

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**
Thème 2 **Fonctions**

LEÇON 12 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire veut monter un projet de construction de ferme. Pour ce fait le président encourage ses 45 membres à cotiser une somme de 1000 F par mois pendant 9 mois. Au bout de la première année, il compte ouvrir un compte et déposer cet argent dans une banque qui accorde un intérêt de 5% chaque année, sur tout montant resté immobilisé sur ce compte. Le budget primitif du projet s'élève à 623 000F.

Le président de la coopérative, en classe de première D désire savoir si pendant 4 années la coopérative pourra réunir ce montant grâce à la banque. Il recherche un procédé efficace pour effectuer les calculs nécessaires.

B-CONTENU DU COURS

I- GENERALITES

1- Définition

On appelle suite numérique toute fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{R} .

$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto U(n)$. L'image $U(n)$ de n est généralement notée U_n .

La suite numérique ainsi définie est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (U_n) .

U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite (U_n) .

Exemple

Parmi les fonctions suivantes, seule la fonction de la colonne C est une suite numérique

A	B	C
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto 2n - 1$	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n+3}$	$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n}$

2- Différentes présentations d'une suite

Une suite peut être définie par une formule explicite ou par une formule de récurrence.

a- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie dans \mathbb{R}^+ , pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) de terme général $U_n = f(n)$ est dite définie par une formule explicite.

Exemples :

- $U_n = 3n + 5$ et $V_n = \frac{2n^2+1}{n}$ sont des suites définies par des formules explicites.
- Soit la suite suivante : $W_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$. On a :

$$W_0 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 10 = 4 ; W_5 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 = \frac{157}{12} ; W_{10} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 = \frac{5117}{512}$$

b- Suite définie par une formule de récurrence

La suite (U_n) définie par la donnée :

- d'un terme (en général le 1^{er} terme)
- et d'une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

est dite suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 1 : $\begin{cases} P_1 = 3500 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n + 25 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence.

Soit la suite (V_n) définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 5 \end{cases}$$

On a :

$$V_1 = 2V_0 - 5 = 9;$$

$V_4 = 2V_3 - 5$. Il nous faut calculer V_3 .

$V_3 = 2V_2 - 5$; il nous faut calculer V_2 .

$$V_2 = 2V_1 - 5. \text{ On a donc } V_2 = 14; V_3 = 23 \text{ et enfin } V_4 = 41.$$

3- Représentation graphique d'une suite

a- Suite définie par une formule explicite

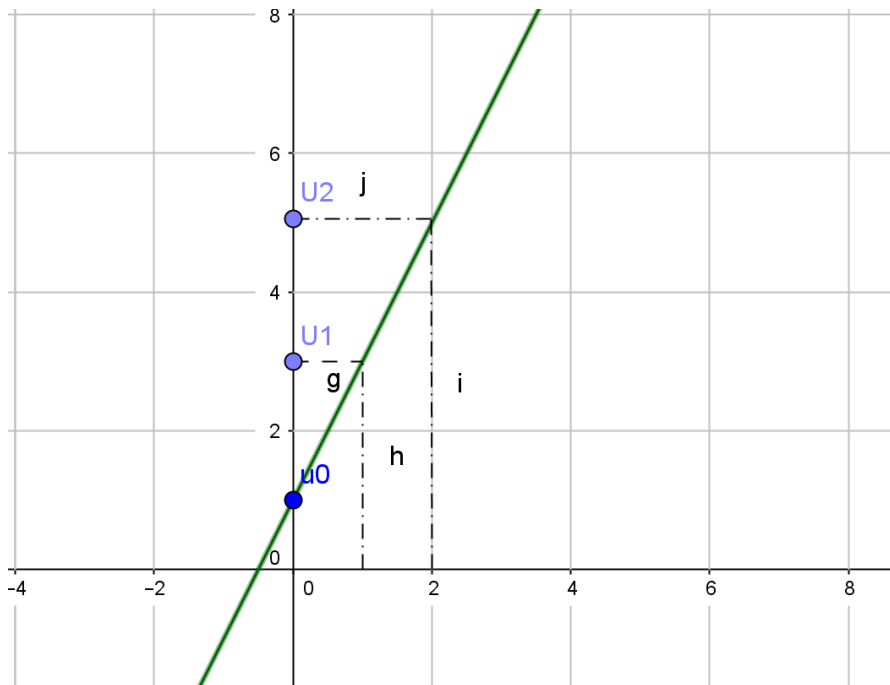
$$U_n = f(n).$$

Méthode :

- On représente (Cf) , la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n) .
- On détermine graphiquement $U_0=f(0)$; $U_1 = f(1)$; $U_2 = f(2)$; $U_3=f(3)$ etc.

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par : $U_n = 2n+1$.



b- Suite définie par une formule de récurrence : $U_{n+1}=f(U_n)$

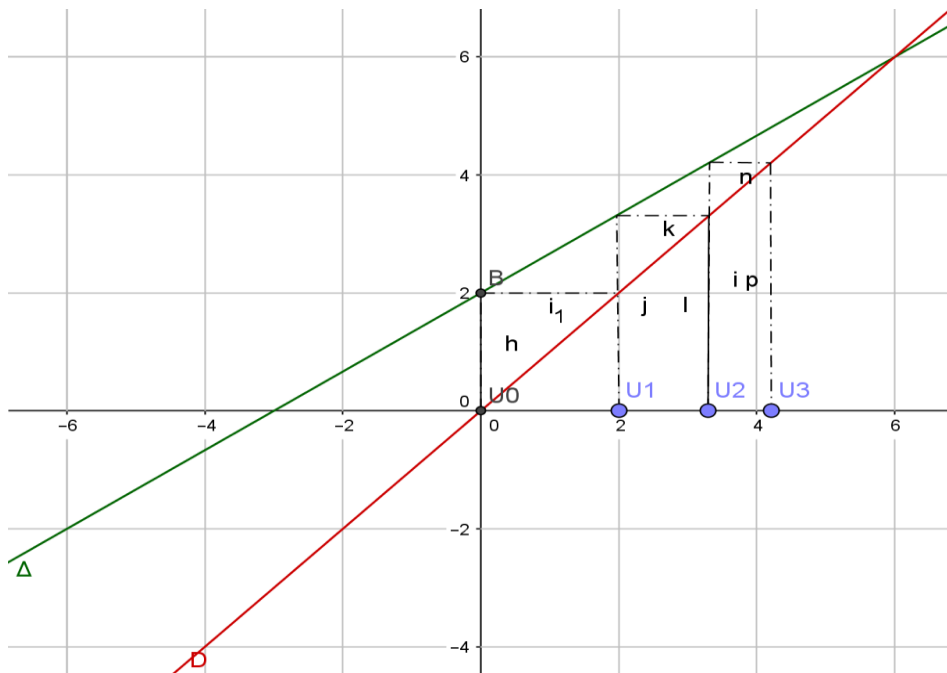
Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On trace la droite (Δ) d'équation : y = x (la première bissectrice)
- On marque U₀ sur l'axe des abscisses (OI).
- On Projette le point obtenu verticalement sur (Cf), on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI), on obtient U₁.
- Refaire ce même processus avec U₁ pour obtenir U₂.
- Et ainsi de suite...

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \end{cases}$$



II- SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

1- Suites arithmétiques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r.$$

* r est appelé la **raison** de la suite (U_n)

Exemples :

- Voici des exemples de suite arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 3 ; 3 \text{ est la raison et } U_0 \text{ le premier terme.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ est la raison et V_1 le premier terme.

- On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2}n - 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) - 3 = \frac{1}{2}n - 3 + \frac{1}{2}$. Donc $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (U_n) est arithmétique. Sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme est : $U_0 = -3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit n et k des entiers naturels ; (U_n) une suite arithmétique de raison r , on a :

$$U_n = U_k + (n-k)r$$

Cette forme est appelée terme général de (U_n)

Cas particuliers:

$$U_n = U_0 + n r$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Exercice de fixation

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $U_0 = 5$.

Exprime U_n en fonction de n .

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + (-4)n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 5 - 4n$.

c- Somme des termes consécutifs

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes

Conséquences :

- Si $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) alors $S = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$
- Si $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_j$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) , alors $S = (j - k + 1) \times \frac{(U_k + U_j)}{2}$

Exemples

- $S = 1+2+3+\dots+2020 = 2020 \times \frac{(1+2020)}{2} = 2\,041\,210$

- $S = 2+4+6+\dots+2n = n \times \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$
- $S = 1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$

- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 9 et de premier terme $U_0 = -2$.

Alors : Si on pose

1) $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. De 0 à $n-1$, on additionne n termes.

Donc $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. Soit donc $S = \frac{n(9n-13)}{2}$

2) $T = U_3 + U_4 + \dots + U_{77}$; de 3 à 77, on additionne $77 - 3 + 1 = 75$ termes.

Donc $T = \frac{75}{2}(U_3 + U_{77})$ soit $T = 26\,850$.

2- Suites géométriques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q U_n$

* q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple :

- Soit la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{array} \right. \text{ est une suite géométrique.}$$

- On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$.

Donc la suite (V_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et k un entier naturel inférieur à n .

On a : $U_n = q^{(n-k)} U_k$

Cas particuliers :

- $U_n = q^n U_0$
- $U_n = q^{n-1} U_1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_1 = 3$.

Exprime V_n en fonction de n .

Solution

$\forall n \geq 1, V_n = V_1 3^{n-1}$. Donc $\forall n \geq 1, V_n = 3^n$

c-Somme de termes consécutifs

Propriété

La somme S des n termes consécutifs d'une suite géométrique de 1^{er} terme a et de raison q est :

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

- Si $q = 1$ alors $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = (\text{nombre de termes}) \times (1^{\text{er}} \text{ terme})$;
 $S = n \times U_1$

- De façon générale : $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$$U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times (p+1) \quad \text{si } q = 1$$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Calcule la somme T suivante: $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$.

Solution

$T = V_1 + V_2 + \dots + V_7$; d'après une formule du cours, $T = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} \right)$; soit $T = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \right)$

$$T = \frac{1093}{2187}$$

C-SITUATION COMPLEXE

Chaque année, depuis 2010 la production d'un article de l'usine citoyenne O.B.V en Côte d'Ivoire subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.

Une étude de marché a montré que la production de cet article n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 56 000 articles

Les premiers responsables de cette usine désirent savoir à partir de quelle année la production de cet article ne sera plus rentable.

Elève en classe de 1^{ère} D, Ton professeur de mathématiques a son épouse qui travaille dans cette usine. Il présente la situation à la classe puis accorde un bonus de deux à chacun des trois premiers élèves qui trouveront la solution. Tu désires obtenir ce bonus.

Propose une solution argumentée à ce problème.

Proposition de solution

Pour aider à résoudre ce problème, je vais utiliser les suites numériques.

Je vais schématiser ce problème sous la forme d'une suite géométrique.

Je vais au fur et à mesure donner des valeurs à n afin de trouver une valeur inférieure à 56000.

La valeur qui me permettra de trouver une valeur inférieure à 56000 me permettra de trouver l'année et conclure.

Chaque année, la production subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée à ce problème. Alors le terme général de cette suite est :

$$U_{n+1} = U_n - \frac{3}{100}U_n = \frac{97}{100}U_n$$

Alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{97}{100}$ et de premier terme $V_0 = 65000$.

On a alors : $U_n = U_0 \times q^n = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^n$

En 2011, la production sera :

$$U_1 = 65000 \times \frac{97}{100} = 63050$$

En 2012, la production sera :

$$U_2 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^2 = 61158,5 \text{ Soit } 61159$$

En 2013, la production sera :

$$U_3 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^3 = 59323,7 \text{ Soit } 59324$$

En 2014, la production sera :

$$U_4 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^4 = 57544$$

En 2015, la production sera :

$$U_5 = 65000 \times \left(\frac{97}{100}\right)^5 = 55817,7 \text{ Soit } 55818$$

$55818 < 56000$ Alors la production ne sera plus rentable à partir de 2015.

D- EXERCICES

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

- 1- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = -2n + 7$ est une suite arithmétique.
- 2- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{2}{n} + 1$ est une suite arithmétique.
- 3- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3(2^n) - 1$ est une suite géométrique.
- 4- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n$ est une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1

- 1- Vrai
- 2- Faux
- 3- Faux
- 4- Vrai

Exercice 2

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* V_{n+1} = -5V_n \end{cases}$

Exprime V_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 2

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = -2 \times (-5)^{n-1}$$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = -5n + n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

Calcule les 5 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 3

$$U_0 = -5 \times 0 + 0^2 = 0 ; U_1 = -5 \times 1 + 1^2 = -4 ; U_2 = -5 \times 2 + 2^2 = -6 ; \\ U_3 = -5 \times 3 + 3^2 = -6 ; U_4 = -5 \times 4 + 4^2 = -4$$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} U_2 = 5 \\ \forall n \geq 2, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

Exprime U_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 4

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_2 = 5$ et de raison $r = -3$, alors :

$$U_n = U_2 + (n - 2) \times (-3) = 5 + (n - 2) \times (-3) = -3n + 11$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que : $U_6 = -3$ et $U_9 = -6$.

Détermine la valeur de r .

Correction de l'exercice 5

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite arithmétique, on a : $U_{n+1} = U_n + r$.

Par conséquent : $U_7 = U_6 + r$; $U_8 = U_7 + r$, en remplaçant U_7 par sa valeur, on obtient ;

$$U_8 = U_6 + 2r \text{ et donc ; } U_9 = U_6 + 3r = -3 + 3r = -6 \text{ d'où } r = -1.$$

Exercice 6

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que : $V_1 = -\frac{3}{2}$ et $V_3 = -\frac{27}{2}$.

Détermine les valeurs possibles de q .

Correction de l'exercice 6

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors $V_{n+1} = q \times V_n$ d'où $V_2 = q \times V_1$,

$V_3 = q \times V_2 = q^2 \times V_1$ par conséquent, on a $-\frac{27}{2} = q^2 \times (-\frac{3}{2})$; $q^2 = 9$. Conclusion $q = 3$ ou $q = -3$.

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 1$

- 1) Calcule les quatre premiers termes de cette suite.
- 2) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique.
- 3) Déduis-en le calcul de la somme des cents premiers nombres impaires.

Correction de l'exercice 7

- 1) $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$; $U_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$; $U_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$; $U_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
- 2) $U_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 1 + 2 = U_n + 2$ alors (U_n) est une suite arithmétique.
- 3) $S = \frac{(U_0 + U_{99})}{2} \times 100$. $U_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$; alors $S = 10000$.

Exercice 8

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* V_{n+1} = \frac{V_n}{1-V_n} \end{cases}$

Calcule les 3 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 8

$$V_1 = -2 ; V_2 = \frac{V_1}{1-V_1} = -\frac{2}{3} ; V_3 = -\frac{2}{5}$$

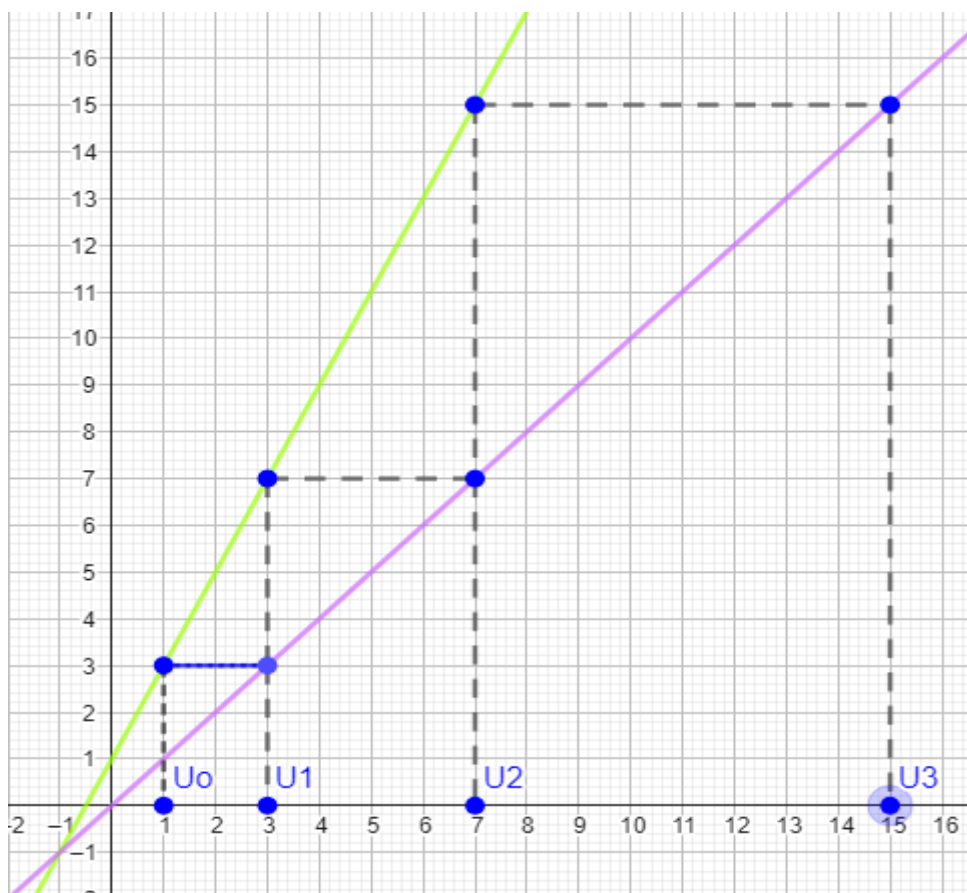
Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I, J)$.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Représente sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite

Correction de l'exercice 9



Exercice 10

Soit (t_n) la suite de terme général $t_n = -6n + 3$

Démontrez que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 10

$t_{n+1} = -6(n+1) + 3 = -6n - 6 + 3 = -6n + 3 - 6 = t_n - 6$, alors $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $t_1 = -6 \times 1 + 3 = -3$.

Exercice 11

Soit (P_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} P_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2P_{n+1} = 2P_n - 5 \end{cases}$

Démontrez que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 11

$2P_{n+1} = 2P_n - 5$ alors $P_{n+1} = P_n - \frac{5}{2}$; par conséquent $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $P_1 = P_0 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_n = 7 \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démontre que : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis précise le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 12

$U_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times 2 = 2U_n$; alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 7$.

Exercice 13

Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2V_{n+1} + 5V_n = 0 \end{cases}$

Démontre que : $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et précise le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 14

$2V_{n+1} + 5V_n = 0$ alors $2V_{n+1} = -5V_n$ d'où $V_{n+1} = -\frac{5}{2}V_n$ par conséquent $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $V_1 = -\frac{5}{2}V_0 = -5$.

Exercice 14

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 4$ et $U_{20} = 28$

- 1- Détermine la raison de cette suite
- 2- Calcule U_{18} puis en déduis U_{19}

Correction de l'exercice 14

- 1- (U_n) est une suite arithmétique, en utilisant la formule : $U_n = U_p + (n - p)r$ on a :
 $U_{20} = U_8 + (20 - 8)r$; $r = \frac{U_{20} - U_8}{(20 - 8)} = 2$
- 2- $U_{18} = U_{20} + (18 - 20)2 = 24$. En utilisant la formule $U_{n+1} = U_n + r$ on en déduit que : $U_{19} = U_{18} + 2 = 24 + 2 = 26$

Exercice 15

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

- 1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2
- 2- a) Démontre que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$
b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n
- 3- On pose $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
Exprime T_n en fonction de n

Correction de l'exercice 15

1- $U_1 = \frac{4U_0 - 9}{U_0 - 2} = \frac{4 \times 4 - 9}{4 - 2} = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{4U_1 - 9}{U_1 - 2} = \frac{10}{3}$; $V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = 1$; $V_1 = \frac{1}{U_1 - 3} = 2$;

$$V_2 = \frac{1}{U_2 - 3} = 3$$

$$2- a) V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{4U_n-9}{U_n-2}-3} = \frac{U_n-2}{U_n-3} = \frac{U_n-3+1}{U_n-3} = 1 + \frac{1}{U_n-3} = 1 + V_n ; \text{ alors } (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$.

$$b) V_n = V_0 + nr = 1 + n ; V_n = \frac{1}{U_n-3} \text{ alors } U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = \frac{1}{1+n} + 3 = \frac{4+3n}{1+n}$$

$$3- (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique alors : } T_n = \frac{(V_1+V_n) \times n}{2} = \frac{(2+1+n) \times n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$$

Exercice 16

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Exprime T_n puis S_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 16

$$1- U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = 5 ; U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{11}{3} ; V_0 = U_0 - 3 = 6 ; V_1 = U_1 - 3 = 2 ;$$

$$V_2 = U_2 - 3 = \frac{2}{3}$$

$$2- a) V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$$

Alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$.

b) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$, alors

$$V_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$V_n = U_n - 3 \text{ alors } U_n = V_n + 3 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$3- T_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times V_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \times 6 = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \text{ on a } V_n = U_n - 3 \text{ alors } U_n = V_n + 3$$

$$S_n = T_n + 3n = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n$$

Compétence 3

Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 1

Géométrie du plan

Leçon 8 : COMPOSEES DE TRANSFORMATIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

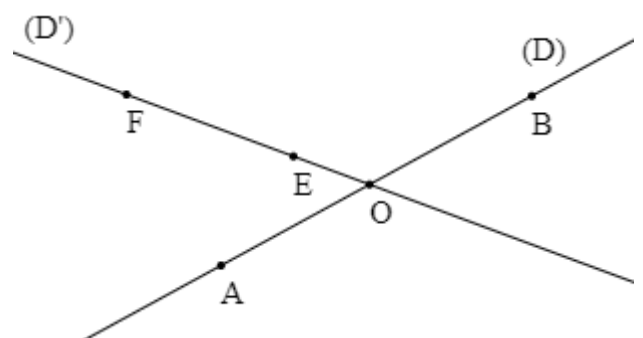
Des élèves de 1^{ère}C d'un lycée revenus d'un jeu de cracks sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre:

Sur la figure ci- contre, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O.

Il existe une l'homothétie h_A de centre A qui transforme O en B et il existe une l'homothétie h_O de centre O qui transforme F en E.

Les points A, O, B, E et F sont tels que : $\frac{AB}{AO} \neq \frac{OF}{OE}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$.



Ensemble les élèves de la classe veulent relever le défi. Pour cela ils décident de faire des recherches sur les composées d'homothéties.

B. Contenu du cours

I- COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS

1) Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et f est une application du plan dans lui-même.

Dans chacun des cas suivants, dis si f est une translation

1) $f(A) = C$ et $f(D) = B$

2) $f(A) = B$ et $f(D) = C$

3) $f(C) = B$ et $f(D) = A$

Corrigé

Comme ABCD est un parallélogramme alors :

1) On a $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$ donc f n'est pas une translation

2) On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc f est une translation

3) On a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ donc f est une translation

2) Composée de deux translations

Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(2; 1)$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

Corrigé

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Remarques

1) On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

2) Toute translation est une transformation (une bijection) du plan ; La transformation réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$

3) Expression analytique d'une translation

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. On a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

On dit que l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Exercice de fixation

Soit $A(-1; 4)$ un point du plan et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

Détermine les coordonnées du point A' , image de A par la translation de vecteur \vec{u} .

Corrigé

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ donc :

$$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + 2 \\ y_{A'} = y_A + 3 \end{cases}$$

On en déduit que : $A'(1; 7)$

II- COMPOSEE DE DEUX ROTATIONS

1) Composée de deux rotations de même centre

Propriété

Soient $r(O, \alpha)$ et $r'(O, \theta)$ deux rotations de même centre O et d'angles respectifs α et θ .
La composée $r(O, \alpha) \circ r'(O, \theta)$ est la rotation $R(O, \alpha + \theta)$.

Exercice de fixation

I est un point du plan, r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$; r' est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée : $r \circ r'$.

Corrigé

ror' est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Remarques

- 1) Etant donné deux rotations r et r' de même centre, on a : $r \circ r' = r' \circ r$.
- 2) Toute rotation est une transformation (une bijection) du plan. La transformation réciproque de la rotation $r(O, \alpha)$ est la rotation $r(O, -\alpha)$.

2) Composée de deux rotations de centres différents.

Propriété

Soient r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et θ .

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une translation**.

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} \neq \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une rotation** d'angle orienté $\alpha + \theta$.

Exercice de fixation

A et B sont deux points distincts du plan. r est la rotation de centre A et d'angle α , r' est la rotation de centre B et d'angle θ

Détermine la nature de $r \circ r'$ dans les cas suivants :

a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$ b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Corrigé

a) On a $(\frac{2\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3} = 2\pi = \hat{0}$: donc $r \circ r'$ est une translation

b) On a $(\frac{\pi}{3}) + \frac{-\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \neq \hat{0}$: or donc $r \circ r'$ est une rotation.

Remarques

1) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une translation alors son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par la rotation $r(A, \alpha)$.

2) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une rotation alors :

- on construit le point B' image du point B par la rotation $r(A, \alpha)$

- on marque un point E et on construit son image E' par $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$

- Si les segments $[BB']$ et $[EE']$ n'ont pas la même médiatrice alors le point d'intersection de leurs médiatrices est le centre de $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ sinon le centre est le point d'intersection des droites (EB) et $(E'B')$.

Exercice de fixation

ABCD est un carré de sens direct. On considère les rotations suivantes :

$$r_A = r(A, \frac{\pi}{2}), \quad r_B = r(B, -\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad r_D = r(D, \pi)$$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de :

a) $r_B \circ r_A$

b) $r_D \circ r_A$

Corrigé

a) On a $(\frac{\pi}{2}) + \frac{-\pi}{2} = \hat{0}$ donc $r_B \circ r_A$ est une translation

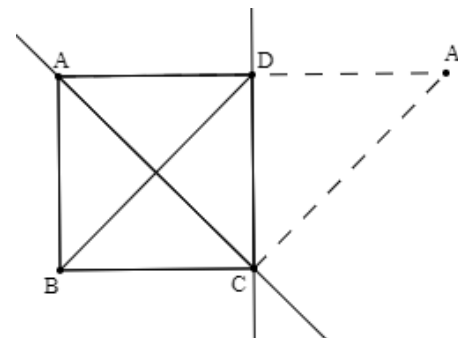
$r_A(A) = A$ et $r_B(A) = C$ donc $r_B \circ r_A(A) = C$ d'où $r_B \circ r_A = t_{\overrightarrow{AC}}$

b) On a : $(\frac{\pi}{2}) + \hat{\pi} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ or $-\frac{\pi}{2} \neq \hat{0}$ donc $r_D \circ r_A$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On a : $r_D \circ r_A(A) = A'$ telle que D est le milieu de $[AA']$ (voir figure) et $r_D \circ r_A(B) = D$.

La médiatrice du segment $[AA']$ est la droite (CD) et la médiatrice du segment $[BD]$ est la droite (AC) . $(CD) \cap (AC) = \{C\}$ donc

$$r_D \circ r_A = r(C, -\frac{\pi}{2}).$$



Remarques

- En général, la composée de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative ($r(A, \alpha) \circ r(B, \theta) \neq r(B, \alpha) \circ r(A, \theta)$).
- Toute rotation d'angle π est une symétrie centrale

III- COMPOSEE DE DEUX HOMOTHETIES

1- Composée de deux homothéties de même centre

Propriété

Soient h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' .

La composée $h \circ h'$ est l'homothétie de centre O et de rapport kk' .

Remarques.

On a : $h \circ h' = h' \circ h$

On dit que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les affirmations ci-dessous, indique celle qui est correcte.

A est un point du plan. La composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est :

- Une rotation de centre A
- L'homothétie de centre A et de rapport $\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2}\right)$
- L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

solution

L'affirmation correcte est c)

Exercice 2

I est un point du plan

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée : $h\left(I, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(I, -\frac{2}{3}\right)$.

Solution

$h\left(I, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(I, -\frac{2}{3}\right)$ est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{3}$

2 Composée de deux homothéties de centres différents

Propriété

Soient $h(A, k)$ et $h'(B, k')$ deux homothéties de centres différents A et B.

- Si $kk' = 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une translation**.
- Si $kk' \neq 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une homothétie** de rapport kk' .

On dit que la composée de deux homothéties de centres différents est soit une homothétie, soit une translation.

Remarques

On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :

- 1) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par $h(A, k)$.
- 2) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) des centres A et B est globalement invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O. Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE').

Exercice de fixation

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées

Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses
1	O et O' sont deux points distincts du plan. La composée de l'homothétie de centre O et rapport -2 et de l'homothétie de centre O' et de rapport 4 est :	a) une translation
		b) une homothétie de rapport -8
		c) une rotation
2	A et B sont deux points distincts du plan. La composée $h(A, 3) \circ h(B, \frac{1}{3})$ est :	a) une homothétie
		b) une rotation
		c) une translation

Corrigé

1-b) ; 2- c)

Exercice 2

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs 2 et $\frac{3}{5}$

Justifie que $h \circ h'$ est une homothétie et précise son rapport

Corrigé

$h \circ h'$ est la composée de deux homothéties de centres distincts B et C et de rapports respectifs 2 et $\frac{3}{5}$

On a : $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \neq 1$ donc $h \circ h'$ est une homothétie de rapport $\frac{6}{5}$

Remarques

- De manière générale, $h(A, k) \circ h(B, k') \neq h(B, k') \circ h(A, k)$
- On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{MM'}$ où M' est l'image d'un point quelconque M par $h(A, k) \circ h(B, k')$.
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) est invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O . Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE') .

IV- COMPOSEE DE DEUX SYMETRIES ORTHOGONALES

1-composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites parallèles, $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ des symétries orthogonales d'axes respectives (D) et (D')

La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2OO'}$ où O est un point de (D) et O' le projeté orthogonal de O sur (D') .

Remarque

La composée $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2O'O}$

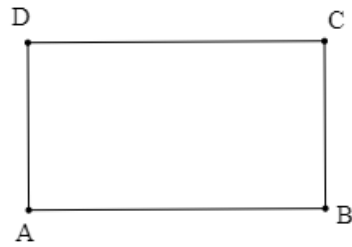
On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.

Exercice de fixation

ABCD est un rectangle

Donne la nature et l'élément caractéristique de chacune des composées suivantes :

- a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$
- b) $S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$
- c) $S_{(AD)} \circ S_{(BC)}$



Corrigé

- a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{CB}$
- b) $S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$
- c) $S_{(AD)} \circ S_{(BC)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$

2-composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v}

La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation

Cas particulier : lorsque les axes (D) et (D') sont perpendiculaires en O, la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la symétrie centrale de centre O. On a $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_O$

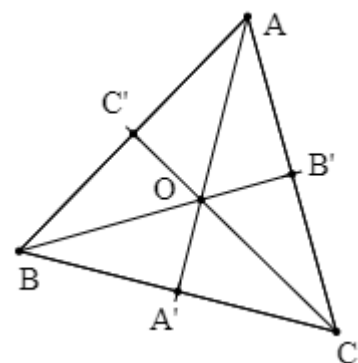
Exercice de fixation

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O .

On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Donne la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes :

- a) $S_{(AA')} \circ S_{(AB)}$
- b) $S_{(AA')} \circ S_{(BB')}$
- c) $S_{(CC')} \circ S_{(AB)}$



Corrigé

- a) (AA') et (AB) sont sécantes en A donc : $S_{(AA')} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}})$

Une mesure de $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})$ est $\frac{\pi}{3}$

$s_{(AA')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) (AA') et (BB') sont sécantes en O donc : $s_{(AA')} \circ s_{(BB')}$ est la rotation de centre O et d'angle

$2(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$. Une mesure de $2(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$ est $\frac{2\pi}{3}$. $s_{(AA')} \circ s_{(BB')}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

c) (CC') et (AB) sont sécantes en C' donc : $s_{(CC')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre C' et d'angle

$2(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C})$. Une mesure de $2(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C})$ est π . $s_{(CC')} \circ s_{(AB)}$ est la rotation de centre C et d'angle π

SITUATION COMPLEXE

Des élèves de 1^{ère}C d'un lycée revenus d'un jeu de cracks, organisé par le conseil municipal, sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre:

« Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O.

Il existe une l'homothétie h_A de centre A qui transforme O en B et il

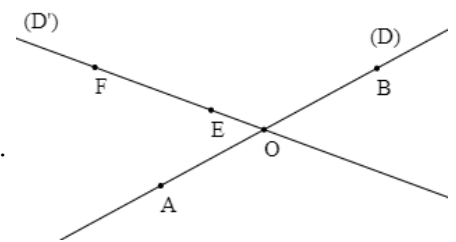
existe une l'homothétie h_O de centre O qui transforme F en E.

Les points A, O, B, E et F sont tels que : $\frac{AB}{AO} \neq \frac{OF}{OE}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$. »

Tu fais partie des trois élèves du groupe compétiteur et tu veux relever le défi.

Donne la solution l'exercice proposé au jeu.



Compétence 2

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 1

Organisation et traitements de données

Leçon 15 : STATISTIQUES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'équipe de course à pied d'un lycée a un nouvel entraîneur. Celui-ci vient de recevoir le tableau ci-dessous indiquant le temps mis par chacun des membres de l'équipe lors de la dernière épreuve de 10 km.

Nom	Temps (en min)
Agnero	53
Aka	51
Akalé	66
Allou	63
Amani	59
Ballo	61
Camara	48
Dago	41
Ehouman	47
Fallé	46

Nom	Temps (en min)
Goly	51
Gnali	60
Kassi	49
Koffi	46
Kouamé	44
Kouman	43
Lath	52
Lamine	39
Lohess	42
Manouan	53

Nom	Temps (en min)
Pakora	51
Sery	57
Seyo	62
Tiékoura	50
Traoré	43
Vanié	47
Yao	48
Yéo	56
Zadi	49
Zatto	61

Soucieux d'améliorer les performances de l'équipe, l'entraîneur expose ses décisions suivantes à l'équipe. « Je vais vous partager en cinq équipes de même effectif et de niveau équivalent (selon le temps mis lors de votre dernière épreuve).

Pour exposer les raisons de mon choix, je vais faire un affichage présentant une représentation graphique sous forme d'un histogramme.

Chacun des sportifs sera situé par rapport aux autres avec le classement, ainsi qu'une mise en évidence du premier quart, de la moitié et du troisième quart et des temps correspondants ».

Les élèves des classes de première scientifique faisant partie de l'équipe sont impatients de savoir dans quelles équipes ils seront et quelle est la situation de chacun par rapport aux autres.

Ils se mettent ensemble à organiser les données ci-dessus pour répondre à leurs préoccupations.

B. RESUME DE COURS

I. SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSES

1. Rappel

Lorsqu'il est question d'une série statistique regroupée en classes, on considère le tableau suivant :

Valeurs de X	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$[x_3; x_4[$...	$[x_p; x_{p+1}[$	TOTAL
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p	N
Centre	c_1	c_2	c_3	...	c_p	

- L'amplitude de la classe $[x_i; x_{i+1}[$ est $x_{i+1} - x_i$
- Le centre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Exemple :

On a relevé dans une agence bancaire les montants en milliers de francs des 49 premiers versements effectués au guichet. On a obtenu les résultats suivants :

950	300	100	800	200	30	75
250	600	260	150	45	490	400
200	375	360	620	130	1450	880
1025	560	350	450	400	280	190
1180	220	520	120	900	110	350
600	850	290	1400	125	900	1000
130	1100	430	950	45	310	590

Regroupons ces montants par classes d'amplitude 300, la première étant $[0 ; 300[$ et dressons le tableau des effectifs comportant les centres.

Classes	$[0 ; 300[$	$[300 ; 600[$	$[600 ; 900[$	$[900 ; 1200[$	$[1200 ; 1500[$
Effectifs	19	14	6	8	2
Centres	150	450	750	1050	1350

2. Densité

Définition

On appelle densité d'une classe, le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	25	20	15	17

Déterminons l'amplitude et la densité de chaque classe.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Amplitude	30	15	25	10	20	
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85	

La densité de la classe [0 ;30 [est $\frac{13}{30} = 0,43$

II. Caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes

1. Classe modale

Définition

On appelle classe modale toute classe dont la densité est maximale

Exemple

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17
Densité	0,43	1,33	1	1,5	0,85

La classe modale de cette série statistique est [70 ; 80[

Interprétation : La classe [70 ; 80[comporte la plus grande concentration de coopératives.

Cas particulier :

Si toutes les classes ont la même amplitude, alors une classe modale est une classe dont l'effectif est maximal.

2. Moyenne

La moyenne d'une série statistique, notée : \bar{x} , est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i c_i}{N} = \frac{1}{N} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_p c_p).$$

En utilisant les fréquences, on a :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p f_i c_i = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots + f_p c_p.$$

Exercice de fixation

Cette série statistique représente la production en tonnes de plusieurs coopératives de planteurs de cacao.

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[
Effectifs	13	20	25	15	17

Calcule la moyenne de la série statistique.

Solution

Classes	[0 ;30 [[30 ; 45[[45 ; 70[[70 ; 80[[80 ; 100[Total
Effectifs	13	20	25	15	17	90
Centre	15	37,5	57,5	75	90	
$n_i c_i$	195	750	1437,5	1125	1530	5037,5

$$n_1 c_1 = 13 \times 15 = 195$$

$$\text{La moyenne est : } \bar{x} = \frac{5037,5}{90} = 55,97$$

Interprétation

La production moyenne de l'ensemble des coopératives est 55,97 tonnes.

3. Médiane

Définition :

La médiane d'une série statistique continue est un nombre qui sépare les valeurs ordonnées de la série en deux familles de même effectif.

Autrement dit : c'est un nombre M tel qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Elle se détermine :

- Soit graphiquement : c'est l'abscisse du point de la courbe cumulative des effectifs (resp. fréquences) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5) ;

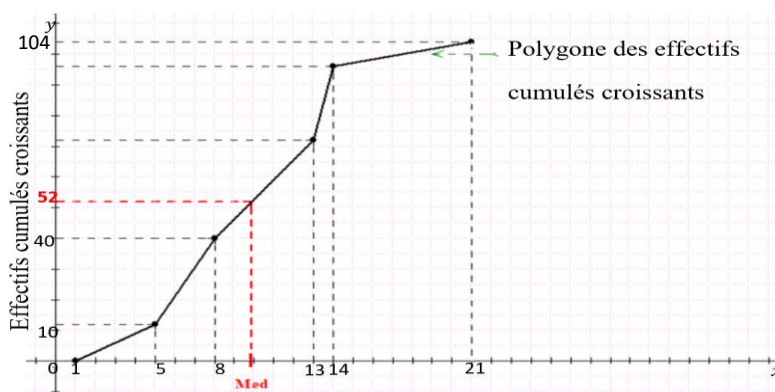
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1^{ère} C d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante :

Classes	[1 ; 5[[5 ; 8[[8 ; 13[[13 ; 14[[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



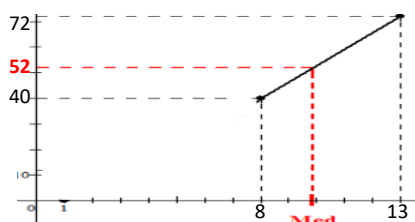
La médiane est environ égale à 9.

- La détermination de la médiane par calcul se fait par interpolation linéaire.

Exemple :

Considérons l'exemple précédent.

On a : $\frac{N}{2} = \frac{104}{2} = 52$; 52 est compris entre le 40^e rang et le 72^e rang. On a $Me \in [8 ; 13[$.



On obtient le tableau suivant :

Modalités (Abscisse)	8	Me	13
Ecc (Ordonnée)	40	52	72

Alors

$$\frac{Me-8}{13-8} = \frac{52-40}{72-40}, \text{ donc } Me = 9,87$$

Interprétation

La moitié des élèves a un nombre d'heures d'absences supérieur ou égal à 9,87.

Remarque : La médiane peut être déterminée graphiquement à l'aide du polygone des effectifs cumulés décroissants.

4. Quartiles

Définition :

Les valeurs de la série étant ordonnées :

- Le premier quartile, noté Q_1 , est la valeur de la variable telle que 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 et 75% lui sont supérieures.
- Le deuxième quartile Q_2 , est la médiane.
- Le troisième quartile, noté Q_3 , est la valeur de la variable telle que 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3 et 25% lui sont supérieures.

➤ Graphiquement,

- Q_1 correspond à 25% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
- Q_3 correspond à 75% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.

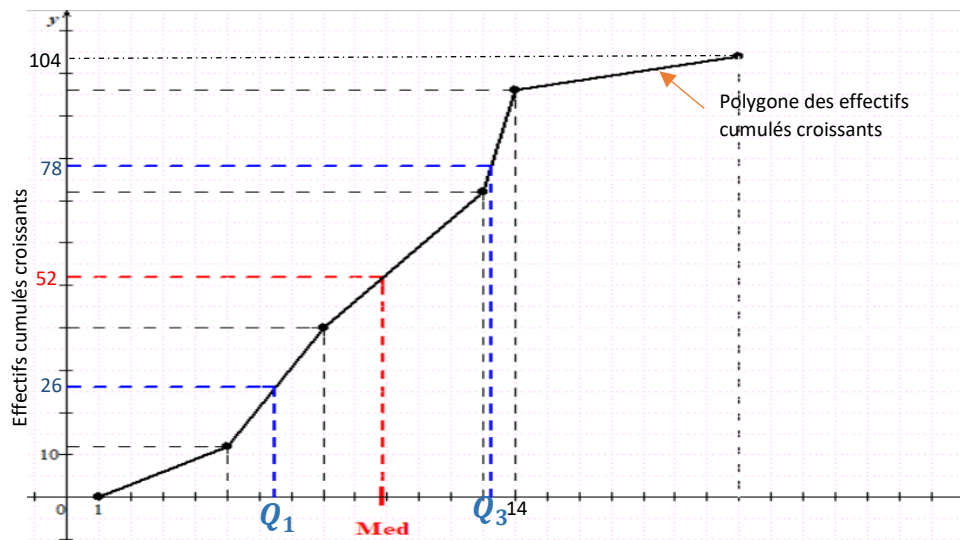
Exemple :

On a relevé le nombre d'heures d'absences de tous les élèves de 1^{ere}C d'un lycée durant l'année scolaire.

On a obtenu la série statistique suivante .

Classes	[1 ; 5[[5 ; 8[[8 ; 13[[13 ; 14[[14 ; 21[
Effectifs	12	28	32	24	8
Effectifs cumulés croissants	12	40	72	96	104

Le polygone des effectifs cumulés croissants est le suivant :



Le premier quartile est environ égal à 7.

Le troisième quartile est environ égal à 13.

➤ On peut calculer une valeur plus précise de Q_1 et Q_3 par interpolation linéaire.

Calculons le premier quartile

$N \times \frac{25}{100} = 104 \times \frac{25}{100} = 26$; 26 est compris entre le 12^e rang et le 40^e rang. On a $Q_1 \in [5; 8[$

Alors $\frac{Q_1-5}{8-5} = \frac{26-12}{40-12}$, donc $Q_1 = 6,5$

Calculons le troisième quartile

$N \times \frac{75}{100} = 104 \times \frac{75}{100} = 78$; 78 est compris entre le 72^e rang et le 96^e rang. On a $Q_3 \in [13; 14[$

Alors $\frac{Q_3-13}{14-13} = \frac{78-72}{96-72}$, donc $Q_3 = 13,25$

Interprétation

- 26 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 6,5.
- 78 élèves ont un nombre d'heures d'absences inférieur ou égal à 13,5

x

III. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1. Histogramme

- L'histogramme d'une série statistique regroupée en classes est constitué de rectangles juxtaposés.
- L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (resp. la fréquence) de la classe correspondante.
- Les largeurs des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes des classes.
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes

Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Modalité	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude					
Centre					
Densité					

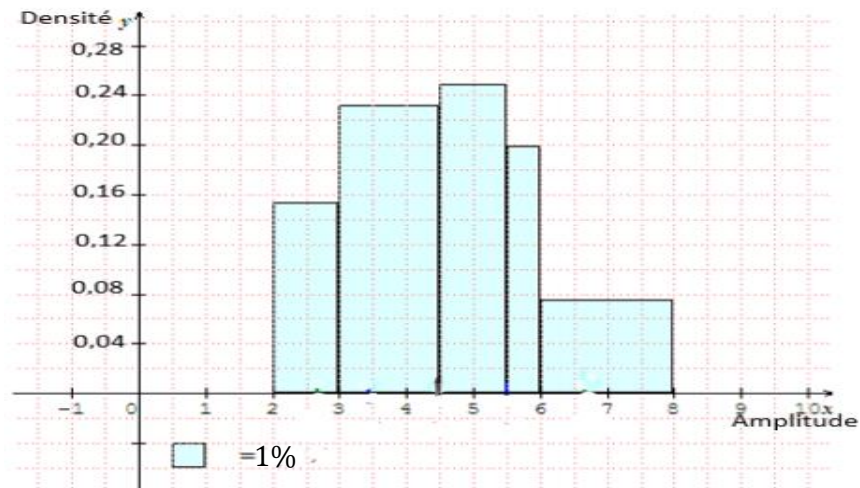
- a- Complète le tableau
b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

Solution

- a- Complétons le tableau

Modalité	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude	1	1,5	1	0,5	2
Centre	2,5	3,75	5	5,75	7
Densité	0,15	0,23	0,25	0,2	0,075

- b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique



La surface d'un petit carreau est $0,5 \times 0,02 = 0,01$ soit 1%

2. Polygones des effectifs et des fréquences

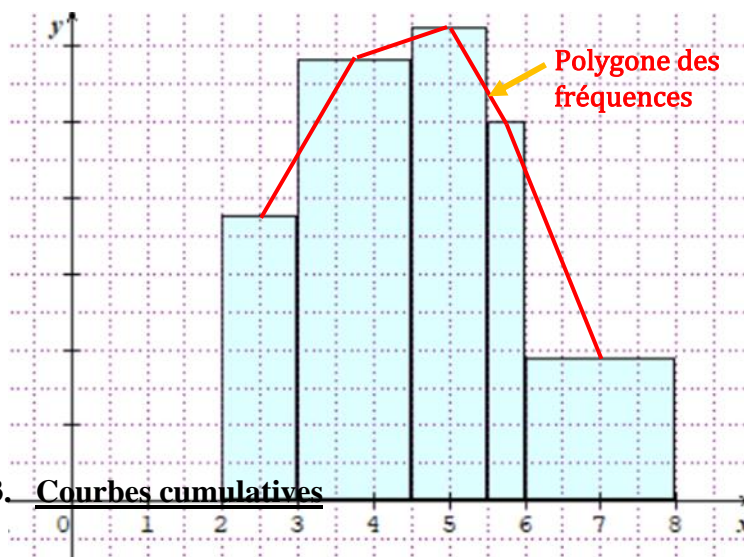
Le polygone des effectifs (resp. fréquences) est obtenu en joignant les milieux successifs des côtés les plus hauts de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice de fixation

Construis le polygone des fréquences de la série statistique dont l'histogramme des fréquences est donné ci-dessous.



Solution



3. Courbes cumulatives

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de la fonction F définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; N]$ telle que :

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}[$, F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i) = N_i$ et $g(x_{i+1}) = N_{i+1}$, où N_i est l'effectif cumulé croissant de $[x_i ; x_{i+1}[$ et N_{i+1} celui de $[x_{i+1} ; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = N$.

La courbe cumulative des fréquences est la représentation graphique de la fonction F définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que :

- Si $x \leq x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $g(x_i) = F_i$ et $g(x_{i+1}) = F_{i+1}$, où F_i est la fréquence cumulée croissante de $[x_i ; x_{i+1}[$ et F_{i+1} celle de $[x_i ; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = 1$.

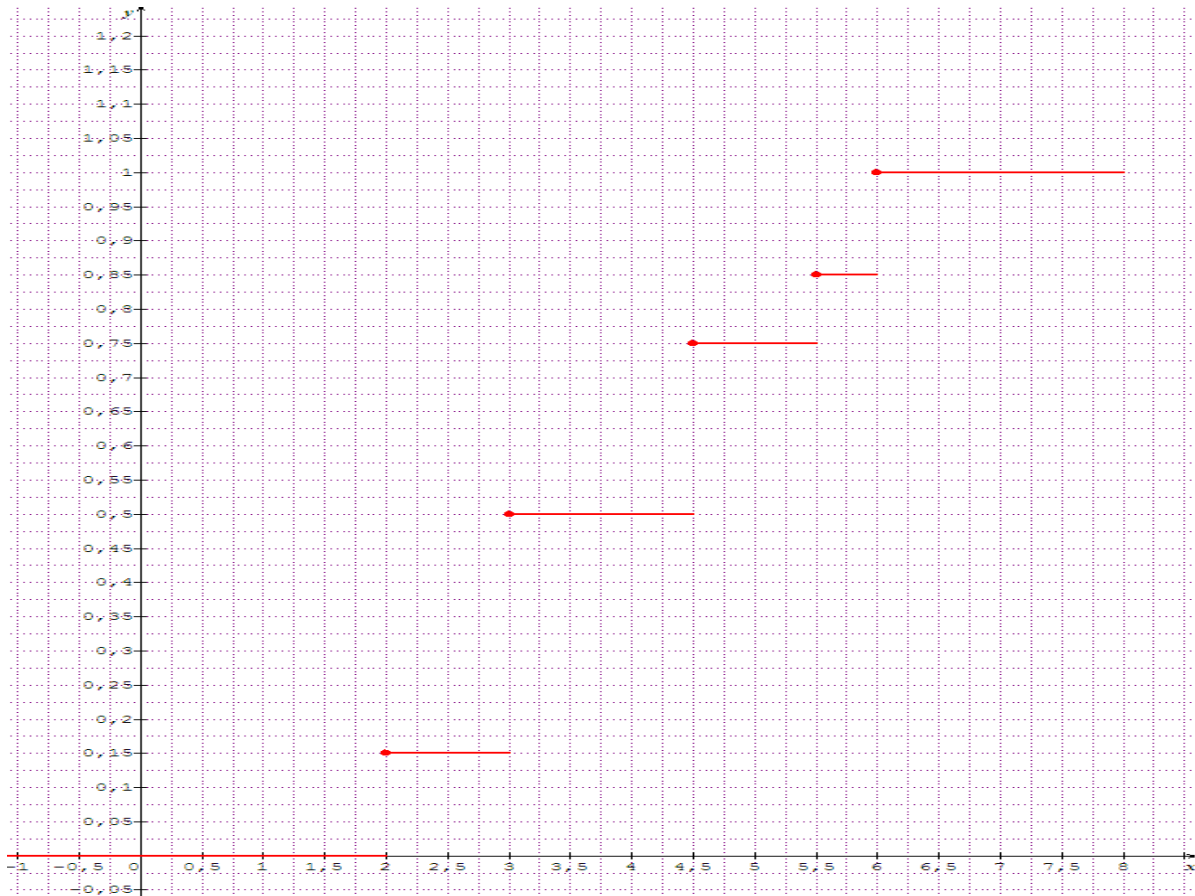
Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Classes	[2 ; 3[[3 ; 4,5[[4,5 ; 5,5[[5,5 ; 6[[6 ; 8[
Fréquences	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Fréquences cumulées	0,15	0,5	0,75	0,85	1

Construis la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

Solution



IV. CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIQUE REGROUPEES EN CLASSES

1. Variance

La variance d'une série statistique regroupée en classe, notée V, est donnée par la formule :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (c_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (c_p - \bar{x})^2 \right]$$

Autre formule :

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^p n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{N} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_p c_p^2) - \bar{x}^2$$

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

- a- Justifions que la moyenne est 39,84
 b- Calcule la variance de cette série.

Solution

Temps (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[Total
Effectif	35	41	30	12	5	2	125
Centre	10	30	50	80	120	170	
$n_i c_i$	350	1230	1500	960	600	340	4980
$n_i c_i^2$	3500	36900	75000	76800	72000	57800	322000

a/ la moyenne \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{4980}{125} = 39,84$$

b/ la variance V

$$V = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^6 n_i c_i^2) - (\bar{x})^2 = \frac{322000}{125} - (39,84)^2 = 988,77$$

2. Ecart type

L'écart type d'une série statistique, noté $\sigma = \sqrt{V}$.

Interprétation

Plus l'écart type est plus élevé, plus la dispersion des valeurs autour de la moyenne est plus élevée

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart type de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Centre	10	30	50	80	120	170

On trouve $V = 988,77$

L'écart type σ

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{988,77} = 31,44.$$

Interprétation

31,44 est élevé donc le temps que les élèves consacrent au sport par semaine dans la majorité n'est pas proche de la moyenne 39,84

3. Ecart absolu moyen

L'écart absolu moyen, noté e_m , est le réel :

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |c_i - \bar{x}| = \frac{1}{N} (n_1 \times |c_1 - \bar{x}| + n_2 \times |c_2 - \bar{x}| + \dots + n_p \times |c_p - \bar{x}|).$$

Interprétation

L'écart moyen nous indique la distance moyenne entre la moyenne et les valeurs de la série statistique

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart absolu moyen de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[Total
Effectif	35	41	30	12	5	2	125
Centre	10	30	50	80	120	170	
$ c_i - \bar{x} $	29,84	9,84	10,16	40,16	80,16	130,16	
$n_i c_i - \bar{x} $	1044,4	403,44	304,8	481,92	400,8	260,32	2895,68

On trouve la moyenne $\bar{x} = 39,84$

L'écart absolu moyen

$$e_m = \frac{1}{125} (35 \times |10 - 39,84| + 41 \times |30 - 39,84| + 30 \times |50 - 39,84| + 12 \times |80 - 39,84| + 5 \times |120 - 39,84| + 2 \times |170 - 39,84|)$$

$$e_m = \frac{2895,68}{125} = 23,17$$

Interprétation.

Le temps consacré à la pratique de sport par semaine d'un élève est à 23,17 min de la moyenne.

4. Ecart interquartile

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est le nombre $Q_3 - Q_1$.

Interprétation

50% des valeurs sont comprises entre le premier quartile et le troisième quartile .

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart interquartile de cette série et interprète le résultat.

Solution

Temps en (min)	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 100[[100 ; 140[[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2
Effectifs cumulés croissants	35	76	106	118	123	125

- On a $125 \times \frac{25}{100} = 31,25$.

31,25 est plus petit que la 35^e valeur. Donc $Q_1 \in [0 ; 20[$.

$$\frac{Q_1 - 0}{20 - 0} = \frac{31,25 - 0}{35 - 0} \text{ donc } Q_1 = 17,86$$

- On a $125 \times \frac{75}{100} = 93,75$.

93,75 est compris entre la 76^e et la 106^e valeur. Donc $Q_3 \in [40 ; 60[$.

$$\frac{Q_3 - 40}{60 - 40} = \frac{93,75 - 76}{106 - 76} \text{ donc } Q_3 = 51,83$$

L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 51,83 - 17,86 = 33,97$

Interprétation

L'étendue est 200.

L'interquartile est environ égale à 25% de l'étendue donc 50% des élèves ont leur temps consacré à la pratique du sport proche de la médiane.

C. SITUATION COMPLEXE

Le président du comité de gestion scolaire (COGES) de ton lycée veut acquérir une machine pour stocker sa récolte dans des sacs de 50 kg. Un commerçant lui propose deux machines, A et B, qu'il teste sur 80 sacs. Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

Classe	Machine A	Machine B	Classe	Machine A	Machine B
[49; 49,2[7	4	[49,8; 50[11	14
[49,2; 49,4[6	6	[50; 50,2[14	16
[49,4; 49,6[14	9	[50,2; 50,4[9	17
[49,6; 49,8[14	11	[50,4; 50,6[5	3

Un agent de l'agriculture du service qualité estime que la machine est bonne si les conditions suivantes sont simultanément réalisées :

- la moyenne \bar{x} doit être comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type σ doit être inférieur à 0,5 kg ;
- l'intervalle [49,3; 50,5] doit contenir 85% des sacs.

Sollicité par un membre du bureau du COGES pour le choix de la machine convenable, tu décides de répondre à la préoccupation de leur président en utilisant tes connaissances en mathématiques.

Compétence 1

Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème 1

Calculs algébriques

LEÇON 13 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS \mathbb{R}^2 ET DANS \mathbb{R}^3

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Trois élèves d'une classe de première D font des recherches sur les hydrocarbures. Ils découvrent le texte suivant :

« Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume de 70 cm^3 . Après le passage d'une étincelle, il se produit une réaction. Au retour dans les conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène ».

Impressionnés par les résultats de cette expérience, ils veulent déterminer les volumes respectifs des gaz qui composent le mélange initial.

Pour cela, ils décident d'apprendre à résoudre des systèmes d'équations dans \mathbb{R}^3 .

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS \mathbb{R}^2

1) Définition

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

On appelle déterminant du système (S), le nombre réel $ab' - a'b$. On le note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Exemple

Le déterminant du système (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ est : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13$

2) Propriété

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0).$$

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarque

Le système (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacun des systèmes ci-dessous, détermine le nombre de solutions.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases} .$$

Solution

$$\det(S_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0, \text{ donc } (S_1) \text{ admet exactement un couple de solutions.}$$

$$\det(S_2) = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0 . \text{ Soit } (S_2) \text{ n'admet pas de couples solutions, soit } (S_2) \text{ admet une infinité de couples solutions.}$$

3) Résolution d'un système de deux équations linéaires dans \mathbb{R}^2

Méthode

Un système de deux équations linéaires dans \mathbb{R}^2 , peut se résoudre :

- Par le calcul à l'aide de la substitution, de la combinaison ou du déterminant.
- Graphiquement.

Exemple 1 : Par le calcul à l'aide du déterminant

Résous les systèmes d'inconnue $(x; y)$ dans \mathbb{R}^2 :

a) $(S_1) : \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases}$

Le déterminant du système est :
 $D = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$

le couple $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ vérifie l'équation
 $3x + 15y + 2 = 0$ et ne vérifie pas l'équation

Donc le système (S_1) admet zéro solution ou plusieurs solutions.	$2x + 10y - 6 = 0$. Donc (S_1) n'admet aucun couple solution.
---	--

b) $(S_2): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7$ Donc le système (S_2) admet une seule solution.	$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17$ donc $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$. L'unique couple de solutions de (S_2) est $(\frac{1}{7}; \frac{17}{7})$.
---	---

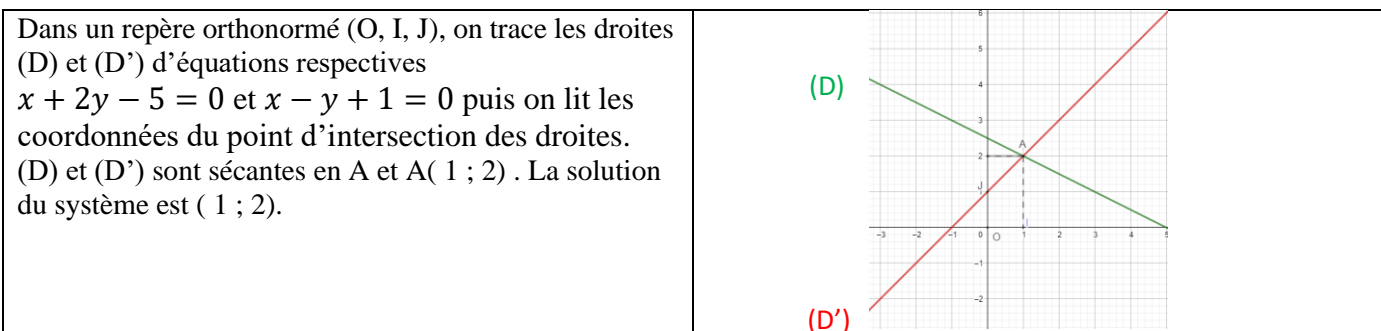
Synthèse : Cas général

S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Lorsque le déterminant $D \neq 0$, le système admet une unique solution. On calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ puis $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Exemple 2 : Graphiquement, résous le système $(S): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.



II. SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS \mathbb{R}^3

1) Définitions

• On appelle système linéaire de trois équations du premier degré à trois inconnues $(x; y; z)$, un système du

type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \\ a''x + b''y + c''z = m'' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', m, m'$ et m'' sont des nombres réels.

• Un système triangulaire d'équations dans \mathbb{R}^3 est un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ b'y + c'z = m' \\ c''z = m'' \end{cases}$

où $a, b, c, b', c', c'', m, m'$ et m'' sont des nombres réels.

Exemples

$(\Sigma_1) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ $(S) \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$

2) Résolution d'un système de trois équations linéaires dans \mathbb{R}^3

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans \mathbb{R}^3 , on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

a) Par substitution

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de substitution : $(\Sigma_1) \begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 2(2y + 3z - 9) + 5y - 3z = 0 \\ 2y + 3z - 9 + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 9y + 3z = 18 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ 3y + 5(6 - 3y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ -12y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; 1; 3)\}$

b) Par la méthode du pivot de Gauss

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss : $(\Sigma_2) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \quad (L_1) \\ 5x + 3y + z = 3 \quad (L_2) \\ 3x + y - 2z = -1 \quad (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \quad (L_1) \\ 0 + 28y + 36z = -12 \quad (L'_2) = (L_2) - 5(L_1) \\ 0 + 16y + 19z = -10 \quad (L'_3) = (L_3) - 3(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \quad (L_1) \\ 14y + 18z = -6 \quad (L'_2) \\ 16y + 19z = -10 \quad (L'_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \quad (L_1) \\ 14y + 18z = -6 \quad (L'_2) \\ 0 - 22z = -44 \quad (L''_3) = 14(L'_3) - 16(L'_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; -3; 2)\}$

C- SITUATION COMPLEXE

On propose un jeu à trois groupes d'élèves d'une classe de première D.

A ce jeu, les groupes peuvent solliciter une personne ressource. Le problème posé est le suivant : « un fermier élève des canards, des lapins et des dromadaires. Il compte le nombre de pattes de ses canards, de ses lapins et de bosses de ses dromadaires. Il trouve 130. Il compte le nombre de têtes de ceux-ci, et il trouve 46. Il compte ensuite le nombre d'oreilles des lapins et des dromadaires et trouve 38. Enfin, le fermier affirme avoir dénombré au moins 16 lapins et souhaite déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce. »

Tu es la personne ressource sollicitée, A L'aide de tes connaissances mathématiques aide ce fermier.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon : systèmes d'équations linéaires dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 pour cela nous allons :

- Traduire le problème en un système de 3 équations
- résoudre ce système et
- déterminer le nombre de canards de lapins et de dromadaire

Mise en équation : soit x le nombre de canards, y celui des lapins et z le nombre de lapins.

On a : $2x + 4y + z = 130$, $x + y + z = 46$, $2y + 2z = 38$ et $y \geq 16$

Ce qui nous conduit au système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 130 \\ x + y + z = 46 \\ y + z = 19 \\ y \geq 16 \end{cases}$$

On trouve $x = 27$, $y = 19$, $z = 0$

Donc ce fermier a 27 canards, 19 lapins et 0 dromadaire.

D- EXERCICES

Exercice 1

Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants, puis indique le nombre de solutions du système.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases} ; (S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases} ; (S_3) \begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = \sqrt{2} \\ 2x - 2\sqrt{2}y = -2 \end{cases}$$

Compétence 3 Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 2 Géométrie de l'espace

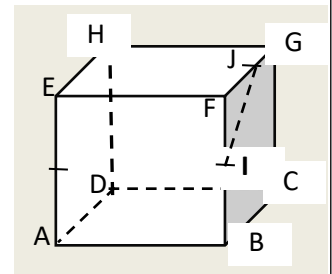
Leçon13 : ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Hermann, un élève en classe 1^{ère} D ne comprend pas pourquoi son frère aîné affirme que dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (HG) et (IJ) sont orthogonales ; avec I et J milieux respectifs de [FB] et [FG].

Afin de comprendre cette affirmation, Son professeur de mathématiques lui demande de faire des recherches sur les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace.



B- CONTENU DE LA LEÇON

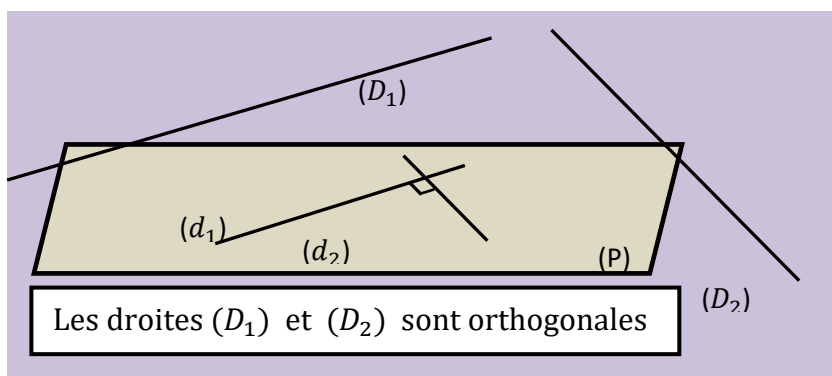
1. DROITES ORTHOGONALES DE L'ESPACE

a) Définition

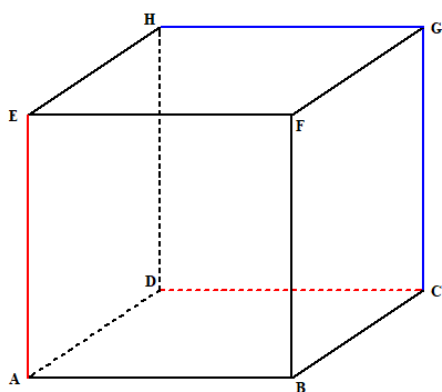
Dans l'espace (ε), deux droites (D_1) et (D_2) sont dites orthogonales lorsqu'il existe deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) telles que (D_1) est parallèle à (L_1) et (D_2) est parallèle à (L_2).

La droite (D_1) est orthogonale à la droite (D_2) se note : $(D_1) \perp (D_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_1) \text{ et } (L_2) \text{ perpendiculaires} \\ (D_1) \parallel (L_1) \\ (D_2) \parallel (L_2) \end{array} \right. \Rightarrow (D_1) \perp (D_2)$$



Exemple :



Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet, (GH) est perpendiculaire à (CG). De plus (GH) // (DC) et (CG) // (AE).

Remarque : le terme perpendiculaire ne s'utilise que lorsque les droites sont orthogonales et sécantes. Autrement dit, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

b) Propriétés

Propriété 1 :

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

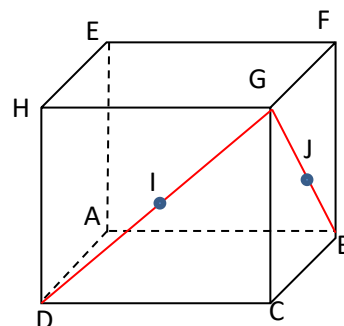
Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre :

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et

J est le milieu de [BG].

Démontrez que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.



Solution

Dans le triangle BDG, I est le milieu de [DG] et J est le milieu de [BG],

D'après le théorème des milieux (IJ) et (DB) sont parallèles.

Comme ABCD est un carré, alors ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Puisque (IJ) et (BD) sont parallèles et (AC) est orthogonale à (BD), alors (AC) est orthogonale à (IJ).

Remarque :

Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

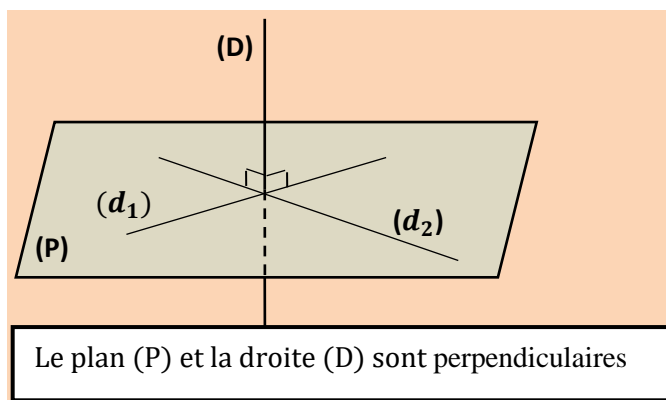
2. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

a) Définition

Dans l'espace, on dit qu'une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (P).

La droite (D) est perpendiculaire au plan (P) se note : $(D) \perp (P)$

$$\begin{cases} (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sécantes dans } (P) \\ (D) \perp (d_1) \\ (D) \perp (d_2) \end{cases} \Rightarrow (D) \perp (P)$$

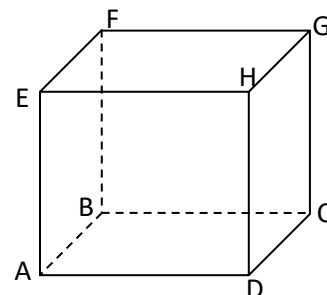


Exemple

On donne la figure ci-contre : ABCDEFGH est un cube.

(DH) est perpendiculaire au plan (EGH). En effet, $(DH) \perp (HE)$

et $(DH) \perp (HG)$. La droite (DH) est orthogonale à deux droites



sécantes en H incluses du plan (EGH), alors (DH) est perpendiculaire au plan (EGH).

b) Propriétés

Propriété 1 (propriété fondamentale) :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, justifie que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.

Solution : Comme (DH) est perpendiculaire au plan (EGH), Or $(EG) \subset (EGH)$, donc $(DH) \perp (EG)$.

Propriété 2 :

Il existe une unique droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de droites passant par le point B et perpendiculaire au plan GCD ?

Solution : Il existe une seule droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (GCD), c'est la droite (BC).

Propriété 3 :

Il existe un unique plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de plans passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) ?

Solution : Il existe un seul plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) c'est le plan (ABE).

Propriété 4 :

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Solution : la droite (AE) est parallèle à la droite (DH) et (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Propriété 5 :

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Exercice de fixation

Justifie que les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

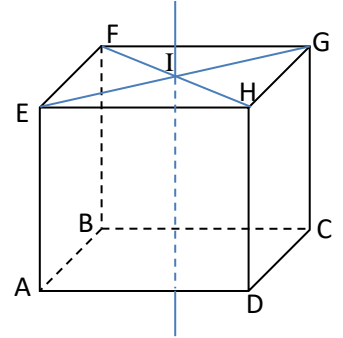
Solution : la droite (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). De même, on montre que (BF) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Propriété 6 :

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, la droite (D) est perpendiculaire aux droites (FH) et (EG) en I. Justifie que (D) est perpendiculaire au plan (ABD).



Solution

La droite (D) étant perpendiculaire aux droites (FH) et (EG), alors elle est perpendiculaire au plan (FGH). Or les plans (ABD) et (FGH) sont parallèles. Donc la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

Propriété 7 :

Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

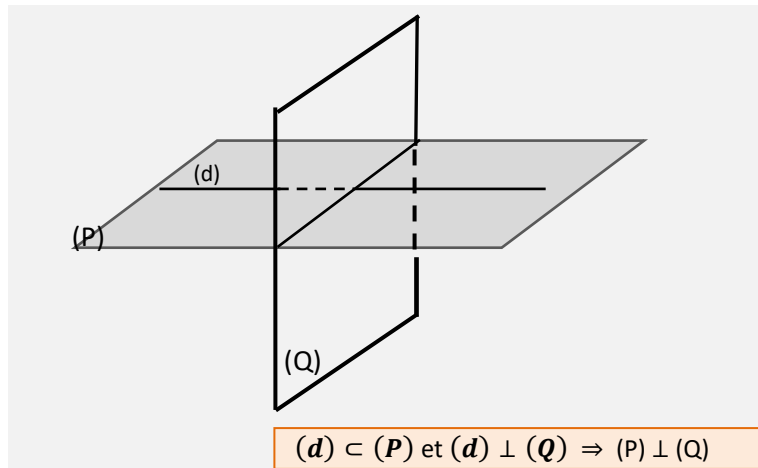
3. PLANS PERPENDICULAIRES DE L'ESPACE

a) Définition

Dans l'espace, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux est orthogonale à l'autre plan.

Le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) se note : $(P) \perp (Q)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (d) \text{ est une droite du plan } (P) \\ (Q) \perp (d) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



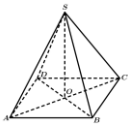
$$(d) \subset (P) \text{ et } (d) \perp (Q) \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

Exemple

On donne la pyramide régulière SABCD ci-dessous de hauteur [SO]

Démontrons que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

(AO) est une droite incluse dans le plan (ADB)
 (AO) est perpendiculaire au plan (SDB) donc les plans
 (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.



Conséquences

- * Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P), alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).
- * Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

b) Propriétés

Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

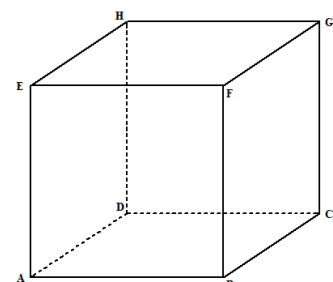
Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

Démontre que les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).



Solution

Les plans (ACE) et (DEH) sont sécants et leur droite d'intersection est la droite (AE).

$(AE) \perp (AD)$ et $(AE) \perp (AB)$. Comme (AD) et (AB) sont incluses (ABC), donc $(AE) \perp (ABC)$.

Par conséquent, les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).

4. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN, SUR UNE DROITE DE L'ESPACE

Définitions

- Soit A un point et (P) un plan de l'espace. Soit (D) l'unique droite passant par A et perpendiculaire à (P) en H.

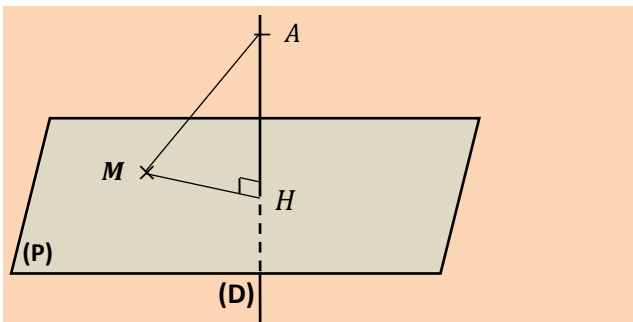
Alors le point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur le plan (P)

La distance AH est appelée **la distance du point A au plan (P)**

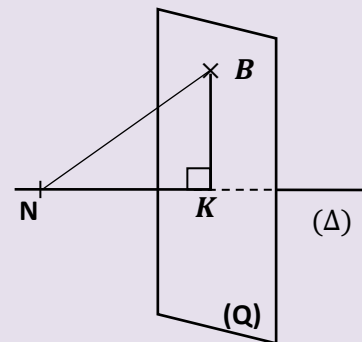
- Soit B un point et (Δ) une droite de l'espace. Soit (Q) l'unique plan passant par B et perpendiculaire à (Δ) en K.

Alors le point K est appelé le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (Δ) .

La distance BK est appelée **la distance du point B à la droite (Δ)** .



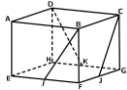
$M \in (P)$, H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; $AH < AM$



$N \in (\Delta)$, K est le projeté orthogonal de B sur la droite (Δ) ; $BK < BN$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont des points respectifs des arêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$. p est la projection orthogonale sur le plan (EHD)



Complétons le tableau ci-dessous.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
$p(M)$	A	A	D	D	E	E	H	H	E	H

b -Propriétés

Propriété 1

Par une projection orthogonale sur un plan (\mathcal{P}) , l'image d'une droite (D) est :

- un **singleton** si (D) est **perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .
- une **droite** si (D) n'est **pas perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .

Propriété 2

Par une projection orthogonale sur un plan (\mathcal{P}) , l'image d'un segment $[AB]$ est :

- un **singleton** si la droite (AB) est **perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .
- un **segment** si la droite (AB) n'est **pas perpendiculaire** à (\mathcal{P}) .

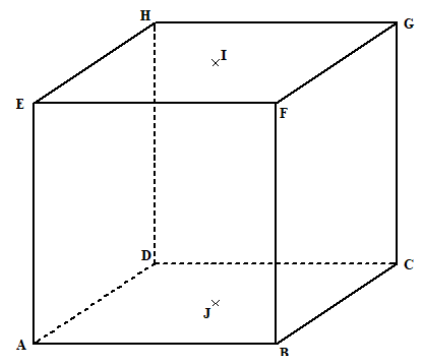
Propriété 3 (Projeté orthogonal du milieu d'un segment)

Par une projection orthogonale sur un plan (P) , l'image du milieu d'un segment $[AB]$ est le milieu de l'image du segment $[AB]$ si (AB) n'est pas perpendiculaire à (P) .

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. J est le centre du carré ABCD et I le centre du carré EFGH.

Détermine le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC) .
Justifie ta réponse.



Corrigé

Soit I le milieu du segment $[HF]$.

Le projeté orthogonal de $[HF]$ sur le plan (ABC) est le segment $[DB]$.

Par conséquent, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC) est le milieu de $[DB]$ donc le point J .

C. SITUATION COMPLEXE

Soit $ABCDEFGH$ un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces $AEHD$ et $CDHG$. Lors du cours le professeur de Mathématiques d'une classe de 1^{ère} D affirme que : « les droites (PQ) et (IJ) sur la figure ci-contre sont orthogonales non sécantes ». Il donne la démonstration à faire en exercice en classe et accorde trois points en bonus au premier élève qui aura fait une démonstration correcte. Etant élève de cette classe et désireux d'obtenir les points bonus, justifie cette affirmation du professeur de Mathématiques

