)



$M' = h_{\Omega,-1}(M)$

Remarques : • Ω, M et M' sont toujours alignés.

• $h_{\Omega,-1}$ est la symétrie centrale de centre Ω.

• $h_{\Omega,1}$est l'identité du plan (M' = M).

b) Points invariants

Un point M est invariant par $h_{\Omega,k}$ si et seulement si $h_{\Omega,k}$(M) = M, soit M' = M ou encore $\overrightarrow{\Omega M} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

1er cas : Si $k = 1$: Alors tout point M est invariant.

2ème cas : Si k ≠ 1 : On a alors $(1 - k)\,\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$, ou encore $\Omega = \text{M}$.

Dans ce cas, Ω est le seul point invariant.

Théorème : Toute homothétie $h_{\Omega,k}$ est une transformation du plan (i.e. une bijection) et la transformation réciproque est $h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.

Démonstration : Si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$, alors $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{\Omega M'}$, donc M est l'image de M' par $h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.

c) Propriété fondamentale

Si $\begin{cases} A' = h_{\Omega,k}(M) \\ B' = h_{\Omega,k}(B) \end{cases}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Démonstration : On a par hypothèse : $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A'} = k\,\overrightarrow{\Omega A} & (1) \\ \overrightarrow{\Omega B'} = k\,\overrightarrow{\Omega B} & (2) \end{cases}$,k d'où par différence

(2) – (1) et en utilisant la relation de CHASLES : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

d) Conséquences

C.1 : L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
C.2 : Une homothétie de rapport k transforme un segment de longueur $\boldsymbol{\ell}$ en un segment de longueur $|k| \times \boldsymbol{\ell}$.
C.3 : $h_{\Omega,k}$ transforme le cercle $\mathscr{C}$(O, R) en le cercle $\mathscr{C}$(O', $|k| \times$ R) avec O' = $h_{\Omega,k}$(O).
C.4 : Une homothétie conserve le barycentre.

Démonstration :

C.1 : Soit M un point de la droite (AB). Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, ce qui entraîne en multipliant les deux membres par k :

$k\,\overrightarrow{AM} = t(k\,\overrightarrow{AB}\,)$. Or, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ et

$\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. On en déduit que M' ∈ (A'B').

Réciproquement, si M' est un point de la droite (A'B'), on a $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$ pour un certain réel t et en multipliant les deux membres par $\frac{1}{k}$, on démontre de même que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Il en résulte que h((AB)) = (A'B') et on a (A'B') // (AB) puisque, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

C.2 : Si AB = $\boldsymbol{\ell}$, alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \boldsymbol{\ell}$. Or, d'après la propriété fondamentale, $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, donc : A'B'= $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|k\,\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \times \boldsymbol{\ell}$.

C.3 : Si M ∈ $\mathscr{C}$(O, R), on a OM = R, d'où d'après 2°, O'M' = $|k|$R, donc M' ∈ $\mathscr{C}$(O', $|k|$R). Réciproquement, si M' ∈ $\mathscr{C}$(O', $|k|$R), on a O'M' = $|k|$R.

Or O'M' = $|k|$OM, d'après C.2, donc : $|k|$OM = $|k|$R $\Longrightarrow$ OM = R $\Longrightarrow$ M $\in \mathscr{C}$(O, R)

<u>C.4</u> : Au cours de la preuve de C.1, nous avons établi au passage la propriété suivante : « ***Si A, B et C sont trois points du plan d'images respectives A', B' et C' par $h_{\Omega,k}$ et si $\overrightarrow{AB}$ = t $\overrightarrow{AC}$, alors on a également $\overrightarrow{A'B'}$ = t $\overrightarrow{A'C'}$*** ».

On traduit cette propriété, d'ailleurs également vraie pour une translation $t_{\vec{u}}$ en disant que $h_{\Omega,k}$ est une **application affine**.

On va s'appuyer sur cela pour prouver C.4. En effet, si G est le barycentre du système {(A, a) ; (B, b)}, alors on a d'après les propriétés barycentriques :

$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, d'où puisque $h_{\Omega,k}$ est une application affine, $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{A'B'}$, puis en utilisant la relation de CHASLES, on en déduit facilement (introduire G' dans $\overrightarrow{A'B'}$) que G' est le barycentre du système {(A', a) ; (B', b)}.

Il en résulte en particulier qu'une homothétie $h_{\Omega,k}$ **conserve les milieux**, en ce sens que si un point I est le milieu du segment [AB], alors I' = $h_{\Omega,k}$(I) est le milieu du segment [A'B'], avec A' = $h_{\Omega,k}$(A) et B' = $h_{\Omega,k}$(B).

<u>e) Composée de deux homothéties de même centre</u>

<u>Théorème</u> : La composée de deux homothéties h_{Ω,k_1} et h_{Ω,k_2} de même centre Ω est commutative et est l'homothétie de centre Ω et de rapport k_1k_2 :

$$h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,k_2} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,k_1k_2}$$

<u>Démonstration</u> : Soit M $\xrightarrow{h_{\Omega,k_2}}$ $M_1 \xrightarrow{h_{\Omega,k_1}}$ M'.

Si $M_1 = h_{\Omega,k_2}$ (M) et M' = h_{Ω,k_1} (M_1), on a : $\overrightarrow{\Omega M_1} = k_2\,\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = k_1\overrightarrow{\Omega M_1}$, d'où $\overrightarrow{\Omega M'} = k_1(k_2\,\overrightarrow{\Omega M}) = k_1k_2\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Donc M' = h_{Ω,k_1k_2}(M).

N.B. La composée de deux homothéties de centres différents sera étudiée en exercice (voir plus bas).

f) Expression analytique

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) . Soit M($x, y$), Ω($a$, b) et M' (x', y') l'image de M par $h_{\Omega,k}$. L'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ se traduit, en termes de coordonnées, par le système :

$$\begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - a = k(y - a) \end{cases}$$

équivalent à : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = k(x - a) + a} \\ \boldsymbol{y' = k(y - a) + b} \end{cases}$

Ce dernier système est une définition analytique de l'homothétie $h_{\Omega,k}$.

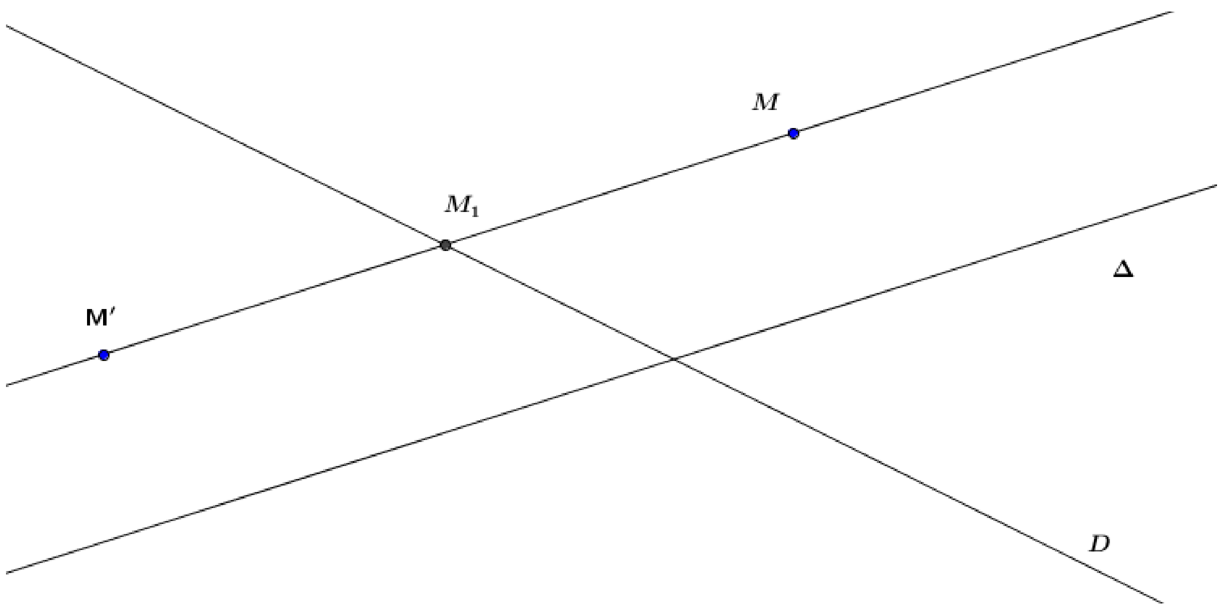
2.3 Symétries axiales

a) Définition

Soient D et Δ deux droites non parallèles. La symétrie d'axe D et de direction Δ est l'application S : $\mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ M $\longmapsto$ M'

M' est défini de la manière suivante : « *Soit M_1 l'intersection de D avec la parallèle à Δ passant par M. Alors M' est le symétrique de M par rapport à M_1.* »



Cas particulier : Si D et Δ sont perpendiculaires, on parle de **symétrie orthogonale** ou **réflexion** d'axe D.

b) Réflexion

Définition : Le point M a pour image M' par la réflexion d'axe Δ ($s_{(\Delta)} : M \longmapsto M'$) signifie que :

- Si $M \notin (\Delta)$, Δ est la médiatrice de $[MM']$
- Si $M \in (\Delta)$, $M = M'$

Point invariant : Les points invariants de $s_{(\Delta)}$ sont les points de Δ.

c) Propriétés

P.1 Toute symétrie axiale S est une transformation du plan (c'est-à-dire une bijection) et sa réciproque est $S^{-1} = S$.

(On traduit cette propriété en disant que S est involutive. On a donc: $S \circ S = Id_{\mathscr{P}}$)

P.2 L'image d'une droite est une droite.

P.3 Toute réflexion est une isométrie : en particulier ;l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

2.4 Rotation

a) Définition

Soit O un point donné du plan et α un réel donné.

Le point M a pour image le point M' par la **rotation de centre *O* et d'angle α** ($r_{(O,\alpha)} : M \rightarrow M'$) signifie que

- Si $M \neq O$ alors $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \alpha\ [2\pi]$
- Si $M = O$ alors $M = M'$

Le point O et le réel α sont appelés **éléments caractéristiques** de $r_{(O,\alpha)}$

b) Cas particuliers

$r_{(O,0)}$ est l'application identique du plan. (rotation d'angle nul)

$r_{(O,\pi)}$ (rotation de centre O et d'angle π) est la symétrie centrale de centre O.

c) Point invariant :

- Si $\alpha \neq 0 + 2k\pi$ alors le centre O est le seul point invariant

- Si $\alpha = 0 + 2k\pi$, alors tout point du plan est invariant ;

d) Transformation réciproque : comme $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}) = -\alpha$, $r_{(O,\alpha)}$ est bijective. La transformation réciproque de $r_{(O,\alpha)}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ et $r_{(O,\alpha)}^{-1} = r_{(O,-\alpha)}$

Cas particulier : la est la symétrie de centre O.

3. Propriétés des transformations

Nous admettons tous les résultats ci-dessous :

a) Isométrie

Donnons d'abord la définition d'une isométrie :

Soit f une application du plan dans lui-même.
On dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a MN = M'N'.

- Les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries

  Elles conservent les distances et donc les aires et les volumes.

- Si $k \notin \{-1;1\}$ alors l'homothétie $h_{(O,k)}$ n'est pas une isométrie, les distances sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$

b) Image d'un point d'intersection de deux figures

Soit une transformation f, deux figures F_1 et F_2 se coupant en M.

Alors M', image de M par la transformation f, est l'intersection des figures $F_1' = f(F_1)$ et $F_2' = f(F_2)$

c) Images de points alignés

Théorème : Soient A, B et C trois points et λ un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. A', B' et C' leurs images respectives par une translation, une réflexion, une rotation ou une homothétie alors $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$.

N.B : On exprime ces propriétés en disant que ces transformations sont des applications affines.

Conséquences : - L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$ ($\lambda = \frac{1}{2}$)

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ ($\lambda \in [0;1]$)

- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

d) Images de figure usuelles

Par une translation, une réflexion, une homothétie ou une rotation, l'image d'une figure F (droite, triangle, cercle, parallélogramme, losange, rectangle, carré, etc ...) est une figure F' de même nature.

Notamment, si f est l'une de ces transformations, on a les résultats suivants :

1. l'image du segment [AB] est le segment [f (A)f (B)]

2. l'image de la droite (AB) est la droite (f (A) f (B))

3. l'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre f (Ω) et de rayon R (ou $|k|$R dans le cas d'une homothétie).

Ces transformations conservent :

• le parallélisme : Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.

• l'orthogonalité : Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

• les angles géométriques : Si A’ = f (A); B’ = f (B) et C’ = f (C): $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

• le contact entre figures (tangentes) : Si une droite $\mathscr{D}$ est tangente à un cercle $\mathscr{C}$ en A, son image D’ par f est tangente à $\mathscr{C}$ ‘ = f($\mathscr{C}$) en A’ = f(A).

Une translation, une rotation, une homothétie conservent les angles orientés tandis qu'une réflexion transforme un angle orienté en son opposé (on dit qu’elle **contrarie** les angles orientés).

Définition : Une isométrie qui conserve l’orientation des angles est un **déplacement.**

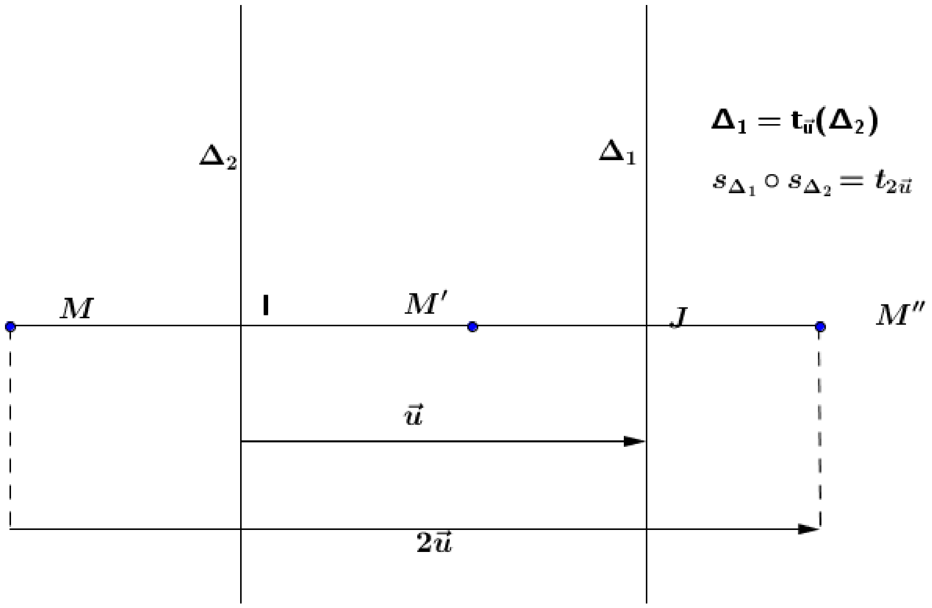
Définition : Une isométrie qui inverse l’orientation des angles est un **antidéplacement**.

Théorème : La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

Théorème : La composée d’un déplacement et d’un antidéplacement (peu importe l’ordre) est un antidéplacement.

4. COMPOSEE DE DEUX REFLEXIONS D’AXES Δ_1 ET Δ_2

4.1 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles

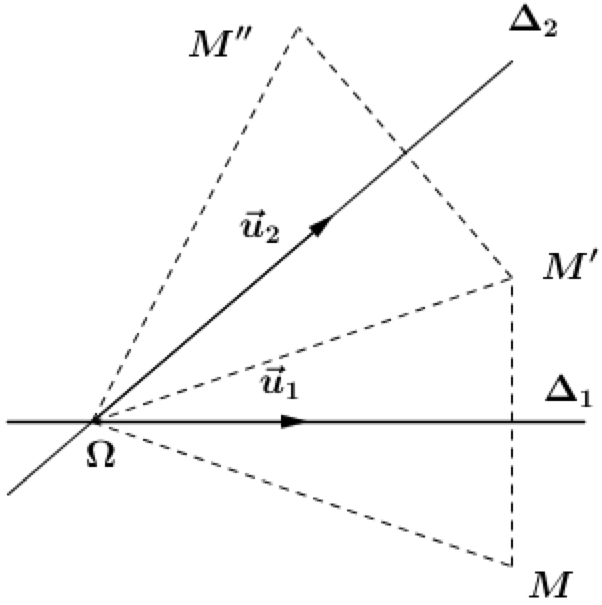


Théorème : Si s_{Δ_1} et s_{Δ_2} sont deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2, tels que $\Delta_1 // \Delta_2$, la composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur tel que $\Delta_1 = t_{\vec{u}}(\Delta_2)$.

Démonstration : Soit M' = s_{Δ_2}(M), M'' = s_{Δ_1} (M'), I et J les milieux respectifs de [MM'] et [M'M'']. On a : $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'} \\ \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J} \end{cases}$, d'où par addition membre à membre de ces deus égalités (relation de CHASLES) : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$.

On en déduit que M'' = $t_{\vec{u}}$(M) avec $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$.

4.2 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont sécants



Théorème : Soit s_{Δ_1} et s_{Δ_2} deux ré‡exions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 sécants en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. La composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est alors la rotation de centre Ω et d'angle 2 $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$.

Démonstration : Soit M' = s_{Δ_2} (M) et M'' = s_{Δ_1} (M'). Ω étant à la fois sur Δ_1 et Δ_2, on a : $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}(\Omega) = s_{\Delta_1}(\Omega) = \Omega$ (1)

D'autre part, s_{Δ_1} et s_{Δ_2} étant des isométries, on a :

ΩM'= ΩM (par s_{Δ_2}) et ΩM' = ΩM'' (par s_{Δ_1}), d'où : ΩM = ΩM'' (2)

Par ailleurs, $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_2}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) + (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M''})$.

Une réflexion étant un antidéplacement :

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_2}) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$.

Donc , $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) - (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$, soit

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = 2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) \quad (3)$$

d'après la relation de Chasles sur les angles orientés.
Il résulte des relations (1), (2) et (3) que $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$.

<u>Remarques</u> :
• L'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$ dépend uniquement des droites Δ_1 et Δ_2 et non des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ choisis sur cette droites. Si par exemple on remplace $\overrightarrow{u_2}$ par $-\overrightarrow{u_2}$, on a : $2(-\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) = 2(-\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) + 2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) = 2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})\ [2\pi]$ car

$$(-\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) = \pi\ [2\pi]$$

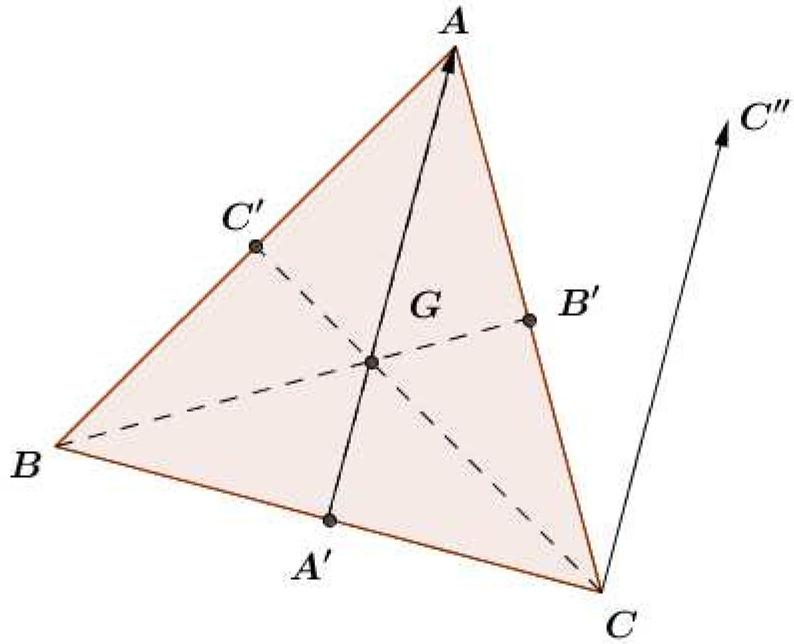
• s_{Δ_1} et s_{Δ_2} ne commutent pas en général car $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$ tandis que $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
Elles ne commutent que lorsque $\Delta_1 \perp \Delta_2$ auquel cas :
$s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω).

• Toute rotation peut être décomposée comme la composée de deux symétries axiales d'axes sécants au centre de cette rotation. L'un de ces axes pouvant être choisi aritrairement, il existe une infinité de manières de faire cette décomposition.

<u>Exemple</u> : *Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité G:*
On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ; [AB] : Soit C'' = $t_{\overrightarrow{A'A}}(C)$.
En utilisant des décompositions judicieusement choisies, écrire sous la forme d'une seule transformation les composées suivantes :
$f_1 = r_{A,\frac{\pi}{3}} \circ r_{B,\frac{\pi}{3}}$; $f_2 = r_{C,-\frac{\pi}{3}} \circ r_{A,\frac{\pi}{3}}$; $f_3 = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{A',\pi}$.

<u>Solution</u> : • (AA') et (AB) se coupent en A (évident) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{6}$, donc

$$r_{A,\frac{\pi}{3}} = s_{(AA')} \circ s_{(AB)}$$



De la même manière, on voit que :

$$r_{B,\frac{\pi}{3}} = s_{(AB)} \circ s_{(BB')}$$

Alors, d'après l'associativité de la composée des applications :
$f_1 = r_{A,\frac{\pi}{3}} \circ r_{B,\frac{\pi}{3}} = s_{(AA')} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BB')} = s_{(AA')} \circ s_{(BB')} = r_{G,\frac{-4\pi}{3}}$
car (AA') et (BB') se coupent en G et il n'est pas difficile de voir que :
$2(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AA'}) = 2(\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GA'}) = 2 \times \left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}$.

- $r_{C,-\frac{\pi}{3}} \circ r_{A,\frac{\pi}{3}} = s_{(CC'')} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AA')} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} = t_{\overrightarrow{BC}}$

car (CC'') et (AA') sont parallèles et $\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

- $f_3 = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{A',\pi} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} \circ s_{(AA')} \circ s_{(BC)} = s_{(CC'')} \circ s_{(BC)} = r_{C,\pi} = s_C$.

5. Isométries du plan fixant un point

<u>Théorème</u> : Soit f une isométrie et Ω un point du plan. L'isométrie f se décompose d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant Ω fixe.

Démonstration : Soit $f = t \circ g$ une telle décomposition (en supposant qu'elle existe).
On doit avoir $\Omega' = f(\Omega) = (t \circ g)(\Omega) = t(\Omega)$. La translation t ne peut donc être que la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$. De plus $f = t \circ g$ d'où $g = t^{-1} \circ f$.
Donc la décomposition $f = t \circ g$ est, si elle existe, unique.
Posons maintenant $t = t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$ et $g = t^{-1} \circ f$
g est bien une isométrie comme la composée de deux isométries.
De plus, $g(\Omega) = (t^{-1} \circ f)(\Omega) = t^{-1}[f(\Omega)] = \Omega$,
donc Ω est bien un point fixe de g.
Finalement $t \circ g = t \circ (t^{-1} \circ f) = (t \circ t^{-1}) \circ f = f$.
Ceci montre l'existence de la décomposition citée dans le théorème.

Le théorème montre qu'une isométrie quelconque peut toujours être obtenue, et ce d'une infinité de manières (le choix de Ω est arbitraire), comme composée d'une isométrie laissant un point fixe et d'une translation.

Théorème :
1°) Une isométrie fixant trois points A, B et C non alignés est l'identité.
2°) Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe (AB).
3°) Une isométrie ne fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.

Démonstration : Soit f une isométrie.

1°) Supposons que f fixe trois points A, B et C non alignés.
Soit M un point quelconque du plan et soit M' = f (M):
f conservant les distances, on doit avoir AM = AM', BM = BM' et CM = CM'.
Si $M \neq M'$, les trois points A, B et C devraient être tous les trois sur la médiatrice de [MM'], ce qui est impossible puisqu'ils ne sont pas alignés.
On a donc M = M' et tous les points du plan sont donc fixes : f = Id.

2°) Supposons que f fixe deux points A et B distincts et que f ne soit pas l'identité.
Soit C un point qui n'est pas sur la droite (AB). D'après 1), $f(C) = C' \neq C$, sinon on aurait f = Id.
f conservant les distances, on doit avoir AC = AC' et BC = BC'.
Donc la droite (AB) est la médiatrice de [CC'].

Soit g = $s_{(AB)} \circ$ f. On a g(A) = A, g(B) = B et g(C) = $s_{(AB)}$[f(C)] = $s_{(AB)}$[C'] = C. Alors g a trois points invariants non alignés, A, B et C et d'après 1) : g = Id.

D'où (en composant à gauche par $s_{(AB)}$) : f = $s_{(AB)} \circ$ Id = $s_{(AB)}$.

3°) Supposons que f ne fixe que le point A.
Soit B un point distinct de A et B' = f(B).
f conservant les distances, on a AB = AB', donc A appartient à la médiatrice Δ de [BB'].

Soit g = $s_\Delta \circ$ f. On a : g(A) = s_Δ[f(A)] = s_Δ(A) = A et g(B) = s_Δ[f(B)] = s_Δ(B') = B.
D'après les parties 1) et 2) ci-dessus, g est soit l'identité, soit $s_{(AB)}$.
Si g était l'identité, on aurait f = s_Δ ce qui est absurde, car f n'a que A comme point invariant par hypothèse.

Donc g = $s_\Delta \circ$ f = $s_{(AB)}$, d'où (toujours en composant à gauche par $s_{(AB)}$) :

f = $s_\Delta \circ s_{(AB)}$. Les droites Δ et (AB) étant sécantes en A (si elles étaient parallèles, elles seraient confondues, car elles ont en commun le point A, et B appartiendrait à la médiatrice de [BB'], ce qui est absurde), f est une rotation de centre A.

6. DEPLACEMENTS ET ANTIDEPLACEMENTS

6.1 Déplacements du plan

Soit f un déplacement du plan.
1) Si f fixe un point,ce ne peut être que l'identité ou une rotation.
2) Si f ne fixe aucun point, alors f = t ∘ g avec g fixant un point.
g = t^{-1} ∘ f est un déplacement fixant un point. C'est donc l'identité ou une rotation.
(a) Si g est l'identité, f = t ∘ Id = t.
(b) Si g est une rotation r : f = t ∘ r.
Décomposons t et r en produit de ré‡exions bien choisies. t = $s_1 \circ s_2$ et r = $s_2 \circ s_3$:
Alors t ∘ r = $s_1 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_3 = s_1 \circ s_3$ est donc une translation ou une rotation.

Théorème : Les déplacements du plan sont les translations et les rotations

6.2 Antidéplacements du plan

Soit f un antidéplacement du plan.

1) Si f fixe un point,ce ne peut être qu'une réflexion

2) Si f ne fixe aucun point, alors f = t ∘ g avec g fixant un point.

g = t^{-1}∘ f est un antidéplacement fixant un point. C'est donc une réflexion s.

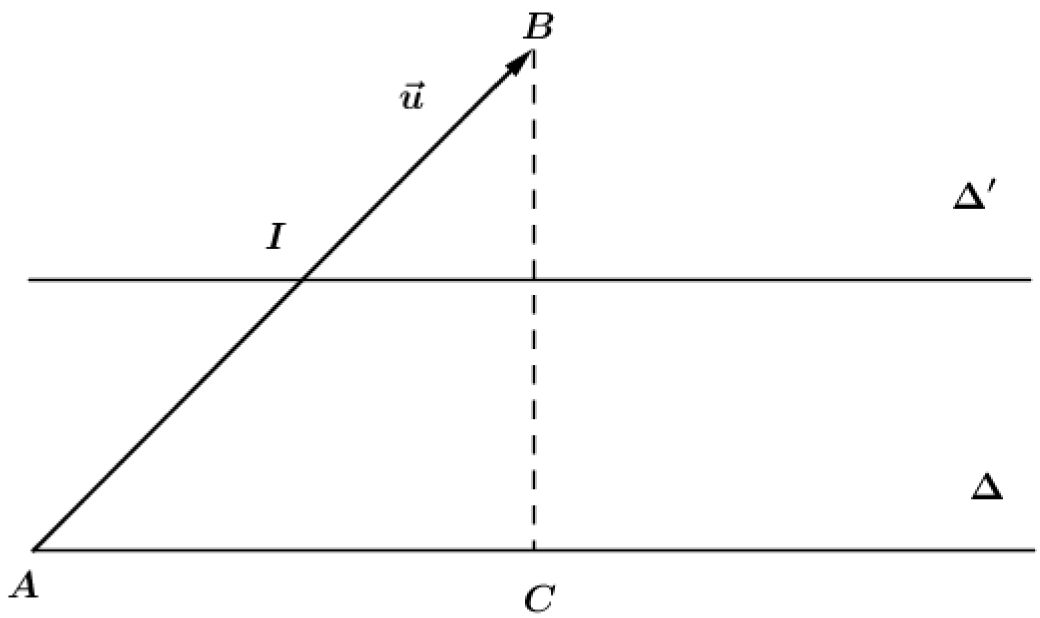
Alors : f = t ∘ s

<u>Théorème</u> : Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les composées t ∘ s ou t est une translation et s une réflexion.

<u>Définition</u> : Une **symétrie glissée** est la composition d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe Δ dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. On la note $s_{\Delta,\vec{u}}$.

<u>Théorème</u> : La composée d'une translation et d'une réflexion est une réflexion ou une symétrie glissée.

<u>Démonstration</u> :



Soit f = $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$. Soit A un point de Δ et B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Soit C le projeté orthogonal de B sur Δ et Δ' la parallèle à Δ passant par le milieu I de [AB].

On a: $t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$ et $t_{\overrightarrow{CB}} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$, d'où :

f = $t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}$.

— Si $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, alors f = $s_{\Delta'}$.

— Si $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, alors f = $t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}$ avec $\overrightarrow{AC}$ vecteur directeur de Δ'. Donc f est la symétrie glissée $s_{\Delta',\overrightarrow{AC}}$.

Théorème : La symétrie glissée $s_{\Delta,\vec{u}}$ est une composée commutative, c'est-à-dire que l'on a : $s_{\Delta,\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

Démonstration : $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est un antidéplacement comme composée de trois antidéplacements. Si M ∈ Δ, posons $M_1 = t_{-\vec{u}}$ (M). On a donc $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{u}$.
$\vec{u}$ étant vecteur directeur de Δ, $M_1 \in \Delta$.
D'où $(t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}})$(M) = $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta\,(M_1) = t_{\vec{u}}\,(M_1)$ = M car $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$.
$t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est donc un antidéplacement fixant tout point de Δ et il en résulte que : $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}} = s_\Delta$. Par conséquent : $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

Remarque : On en déduit que si f = $s_{\Delta,\vec{u}}$ est une symétrie glissée, alors on a

$$f \circ f = t_{\overrightarrow{2u}}$$

En effet, f ∘ f = : $(t_{\vec{u}} \circ s_\Delta) \circ (s_\Delta \circ t_{\vec{u}}) = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{2u}}$.
D'autre part, f = $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \Longrightarrow s_\Delta = t_{-\vec{u}} \circ$ f.
Ainsi la connaissance de f permet d'obtenir $\vec{u}$ et Δ.

Théorème : Les antidéplacements du plan sont les ré‡exions et les symétries glissées.

EXERCICES ET PROBLEMES

GENERALITES

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Au point M(x, y), on fait correspondre M'(X', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

α, β, γ et δ étant des réels donnés.

1) Cette correspondance est(elle une application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$? A quelle condition est-ce une transformation de $\mathscr{P}$?
Déterminer alors la transformation réciproque.
2) On suppose la condition précédente vérifiée pour l'application f_1, correpondant aux réels α_1, β_1,
γ_1 et δ_1 et pour pour l'application f_2, correpondant aux réels α_2, β_2, γ_2 et δ_2.
Montrer que $f_2 \circ f_1$ est une transformation de $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on fait correspondre au point M(x, y) le point M'(x', y'). Cette correpondance est-elle une application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$? De $\mathscr{P}$ privé de certains points ?

a) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ y' = \sqrt{y} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = x - y \end{cases}$

EXERCICE 3 Affinités

Soit deux droites sécantes D et Δ et un réel k différent de zéro. Par un point quelconque M du plan, on trace la parallèle à Δ qui coupe D en H et on construit le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$.
1) Montrer qu'on a ainsi défini une transformation f du plan.

2) Déterminer les points invariants par f et les droites globalement invariantes par f.
3) Déterminer l'image par f d'une droite. Soit un point A et son image A' par f. Utiliser le résultat précédent pour construire ssimplement l'image M' d'un point M quelconque donné.
4) Déterminer f^{-1}.
5) En choisissant un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) convenable, donner une expression analytique de f.

EXERCICE 4

Dans le plan rapporté au repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , on considère les droites D et D' d'équations :

D : 3x + 2y − 6 = 0 ;   D' : x − 4y + 4 = 0
Soit un point M(x, y) du plan. La parallèle à D menée par M coupe x'x en H ;lLa parallèle à D' menée par M coupe y'y en K. Soit M'(x', y') le point qui se projette en H sur x'x et en K sur y'y.
1°) Montrer que M' est l'image de M dans une application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.
f est-elle une transformation de $\mathscr{P}$?
2°) Donner une expression analytique de f.
3°) Existe-t-il des points invariants par f ?
4°) Reprendre les questions précédentes avec D : x + y = 0 et D' : x − y = 0

TRANSLATIONS

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle. Construire l'image de ce triangle par la translation de vecteur :

a) $\overrightarrow{AB}$; **b)** $\overrightarrow{BC}$; **c)** $\overrightarrow{CA}$ **d)** $\vec{v}$ quelconque.

2°) On note $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$.

3°) Soit A ', B ' et C ' les images de A, B et C par la translation $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.
Quelle est la nature des quadrilatères ABA'C, BCC'B', ABB'C ?
4°) Le quadrilatère ABA'C peut-il être un losange ? un carré ?

EXERCICE 6

On considère un parallélogramme ABCD.
Construire l'image de ce parallélogramme par la translation de vecteur :

a) $\overrightarrow{AB}$; **b)** $\overrightarrow{BC}$; **c)** $\overrightarrow{CA}$ **d)** $\vec{v}$ quelconque.

EXERCICE 7

1°) Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres O et O ' et de même rayon.
Montrer que l'un de ces deux cercles est l'image de l'autre dans une translation que l'on précisera.
2°) On suppose maintenant que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en A et B. t désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M' son image par t.
Démontrer que A est l'orthocentre du triangle MBM'.

EXERCICE 8

On considère un parallélogramme ABCD, les sommets A et B étant fixes.
Quel est l'ensemble des points D lorsque C décrit une droite ou un cercle donné ?

EXERCICE 9

Soit deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et un vecteur $\vec{u}$.
Construire un segment [MM'] tel que M appartienne à $\mathscr{D}$, M' appartienne à $\mathscr{D}'$ et que l'on ait $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

EXERCICE 10

On donne un cercle $\mathscr{C}$ et deux point A et B. Construire, en utilisant une translation deux points P et Q de $\mathscr{C}$ tels que ABPQ soit un parallélogramme.

EXERCICE 11

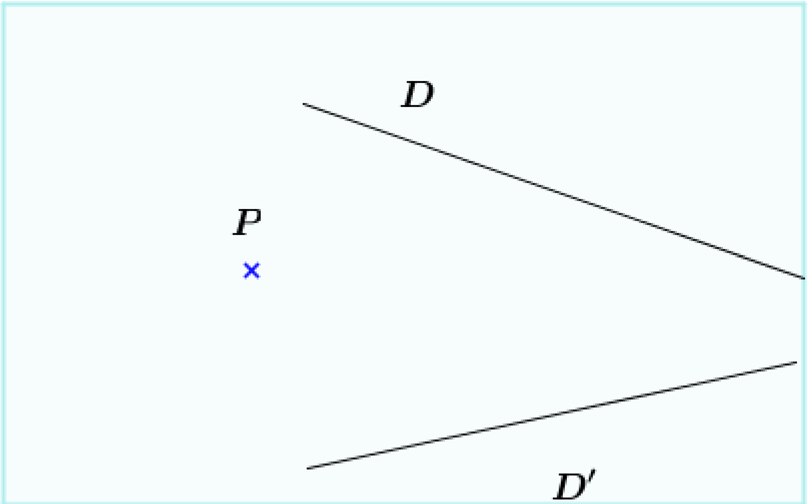
A, B et C sont 3 points non alignés ; t est la translation qui transforme A en B. D est l'image de B par t. La parallèle à (BC) menée par D coupe (AC) en E.
Démontrer que C est le milieu de [AE].

EXERCICE 12

ABC est un triangle. M et N sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB}$.
1°) Construire M et N.
2°) La translation qui transforme B en N transforme A en E.
Montrer que (EN) // (AB) et (CE) // (AB).
Que peut-on en déduire pour les points C, E et N ?

EXERCICE 13

Construire la droite passant par P et concourante à D et D'.



EXERCICE 14

Soit un triangle ABC d'orthocentre H et deux points D et E tels que BCDE soit un parallélogramme. Les perpendiculaires menées de D à (AB) et de E à (AC) se coupent en K.

1°) Montrer que K est le transformé de H dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
2°) En déduire une condition pour que A, H, K soient alignés.

EXERCICE 15

On considère un parallélogramme ABCD.
1°) Montrer quil existe une translation qui transforme la droite (AB) en la droite (DC) et la droite (AD) en la droite (BC).
2°) Soit K un point du plan. Une droite Δ passant par K coupe (AB) et (DC) en M et N respectivement, (AD) et (BC) en P et Q respectivement.
Montrer quil existe deux droites Δ telles que les segments [MN] et [PQ] aient la même longueur.

EXERCICE 16

On considère un triangle ABC et une droite D passant par A. On marque sur D deux points P et Q tels que A soit le milieu de [PQ].

Soit P’ l’image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et Q’ l’image de Q par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les segments [BC] et [PQ] ont le même milieu.

EXERCICE 17

Le plan est muni d’ un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Donner l’expression analytique de la translation de vecteur $\vec{V}$ et une équation cartésienne de la transformée de la droite $\mathscr{D}$ et du cercle $\mathscr{C}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{V}(4, -1)$ $\mathscr{D}: 5x - y + 4 = 0$ $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 9 = 0.$

2°) $\vec{V}(-3, -5)$ $\mathscr{D}: x + 4y + 1 = 0$ $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

EXERCICE 18

Dans le plan muni du repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on considère les points A(2, 0), B(1, −2), C(−1, 2) et D(3, 3).

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B’, C’ et D’ les images respectives de B, C et D par t.

1°) Ecrire les formules analytiques de t et en déduire les coordonnées des points B’, C’ et D’.

2°) Soit G le barycentre des points pondérés (B, 2) et (D, −3).

Déterminer les coordonnées de G.

3°) Soit G’ l’image de G par t. Déterminer les coordonnées de G’ et vérifier que le point G’ est le barycentre des points pondérés (B’, 2) et (D’, −3).

4°) Soit K l’isobarycentre des points B, C et D. Déterminer les coordonnées de K.

5°) Montrer que K’, image de K, est l’isobarycentre des points B’, C’ et D’.

EXERCICE 19

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droits parallèles ; A et B sont deux points fixes situés à l'extérieur de la bande de plan déterminée par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et de part et d'autre de cette bande.

Déterminer un point M sur $\mathscr{D}$ et un point M' sur $\mathscr{D}'$ tels que la droite (MM') soit perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et que la somme AM + MM' + M'B soit minimale.

EXERCICE 20

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droits parallèles ; A et B sont deux points fixes situés de part et d'autre de la bande comprise entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Une droite (Δ) variable, de direction fixée, coupe respectivement $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$en M et M'.

Déterminer (Δ) pour que la longueur de la ligne brisée AMM'B soit minimale.

HOMOTHETIES

EXERCICE 21

Soit un triangle ABC.
Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre O et de rapport k dans les cas suivants :
a) O = A et k = – 1. **b)** O = A et k = 2
c) O est le milieu de [BC] et k = 2.
d) O et k sont quelconques.

EXERCICE 22

Montrer que l'image d'un carré par une homothétie est un carré.

EXERCICE 23

Soit A et B deux points du plan, A ' et B ' leurs images par une homothétie h de centre O et de rapport k ; montrer que l'image par h du milieu I de [AB] est le milieu I' de [A'B'] . En déduire que l'image du centre de gravité G d'un triangle ABC par h est le centre de gravité du triangle A'B'C' homothétique du triangle ABC.

EXERCICE 24

Soit O, A, B trois points donnés.
Montrer qu'il existe une unique homothétie h de centre O transformant A en B dans les cas suivants ; on déterminera son rapport) :

a) $\overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ **b)** $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{OA}$ **c)** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$.

EXERCICE 25

Soit A et B deux points donnés.
Montrer qu'il existe une unique homothétie h de rapport k transformant A en B dans les cas suivants (on déterminera son centre) :

a) k = 2 **b)** $k = -\frac{1}{2}$ **c)** k = – 1.

EXERCICE 26

Soient A, B, A' , B' des points donnés du plan. On suppose que A et B sont distincts, A' et B' sont distincts, les droites (AB) et (A'B') sont parallèles, et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$.
Montrer qu'il existe une unique homothétie h transformant A en A' et B en B' (construire son centre et déterminer son rapport).

EXERCICE 20

Soit deux triangles ABC et A'B'C' dont les côtés (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A') sont parallèles. .

1°) On suppose que AB = A'B'.

Montrer que l'un de ces triangles est l'image de l'autre dans une translation ou dans une symétrie centrale que l'on précisera.

(On distinguera les deux cas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$).

2°) On suppose que AB ≠ A'B'.

Montrer que l'un de ces triangles est l'image de l'autre dans une homothétie que l'on précisera.

EXERCICE 21

Soit un parallélogramme ABCD.
Construire l'image de ce parallélogramme par l'homothétie de centre O et de rapport k dans les cas suivants :
a) O = A et k = – 1. **b)** O = A et k = 2 **c)** O est le milieu de [BC] et k = 2.
d) O et k sont quelconques.

EXERCICE 22

Montrer que la composée de deux symétries centrales est une translation.

EXERCICE 1

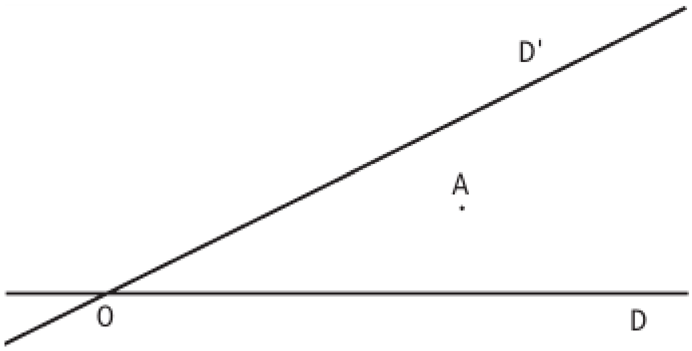
Soit ABC un triangle. On note A' et B' les milieux des côtés [BC] et [AC], H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On considère l'homothétie h de centre G qui transforme A en A'. Quel est son rapport ?
Quelle est l'image de la droite (AH) ? de la droite (BH) ?
En déduire que H, G, O sont alignés (la droite contenant ces points est appelée « droite d'Euler »).

EXERCICE 1

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère le point $I(-2, 3)$ et la droite D d'équation 2x + y – 3 = 0.
Définir analytiquement l' homothétie de centre I et de rapport $-\frac{2}{3}$, puis donner une équation de l'image de D par h.

EXERCICE 1

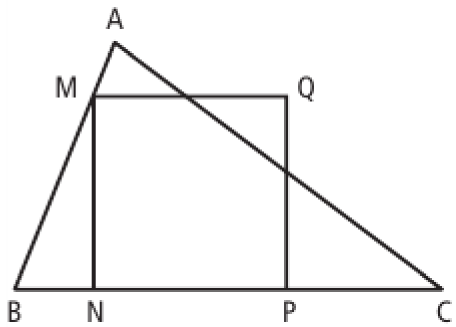
On considère deux droites D et D' sécantes en O et un point A extérieur à ces droites. Le but de l'exercice est de construire M sur D et N sur D' vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$.



1°) Montrer que N est l'image de M par une transformation que l'on précisera.
2°) En déduire que N est aussi sur une droite Δ que l'on précisera.
3°) Achever la construction.

EXERCICE 1

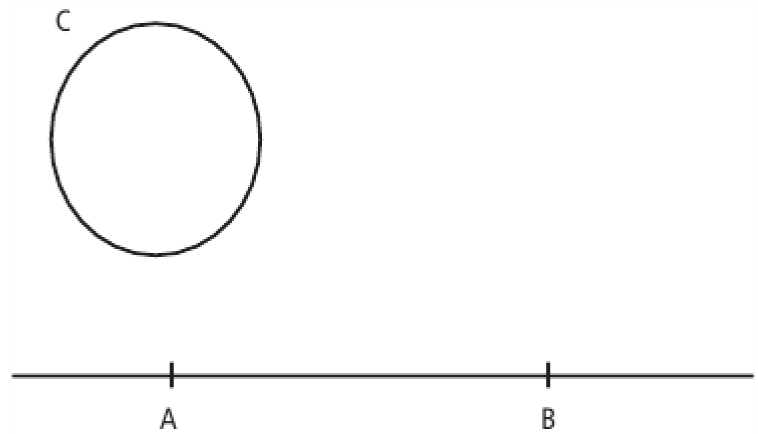
On considère un triangle ABC ayant 3 angles aigus. M est un point de [AB]. P et N sont deux points de [BC]. Q est tels que MNPQ est un carré.
Construire grâce à une homothétie un carré IJKL dont tous les sommets sont sur les côtés du triangle ABC.



EXERCICE 1

Soit C un cercle et soit A et B deux points extérieurs au cercle, I étant le milieu de [AB].
1°) A tout point M de C on associe le point N centre de gravité de ABM.
• Montrer que N est l'image de M par une homothétie bien choisie.
• Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M décrit C.
2°) A tout point M de C on associe le point P tel que AMBP soit un parallélogramme.

Montrer que P est l'image de M par une transformation que l'on précisera. Déte-rminer et construire l'ensemble des points P lorsque M décrit C.



EXERCICE 1

ABCD est un trapèze où les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors que (AD) et (BC) ne le sont pas.

Soient M et N les milieux de [AB] et [CD], I le point d'intersection de (AC) et (BD), J le point d'intersection de (AD) et (BC).

1°) On considère l'homothétie h de centre I qui transforme A en C. Quelle est l'image de B ?

2°) En déduire que I, M, N sont alignés.

3°) Montrer de même que J, M, N sont alignés.

EXERCICE 1 Composée de deux homothéties de centres distincts

Soit h_1 une homothétie de centre O_1 et de rapport k_1 et h_2 une homothétie de centre O_2 et de rapport k_2. On pose $f = h_2 \circ h_1$.

1°) Soit M un point quelconque du plan, $M_1 = h_1(M)$ et $M' = h_2(M_1)$. On a donc :

$$\overrightarrow{O_1M'} = k_1\,\overrightarrow{O_1M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_2M'} = k_2\,\overrightarrow{O_2M_1}$$

En déduire que : $\overrightarrow{O_1M'} = k_1 k_2\,\overrightarrow{O_1M} + (1 - k_2)\,\overrightarrow{O_1O_2}$ (1)

2°) On suppose que $k_1k_2 = 1$. Démontrer que l'égalité (1) s'écrit :

$$\overrightarrow{MM'} = (1 - k_2)\,\overrightarrow{O_1O_2}$$

En déduire la nature de l'application f.

3°) On suppose que $k_1k_2 \neq 1$.

a) Démontrer qu'un point O est invariant par f si et seulement si :

$$\overrightarrow{O_1O} = k_1 k_2\,\overrightarrow{O_1O} + (1 - k_2)\,\overrightarrow{O_1O_2} \quad (2).$$

En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point O, défini par :

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\,\overrightarrow{O_1O_2}$$

b) Déduire de (1) et (2) que f est l'homothétie de centre O et de rapport k_1k_2.

EXERCICE 1 Centre d'homothétie de deux cercles

A) Deux cercles $\mathscr{C}$ (O, R) et $\mathscr{C}'$ (O', R') étant donnés, on se propose de déterminer les homothéties transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

1°) Soit h une telle homothétie, si elle existe et k son rapport. Montrer que l'on a :

$$k = \frac{R'}{R} \text{ ou } k = -\frac{R'}{R}.$$

2°) a) Démontrer que, s'il existe une homothétie de rapport $\frac{R'}{R}$ transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, son centre I est tel que R $\overrightarrow{IO'}$ – R' $\overrightarrow{IO}$ = $\vec{0}$. (1)

Démontrer que si R ≠ R', l'égalité (1) définit un point I et un seul.

b) Vérifier que l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{R'}{R}$ répond alors à la question.

3°) a) Démontrer que, s'il existe une homothétie de rapport $-\frac{R'}{R}$ transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, son centre J est tel que R $\overrightarrow{JO'}$ + R' $\overrightarrow{JO}$ = $\vec{0}$. (2)

Démontrer que l'égalité (2) définit un point J et un seul.

b) Vérifier que l'homothétie de centre J et de rapport $\frac{R'}{R}$ répond alors à la question.

Ainsi, étant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres O et O' et de rayons R et R' distincts, il existe deux homothéties transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

− La première est l'homothétie de centre le point I tel que $\overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IO}$ et de rapport $\frac{R'}{R}$;

− La seconde est l'homothétie de centre le point J tel que $\overrightarrow{JO'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{JO}$ et de rapport $-\frac{R'}{R}$.

Notons que si O et O' sont distincts, alors I et J sont alignés avec O et O' (droite des centres des deux cercles) et on a : $\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = -\frac{\overline{JO'}}{\overline{JO}} = \frac{R'}{R}$**.**

I et J sont appelés **centres d'homothétie** des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

4°) Etudier le cas où O = O', puis celui où R = R' et O ≠ O'.

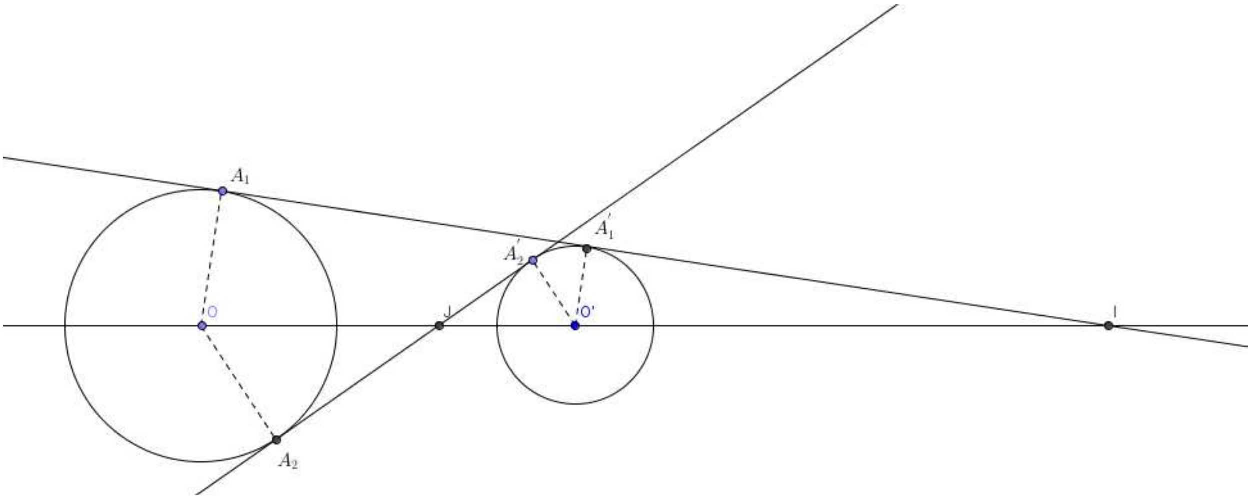
Conclure par un théorème.

B) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres O et O' distincts et de rayons R et R' distincts. Soient I et J leurs centres d'homothétie.

1°) Deux demi-droites Ox et O'x' parallèles et de même sens, coupent respectivement $\mathscr{C}$ en A et $\mathscr{C}'$ en A'. Démontrer que la droite (AA') passe par I.

2°) Deux demi-droites Ox et O'x' parallèles et de sens contraires, coupent respectivement $\mathscr{C}$ en A et $\mathscr{C}'$ en A''.Démontrer que la droite (AA'') passe par J.
3°) Déduire des deux questions précédentes une construction des centres d'homothétie I et J.

B) Soit $\mathscr{D}$ une droite tangente à $\mathscr{C}$ en A et tangente à $\mathscr{C}'$ en A'.
1°) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ passe par I ou J.



2°) En déduire que les éventuelles tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par I et J, s'il en existe.

3°) Construire I et J et les tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans les cas suivants :
a) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont extérieurs : OO' $>$ R + R' ;
b) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents extérieurement : OO' $=$ R + R' ;
c) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants : $|R - R'| <$ OO' $<$ R + R' ;
d) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents intérieurement : OO' $= |R - R'|$;
e) un des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est extérieur à l'autre : OO' $< |R - R'|$.

EXERCICE 23

La figure ci-après obtenue à partir des quatre droites (AC), (CF), (AD) et (FB) sécantes deux à deux est appelée **quadrilatère complet** de sommets A, B, C, D, E et F. On se propose de démontrer que les segments [AF], [BD] et [EC] ont leurs milieux respectifs I, J, K alignés.
1°) Construire les points R et S tels que les quadrilatères FBRD et ESCF sont des parallélogrammes.

2°) On considère l'homothétie h_1 de centre A qui transforme B en C et l'homothétie h_2 de centre A qui transforme D en E.

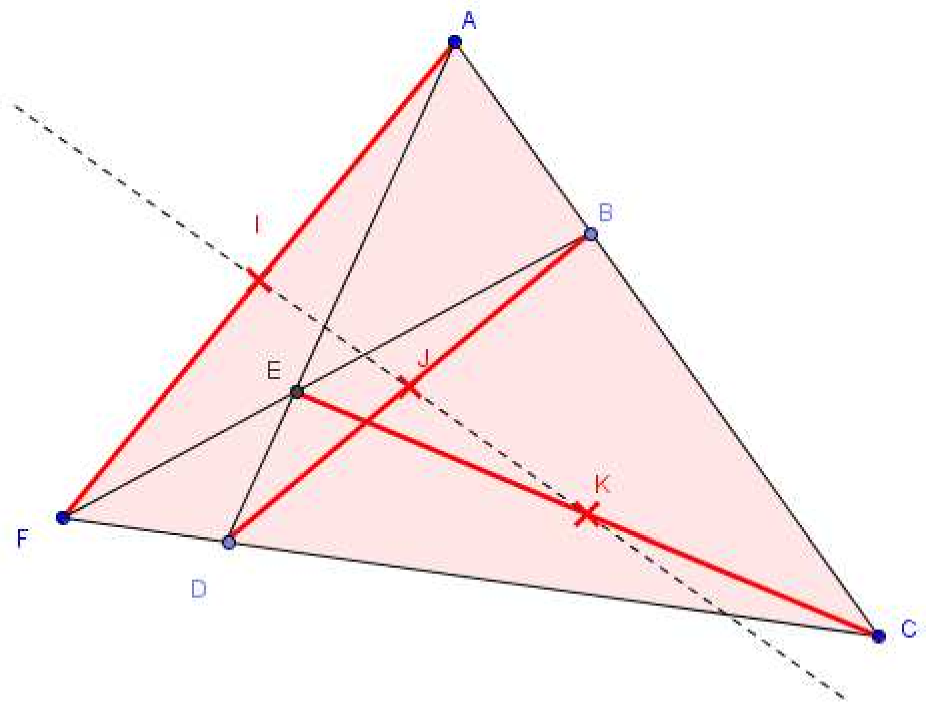
a) Démontrer que l'image de la droite (BR) par $h_2 \circ h_1$ est la droite (ES).

b) Déterminer l'image de la droite (DR) par $h_1 \circ h_2$.

c) Que dire des transformations $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$?

On pose $h = h_1 \circ h_2$. Déterminer h(R). En déduire que les points A, R et S sont alignés.

3°) On considère l'homothétie h' de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.
Déterminer les images des points A, R, S par h'. En déduire que les points I, J et K sont alignés.



EXERCICE 24

1°) On considère un cercle C de centre O, et deux tangentes à C sécantes en I.
Montrer que O est sur la bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes.
2°) Soient deux droites D et D' sécantes en I, A un point extérieur aux deux droites.
Construire un cercle tangent à D et D' : choisir son centre en tenant compte de la question 1 et construire les points de contact de ce cercle avec D et D'.
3°) Construire en utilisant des homothéties deux cercles tangents à D et D' passant par A. Justifier la construction.

REFLEXIONS

EXERCICE 25

Soit ABCD un parallélogramme et s la réflexion d'axe (BD). On désigne par A' et C' les images respectives de A et C par s.

1°) Déterminer l'image par s de la droite (AC), puis celle du segment [AC].

2°) Montrer que le milieu I de [AC] est invariant par s.

3°) Déduire des questions précédentes que AA'CC' est un rectangle.

EXERCICE 26

Soit ABC un triangle rectangle en A, K le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de A sur [BC], I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC) respectivement.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AK) et (IJ) sont perpendiculaires.
On désigne par s la réflexion d'axe (AB) et on pose C' = s(C), H' = s(H).

1°) a) Construire les points H' et C'. Montrer que B, H' et C' sont alignés.

  b) Construire le plus simplement possible le point K' = s(K).

2°) a) Quelle est la nature de AKK'C' ?

  b) Montrer que (IJ) et (AH') sont parallèles.

3°) Montrer que (AH') et (BC') sont perpendiculaires.

4°) Déuire des questions précédentes que les droites (AK) et (IJ) sont perpendiculaires.

EXERCICE 27

ABC est un triangle. On note H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$. [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$. La droite (AH) recoupe $\mathscr{C}$ en A'' et (BC) en A'. Le point O' est le milieu de [BC] et Δ est la parallèle à (BC) passant par O.
On note s_1 la réflexion d'axe Δ et s_2 la réflexion d'axe (BC).

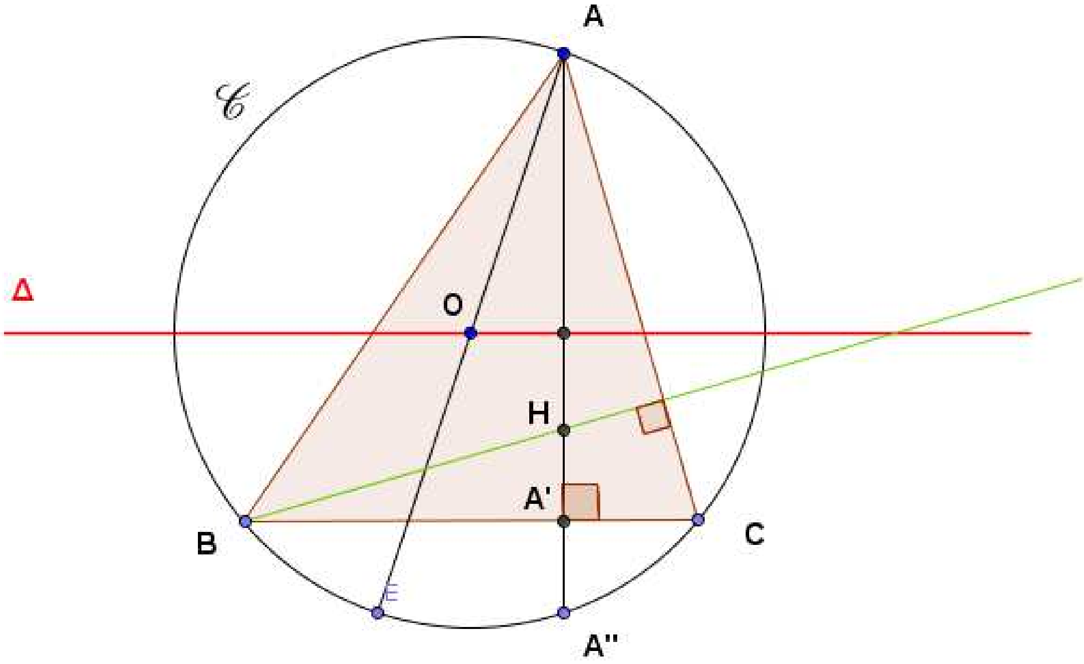
1°) Montrer que le quadrilatère BHCD estb un parallélogramme.

2°) Montrer, en utilisant une homothétie, que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OO'}$.

3°) Identifier la transformation $s_2 \circ s_1$. Donner l'image de A par $s_2 \circ s_1$ et préciser alors $s_2 \circ s_1$.

4°) Quelle est l'image de H par s_2 ?
Formuler alors une propriété remarquable de l'orthocentre du triangle et du cercle circonscrit.

5°) Application : Construire un triangle ABC connaissant son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ de centre O, son orthocentre H et un point D du côté [BC].



ROTATIONS. COMPOSEE D'ISOMETRIES

EXERCICE 28

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ [2π] et AB < AC ; On désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle et par O son centre

1°) Faire un figure

2°) Soit E = {M ∈ P / $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}$ [2π]}.

a) Vérifier que A∈ E puis déterminer et construire E

b) Déterminer et construire le point I tel que IB = IC et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{3}$ [π].

3°) Soit P le point du segment [AC] tel que CP = AB

a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que R(A) = P et R(B) = C, quel est son angle

b) Déterminer le centre de la rotation R

4°) Donner la nature du triangle IAP et en déduire que : AC = AI + AB

5°) Soit M un point variable de l'ensemble F et G le centre de gravité du triangle MBC. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit E

EXERCICE 29

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan

Soit f l'application qui à tout point M(x , y) du plan associe le point M′(x′ , y′) du plan tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan
2) Montrer que le point Ω(–2 , 1) est l'unique point invariant par f
3) Soit les points M(x , y) et M′(x′ , y′) tel que f (M) = M′
a) Exprimer en fonction de x et y $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'}$ et dét $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$.
b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$.
c) Quelle est alors la nature de f ?

EXERCICE 30

Dans un plan orienté, on considère un parallélogramme ABCD de sens direct
1) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\overrightarrow{IA} , \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ [2π] et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $(\overrightarrow{DC} , \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{2}$ [2π]
2) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$
a) Quelle est l'image de A par R ?
b) Montrer que R(B) = E.
3) Soit A′ le symétrique de A par rapport à I.
a) Justifier que A′ = R(D)
b) Montrer que A′E = BD et que les droites (A′E) et (BD) sont perpendiculaires

EXERCICE 31

Dans un plan orienté ; on considère un triangle ABC de sens direct. BAB′ et ACC′ deux triangles rectangles et isocèles en A et de sens direct
1) En utilisant la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que : BC′ = B′C et que (BC′) ⊥ (B′C)
2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_2 qui transforme B en C et C′ en B′
b) Déterminer son angle θ et construire son centre J
3) Soit E = B∗C′ et F = C∗B′
a) Déterminer r_1 (F) et r_2 (E).
b) En déduire que AFJE est un carré.

EXERCICE 32

Dans un plan orienté ; on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ [2π]. On désigne par I le milieu de [BC] et par Δ la droite

perpendiculaire à (BC) et passant par C et on désigne par K le point d'intersection de Δ et (AB).
1) Faire un figure
2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Déterminer R(B) , R((AC)) et R((BC))
b) Déduire R(C) et R(I)
3) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC
Déterminer l'image ζ' du cercle ζ par la rotation R puis déterminer $\zeta \cap \zeta'$
4) Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{5\pi}{4}$ $[2\pi]$.
a) Déterminer l'ensemble des points M
b) On pose $M' = R(M)$, déterminer l'ensemble des points M′ lorsque M varie
c) On pose R(I) = J , montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $IM = JM'$.

EXERCICE 33

Dans un plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1) a) Montrer que R(D) = A et R(C) = D
b) Déterminer la nature et les élément caractéristiques de R oR
c) En déduire que R(A) = B
2) Soit M un point du segment [AD] distinct de A et D. La perpendiculaire à la droite (MC) passant par D
coupe le segment [AB] en un point N
a) Déterminer les images du segment [AD] et de la droite (MC) par la rotation R
b) En déduire que R(M) = N
c) En déduire que CM = DN et que $(CM) \perp (DN)$
3) Soit ζ le cercle de centre O et passant par A ; la demi-droite [CM) recoupe le cercle ζ en E. Soit F le point de la demi-droite [DN) tel que DF = CE.
a) Montrer que R(E) = F.
b) Déterminer l'image de ζ par R.
c) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie sur le segment [AD].

EXERCICE 34

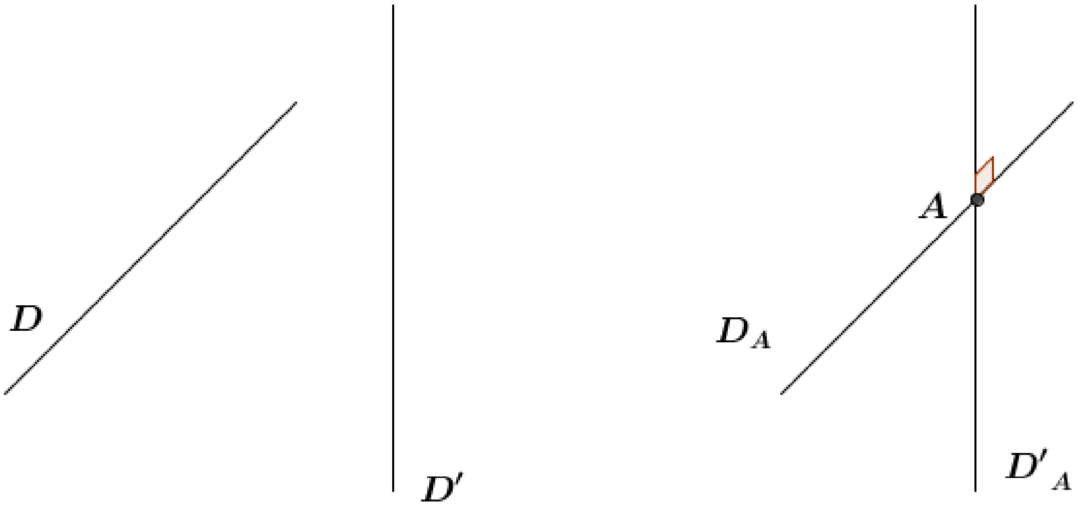
Dans un plan orienté ; on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC]. Soit le point J tel que B est le milieu de [JC]
Soit la rotation R_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
1) Soit A′ et B′ les images respectifs des points A et B par l'application $R_1 o R_2$
Montrer que I est le milieu de [AA′] et que B est le milieu de [AB′]

2) On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$.
En précisant la nature de $R_1 \circ R_2^{-1}$. Montrer que pour tout point M du plan, I est le milieu $[M_1M_2]$
3) Montrer que l'application $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

ORTHOGONALITE ET PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. DROITES ORTHOGONALES

Définition : Deux droites D et D' de l'espace $\mathscr{E}$ sont dites orthogonales si leurs parallèles D_A et D'_A menées par un point quelconque A de $\mathscr{E}$ sont perpendiculaires.



Remarques :

1°) Nous admettrons que cette définition ne dépend pas du choix du point A. Cela revient à admettre que la distance est invariante par translation dans $\mathscr{E}$.

2°) Deux droites de $\mathscr{E}$ peuvent être orthogonales et non coplanaires : elles n'ont alors aucun point commun.

Théorème 1 :
1°) Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
2°) Si deux droites sont parallèles, toute orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
3°) Deux droites sont orthogonales si et seulement si elles sont parallèles à deux droites orthogonales.

Démonstration : 1°) Supposons que $D \perp D'$ et $\Delta // D$. Soient D_A et D'_A les parallèles menées par un point A à D et D'. On a $D_A \perp D'_A$.

La parallèle Δ_A à Δ passant par A n'est autre que D_A car $\Delta // D_A$ (voir Axiome d'EUCLIDE). Donc $\Delta_A // D'_A$, d'où $\Delta \perp D'$.

2°) Supposons que $D // D'$ et $\Delta \perp D$. Alors $D_A = D'_A$. Or $\Delta_A \perp D_A$, donc $\Delta_A \perp D'_A$, d'où $\Delta \perp D'$.

3°) « $\Longrightarrow$ » : Si $D // D'$, alors leurs parallèles D_A et D'_A sont orthogonales par définition.

« $\Longleftarrow$ » : Réciproquement, supposons qu'il existe deux droites Δ et Δ' telles que

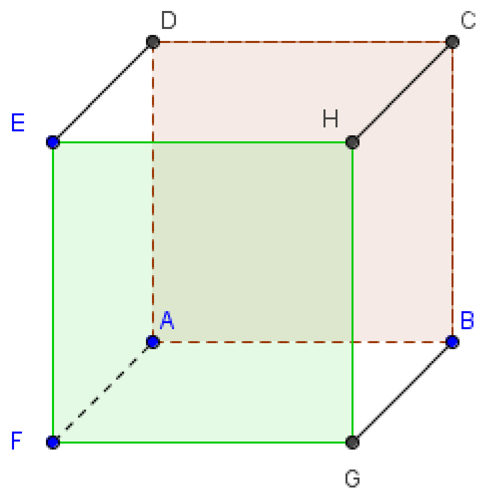
$$D // \Delta,\ D' // \Delta' \text{ et } \Delta \perp \Delta'.$$

Alors, $D_A = \Delta_A$ et $D'_A = \Delta'_A$.

Par hypothèse, on a $\Delta_A \perp \Delta'_A$, d'où $D_A \perp D'_A$, donc $D \perp D'$.

Remarques :

• Attention, dans l'espace $D \perp D'$ et $D \perp D''$ n'entraîne pas $D' // D''$. Alors que dans le plan ce résultat est vrai. Par exemple dans le cube ci-dessous :



les droites (DE) et (FG) sont orthogonales à la droite (EF) et pourtant (DE) et (FG) ne sont pas parallèles !

• Bien faire la nuance entre droites **orthogonales** et droites **perpendiculaires** : on parle de droites orthogonales pour des droites qui n'ont pas de point d'intersection : elles ne sont pas coplanaires. Par contre, dans l'espace, perpendiculaires signifie orthogonales et sécantes.

2. DROITE ORTHOGONALE A UN PLAN

Définition : Une droite est dite orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

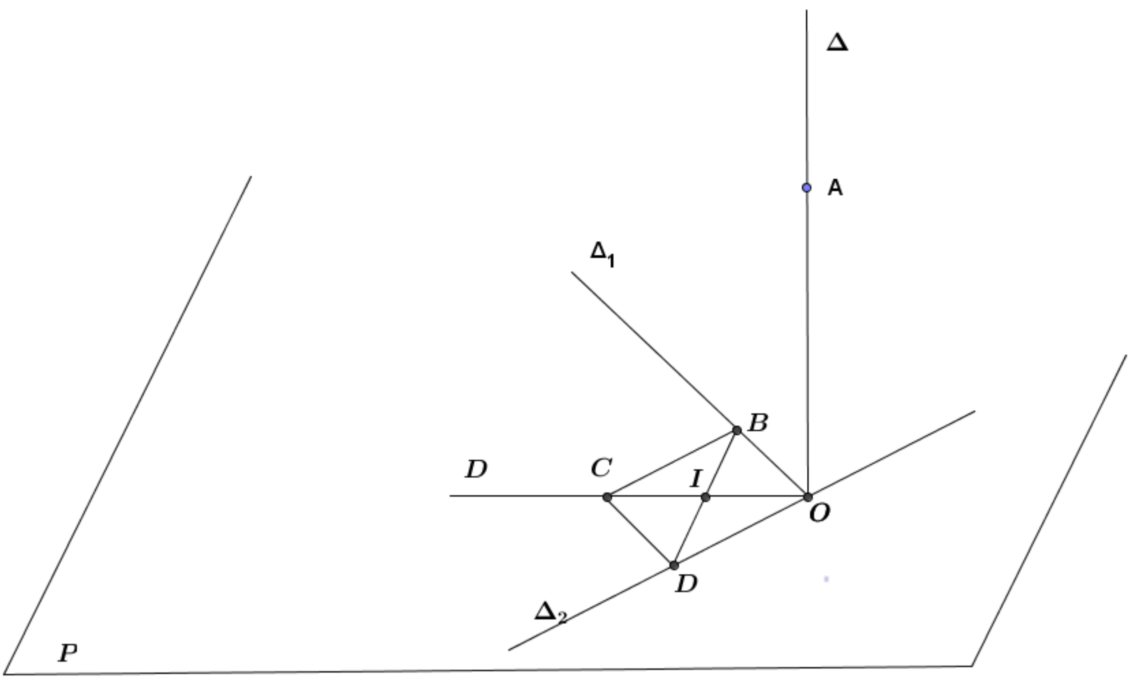
Remarque : Si une droite D et un plan P sont orthogonaux, alors ils sont sécants.

En effet, si D était parallèle à P elle serait parallèle à une droite Δ de P. Or D est supposée être orthogonale à toute droite Δ de P. D et Δ seraient donc à la fois parallèles et orthogonales, ce qui est absurde.

Théorème Fondamental : Une droite Δ est orthogonale à un plan P si et seulement si Δ est orthogonale à deux droites sécantes de P.

Démonstration : « $\Longrightarrow$ » : C'est évident, car si Δ est orthogonale à toutes les droite de P, elle est évidemment orthogonale à deux droites sécantes de P.

« $\Rightarrow$ » : Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites sécantes en O du plan P. Quitte à remplacer Δ par une de ses parallèles, on peut supposer que Δ est orthogonale à Δ_1 et Δ_2 en O. Dans le plan P, menons par O une droite D quelconque distincte de Δ_1 et Δ_2.



On considère sur les droites Δ et D respectivement deux points distincts de O notés A et C. On considère sur Δ_1 et Δ_2 les points B et D tels que OBCD soit un parallélogramme de centre I.

D'après le théorème de la médiane dans la triangle OBD, on a :

$$OB^2 + OD^2 = 2OI^2 + \frac{BD^2}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Et d'après ce même théorème dans le triangle ABD, on a :

$$AB^2 + AD^2 = 2AI^2 + \frac{BD^2}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Les triangles AOB et AOD étant rectangles en O par hypothèse, on a en utilisant le théorème de PYTHAGORE : $AB^2 = AO^2 + OB^2$ et $AD^2 = AO^2 + OD^2$.

En substituant ces expressions dans (2), on obtient :

$$2AO^2 + OB^2 + OD^2 = 2AI^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Puis en tenant compte de (1): $2AO^2 + 2OI^2 + \frac{BD^2}{2} = 2AI^2 + \frac{BD^2}{2}$

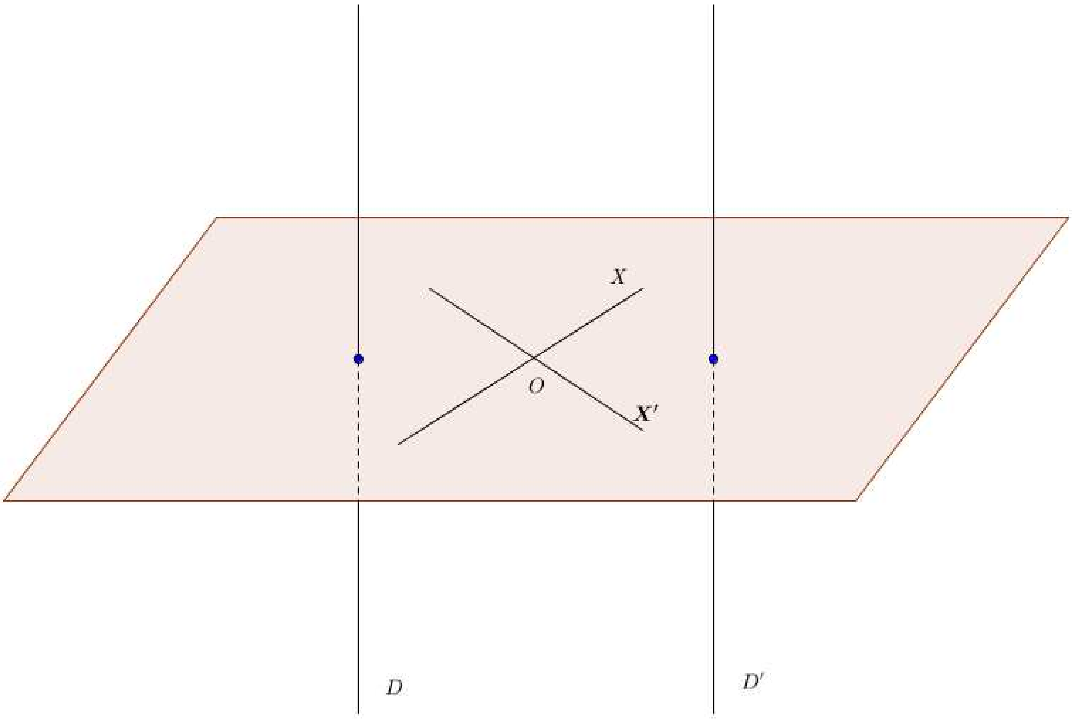
En simplifiant, il vient alors : $AO^2 + OI^2 = AI^2$.

On en conclut que Δ est orthogonale en O à D : Ainsi Δ est orthogonale à n'importe quelle droite D de P. C.Q.F.D.

Les théorèmes qui suivent sont des conséquences du théorème fondamental.

<u>Théorème 2</u> : Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

<u>Démonstration</u> : Soient deux droites parallèles D et D' et P un plan orthogonal à D. Soient X et X' deux droites sécantes du plan P.



D $\perp$ X $\Longrightarrow$ D' $\perp$ X (d'après le théorème 1, 1°).

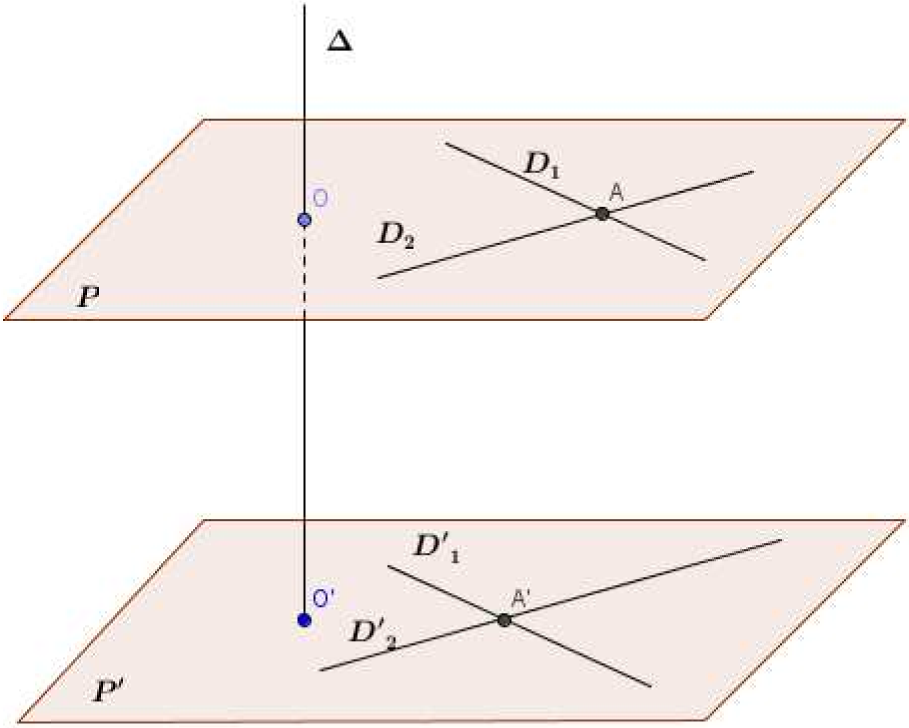
D $\perp$ X' $\Longrightarrow$ D' $\perp$ X' (d'après le théorème 1, 1°).

D' est donc orthogonale à deux droites séantes X et X' du plan P, d'où D' $\perp$ P, d'après le théorème fondamental.

<u>Théorème 3</u> : Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

<u>Démonstration</u> : Supposons que P // P' et $\Delta \perp$ P.

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en A et incluses dans P.

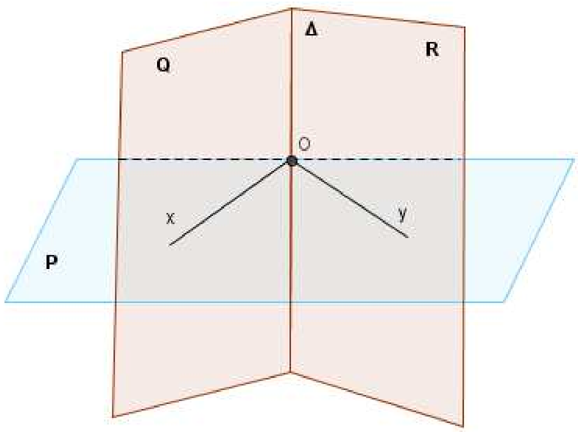


Leurs parallèles et D'_1 et D'_2, menées par un point A' de P', appartiennent à P'. Δ étant orthogonale à P est orthogonale à D_1, par définition, donc à D'_1 (d'après le théorème 1, 2°). De même, $\Delta \perp D_2 \Longrightarrow \Delta \perp D'_2$. Par conséquent, Δ est orthogonale à P' puisqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de P'.

<u>Théorème 4</u> : Par un point donné P, on peut mener un plan P et un seul orthogonal à une droite donnée Δ.

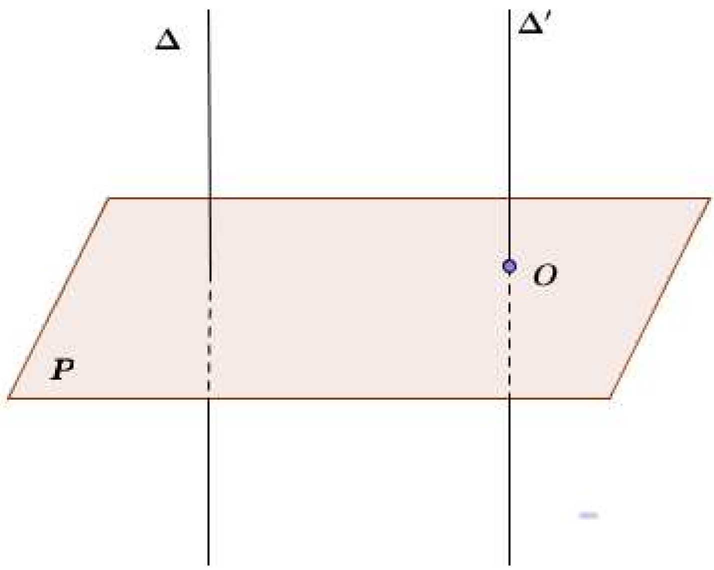
<u>Démonstration</u> : **<u>a) Existence</u>**

<u>1er cas : Le point O appartient à la droite Δ</u>



Soient Q et R deux plans sécants suivant la droite Δ. Dans le plan Q, il existe une droite unique passant par O et perpendiculaire à Δ (Théorème de géométrie plane). Notons-la Ox. De même, dans le plan R, une unique droite passant par O et perpendiculaire à Δ que nous noterons Oy. Le plan P = (Ox, Oy) est alors perpendiculaire à Δ.

<u>$2^{ème}$ cas : Le point O n'appartient pas à la droite Δ</u>



Soit Δ' la parallèle à Δ passant par O. D'après le premier cas, il existe un seul plan P passant par O et orthogonal à Δ'. Δ étant parallèle à Δ' et P orthogonal à Δ', il en résulte (théorème 2) que P est orthogonal à Δ. En outre, P passe par O.

b) <u>Unicité</u>

Supposons qu'il existe deux plans P_1 et P_2 passant par O orthogonaux à Δ. Comme ces deux plans sont distincts et ont un point commun, ils sont sécants suivant une droite Δ'. Soit P le plan défini par Δ_0 et Δ', où Δ_0 est la parallèle à Δ passant par O. P coupe P_2 suivant une droite Δ'' passant par O.

Δ_0 est orthogonale à P_2 car $\Delta \mathbin{//} \Delta_0$ et $\Delta \perp P_2$ (cf. théorème 2).

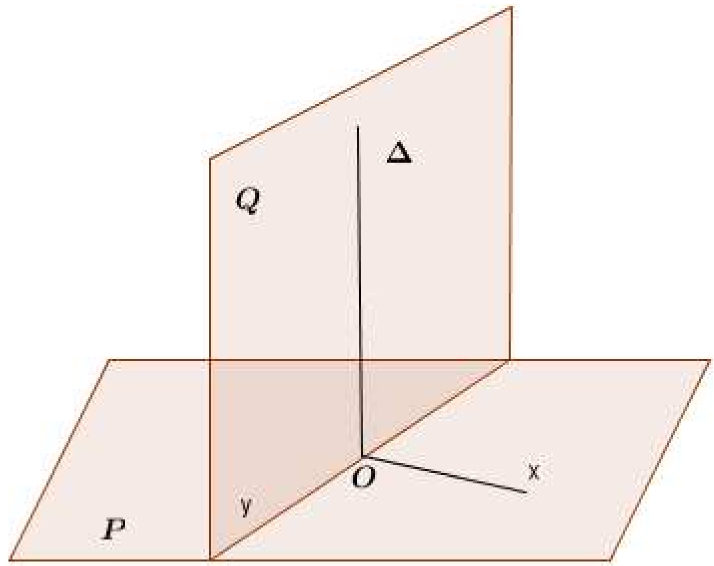
Donc $\Delta_0 \perp \Delta''$ et $\Delta_0 \perp \Delta'$ (car $\Delta' \in P_2$). Or, Δ_0, Δ' et Δ'' sont toutes trois des droites de P et Δ' et Δ'' sont sécantes en O : d'où une contradiction (deux droites d'un même plan orthogonales à une même troisième doivent être parallèles).

<u>Conséquence</u> : Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

En effet, si deux plans P_1 et P_2 étaient orthogonaux à une même droite Δ et sécants, soit O un point de $P_1 \cap P_2$. Par O passeraient deux plans P_1 et P_2 orthogonaux à Δ, ce qui contredit le théorème 4.

<u>Théorème 5</u> : Par un point donné O, passe un plan P et un seul orthogonal à une droite donnée.

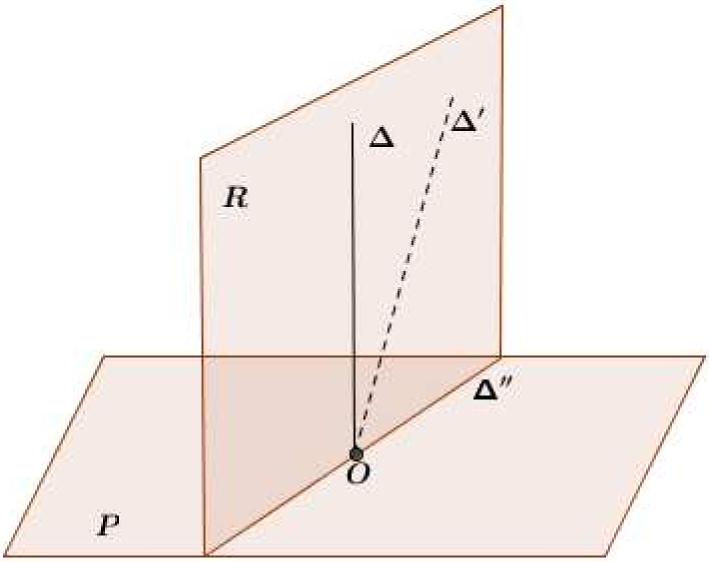
<u>Démonstration</u> : <u>1er cas : O ∈ P</u>



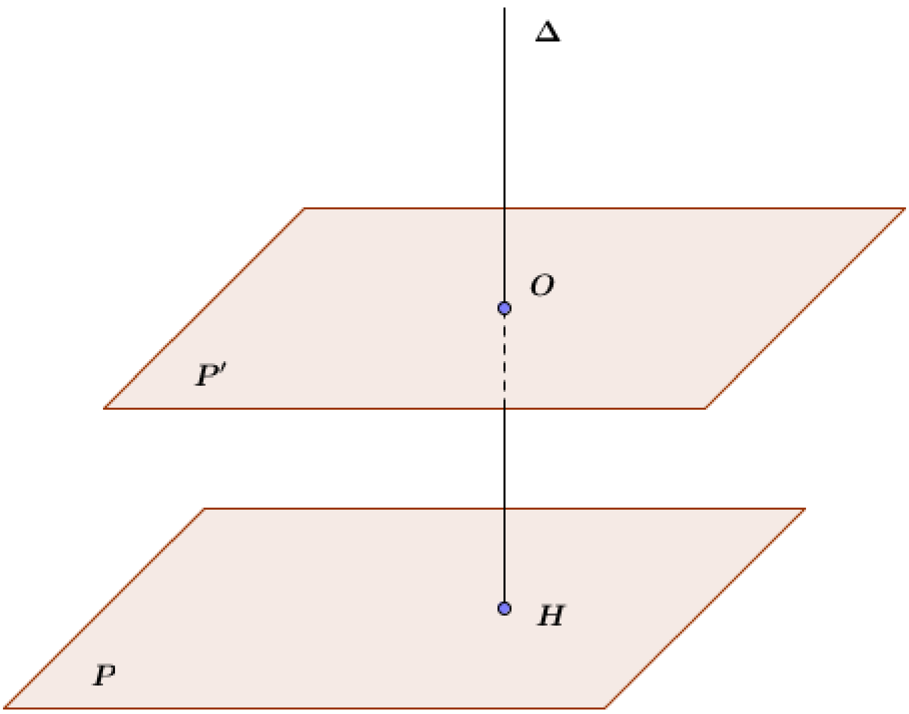
Soit Ox une droite quelconque de P. D'après le théorème 4, il existe un plan unique Q passant par O et perpendiculaire à Ox. Ce plan Q coupe P suivant une droite Oy. Dans ce plan Q, soit Δ la perpendiculaire à Oy passant par O. Δ est par construction perpendiculaire aux deux droites sécantes Ox et Oy du plan P, donc $\Delta \perp P$.

Supposons qu'il existe une autre droite Δ' distincte de Δ et perpendiculaire en O au plan P. (cf. Figure ci-dessous). Δ et Δ' détermineraient un plan R qui couperait P suivant une droite Δ'' passant par O. Dans ce plan R, on aurait :

$\Delta'' \perp \Delta$ et $\Delta'' \perp \Delta'$: ceci est absurde car Δ et Δ' sont deux droites sécantes (en O) du plan R.



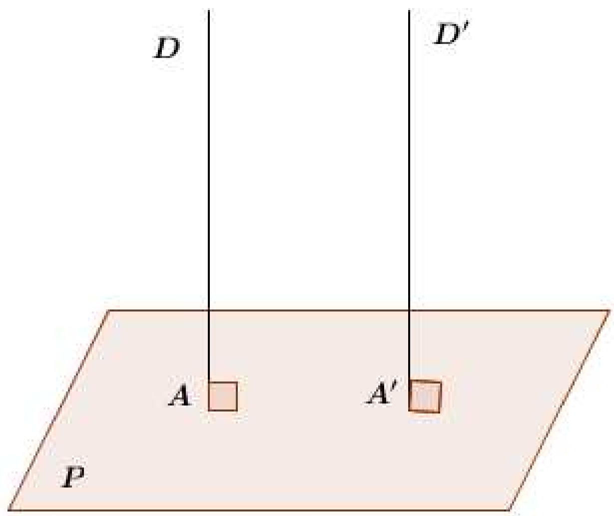
2ème cas : $O \notin P$



Soit P’ le plan passant par O et parallèle à P. D’après le 1er cas, il existe une unique droite Δ passant par O et parallèle à P’. Δ est perpendiculaire à P (d’après le théorème 3). Toute autre droite perpendiculaire à P est perpendiculaire à P’, donc est confondue avec Δ.

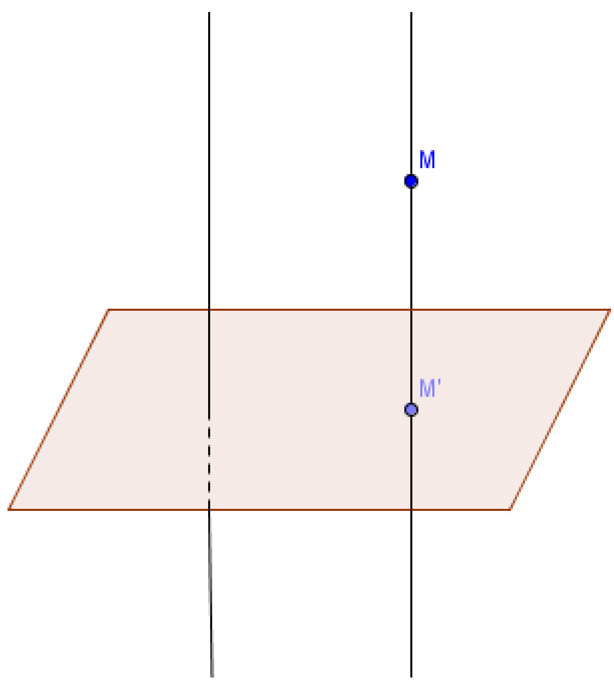
Conséquence : Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

En effet, si D et D’ sont perpendiculaires à P en A et A’ respectivement, soit Δ_1 la parallèle à D passant par A’. Alors Δ_1 est perpendiculaire au plan P (d’après le théorème 2), donc confondue avec D’ (puisqu’il n’existe qu’une seule perpendiculaire en A’ à P). En d’autres termes, D et D’ sont parallèles.

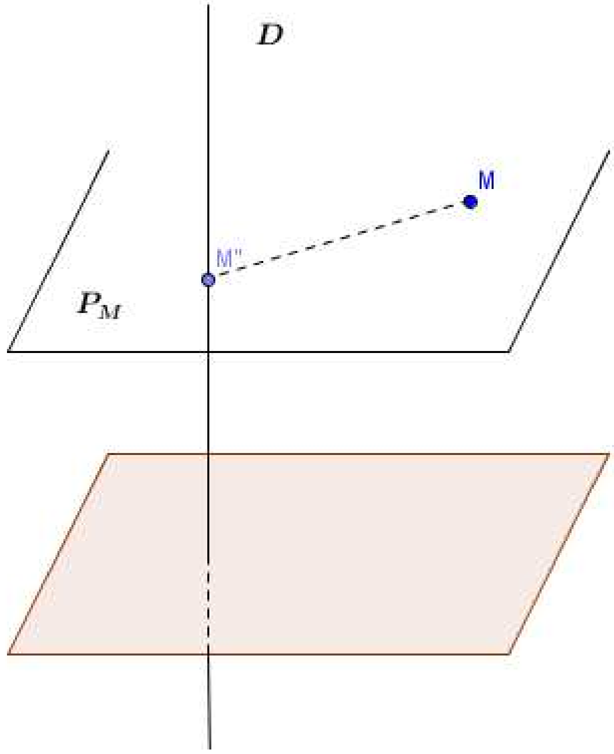


Les théorèmes 4 et 5 nous permettent de définir la notion de projection orthogonale dans l’espace. Il y a deux cas :

<u>Définition 1</u> : Soit M un point quelconque de l’espace et P un plan donné. Il existe (d’après le théorème 5) une droite D_M et une seule passant par M et orthogonale à P. D_M perce P en un point M’. M’ est, par définition le **projeté orthogonal du point M sur le plan P**.

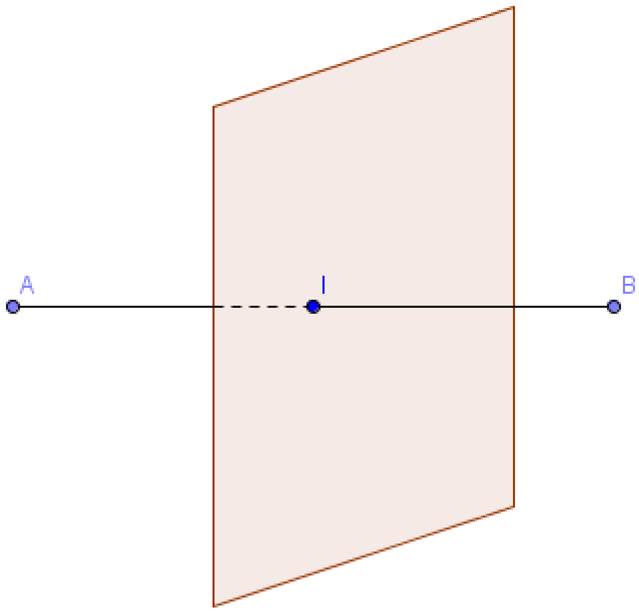


Définition 2 : Soit M un point quelconque de l'espace et D une droite donnée. Il existe (d'après le théorème 4) un plan P_M et un seul passant par M et perpendiculaire à D. P_M coupe D en un point M''. M'' est, par définition le **projeté orthogonal du point M sur la droite D**.



Nous définissons également la notion très importante de plan médiateur :

Définition 3 : Soient A et B deux points distincts de l'espace. Le **plan médiateur** du segment [AB] est le plan passant par I milieu de [AB] et orthogonal à (AB).



Théorème 6 : Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.

Démonstration : Il est clair que le point I appartient au plan médiateur de [AB] et que IA = IB. Soit M un point du plan médiateur de [AB] distinct de I. M, A, et B définissent un plan (car, par définition, le plan médiateur de [AB] n'a d'intersection avec la droite (AB) que le point I, donc M, A et B sont non alignés).

Plaçons-nous dans le plan (MAB). I appartient à ce plan et on a (MI) ⊥ (AB) (car (AB) est orthogonal par définition à toutes les droites du plan médiateur de [AB]). Donc (MI) est la médiatrice de [AB] dans le plan (MAB). D'où : **MA = MB**.

Réciproquement, supposons que : MA = MB et que M ne soit pas confondu avec I. Alors dans le plan (MAB), la droite (MI) est la médiatrice du segment [AB], donc **(MI) est orthogonale au segment [AB].**

Exercice : Soit G barycentre de {(A,2) , (B,1) , (C,-1)} et K barycentre de {(A,2) , (B,-1) , (C , 1) }. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

Réponse : On trouve le plan médiateur de [GK].

4. VECTEUR NORMAL A UN PLAN

Définition : On appelle **vecteur normal** à un plan P tout vecteur directeur d'une droite D orthogonale à P.

Théorème 7 : Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Démonstration : « ⟹ » : Supposons que P et P' soient parallèles. Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs directeurs de D et D' orthogonales à P et P' respectivement.

On a : (D ⊥ P et P // P') ⟹ (D ⊥ P') (d'après le théorème 3).

Et : (D ⊥ P' et D' ⊥ P') ⟹(D // D') (d'après la conséquence du théorème 5).

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont donc colinéaires.

« $\Leftarrow$ » : Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs normaux à P et P' tels que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ soient colinéaires. Il existe deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

D et D' sont alors parallèles. Et puisque D' $\perp$ P', on a D $\perp$ P' (théorème 2).

D'autre part, (D $\perp$ P et D$\perp$ P') $\Longrightarrow$ (P // P') (conséquence du théorème 4).

5. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et O un point donné. Il existe (d'après l'Axiome d'EUCLIDE) des points A et B (uniques) tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

On appelle alors **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ dans le plan (OAB) (H étant le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

Nous admettrons que cette définition est indépendante du point O choisi.

Théorème 8 :

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et tout réel k, on a :

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ b) $\vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, on a :

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Nous admettrons que ces propriétés sont vraies même si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Définition : On appelle **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ le réel $\vec{u}.\vec{u}$ noté $\vec{u}^2$.

Théorème 9 : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ et $\vec{u}^2 = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Définition : Dans l'espace, la **norme** du vecteur $\vec{u}$ est, par définition $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Théorème 10 :

1) Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

2) $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\, \|\vec{u}\|$.

4) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
5) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
6) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
7) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
8) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration : Les trois premiers résultats sont des conséquences de la définition de la norme. Les suivantes se démontrent, comme dans le plan en prenant des représentants des vecteurs et en utilisant les propriétés du produit scalaire admises au théorème 8.

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

N.B Comme dans le plan, on note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriétés :

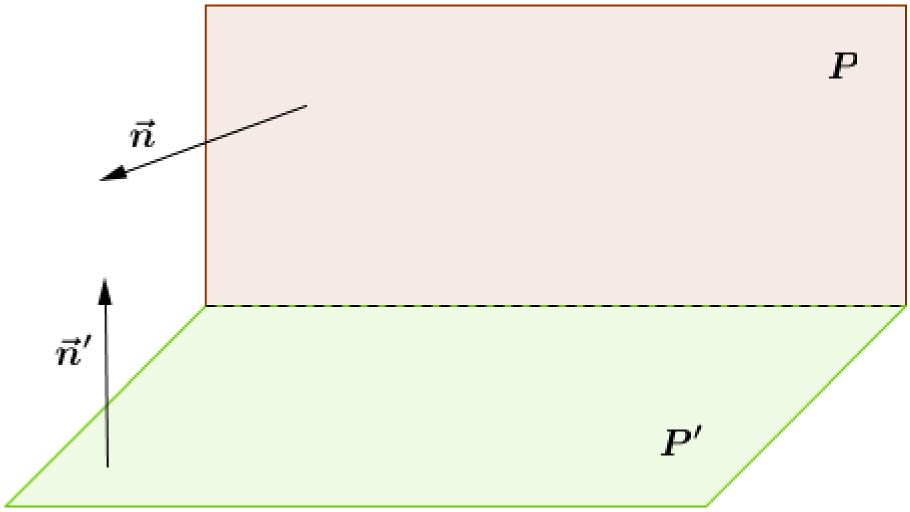
1) $\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, (\lambda\vec{u}) \perp (\mu\vec{v})$
2) Deux droites D et D' sont orthogonales si et seulement si il existe un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{u}'$ de D' tel que $\vec{u} \perp \vec{u}'$.
3) Une droite D est orthogonale à un plan P si et seulement si il existe un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ de P tels que $\vec{u} \perp \vec{u}'$ et $\vec{u} \perp \vec{u}''$.
4) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration : Ces propriétés sont des conséquences de la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs ainsi que des résultats déjà établis sur l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ou celle de deux droites.

6. PLANS PERPENDICULAIRES

Définition : Deux plan P et P' sont dits **perpendiculaires** s'il existe un vecteur normal $\vec{n}$ de P et un vecteur normal $\vec{n}'$ de P' tels que $\vec{n} \perp \vec{n}'$.

Remarque : Deux plans perpendiculaires sont sécants.



En effet, avec les notations précédentes, si P était parallèle à P', $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ seraient colinéaires. Or $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non nuls et orthogonaux : contradiction.

Théorème 11 : Deux plan sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Démonstration : « $\Longrightarrow$ » : Supposons que P et P' soient perpendiculaires et soit $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ des vecteur normaux respectifs à P et P'. Soit A un de leurs points communs (A ∈ P ∩ P'). Soit D la droite définie par A et $\vec{n}$, D' la droite définie par A et $\vec{n}'$. Alors les droites D et D' sont orthogonales. Soit π le plan (D, D').

π coupe P suivant une droite δ passant par A. D ⊥ P, donc D ⊥ δ. D ⊥ δ, D ⊥ D' et toutes trois sont coplanaires et passent par A : donc D' = δ.

Donc D' ⊥ P et D' ⊥ P'.

« $\Longleftarrow$ » : Supposons que P contienne une droite Δ orthogonale à P'. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ. Alors $\vec{u}$ est un vecteur normal à P'. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à P. Alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de la direction de P, donc en particulier à $\vec{u}$.

Remarques : **1)** Si P ⊥ P', toute droite D orthogonale à P et toute droite D' orthogonale à P' sont orthogonales.

2) Par contre toute droite de P n'est pas nécessairement orthogonale à toute droite de P'.

7. REPERES ORTONORMES DE L'ESPACE

<u>Définition :</u> Une **base** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est dite **orthonormée** si et seulement si :
$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = \vec{0}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.
Un **repère orthonormé** de $\mathscr{E}$ est un quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où O est un point de $\mathscr{E}$ et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée.

<u>Théorème 12</u> : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans ce repère.
Alors on a : $\vec{u} \,.\, \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>Démonstration</u> : D'après les propriétés du produit scalaire vues au théorème 8, on a : $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}) = (xx')\vec{\imath}^2 + (yy')\vec{\jmath}^2 + (zz')\vec{k}^2 + (xy' + yx')\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}$

$+ (yz' + zy')\,\vec{\jmath}.\vec{k} + (xz' + zx')\,\vec{k}.\vec{\imath}$.

D'où la première égalité, puisque $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

La deuxième égalité provient de la relation $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

<u>Corollaire</u> :

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base orthonormée $\mathscr{B}$. Alors :

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0.$$

2) Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$. Alors, on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Ces relations permettent de traduire analytiquement certains problèmes difficiles de géométrie. Notamment, elles vont nous permettre de déterminer l'équation d'une sphère.

Définition : Dans l'espace, la sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que ΩM = R.

Théorème 13 : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est caractérisée par l'équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Démonstration : M(x, y, z) ∈ $\mathscr{S}$ ⇔ ΩM² = R². Le résultat découle alors du corollaire du théorème 12.

Corollaire : L'espace étant rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient une relation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \text{ (1)}$$

est soit une sphère, soit réduit à un point, soit l'ensemble vide.

Démonstration : L'équation (1) s'écrit en considérant les termes en x, en y et en z comme des débuts de carrés :

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + d = 0,$$

soit après transposition :

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d. \text{ (2)}$$

Désignons alors par K le second membre de (2) et par Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$. (2) s'écrit : ΩM² = K (3).

• Si K est strictement négatif, alors il n'existe aucun point M vérifiant (3).

• Si K = 0, l'ensemble des points M vérifiant (3) est {Ω}.

• Enfin, si K est strictement positif, l'ensemble des points M vérifiant (3) est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{K}$ d'après le théorème 13.

Nous avions vu au chapitre 6 que tout plan P est caractérisé par une équation cartésienne. La connaissance d'un vecteur normal à P permet de déterminer cette équation d'une manière très simple.

Théorème 14 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, tout plan P de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Démonstration : Soit A(x_0, y_0, z_0) ∈ P. On a vu (cf. propriété 4° suivant le théorème 10) que M(x, y, z) ∈ P ⇔ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$ = 0 ⇔ a(x − x_0) + b(y − y_0) + c(z − z_0) = 0.

⇔ ax + by + cz − $ax_0 - by_0 - cz_0$ = 0. Le résultat en découle en posant :

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Réciproquement, on a le résultat suivant :

Théorème 15 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M(x, y, z) dont les coordonnées vérifient une relation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

où a, b, c, d sont 4 réels fixés, et a, b et c non tous nuls, est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a, b, c)$.

Démonstration : Supposons par exemple $a \neq 0$. L'équation (1) est alors équivalente à : $a\left(x + \frac{d}{a}\right)$ + by +cz = 0 ⇔ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$ = 0 avec A $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ et $\vec{n}(a, b, c)$.

⇔ M appartient au plan passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Les formules analytiques du théorème 12 vont également nous permettre de caractériser le parallélisme et la perpendicularité de deux plans.

Théorème 16 : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), soit P et
P' les plans d'équations respectives :

P : $ax + by + cz + d = 0$ P' : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Alors

1) les plans P et P' sont parallèles si et seulement si les suites de nombres (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnelles.

2) Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

Démonstration : 1) D'après le théorème 15, les plans P et P' ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n}'(a', b', c')$. D'après le théorème 7, P est parallèle à P' si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, d'où l'équivalence.

2) Par définition des plans perpendiculaires, on a : P ⊥ P' ⇔ $\vec{n} \perp \vec{n}'$. D'où l'équivalence annoncée d'après l'expression analytique du produit scalaire.
Nous terminons en donnant la formule de la distance d'un point à un plan.

<u>Théorème 17</u> : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), la distance du point M_0 (x_0, y_0, z_0) au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(M, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

<u>Démonstration</u> : $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à P, donc le vecteur $\vec{n}_1$ défini par :
$\vec{n}_1 = \frac{a\vec{\imath}+\mathrm{b}\vec{\jmath}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ est normal à P et unitaire. Soit H_0(h_0, h_0', h_0'') le projeté orthogonal de M_0 sur P. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\overrightarrow{\mathrm{H_0M_0}}$ sont colinéaires, d'où
$\left|\vec{n}_1.\overrightarrow{\mathrm{H_0M_0}}\right| = \|\vec{n}_1\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{H_0M_0}}\right\| = \mathrm{H_0M_0}$. On en déduit que :

$$\mathrm{M_0H_0} = \frac{\left|a(x_0-h_0)+b\left(y_0-h_0{}'\right)+c\left(z_0-h_0{}''\right)+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d-(ah_0+bh_0{}'+ch_0{}'')\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Or, $ah_0 + bh_0{}' + ch_0{}'' = -\,d$ car $H_0 \in$ P. D'où le résultat.