

Chapitre I : Problèmes algébriques et numériques

Partie I : Fonctions polynômes et fraction rationnelle.

I) Fonction polynôme :

1°) Définitions.

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 et a_0 sont des réels appelés coefficients de f .

*Si $a_n \neq 0$, alors le degré de f est n et on note $\deg f = n$

*Si tous les coefficients de f sont nuls c'est-à-dire si $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. On dit alors que f est une fonction **polynôme nulle**.

*L'écriture $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée la forme développée, réduite et ordonnée de f .

Remarques.

Parmi les fonctions polynômes, nous retrouvons :

- les fonctions constantes (par exemple f telle que $f(x) = 3$).
- les fonctions affines (par exemple f telle que $f(x) = 2x - 3$).

Soit f la fonction définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

f est une fonction polynôme et $f(x)$ est un polynôme.

Exercice.

Parmi les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = -3(x+1)^2(x-2)$$

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Préciser celles qui sont des fonctions polynômes..

Correction.

2°) Opérations sur les fonctions polynômes

Activités.

Soit f et g deux fonctions polynômes définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ et } g(x) = 2x^2 - 3.$$

1°) Calculer $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ et $3f(x)$.

2°) Les fonctions $f + g$, fg et $3f$ sont-elles des fonctions polynômes ? Si oui, préciser leur degré. Conclure

Synthèses.

Théorème 1 :

Soit f et g deux fonctions polynômes ; $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $f+g$, fg et λf sont des polynômes. De plus $\deg (f+ g) = \max (\deg f, \deg g)$

$$\deg (fg) = \deg f + \deg g ; \deg \lambda f = \deg f.$$

Théorème 2 : Egalité de deux polynômes.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si

- ils ont même degré
- et les coefficients des termes (monômes) de même degré sont égaux.

3°) Factorisation par $x - a$

a) Factorisation de $x^n - a^n$; $n \geq 2$

Complétons les expressions suivantes :

$$x^2 - a^2 = (x - a) (x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a) (x^2 + ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x - a) (x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

$$x^5 - a^5 = (x-a) (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$$

Généraliser la factorisation de $x^n - a^n$

$$x^n - a^n = (x - a) (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

b) Factorisation par $P(x) - P(a)$

Théorème :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et a un nombre réel. Il existe un polynôme unique $q(x)$ de degré $n - 1$ tel que :

$$P(x) - P(a) = (x - a) q(x).$$

Exemple.

Soit le polynôme $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

c) Racine (ou zéro) d'un polynôme.

Définition.

Soit $p(x)$ un polynôme et a un réel.

a est une racine de $P(x)$ équivaut à $P(a) = 0$.

Théorème.

Soit $P(x)$ un polynôme et a un réel. a est une racine de $P(x)$ équivaut à $P(x)$ est factorisable par $x - a$

Remarque : $P(x)$ est factorisable par $x - a$ signifie qu'il existe un polynôme $q(x)$ tel que $p(x) = (x - a) q(x)$.

d) Méthodes de factorisation.

***Méthodes des coefficients indéterminés.**

Exemple :

Soit $p(x) = -4x^3 + 3x + 1$

Division Euclidienne.

Exemple :

Soit $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$.

4°) Fonction polynôme du second degré.

a) Définition.

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction P définie sur \mathbb{R} par $p(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple :

Les fonctions f, g, h définies respectivement par : $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$, $g(x) = -3x^2$ et

$h(x) = \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{4}$ sont des fonctions polynômes du second degré.

b) Forme canonique.

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ puisque a est non nul, mettons-le en facteur –

Définition.

L'expression $p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique de $ax^2 +$

$bx + c$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. L'expression ci-dessus devient $P(x) = a$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme $P(x)$;

Exercice.

Donner la forme canonique des expressions suivantes :

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

$$Q(x) = -2x^2 + 3x - 2$$

$$R(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 3x - 2$$

$$R(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 2x + 5$$

c) Racines et signe d'un polynôme du second degré.

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Le discriminant de $p(x)$ est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Suivant le signe de Δ , on détermine les racines et le signe de $p(x)$.

1^{er} Cas: $\Delta > 0$

*Le polynôme $p(x)$ admet 2 racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

*Factorisation : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

*Signe : $p(x)$ a le signe de (a) à l'extérieur des racines et le signe de $(-a)$ entre les racines.

2^{ème} Cas : $\Delta = 0$

* $p(x)$ a une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

*Factorisation : $p(x) = a(x - x_0)^2$

*Signe : pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, $p(x)$ a le signe de a .

3^{ème} Cas : $\Delta < 0$

* $p(x)$ n'a pas de racines donc $p(x)$ n'est pas factorisable.

*Signe : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x)$ a le signe de (a) .

Exemple :

Déterminons les racines et le signe de $p(x) = -2x^2 + 5x - 3$.

5°) Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré.

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$.

On suppose $\Delta \geq 0$

Si $\Delta > 0$, soit $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de $p(x)$.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$S = X_1 + X_2 = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si $\Delta = 0$ alors $x_1 = x_2 = -\frac{-b}{2a}$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta = 0$ d'où $b^2 = 4ac$.

$$\text{Par suite } p = x_1 x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\mathbf{S = \frac{-b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}}$$

Théorème.

Si x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme du second degré alors

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}$$

Remarque.

Les formules ci-dessus permettent de déterminer les racines connaissant une racine évidente.

Exemple : $P(x) = x^2 - x - 2$

- 1 est une racine de $p(x)$ car $(-1)^2 - (-1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-1)}{1} = 1 \text{ et } x_1 = -1 \text{ d'où } x_2 - 1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

Applications

Les formules du théorème ci-dessus permettent de résoudre le système du type

$$\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$$

$$u + v = s \Rightarrow u = s - v$$

En remplaçant u par son expression dans $u.v = p$. On a $(S - v)v = P \Rightarrow S v - v^2 =$

$$P \Rightarrow$$

$v^2 - Sv + P = 0$. Donc v est solution de l'équation $X^2 - SX + p = 0$

De même $v = s - u$

$$(s-u)u = P \Rightarrow ; Su - u^2 = P \Rightarrow u^2 - su + p = 0$$

Donc u est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

Théorème : Les solutions du système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ sont les couples (u,v) tel que u et

v sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

Exemple

Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$

II) Fonctions rationnelles

1°) Définition.

On appelle fonction rationnelle toute fonction quotient de deux fonctions polynômes.

Si f est une fonction rationnelle alors il existe 2 fonctions polynômes p et q tel que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

2°) L'ensemble de définition.

La fonction f est définie si $q(x) \neq 0$

3°) Simplification.

Pour simplifier une fonction rationnelle, on factorise le numérateur et le dénominateur puis on supprime les facteurs qui leur sont communs.

Exercice.

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^3 - 12x + 16}{2x^2 - 7x + 6}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Démontrer que l'on peut simplifier f (x)
- Résoudre dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{N} l'inéquation $f(x) < 0$

Partie II : Equations et Inéquations irrationnelles – systèmes

I) Equations et Inéquations irrationnelles.

1°) Equations irrationnelles.

Ce sont des équations avec des radicaux du type $\sqrt{f(x)} = g(x)$ et $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ où f(x) et g(x) sont des polynômes de degré au plus égal à 2.

Pour résoudre ces types d'équations, on peut utiliser deux méthodes :

- Méthode par implication

Il s'agit de vérifier que les réels trouvés sont solutions de l'équation initiale.

Exemple :

Réolvons l'équation $\sqrt{x+1} = x-1$

- Méthode par équivalence.

Dans ce cas, les solutions trouvées sont solutions de l'équation équivalente.

Rappel :

Soit A et B deux réels positifs $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$

$$\text{Equation équivalente de } \sqrt{A} = B \Rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$B^2 \geq 0$; $A = B^2 \Rightarrow A \geq 0$ donc $A = B^2$ rend caduque l'inégalité $A \geq 0$ donc

$$\sqrt{A} = B \Rightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Exemple.

Réolvons dans IR : $\sqrt{4x^2 + 5} = 2x + 3$

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 5} = 2x + 3 &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + 5 = (2x + 3)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 5 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[\\ x = -1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3} \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[\text{ donc } S_{\text{IR}} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Exercice d'application.

Réolvons dans IR (méthode d'équivalence)

a) $\sqrt{-3x+13} = x-1$ b) $\sqrt{x^2 - 1} = x+1$

2°) Inéquations irrationnelles

Ce sont les inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

Méthodes de résolution

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

Exemple : Résolvons

$$\sqrt{x+2} \leq 2x+1$$

Exemple : résolvons $\sqrt{3-x} \geq x-1$

Exercice.

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > -2x + 6$

b) $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$

II) Systèmes d'équations linéaires.

1°) Equation du 1^{er} degré à 2 inconnues.

Activité.

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x - 3 = 0$; b) $3y - 1 = 0$; c) $x - 2y + 1 = 0$; d) $2x - 3y - 2 = 0$

Correction

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, y \right); y \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $x - 2y + 1 = 0$

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2y-1, y); y \in \mathbb{R}\}$$

$$x = 2y - 1$$

2°) Système de deux équations par un couple inconnu.

Les méthodes par combinaison, substitut identification et graphique vues en 3) restent valables.

Activité.

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode indiquée.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ (*substitution*)

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = -1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ (*Identification*)

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$ (*combinaison linéaire*)

d) Méthode du déterminant.

Considérons le système (S)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

Déterminant du système D

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

*Déterminant associé à x : D_x

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

*Déterminant associé à y : D_y

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/5 \\ y = 3/5 \end{cases} \quad SR^2 = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{5} \right) \right\}$$

Retenons

Soit le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \text{ où } a, b, a', b', c \\ a'x + b'y = c' \text{ et } c' \text{ sont des réels non tous nuls.} \end{cases}$

*Le déterminant du système (S) :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

*Si $D \neq 0$ alors le système admet une solution unique. Dans ce cas, on calcule les déterminants D_x et D_y associé respectivement à x et y.

$$D_x : \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$D_y : \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

*On calcule x et y.

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ et } y = \frac{D_y}{D}$$

Si $D = 0$ soit (S) admet une infinité de solutions, soit (S) n'admet pas de solution.

(i) si $D = 0$ et $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors (S) admet une infinité de solution.

(ii) Si $D = 0$ et $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ou $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors (S) n'admet pas de solution.

Exercice.

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 1 \\ 3x + \sqrt{3}y = -2 \end{cases}$$

3°) Systèmes d'équation comportant plus de deux inconnues.

a) Méthode par substitution

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de substitution on procède comme suit :

* Choisir parmi les équations une inconnue que l'on déterminera en fonction des autres.

* Substituer l'expression obtenue dans les autres équations du système.

* On répète ainsi ce processus jusqu'à obtenir :

Soit une solution unique.

Soit une impossibilité dans ce cas le système n'a pas de solutions.

Soit une **égalité toujours vraie, le système admet alors une infinité de solutions.**

EXEMPLE

Résoudre (S₁) par substitution

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ x + 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

b) Combinaison linéaire.

Pour résoudre un système linéaire par la méthode linéaire, il suffit de combiner convenablement les équations afin d'éliminer les inconnues.

$$(S_2) \begin{cases} x - 2y + 2z = 6 \\ 2x - u + z = 4 \\ -3x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

c) Méthode de Gauss.

La méthode de Gauss consiste à effectuer les combinaisons linéaires bien précises pour éliminer les inconnues une à une.

En échangeant les lignes, on se ramène à une ligne L_1 comptant un coefficient en x non nul le plus simple.

On élimine alors x dans toutes les autres équations en remplaçant chaque ligne L_i par $\alpha l_i + \beta l_1$. On obtient alors un système équivalent où x n'apparaît que dans la ligne L_1

On applique au système obtenu la même méthode afin d'y éliminer y .

On réitère ce procédé jusqu'à obtenir :

* Soit un système triangulaire facile à résoudre

* Soit une incompatibilité

* Soit une équation toujours vraie.

Partie III : Applications.

I) Injection, Surjection et bijection :

Activité.

Soient les fonctions f , g et h définies sur $[-2,2]$ respectivement par : $f(x) = 2x - 1$,

$$g(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = x & \text{si } x \in [-2,1] \\ h(x) = 2x & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

a) Tracer les courbes représentatives de chacune des fonctions f , g et h .

b) Déterminer l'ensemble image $F = [c, d]$ de f .

c) Soit la droite $(D_m) : y = m$, $m \in F$,

* Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de (D_m) avec la courbe (C_1) de f en fonction de m .

* Résoudre l'équation $f(x) = m$, avec $c \leq m \leq d$.

d) Mêmes questions pour la fonction g représentée par la courbe (C_2) .

Soit l'intervalle $F = [-2,4]$. Déterminer graphiquement le nombre de points

d'intersection de (D_m) , $m \in F$ avec la courbe (C_3) de h .

Synthèse.

1°) Bijection

* f est une application bijection bijective de E dans F si et seulement si l'équation $f(x) = m$, $m \in F$ admet une solution unique dans E .

* Graphiquement, f est une bijection si et seulement si la courbe (C_f) et la droite (D_m) d'équation $y = m$, $m \in F$ ont un seul point d'intersection.

Remarque

On dit aussi que f définit ou réalise une bijection de E sur F .

On dit encore que f est une bijection.

2°) Surjection.

* f est une application surjective si l'équation $f(x) = m$ admet du moins une solution dans E .

*Graphiquement f est une surjection si la courbe (C_f) et la droite (D_m) ont au minimum un point d'intersection.

3°) Injection.

* f est une application injective si l'équation $f(x) = m$ admet au plus une solution (aucune ou une solution dans E).

*Graphiquement, f est une injection si (D_m) et (C_f) ont au maximum un point d'intersection.

Remarque.

Une application à la fois injective et surjective est une application bijective.

Exemple :

1°) Soit $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$.

$x \rightarrow \frac{2-3x}{x-1}$, démontrons que f est une application bijective.

II) Bijection réciproque.

Définition.

Soit f une bijection de A dans B . On appelle bijection réciproque de f , l'application de B dans A noté f^{-1} , qui à tout élément de B associe un unique antécédent dans A .

Remarque : $f : A \rightarrow B$ $f^{-1} : B \rightarrow A$
 $x \rightarrow f(x)$ $x \rightarrow f(x)$

Propriété.

Soit f une bijection de A dans B . Alors f admet une bijection réciproque f^{-1} de B vers A .

*Si f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur A , alors f^{-1} est strictement croissante (respectivement décroissante) sur B .

*Dans le plan muni d'un repère orthonormé les représentations graphiques (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Exemple :

L'application $f :]1, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$
 $x \rightarrow x^2 - 2x + 3$

Définit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$ donc elle admet une bijection réciproque définie de $]2, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$.

Cette bijection réciproque est notée en générale, par f^{-1} et $f^{-1} :]2, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$
 $x \rightarrow 1 + \sqrt{x - 2}$.

III) Composition des applications.

1°) Définition.

Soient E, F, G trois sous-ensembles de \mathbb{R} non vides, f et g deux applications tel que on ait $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

*A tout élément x de E , on associe un unique élément y de F tel que $y = f(x)$.

*A cet élément y de F , on peut associer un unique élément z de G tel que $z = g(y)$.

Par suite, on a $z = g(y) = g(f(x)) = g[f(x)]$. Cette application est notée : $g \circ f$ (on lit « g rond f ») $g \circ f$ est l'application composée de f par g .

Exemple :

On donne $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = 1 - 2x$.

Calculons $(f \circ g)(1)$, $(g \circ f)(1)$; $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.

2°) Propriété.

*La composition de deux injections est une injection.

*La composition de deux surjections est une surjection.

*On en déduit que la composition de deux bijections est une bijection.

*La composition des applications n'est pas commutative. $f \circ g \neq g \circ f$.

*La composition des applications est associative $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Cas particulier.

Soit $f : E \rightarrow F$ alors $f^{-1} : F \rightarrow E$

$\forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

et $\forall x \in F (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

On dit que $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$ sont des **applications identiques**. On note :

$f \circ f^{-1} = \text{Id}$. et $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Exercice.

Soit l'application $f : [-1, +\infty[\rightarrow I$

$$x \rightarrow x^2 + 2x + 4$$

1°) Montrer que f définit une bijection de $[-1, +\infty[$ sur intervalle I à préciser.

2°) Définir alors sa bijection réciproque f^{-1} . Calculer $(f \circ f^{-1})(x)$ puis $(f^{-1} \circ f)(x)$ en fonction de x .

Chapitre II : Angles orientés – Trigonométrie

I) Angles Orientés.

1°) Définition.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls, O un point du plan. A et B deux points distincts

définies par : $OA = \vec{u}$ et $OB = \vec{v}$.

Les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ de même origine O définissent l'angle géométrique de sommet O. On le note $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$.

Le couple de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v})$ définit l'angle Orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ ou $(\vec{u}; \vec{v})$

$$(\vec{u}; \vec{v}) = \widehat{(OA; OB)}$$

2°) Mesures d'un angle Orienté.

a) Définition.

Soit a un réel et l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ dont une mesure est a .

Toutes les autres mesures $(\vec{u}; \vec{v})$ sont de la forme $a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note : $\text{mes } (\vec{u}; \vec{v}) = a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) Mesure principale.

La mesure principale d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Remarque :

Si a est une mesure de $(\vec{u}; \vec{v})$ et θ sa mesure principale on a : $a = \theta + 2k\pi$

$$\theta \in]-\pi, \pi]$$

Exercice d'application.

Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ dans chaque cas :

a) $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-19\pi}{7}$

b) $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{385\pi}{13}$

c) $(\vec{u}; \vec{v}) = 18345 \pi$

Remarque

: \vec{u} \vec{v}

*Si u et v sont deux vecteurs non nuls colinéaires et de même sens alors l'angle

orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ a pour mesure $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

.../...

- 16 -

\vec{u} \vec{v}

*Si u et v sont deux vecteurs non nuls colinéaires et de sens contraires alors

\vec{u} \vec{v}

l'angle orienté (u, v) a pour mesure $\pi + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Exercice.

Déterminons la mesure principale des angles orientés suivants :

\vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v}
 (AB, AC) ; (CB, CA) (BA, BC)

\vec{u} \vec{v}

- L'angle orienté (AB, AC) est orienté dans le sens direct donc sa mesure principale est $\frac{\pi}{2}$.

\vec{u} \vec{v}

- L'angle orienté (CB, CA) est orienté dans le sens indirect donc sa mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$.

- L'angle orienté (BA, BC) est orienté dans le sens indirect donc sa mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

3°) Relation de Chasles.

Propriété :

\vec{u} \vec{v} \vec{w}

\vec{u} \vec{v} \vec{v} \vec{w} \vec{u} \vec{w}

Soient u, v et w trois vecteurs non nuls $(u, v) + (v, w) = (u, w) + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Conséquences

\vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v}

*Pour tout vecteur non nul u et v du plan : $(-u, -v) = (u, v) + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

\vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v} \vec{u} \vec{v}

*Pour tout vecteur non nul u, v du plan : $(-u, v) = (u, v) + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ (u, -v) = (u, v) + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

* Pour tout vecteur non nul u et v du plan, $(v, u) = - (u, v) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

.../...

- 17 -

Exercice d'application.

1°) Soient les vecteur u et v tels que $(u, v) = - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, et $(v, w) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Déterminer les mesures principales des angles orientés $(u, w), (-u, w)$ et $(v, -u)$

2°) Soient cinq points A, B, C, D et E tel que :

$$(AB, AC) = \frac{5\pi}{6}, (AB, AE) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } (AD, AE) = \frac{\pi}{3}$$

Démontrer que le triangle ACD est rectangle. en A.

4°) **Bases et repères orthonormés :**

Définitions :

* Une base orthonormé (i, j) est dite base orthonormée directe, si l'une des mesure de l'angle orienté $(\vec{i}; j)$ est $+\frac{\pi}{2}$.

Si (i, j) est une base orthonormée directe alors le repère (o, i, j) est un repère orthonormé direct.

(i, j) base orthonormée indirecte.

(o, i, j) : repère orthonormé direct ;

*Une base orthonormée (i, j) est dite base orthonormée indirecte si l'une des mesures de l'angle orienté (i, j) est $-\frac{\pi}{2}$

Si (i, j) est une base orthonormée indirecte, alors le repère (o, i, j) est un repère orthonormé indirect.

Propriété.

\vec{u} \vec{v}
 Pour tout vecteur unitaire \vec{u} il existe un unique vecteur unitaire \vec{v} tel que la base (\vec{u}, \vec{v}) soit une base orthonormée directe.

\vec{u} \vec{v}
 (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée directe

5°) Cosinus et Sinus d'un angle. Orienté de vecteurs non nuls.
Rappel sur les expressions du produit scalaire.

*Expression à l'aide du Cosinus.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(u, v)$

* Expression analytique du Produit Scalaire (produit scalaire)

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
 Dans une base orthonormé direct (\vec{i}, \vec{j}) soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , un vecteur \vec{u} tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = \alpha$

Alors les coordonnées (x, y) de \vec{u} sont :

$$\begin{cases} x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ y = \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{cases}$$

\vec{u} \vec{u}
a) Calcul de cos(u, u)

Activité.

Le plan étant rapporté à une base (\vec{i}, \vec{j}) orthonormale, soit \vec{u} et \vec{u}' deux vecteurs non nuls de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

1°) Donner l'expression analytique puis l'expression à l'aide du cosinus de (\vec{u}, \vec{u}')

2°) Des deux expressions précédentes de \vec{u}, \vec{u}' déduire $\cos(\vec{u}, \vec{u}')$ à l'aide de x, x', y et y' .

b) Calcul de Sin (\vec{u}, \vec{u}')

Activité.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (o, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les vecteurs

non nuls $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Soit le vecteur \vec{v} tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Posons $(\vec{i}, \vec{u}) = \alpha$

1°) Faire un dessin

2°) Donner l'expression de (\vec{u}', \vec{v}) à l'aide du cosinus.

3°) En utilisant la relation de Charles Prouver que $\cos(\vec{u}', \vec{v}) = \sin(\vec{u}, \vec{u}')$

4°) Montrer que le vecteur \vec{v} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

5°) En déduire l'expression de $\sin(\vec{u}, \vec{u}')$ à l'aide de x, x', y et y' .

Exercice d'application.

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée directe et $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ un vecteur.

Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{i})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{i})$

Déduisez-en la mesure principale de (\vec{u}, \vec{i})

II) Angles associés

1°) Angle opposés (-x) et (x)

* $\cos(-x) = \cos x$

* $\sin(-x) = -\sin x$

* $\tan(-x) = -\tan x$

* $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

2°) **Angle** $\pi - x$

$$* \text{Cos}(\pi - x) = -\text{Cos}x$$

$$* \text{Sin}(\pi - x) = \text{Sin}x$$

$$* \tan(\pi - x) = -\tan x \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

.../...

- 20 -

3°) **Angles** $\pi + x$

$$* \text{Cos}(\pi + x) = -\text{Cos}x$$

$$* \text{Sin}(\pi + x) = -\text{Sin}x$$

$$* \tan(\pi + x) = \tan x \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

4°) **Angle** $\frac{\pi}{2} - x$

$$* \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Sin}x$$

$$* \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Cos}x$$

$$* \text{Tan}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

5°) **Angle** $\frac{\pi}{2} + x$

$$* \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{Sin}x$$

$$* \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{Cos}x$$

$$* \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

Exercice d'application

Ecrire plus simplement.

$$A = \text{Cos}\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) + \text{Sin}(17\pi - x) + \text{Cos}\left(\frac{187\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin(18\pi + y) + \sin(25\pi + y) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - y\right)$$

$$C = \tan\left(\frac{75\pi}{2} + x\right) + \tan(18\pi + x) + \frac{1}{\tan\left(\frac{75\pi}{2} + x\right)} + \frac{1}{\tan(15\pi + x)}$$

III) Trigonométrie

1°) Formules d'addition

a) Calcul de Cos (a - b)

Activité.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) . Soient les points A et B de coordonnées respectives $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$ tel que $(\vec{i}, \vec{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \vec{OB}) = b$.

1°) Faire un dessin.

2°) Donner deux expressions différentes de $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$. Puis établir l'égalité $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (1)

3°) En remplaçant b par $-b$ dans (1) trouver une relation entre $\cos(a + b)$ et $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.

4°) Sachant que $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ établir alors que $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Synthèse.

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad & \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ & \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ & \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ & \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

Exercice d'application.

Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2. Formules de duplication.

Activité.

Sachant que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et que $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, établir les relations suivantes :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$*\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$*\sin 2a = 2\sin a \cos a.$$

Synthèse.

$$*\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$*\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$*\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$*\sin^2 a = 1 - \frac{\cos 2a}{2}$$

$$*\sin 2a = 2\sin a \cos a.$$

Remarque.

Les formules ci-dessus permettent la linéarisation des polynômes trigonométriques.

Exemple :

Linéarisons $\cos^4 x$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \text{ si } a = 2x \text{ on a } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\text{Donc } \cos^4 x = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

3°) Formules de transformation.

a) Produit en somme.

Activité.

A l'aide des formules d'additions établir les égalités suivantes :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad \dots /$$

$$\sin a \sin b = \frac{-1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Synthèse.

$$*\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$*\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$*\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$*\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

b) Transformation de somme en produit.

Activité.

A l'aide des égalités de la synthèse précédente puis en posant $a + b = p$ et $a - b = q$
Etablir que :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

Synthèse

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

Exercice d'application.

1°) Transformer les sommes suivantes en produit

$$*\sin a + \sin 3a + 2\sin 2a$$

$$*\sin a - \sin 2a$$

2°) Transformer les produits suivantes en somme

*cos 5a Cos 6a
 *sin 2a sin 8a.

4°) Equations et inéquations trigonométriques.

a) Equations trigonométriques.

Soient u et v deux réels.

$$* \text{Cos } u = \text{Cos } v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi & \text{ou} \\ u = -v + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Sin } u = \text{sin } v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ \text{ou } k \in \mathbb{Z} \\ u = \pi - v + 2k\pi \end{cases}$$

$$*\text{tan } u = \text{tan } v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Remarque :

$$\text{cos } x = a$$

* Si $a \notin [-1,1]$, l'équation $\text{cos } x = a$ n'admet pas de solution.

Si $a \in [-1,1]$, on détermine un réel α tel que $a = \text{cos } \alpha$ et par suite $\text{cos } x = a$
 $\Leftrightarrow \text{cos } x = \text{cos } \alpha$

$$\text{Sin } x = b.$$

* Si $b \notin [-1,1]$ l'équation $\text{sin } x = b$ n'a pas de solution

si $b \in [-1,1]$ On détermine un réel β tel que $b = \text{sin } \beta$ et par suite $\text{sin } x = b \Leftrightarrow \text{sin } x = \text{sin } \beta$.

$$\text{Tan } x = c.$$

$$*x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Il existe un réel $\delta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $C = \text{tan } \delta$ et par suite : $\text{tan } x = c \Leftrightarrow \text{tan } x = \text{tan } \delta$
 $\Leftrightarrow x = \delta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Equations particulière.

$$\text{Cos } x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Sin } x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cos } x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, \text{Sin } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Exercice d'application.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

$$1^\circ) \text{Cos } 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2^\circ) 2(\text{Sin}^2 x - \text{cos}^2 x) = 1$$

$$3^\circ) \text{Cos} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \text{sin } 2x$$

$$4^\circ) \text{Sin } x \text{ cos } x = \frac{1}{4}$$

5°) $\sin 2x - \cos x = 0$.

.../...

- 25 -

b) Inéquations trigonométriques.

Exemple 1 :

Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \leq -\frac{1}{2}$. On pourra utiliser le cercle trigonométrique.

Exemple 2 :

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemple 3.

Résoudre dans $[-\pi, \pi]$, $\sin 2x - \cos x < 0$

5°) Transformation de l'écriture a cos x + b sin x.

On se propose de transformer $a \cos x + b \sin x$ où a et b sont des réels non nuls.

Propriété.

Si α et β sont deux réels tel que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ alors il existe un réels θ tel que $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$.

Activité.

Soient a et b deux réels non nuls à l'aide d'une transformation d'écriture et par utilisation de la propriété, montrer que $a \cos x + b \sin x$ peut s'écrire sous la forme $\alpha \cos(x - \theta)$ avec α et θ des réels.

Exercice

Transformer les écritures suivantes :

* $\cos x + \sin x$

* $\cos x - \sqrt{3} \sin x$

IV) Relation métriques dans le triangle.

1°) Relations fondamentales dans un triangle

Théorème.

Soit ABC un triangle quelconque tel que $BC = a$

$AC = b$ et $AB = c$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Ce théorème est connu sous le nom de théorème d'Al-Kashi.

On dit aussi que ce théorème est le théorème généralisé de pythagore.

Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, on a, $a^2 = b^2 + c^2$ car $\cos \hat{A} = 0$

Si $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\cos B = 0$ et on a $b^2 = a^2 + c^2$

Si $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $\cos C = 0$ et on a : $c^2 = a^2 + b^2$

2°) Théorème de la médiane.

Soit ABC un triangle quelconque I milieu de $[BC]$;

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Exercice

a) Construire un triangle ABC tel que $AB = 5$; $BC = 7$ $CA = 6$

b) Calculer la valeur exacte du cosinus de l'angle \widehat{BAC} .

En déduire la valeur exacte du sinus de cet angle.

c) On note B' le projeté orthogonal du point B sur (AC). Calculer BB'.

3°) Formule des Sinus.

Théorème.

Soit ABC un triangle tel que $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$ alors on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Démonstration.

Chapitre 3 : Fonctions Numériques : Généralités et description.

I) Généralités.

1°) Définitions.

Soient A et B deux sous – ensembles non vides de IR. Une fonction de A vers B est une relation ou une correspondance de A vers B qui a tout élément de A associe au plus un élément de B.

Notation.

f est une fonction de A vers B se note :

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

$y = f(x)$ est l'image de x par f et x est l'antécédent de y par f.

*L'ensemble de définition de f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On le note en général Df.

Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

On appelle représentation graphique de l'ensemble des points M de coordonnées

(x,y) tel que $x \in Df$ et $y = f(x)$. On la note en général $M(x ; y) \in (Cf) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Df \\ y = f(x) \end{cases}$

Exercice.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f : x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$

b) $g : x \rightarrow \sqrt{x} \sqrt{1-x}$

.../...

- 27 -

c) $h : x \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 2}}$

d) $i : x \rightarrow \frac{x}{x^2 + x}$

e) $j : x \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x-2} - 1}$

2°) Restriction de f à un intervalle I.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition Df et I un intervalle de Df. On appelle restriction de f à I, toute fonction g définie sur I tel que pour tout x de I, $g(x) = f(x)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = | 2x-1 | + x$.

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ -2x+1 & \text{si } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Si } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right], f(x) = -x + 1$$

$$\text{Si } x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[, f(x) = 3x - 1$$

*La restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ est la fonction g définie pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ par $g(x) = -x + 1$.

*La restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est la fonction h définie pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pour $h(x) = 3x - 1$.

3°) Egalité de deux fonctions.

Définition

Soient f et g deux fonction numériques d'ensembles de définition respectifs Df et Dg ;

f et g sont égales et on note $f = g$ si et seulement si $\begin{cases} Df = Dg \\ f(x) = g(x) \text{ pour } x \in Df = Dg; \end{cases}$

Exemple 1

1°) On donne $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ et $g(x) = |x-1|$

Vérifions si $f = g$.

Exemple 2. On donne $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$

4°) Parité et périodicité.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition Df et de représentation graphique Cf.

a) Parité

On dit que f est paire lorsque pour $\begin{cases} x \in Df, -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Interprétation Graphique : La représentation graphique RG d'une fonction paire dans un repère orthogonal admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

On dit que f est impaire lorsque pour $\begin{cases} x \in Df, -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Interprétation graphique : La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal admet l'Origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice.

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$1^\circ) f : x \rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{|x|-2}} \quad 2^\circ) g : x \rightarrow \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad 3^\circ) h : x \rightarrow \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

b) Périodicité.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f et T un réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T ou que f est T -périodique lorsque

$$\text{pour } \begin{cases} x \in D_f, (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x). \end{cases}$$

Interprétation graphique.

La représentation graphique d'une fonction périodique de période T est invariante par des translations successives de vecteur.

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ V = k T i, & k \in \mathbb{Z}^* \end{matrix}$$

Exemples.

*Les fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont périodiques de période 2π

En effet : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

*La fonction $x \rightarrow \tan x$ est périodique de période π

En effet : pourtant $x \in D_{\tan}$, $(x + \pi) \in D_{\tan}$ et $\tan(x + \pi) = \tan x$

Exercice d'application.

1°) Démontrer que la fonction $f : x \rightarrow 3 \cos^2 x - 2 \cos 2x + 1$ est périodique de période π .

2°) Démontrons que la fonction $g : x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin 2x - 1}$ est périodique de période 2π .

5°) Fonctions majorée, minorée et bornée.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f .

*On dit que f est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq M$. Le réel M est un majorant de f .

*On dit que f est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq m$. Le réel m est un minorant de f . Si f est à la fois majoré et minorée, on dit que f est bornée. .../...

- 29 -

Exercice.

1°) Montrons que la fonction $f = x \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2}$ est majoré.

2°) Montrons que la fonction $g : x \rightarrow 2 \sin(3x) - 3 \cos x + 1$ est bornée.

6°) Opérations sur les fonctions.

Soit f et g deux fonctions numériques d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g .

*On appelle somme de fonction f et g la fonction $f + g$ définie pour tout $x \in D_f \cap D_g$ par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

*On appelle produit de fonctions f et g la fonction fg qui définie pour tout $x \in D_f \cap D_g$ par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

*On appelle inverse de f, la fonction $\frac{1}{f}$ définie pour tout $x \in Df$ et tel que $f(x) \neq 0$

*On appelle quotient de f par g la fonction $\frac{f}{g}$ définie pour tout $x \in Df \cap Dg$ et tel que $g(x) \neq 0$.

* On appelle composée de f par g la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in Df$ et tel que $f(x) \in Dg$ par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Exercice.

On donne $f(x) = \frac{1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1°) Déterminer D_f et D_g .

2°) Sans expliciter les fonctions $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ et $g \circ f$ déterminer leur ensemble de définition.

7°) Sens de variations.

a) Définition.

Soit f une fonction numérique définie sur I. *On dit que f est croissante sur I, si pour tous réels u et v de I tel que $u < v$, on a $f(u) \leq f(v)$.

*On dit que f est décroissante sur I si pour tous réels u et v de I tel que $u < v$, on a $f(u) \geq f(v)$.

Remarques.

*f est strictement croissante sur I si pour tous réels u et v de I tel que $u < v$ on a $f(u) < f(v)$.

*f est strictement décroissante sur I si pour tous réels u et v de I tel que $v < u$, on a $f(u) > f(v)$.

Exercice.

1°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Etudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

2°) Etudier les variations de la fonction :

$$g : x \rightarrow -x^2 + 4x + 2 \text{ sur }]-\infty, 2] \text{ et sur } [2, +\infty[$$

Dresser son tableau de variation. La fonction g admet-elle un maximum ou un minimum ? Si oui, précisez-le et en quel réel il est atteint.

b) Propriétés.

* Soit f une fonction numérique, λ un réel non nul.

Les fonctions λf et f ont le même sens de variations si $\lambda > 0$ et ont des sens de variations contraires si $\lambda < 0$

* Soit f une fonction monotone sur I et g une fonction monotone sur J tel que $f(I) \subset J$.

* Si f et g ont le même sens de variation alors $g \circ f$ est croissante sur I.

* Si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

II) Changement de repère – Fonctions associées.

1°) Changement de repère.

a) **Formules de changement de repère.**

$\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}$ est un repère du plan et Ω un point de coordonnées (x_0, y_0) dans $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

Soit un point M de coordonnées (x, y) dans $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(\vec{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$.

D'après la relation de Chasles on a $\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M} \Rightarrow$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j}$$

D'après l'unicité des coordonnées on déduit

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Les formules du changement de repère sont :

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

b) **Application.**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

a) Ecrire la forme canonique de f(x)

b) Soit le point $\Omega(1, 3)$ dans $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer l'équation $Y = F(X)$ de la courbe (C_f) dans $(\vec{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Montrer que la fonction F est paire et déduisez-en que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f) .

d) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.

e) Tracer (C_f) .

2°) **Eléments de symétrie.**

a) **Axe de Symétrie.**

Théorème 1.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

Exemple.

Démontrons que la droite $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f = x \rightarrow x^2 - 4x + 2$

Théorème 2.

Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C_f) . La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si la fonction : $F : X \rightarrow f(X+a)$ est paire.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Montrons que $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Centre de symétrie.

Théorème 1.

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f et de représentation

$\rightarrow \rightarrow$

graphique (C_f) dans un repère orthogonal (o, i, j) . I un point de coordonnées (a, b) .

I est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si : $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exemple.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Montrons que le point $I(-1, 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

Théorème 2.

Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C_f) dans un repère orthogonal (o, i, j) . I un point de coordonnées (a, b) I est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si la fonction :

$G : X \rightarrow f(X+a) - b$ est impaire.

Exemple.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Montrons que le point $I(-1, 2)$ est un centre de symétrie de (C_f)

3°) Fonctions associées.

Théorème

Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C_f) dans un repère orthogonale (o, i, j) .

1°) La représentation graphique de la fonction $x \rightarrow -f(x)$ se déduit de (C_f) par la symétrie d'axe (o, i)

2°) La représentation graphique $(R G)$ de la fonction $x \rightarrow f(x) + a$ se déduit de (C_f) par la translation de vecteur $a j$.

3°) La R.G. de la fonction $x \rightarrow f(x - k)$ se déduit de (C_f) par la translation de vecteur $k i$.

4°) Soit $g : x \rightarrow |f(x)|$

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont confondues sur I .

Si pour tout $x \in I$ $f(x) \leq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à (o, i) .

Application.

Considérons la représentation graphique suivante de la fonction f .

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ? Donner son tableau de variation.

2°) Soient les fonctions

$$g : x \rightarrow -f(x), \quad h : x \rightarrow |f(x)| \quad i : x \rightarrow f(x-2) \text{ et } j : x \rightarrow f(x) + 1.$$

a) A partir de (C_f) , tracer les courbes représentatives des fonctions ci-dessus.

b) Préciser leur ensemble de définition et dresser le tableau de variation.

Correction.

1°) $D_f = [-2,4]$

Tableau de variation de f .

2°) a) A partir de (C_f) traçons les courbes représentatives des fonction ci-dessous.

Chapitre 4 : Limites de fonctions numériques.

I) Limite de fonction en l'infini.

1°) Limite $+\infty$ en $+\infty$ et limite $-\infty$ en $+\infty$ des fonctions de référence : $x \rightarrow x$ $x \rightarrow x^2$

$x \rightarrow \sqrt{x}$; $x \rightarrow x^3$

On suppose ces fonctions définies sur $[1, +\infty[$.

Activité.

Compléter le tableau suivant.

x	1	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8
x^2	1						
x^3	1						
\sqrt{x}	1						

Quelles remarques pouvez-vous faire ?

Correction.

On remarque que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, les réels x^2 , x^3 et \sqrt{x} deviennent très grands et finissent par dépasser n'importe quel réel N aussi grand soit-il. On dit que les fonctions : $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^3$, $x \rightarrow \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Synthèse.

On admettra : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

Cas général.

Soit f une fonction définie (au moins) sur $]a, +\infty[$.

On dit que f admet $+\infty$ pour limite et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, pour signifier que

lorsque prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres f(x) deviennent très grands et finissent par dépasser n'importe quel réel M, aussi grand soit-il.

*On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ pour signifier que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, les nombre f(x) deviennent grands en valeurs absolues mais négatifs.

Exemples.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty \end{array}$$

Propriété 1.

Si pour x assez grand, f et g sont deux fonctions telle que $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$.

- a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > x^2$
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) Limite réelle en $+\infty$ des fonctions : $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

Activité.

Compléter le tableau suivant :

x	1	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{14}
$1/x$						
$1/x^2$						
$1/x^3$						
$1/\sqrt{x}$						

Que pouvez-vous dire lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$

Corrigé.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande vers les réels $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^3}$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prennent des valeurs de plus en plus petites, proches de zéro (0) . On dit que les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ et $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Synthèse.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

En général

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x}}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Cas général.

Soit f une fonction définie sur $]a, +\infty[$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, pour signifier que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ les nombres $f(x)$ viennent « s'accumuler » autour de l .

Propriété.

$$*\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

*Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$

Remarque.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $-\infty$.

II) Limite d'une fonction en un point a.

Dans ce qui suit on note D_f l'ensemble de définition de la fonction et a un réel tel que

* Soit $a \in D_f$

* Soit $a \notin D_f$ mais a est une extrémité d'un intervalle inclus dans D_f .

1°) **Limite infinie en a des fonctions de référence** : $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$; $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ et

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Activité.

Compléter le tableau suivant

	0 ←			0 ←		
x	-10^{-6}	-10^{-4}	-10^{-2}	$+10^{-4}$	$+10^{-2}$	$+10^{-1}$
$\frac{1}{x}$						
$\frac{1}{x^2}$						
$\frac{1}{x^3}$						
$\frac{1}{\sqrt{x}}$						

Que constatez-vous lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches en 0 ?

Correction.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

1^{er} Cas : Si $x < 0$, les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$ sont très grands en valeurs absolues mais

négatifs. On dit que les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement négatives.

2^{ème} Cas : Si $x > 0$, les réels $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prennent des valeurs de plus en plus

grandes vers $+\infty$. On dit que les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ et $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le réel $\frac{1}{x^2}$ prend des valeurs de plus en plus grande vers $+\infty$, on dit que la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Synthèse.

On admet que :

$$\begin{array}{ll} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty & \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ x > 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty & \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = +\infty \\ x < 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty & \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \\ x < 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty & \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ x > 0 & \end{array}$$

Cas général.

On dit que f a pour limite $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pour signifier que lorsque x

prend des valeurs de plus en plus proches de a , les nombres $f(x)$ prennent des valeurs de plus en plus grandes et finissent par dépasser n'importe quel réel M aussi grand soit-il.

*Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

De même lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une

asymptote verticale à la courbe (C_f).

2°) Limite finie en a.

Propriété 1

Si f est définie en a et si f admet une limite en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemples.

$$\begin{array}{lll} 1^\circ) * \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array}$$

$$2^\circ) * \text{Si } a \text{ est un réel positif alors } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

* Si P est une fonction polynôme alors $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

Propriété 2.

Si au voisinage de a $|f(x)| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Exercice d'application.

Soit f la fonction défini par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Démontrer que $\forall x \neq 0 \quad |f(x)| \leq x^2$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

III) Opération sur les limites.

1°) Théorème sur les limites.

Les théorèmes qui suivent présentés sous forme de tableau permettent de connaître les limites de fonction $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$ lorsqu'on connaît celles de f et de g . Les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$ soit en $+\infty$, soit en un point a ; l et l' sont des nombres réels. Les cases hachurées signalent les cas où il n'y a pas de conclusion en général, on dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Dans tous les autres cas les résultats que nous admettrons sont intuitifs et faciles à retenir.

a) Limite d'une somme.

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors f+g a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

- 39 -

Exemple : calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + x \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{Donc pas somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + x \right) = +\infty$$

b) Limite d'un produit

Si f a pour limite l	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si g a pour limite l'	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$
Alors f \times g a pour limite	$l l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{1}{x^2} - 2x \right)$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 2x \right) = -\infty \text{ donc par produit}$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{1}{x^2} - 2x \right) = -\infty$$

c) Limite d'un quotient.

*Cas où la limite de g n'est pas nulle.

lim f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim g	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim f/g	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI	FI	FI

***Cas où la limite de g est nulle.**

lim f	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
lim g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
lim f/g	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

NB : Les cas de forme indéterminées nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront. Ces cas sont au nombre de quatre $+\infty, -\infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$.

Exemples.

1°) On donne $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°) On donne $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$. Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2°) Limites en $+\infty$ d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle.

Propriété 1.

En $+\infty$ et $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemple :

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$

Propriété 2.

La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ et $-\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur par celui du dénominateur.

Exemples.

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 3} = +\infty$$

$x \rightarrow +\infty$

NB : Les propriétés 1 et 2 ne sont applicables qu'en $+\infty$ et en $-\infty$

3°) Limite de fonctions composées.

Théorème.

Soient f et g deux fonction numériques a, l et l' des réels ou infinis :

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = l'$

Exemples

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$x \rightarrow +\infty$

Applications.

a est fini ou infini

* Si l est un réel positif et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

* Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (l réel fini) alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$

$x \rightarrow a$ $x \rightarrow a$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

$x \rightarrow a$ $x \rightarrow a$

* Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

$x \rightarrow a$ $x \rightarrow a$

Exemple : $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\frac{1}{2}$$
$$x \leq -\frac{1}{2}$$

Exercice.

On donne $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+5x-6}}$

Calculer les limites de g aux bornes de D_g.

4°) **Limites et inégalités.**

Propriété 1 :

a est un réel ou infini, f et g deux fonctions numériques admettant des limites en a.

Si $f \geq g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Remarque : Cette propriété ne permet pas de calculer les limites de f et g mais de les Comparer.

Propriété 2 :

a est un réel ou infini, f et g deux fonctions numérique.

*Si au voisinage de a : $f \geq g$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

*Si au voisinage de a, $f \leq g$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Propriété 3 :

a et l sont deux réels ou infinis, f, g et h des fonctions numériques.

Si au voisinage de a, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Ce théorème est connu sous le nom de théorème des gendarmes.

Exercice.

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^2 - \cos x$.

1°) Démontrer qu'il existe deux fonctions h et g tel que $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad x \in \mathbb{R}$.

2°) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Propriété 4 :

a est réel ou infini, f et g deux fonctions numérique et l'un réel.

Si au voisinage de a, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exercice.

f est une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

a) Démontrer que $\forall x > 0, |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2x}$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Chapitre 5 : Dérivation des fonctions numériques.

I) Nombre dérivé et notion de tangente.

Activité

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, i, j) .

On note A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 2.

1°) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) et son équation réduite.

2°) Soit un réel non nul h , M un point de (C) d'abscisse $1 + h$ et $a(h)$ le coefficient directeur de (AM) .

a) Exprimer $a(h)$ en fonction de h .

b) Quand h tend vers 0, que deviennent M et la droite (AM) ?

c) Calculer $a = \lim_{h \rightarrow 0} a(h)$.

3°) Soit (Δ) la droite passant par A et de coefficient directeur a .

a) Déterminer l'équation réduite de (Δ)

b) Etudier l'intersection de (Δ) et (C) .

c) Tracer (Δ) dans (O, i, j) .

Remarques :

$$*\lim_{h \rightarrow 0} a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = 2$$

$$h \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$$

2 est appelé le nombre dérivé de f en 1 on le note $f'(1)$ ainsi $f'(1) = 2$.

$\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1}$ est le taux d'accroissement de f en 1.

*La droite (Δ) est appelé tangente à (C) de f au point $A(1,1)$. Cette tangente a pour coefficient directeur $2 = f'(1)$.

Synthèse.

1°) Théorème - Définition

Soit f une fonction définie sur son ensemble D contenant un réel x_0 f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \quad \text{où } l \text{ est un réel.}$$

$$h \rightarrow 0$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 . On la note $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = l$.

Remarque.

Posons $x = x_0 + h$ qd $h \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$ par suite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ainsi, pour montrer que f est dérivable en x_0 on peut aussi montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

2°) **Aspect graphique.**

Soit f une fonction dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x)$.

La droite (tangente) passant par le point $M(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée tangente à (C_f) .

Une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ est :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque :

Un vecteur directeur à la tangente (T) est le vecteur $u \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$

3°) **Aspect numérique.**

Soit f une fonction dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x_0)$. Alors on a :
 $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h q(h)$ où q est une fonction vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} q(h) = 0$.

L'écriture $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h q(h)$ est appelée **développement limité** d'ordre 1 en x_0 .

Le réel $f(x_0) + f'(x_0)h$ est la meilleure approximation affine de f lorsque h est proche de 0.

4°) **Aspect cinématique.**

Si $t \rightarrow f(t)$ est la distance parcourue par un mobile depuis l'instant origine jusqu'à l'instant t alors la vitesse instantanée de ce mobile a l'instant t_0 est $f'(t_0)$.

Exercice d'application.

1°) Montrer que la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x-1}$ est dérivable en 0.

2°) La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x-1} + 1$ est-elle dérivable en 1 ?

Remarque :

Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $-\infty$

alors la courbe (C) de f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale.

II) Fonction dérivable sur un intervalle fonction dérivée.

1°) Fonction dérivable sur un intervalle.

Définition.

La fonction de I vers IR qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f ou dérivé de f. On la note

$$f'; \quad f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f'(x)$$

Propriétés.

*Les fonctions polynômes, Sinus et Cosinus sont dérivables sur IR.

*Les fonction rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

2°) Fonction dérivée de fonctions usuelles

Activité.

Dans chaque cas, montrer que la fonction f est dérivable en $x_0 \in Df$ et préciser l'ensemble sur lequel f est dérivable.

a) $f : x \rightarrow ax + b$ où a, b des réels

b) $f : x \rightarrow \sqrt{x}$

c) $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$

d) $f : x \rightarrow x^2$

Synthèse.

On admet les résultats suivants :

Fonction f	f' dérivée de f	Ensemble de dérivabilité
$x \rightarrow k (k \in \mathbb{R})$	$x \rightarrow 0$	\mathbb{R}
$x \rightarrow ax + b (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \rightarrow a$	\mathbb{R}
$x \rightarrow x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \rightarrow nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$x \rightarrow \frac{1}{x}$	$x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$x \rightarrow \sqrt{x}$	$x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

$x \rightarrow \sin x$	$x \rightarrow \cos x$	\mathbb{R}
$x \rightarrow \cos x$	$x \rightarrow -\sin x$	\mathbb{R}
$x \rightarrow \tan x$	$x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

3°) Opérations sur les fonctions dérivées.

Théorème.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un ensemble I . Alors les fonctions $u + v$,

$a u$ ($a \in \mathbb{R}^*$), uv , $\frac{1}{v}$ ($v \neq 0$) et $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) sont dérivables sur I et on a

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(a u)' = a u'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Exemple.

1°) Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes sur $]0, +\infty[$ puis déterminer leurs fonctions dérivées respectives.

$$f(x) = \sqrt{x} + x \text{ et } g(x) = \sqrt{x}(x^2 - 2).$$

2°) Justifier la dérivabilité de la fonction $f : x \rightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

4°) Dérivée de fonctions composées.

Théorème.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = \cos \sqrt{x}$. f est la composée de la fonction $u : x \rightarrow \sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ suivie de la fonction $v : x \rightarrow \cos x$ dérivable sur \mathbb{R} . De plus $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ donc la fonction $f : v \circ u$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\forall x \in]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$$

$$u'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad v'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x})$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Applications.

Théorème 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle.

La fonction $U^n (n \in \mathbb{N}^)$ est dérivable sur I et on a $(U^n)' = n u' U^{n-1}$.

*Si $u > 0$ sur I alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Cas particulier : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$$

$$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$$

Exemples.

Déterminons la fonction dérivée des fonctions suivantes

1°) f est la fonction définie par $f(x) = (2x + 1)^6$

2°) g est la fonction définie par $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3°) h est la fonction définie par $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

Remarques :

Les fonctions Cosinus et sinus étant dérivables sur \mathbb{R} , elles sont dérivables en 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$$

$x \rightarrow 0$

$x \rightarrow 0$

.../...

- 48 -

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \cos'0 = -\sin 0 = 0$$

$x \rightarrow 0$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$x \rightarrow 0$

III) Application de la dérivation.

1°) Sens de variation

Théorème.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- * Si $f' > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante sur I .
- * Si $f' < 0$ sur I sauf en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement décroissante sur I .
- * Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I .

Remarque.

- * Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I
- * Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I

Exemple :

1°) Etudier les variations de la fonction

$$f : x \rightarrow x^3 - 3x - 2.$$

2°) Etudier les variations de la fonction $g : x \rightarrow x + \frac{1}{x+1}$

2°) Extremum relatif ou local et dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I distinct des extrémités de I .

1. Si f admet un extremum relatif en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$
2. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum relatif pour f .

Pour le deuxième point du théorème on distingue deux cas :

Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe alors $f(x_0)$ n'est pas un extremum local pour f .

Exemple :

$$f(x) = x^3$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$ et $3x^2 \geq 0$. f' s'annule en 0 et ne change pas de signe donc $f(0)$ n'est pas un extremum.

Exercice d'application.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

Déterminer les réels a et b tel que.

* f admette un extremum en -1

*Le point $A(1; 2)$ appartient à (Cf) .

3°) Bijection – application à la résolution d'équation $f(x) = \lambda$

a) Bijection et dérivation

Théorème.

Si f est dérivable sur I et si f est strictement monotone sur I alors la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle $J = f(I)$.

Remarque

Si f admet un extremum en x_0 alors sa représentation graphique admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale. Ce théorème est connu sous le nom de **théorème de la bijection.**

b) Equation $f(x) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Théorème 1 :

Si f est dérivable et strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout élément pris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

Cas particulier : $\lambda = 0$

Théorème 2 :

Si f est dérivable et strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a, b]$

Exemple :

1°) Démontrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une solution unique α dans $[-1, 1]$

2°) Vérifier que $0,3 < \alpha < 0,4$

Chapitre 6 : Etude de fonctions et représentation graphique.

Plan d'étude d'une fonction.

Etudier une fonction consiste à :

- 1°) * Préciser l'ensemble de définitions D , de la f et lorsqu'il n'est pas donné par l'énoncé.
* Vérifier éventuellement si la fonction est paire ou impaire ou périodique surtout Lorsque la réponse à cette question paraît être positive et facile à obtenir. Dans ce cas :
 - réduire le domaine d'étude
 - préciser les éléments de symétrie de la courbe.
- 2°) Etudier le sens de variation de la fonction. Préciser les maximums et les Minimums éventuels.
- 3°) Etudier les limites aux bornes de D . Préciser éventuellement les asymptotes.
- 4°) Consigner tous les résultats précédents dans le tableau de variation de la fonction.
(ce tableau peut être utile pour déceler rapidement une erreur grossière).

Tracé de la représentation graphique.

Pour tracer la courbe (C) d'une fonction, il peut être utile de :

- Chercher les points d'intersections de (C) avec les axes du repère.
- Placer quelques points de (C) en calculant leur coordonnées.
- Placer les tangentes.
- Mettre en évidence les éléments de symétrie.

TP1 : Etude d'une fonction polynôme.

$$f : x \rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

- 1°) Etudier la fonction f .
- 2°) Démontrer que le point $I(2, 0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 3°) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repère.
- 4°) Tracer (C_f) .
- 5°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

TP2 : Etude d'une fonction rationnelle.

$$f : x \rightarrow \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$$

- 1°) Etudier la fonction f .
- 2°) Déterminer les réels a , b et c tel que , $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
- 3°) Pour les valeurs de a , b , c trouvées.
 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

On dit alors que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (Cf)
b) Etudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ puis en déduire une interprétation graphique.

4°) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf). ;

5°) Tracer les asymptotes et (Cf).

6°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

TP3 : Etude d'une fonction rationnelle.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$ et (Cf) sa représentation graphique.

1°) Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x) = a + \frac{bx}{x^2 - 1}$.

2°) Etudier f .

3°) Montrer que le point I de (Cf) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (Cf).

4°) Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) en I.

5°) Etudier la position de (Cf) par rapport à (T)

6°) Tracer (T) et (Cf).

TP4 Etude d'une fonction trigonométrique.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x + 1$.

1°) Démontrer que f est périodique de période 2π puis étudier la parité de f . En déduire que l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $[0, \pi]$.

2°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

b) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f'(x) > 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $[0, \pi]$ puis dresser son tableau de variation sur $[0, \pi]$. Quel est le tableau de variation de f sur $[-\pi, \pi]$?

3°) On veut tracer la R. G. de f avec précision.

a) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$. Quels sont les points communs à la courbe (Cf) restreinte à $[-\pi, \pi]$ et à l'axe des abscisses ?

Préciser les coefficients directeurs des tangentes à (Cf) en chacun de ces points.

b) Tracer la courbe (C) restreinte à $[-\pi, \pi]$.

Chapitre 7 : Suites Numériques.

I) Généralités.

1°) Définition.

* Définir une suite u c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté $U(n)$ ou U_n .

* Une suite est donc une fonction u dont l'ensemble de définition est l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} ou $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, \dots\}$

Notation et vocabulaire.

La suite U est notée

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow U_n$$

U_n est le terme d'indice n ou le terme général de la suite notée U , ou (U_n) , parfois $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

Remarque.

* U_n est l'image de n par la suite (U_n) .

* La suite (U_n) est la restriction d'une fonction numérique f à l'ensemble \mathbb{N} .

Exemples :

1°) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 + 1$

* Le terme d'indice 0 de (U_n) est $U_0 = 0^2 + 1 = 1$ U_0 est le 1^{er} terme.

* Le terme d'indice 1 de (U_n) est $U_1 = 1^2 + 1 = 2$ $U_1 = 2$ est le 2^{ème} terme de (U_n)

⋮

Le 100^{ème} terme de (U_n) est $U_{99} = 99^2 + 1 = 9802$

2°) (U_n) est la suite définie par $U_n = \sqrt{n-4}$ U_n est définie si et seulement si $n - 4 \geq 0$ i.e $n \geq 4$

Le 1^{er} terme de (U_n) est $U_4 = \sqrt{4-4} = 0$

⋮

Le 4^{ème} terme de (U_n) est $U_8 = \sqrt{8-4} = 2$

La suite (U_n) définie par $U_n = \sqrt{n-4}$ est alors notée $(U_n)_{n \geq 4}$.

2°) Modes de Génération d'une suite.

a) Définition explicite.

On peut définir une suite à l'aide d'une formule explicite permettant de calculer directement à partir de n le terme U_n .

Exemple.

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ $U_0 = 1$; $U_1 = \frac{(-1)^1}{1+1} = \frac{-1}{2}$;

$$U_2 = \frac{(-1)^2}{2+1} = \frac{1}{3} ; U_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = \frac{-1}{4}$$

Cas important : (U_n) est une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$ $a > 0$

Représentation des termes de (U_n) .

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[a, +\infty[$, $a \geq 0$

On trace la courbe représentative de f dans un repère (o, i, j) . La représentation graphique de (U_n) est l'ensemble des points isolés de coordonnée $(n, f(n))$ c'est-à-dire (n, U_n) .

On place alors les termes $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ sur l'axe des ordonnées.

Exemple :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = -2n + 1$. Placer graphiquement les 4 premiers termes de la suite (U_n) .

$U_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -2x + 1$.

Tracer (Cf).

b) Définition par récurrence.

On peut définir une suite numérique à l'aide du 1^{er} terme U_0 (par exemple) et d'une relation dite relation de récurrence permettant le calcul d'un terme à partir du terme précédent.

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 2$

La suite (U_n) ainsi définie est appelée suite récurrente.

Calcul des termes U_1, U_2, U_3 , et U_4

D'une manière générale.

Si f est une fonction numérique définie sur un intervalle I tel que pour tout $x \in I$, $f(x)$ est aussi dans I , on peut définir une suite (U_n) par la donnée de son premier terme U_0 où $U_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

Représentation des termes d'une suite.

(U_n) est définie par U_0 et $U_{n+1} = f(U_n)$. On trace la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$. On place d'abord U_0 sur (ox) . On place les points $A_0 (U_0, f(U_0))$, $A_1 (U_1, f(U_1))$, $A_2 (U_2, f(U_2))$, \dots , $A_n (U_n, f(U_n))$

Les termes $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ sont situés sur l'axe des abscisses.

Exemple :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n + 1$. Placer graphiquement les termes U_1, U_2, U_3 , sur l'axe des abscisses. $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 2x + 1$.
Traçons (Cf) puis la droite $(\Delta) = y = x$.

3°) Suites majorées, minorées, périodiques.

Définitions.

Soit (U_n) une suite numérique.

D1 : On dit que (U_n) est majorée s'il existe un réel M (constant) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq M$ ($U_n < M$)

D2 : On dit que (U_n) est minorée s'il existe un réel m (constante) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq m$ (ou $U_n > m$)

Remarque : Une suite à la fois majorée et minorée est une suite bornée.

D3 : Soit p un entier naturel non nul.

On dit que (U_n) est périodique de période P si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+p} = U_n$

Exercice d'application.

1°) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{3n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1}$. Démontrer que (U_n) est minorée par 3.

2°) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 3 - 2 \cos n$. Montrer que (V_n) est bornée.

3°) Soit (W_n) la suite définie par $W_n = (-1)^n$. Démontrer que (W_n) est périodique de période 2.

4°) Sens de variation d'une suite.

1°) Définition.

* La suite (U_n) est strictement croissante si pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} > U_n$.

* La suite (U_n) est strictement décroissante si pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} < U_n$

* La suite (U_n) est constante ou stationnaire si pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} = U_n$

Remarque.

1°) La définition ci-dessus s'énonce de la même manière pour une suite croissante ou décroissante ainsi :

(U_n) est croissante si pour tout n , $U_{n+1} \geq U_n$ (U_n) est décroissante si $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$

2°) Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) on peut :

- Soit étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$

- Soit comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1 lorsque tous les termes de (U_n) sont strictement positifs.

Dans ce cas :

*Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors (U_n) est strictement croissante.

* Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors (U_n) est strictement décroissante.

Exemple :

Etudions le sens de variation de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2n}{n+1}$

2°) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{n}{2^n}$

a) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad V_n > 0$.

b) Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$

c) En déduire le sens de variation de (V_n) .

Théorème :

(U_n) est une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est définie sur $[a, +\infty[$ avec $a \geq 0$.

*Si f est strictement croissante alors (U_n) est strictement croissante.

*Si f est strictement décroissante alors (U_n) est strictement décroissante.

Attention ! La réciproque de cette propriété est fautive.

5°) Principe de la démonstration par récurrence.

On considère en général une propriété ou proposition $P(n)$ qui dépend d'un entier naturel. Nous voulons montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N} . Le raisonnement par récurrence dit que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à condition que :

1°) $P(0)$ soit vraie

2°) $P(n)$ vraie implique $P_{(n+1)}$ vraie.

Méthode.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , on procède en 2 étapes :

1°) Initialisation.

On s'assure que $P(0)$ est vraie.

2°) Hérédité.

On suppose que $P(n)$ est vraie et sous cette hypothèse on démontre que $P_{(n+1)}$ est vraie. Lorsque cela est fait on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N}

Remarque.

Les deux conditions (1) et (2) sont fondamentales dans la démonstration par récurrence.

Dans la 2^e étape, la supposition « P(n) est vraie » est appelée Hypothèse de récurrence.

Pour démontrer que P(n+1) est vraie, on s'appuie sur l'hypothèse de récurrence.

Exemple :

Soit (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 1$

II) Suite arithmétiques – Suites géométriques.

1°) Suite arithmétiques.

a) Définition : On dit qu'une suite U_n est arithmétique si il existe un réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n + r$. Le réel r est appelé la raison de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) Exemple : La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2.

c) Méthode : Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} - U_n$ est constante. Cette constante est sa raison.

d) Formule explicite (U_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme U_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = U_0 + nr$$

Remarque : $\forall p \leq n, \quad U_n = U_p + (n - p)r$.

e) Somme des termes consécutifs.

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme U_0 alors la somme

$$S_{(0,n)} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

$$S_{(0,n)} = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

Exemple : Calculons $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Calculons $S'_n = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n$

2°) Suites géométriques.

a) Définition : On dit qu'une suite $(V_n)_n$ est géométrique s'il existe un réel q tel que $V_{n+1} = q V_n$.
 Le réel q est appelé la raison de la suite (V_n)

b) Exemple : La suite (V_n) définie par $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ est une suite géométrique de raison q = 1/2.

c) Méthode : La suite (V_n)

Pour montrer qu'une suite (V_n)_n est géométrique il suffit de montrer que

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = q \quad \text{ou} \quad V_{n+1} = qV_n$$

d) Formule explicite.

(V_n)_n est une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme V₀ si et seulement si
V_n = qⁿV₀

Remarque.

$$\forall P \leq n \quad S_{(p,n)} = V_p + V_{p+1} + \dots + V_{n-1} + V_n$$

$$S_{(p,n)} = V_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

3°) Applications

Soit U une suite définie par $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$ et V_n = U_n - 1. Montrer que V_n est

une suite géométrique.

Exercice.

Calculer la somme S_n = 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ + ... + $\frac{1}{2^n}$

Chapitre 8 : Dénombrement.

I) Le langage des ensembles.

1°) Complémentaire d'un ensemble.

Définition.

Soit E un ensemble et A une partie de E ; Le complémentaire de A dans E note \bar{A} ou

C_E^A est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. $x \in \bar{A}$ signifie

que $x \notin A$

Exemple : Dans une classe mixte l'ensemble des garçons est le complémentaire de l'ensemble des filles et réciproquement.

Propriété.

Si \bar{A} est le complémentaire de A dans E alors :

$$* A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$* A \cup \bar{A} = E$$

$$* (\bar{\bar{A}}) = A$$

2°) **Cardinal d'un ensemble.**

a) **Définition.**

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E noté card E est le nombre d'éléments de E.

b) **Propriété.**

Soit A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$$

Cas particulier.

Si A et B sont disjoints c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{card } (A \cap B) = 0$$

3°) **Partition d'un ensemble.**

Soit E un ensemble. Une partition de E est constituée de parties non vides disjointes et dont la réunion est E.

Remarque :

Si A, B, C forment une partition de E alors $A \cup B \cup C = E$ et $A \cap B \cap C = \emptyset$

II) Produit cartésien.

1°) Définition.

Soit A et B deux ensembles finis, on appelle produit cartésien de A par B, noté $A \times B$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$;

Remarque :

On peut dénombrer les éléments de $A \times B$ à l'aide d'un arbre où d'un tableau à double entrée.

Exemple : On donne $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

Déterminons les éléments de $A \times B$

A l'aide d'un arbre.

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

On remarque que $A \times B$ a 6 éléments dont $\text{card}(A \times B) = 6 = \text{card} A \times \text{card} B$.

A l'aide d'un tableau à double entrée.

A \ B	a	b
1	(1 ; a)	(1 ; b)
2	(2 ; a)	(2 ; b)
3	(3,a)	(3,b)

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

Remarque.

Déterminons les éléments de $B \times A$

$$B \times A = \{(b,1), (b,2), (b,3), (a,1), (a,2), (a,3)\}$$

Les éléments $A \times B$ et ceux de $B \times A$ sont différents donc $A \times B \neq B \times A$ si $A \neq B$

Propriété.

Soient A et B deux ensembles finis

$$\text{Card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{Card } B;$$

2°) Produit cartésien d'ensembles finis.

On étend à P objets $(a_1, a_2 \dots a_p)$ la notion des produits cartésien . On obtient le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, l'ensemble des points ou p – uplets.

Exemples :

- * Un 2 – uplet est un couple
- * Un 3 – uplet est un triplet
- * Un 4 – uplet est un quadruplet.

Un p – uplet de E est une suite ordonnée de p élément de E distincts ou non.

$$E^p = E \times E \times \dots \times E, \text{ produits d'instincts de p ensemble égaux à E.}$$

Exemple.

On donne $E = \{a, b\}$ déterminons à l'aide d'un arbre les éléments de E^3

$$\text{Card } E^3 = \{(a, a, a); (a, a, b); (a, b, a); (a, b, b); (b, a, a); (b, a, b); (b, b, a); (b, b, b) \}$$

$$\text{Card } E^3 = 8 = 2^3$$

Propriété.

Soient E_1, E_2, \dots, E_p des ensembles finis alors

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card } E_1 \times \text{card } E_2 \times \dots \times \text{card } E_p$$

En particulier si $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$ alors $\text{Card } E^p = (\text{card } E)^p$

Exercice.

1°) Dans une loterie on dispose de 3 roues identiques et portant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chaque numéro dans chaque roue a les mêmes chances de sortir que les autres. Combien faut-il imprimer de billets de loteries ?

2°) Dans un sac il y a 6 boules identiques numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6. On tire successivement 3 boules en prenant soin de remettre la boule tirée dans le sac après le tirage. Combien de résultats possibles ya t'il ?

NB : Un arbre même incomplet pourra vous aider à répondre aux exo (1) et (2).

Exercice 3.

Un sac contient 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire successivement 2 boules en remettant chaque fois la boule tirée dans le sac

- Combien ya- t'il de tirages possibles ?
- Combien ya-t'il de tirages contenant 2 boules de même couleur ?
- Combien ya-t'il de tirages contenant au moins une boule verte ?

III) Arrangement et combinaisons.

1°) Arrangement.

Activité.

Dans un sac on a placé 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement trois jetons et on les place côte à côte, le premier tire est à gauche, le deuxième est au milieu et le 3^{ème} est à droite. Combien de nombre peut-on ainsi former ? On pourra s'aider d'un arbre.

Corrigé

* Au 1^{er} tirage il ya 7 possibilités de tirer sur jeton.

* Le 1^{er} jeton étant tiré et non remis dans le sac, il ya 6 possibilités de tirer le deuxième jeton. Donc 7×6 possibilités de tirer les deux premiers jetons. Les deux premiers jetons étant tirés il reste 5 jetons dans le sac. Donc il ya 5 possibilités de tirer le troisième jeton. Il ya au total $7 \times 6 \times 5$ possibilités soit 210 possibilités. On peut aussi former 210 nombres.

Remarque :

Le nombre $7 \times 6 \times 5$ est le nombre d'arrangement de 3 jetons tirés parmi 7. On le

note $A^3_7 = 7 \times 6 \times 5$

a) Définition :

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \geq 1$) et P un entier naturel tel que $n \geq p$. On appelle arrangement de P éléments de E. tout p. uplet de E^p formé de P éléments de E ; un arrangement de p éléments de E est donc une suite ordonnée de p éléments d'intersection de E.

Remarque : Dans un arrangement l'ordre compte.

b) Propriétés.

Le nombre d'arrangement de P éléments de E noté A^P_n est défini par $A^P_n = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

Convention : $A^0_n = 1$ et $A^1_n = n$

c) Cas particuliers : permutation

Un arrangement de n éléments de E est noté $A_n^n = n!$ (on lit factorielle n)

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(3 \times 2 \times 1)$$

Par convention : $0! = 1$

Autres formules de A_n^P

$$\text{Pour tout } n \geq P, \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\text{Exemples } A_n^2 = n(n-1) \quad A_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

Exercice.

1°) Calculer simplement les expressions suivantes :

$$A = \frac{(n+3)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!}; \quad B = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}; \quad C = \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} \quad D = \frac{A_n^2}{A_n^{n+1}}$$

2°) Combinaison.

a) Définition.

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments toute partie ou tout sous ensemble constitué de p éléments distincts de E .

b) Propriétés.

Le nombre de combinaison de p éléments de E noté C_n^P est défini par

$$C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{avec } 0 \leq p \leq n \quad \text{comme } A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{alors } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} \quad \text{avec}$$

$$0 \leq p \leq n$$

Exemples : $C_n^0 = 1$: nombre d'ensemble vide

$$C_n^n = 1 : \text{nombre de partie de } n \text{ éléments (partie pleine)}$$

$$C_n^1 = n : \text{nombre de partie à un seul élément (singleton)}$$

$$C_n^{n-1} = n : \text{nombre de partie à } (n-1) \text{ éléments.}$$

Remarque.

Dans une combinaison, l'ordre ne compte pas. On reconnaît une combinaison par un tirage simultané par exemple.,

Pour tout entier p et n tel que $0 \leq p \leq n$

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Justification.

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

Exercice.

1°) Calculer simplement

$$C_{10}^4 ; \frac{C_8^3}{C_9^5} ; \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_4^2}$$

2°) Résoudre dans IN les équations suivantes :

$$a) C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 64^2}{6} + 5$$

$$b) 2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$$

On précisera d'abord l'ensemble de validité de l'équation.

c) Formule du Binôme de Newton.

Exemple.

a et b sont deux réels non nuls

$$*(a+b)^0 = 1$$

$$*(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$*(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$*(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$*(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$= C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

$$*(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$$

On en déduit alors la formule générale de $(a+b)^n$ ou $n \in \mathbb{N}$ et a et b deux réels non nuls. Pour les réels a et b non nuls et n un entier naturel on a

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Cas particulier : a = b = 1

Si a = b = 1 alors on a :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

d) Triangle arithmétique de Pascal.

Propriété

Pour tout entier naturels n et p tel que $0 \leq p \leq n-1$ on a :

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

Exercice.

I) Développer

$$(2x - 1)^5 \text{ et } (a + 3)^4$$

II) 1°) Rappeler le développement de $(1 + x)^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

2°) En donnant successivement à x les valeurs judicieusement choisies calculer :

$$a) C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$$

$$b) C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n$$

III) Une classe comporte 12 filles et 8 garçons. On veut choisir 5 représentants de la classe pour la fête de fin d'année.

1°) Combien ya-t'il de choix possibles ?

2°) Combien ya-t'il de choix possibles ?

a) Si on les choisit parmi les filles ?

b) Si on choisit 3 filles et 2 garçons

c) Si on choisit au moins 2 filles.

IV) On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code d'un système

d'alarme. Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres nécessairement distinctes, les deux lettres non.

1°) Quel est le nombre de codes possibles ?

2°) Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :

a) Les 3 chiffres pairs

b) Les deux lettres sont identiques

c) le code contient deux chiffres impairs.

Chapitre 9 : Statistiques.

I) Vocabulaire statistique.

1°) Population statistique.

On appelle population statistique, l'ensemble sur lequel porte une étude statistique. Chaque élément de la population est appelé **individu**.

2°) Caractère statistique

Le caractère ou caractère statistique est la propriété étudiée lors d'une étude statistique. Le caractère est dit quantitatif quand on peut le mesurer. Par exemple : la taille, le poids, les notes sur 20,...

Dans le cas contraire, le caractère est dit qualitatif.

3°) Fréquence.

La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. Si n_i est l'effectif de la valeur X_i et N l'effectif total alors la fréquence

de la valeur x_i est $f_i = \frac{n_i}{N}$

Elle est souvent exprimé en pourcentage $f_i (\%) = \frac{n_i \times 100}{N}$

4°) Effectif cumulé croissant et effectif cumulé décroissant.

L'effectif cumulé croissant d'une valeur est la somme des effectifs de cette valeur et de celles qui la précèdent.

L'effectif cumulé décroissant d'une valeur est la somme des effectifs de cette valeur et celles qui la suivent.

Considérons une série statistique représentée par le tableau ci-dessous.

Valeur x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_{p-1}	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_{p-1}	n_p
E.C.C.	n_1	n_1+n_2	$n_1+n_2+n_3$...	$n_1+n_2+n_3+...+n_{p-1}$	$n_1+n_2+n_3+...+n_p$
E.C.D.	$n_1+n_2+...+n_p=N$				$n_{p-1}+n_p$	n_p

II) Représentation graphique.

1°) Cas des caractères quantitatifs

a) Diagrammes en bâtons.

Exemple :

Une étude statistique portant sur l'âge de 110 élèves de la classe de 2nde du lycée a donné le tableau suivant.

Valeur du caractère	16	17	18	19	20	22
Effectifs	1	25	52	24	7	1

- Quelle est la population de cette série statistique ?
- Quelle est le caractère étudié lors de cette étude statistique ?
- Construire le diagramme en bâton des effectifs de cette série statistique ?

Remarque.

Les « batons » sont des traits verticaux dont les longueurs sont proportionnelles aux effectifs.

b) Diagramme circulaire.

Exemple : Dans une entreprise, la repartition du parc automobile suivant la puissance fiscale est donnée dans le tableau suivant :

Puissance n_i en cheval vapeur (cv)	4	7	9	10	11
Nombre de véhicule	1	5	8	4	2

1°) Quelle est la population de cette série sttistique ?

a) Préciser son effectif

b) Quelle est la propriété étudiée ?

2°) Représenter cette série par un diagramme circulaire.

N (eff. total) représente 360°

n_i (eff de la valeur x_i) représenté par S.

2°) **Polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants.**

Puissance en CV	4	7	9	10	11
Nombre de véhicules n_i	1	5	8	4	2

Tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants

Puissance en CV	4	7	9	10	11
E.C.C	1	6	14	18	20
E.C.D	20	19	14	6	2

Pour représenter le polgone de E.C.C. on place dans un repère orthogonal les points $A_1 (4,1)$, $A_2 (7,6)$, $A_3 (9,14)$, $A_4 (10,18)$, $A_5 (11,20)$

De même pour représenter le polygone des ECD on place dans un repère orthogonal des points : $B_1 (4, 20)$, $B_2 (7 ; 19)$, $B_3 (9 ;14)$; $B_4 (10,6)$; $B_5(11,2)$

Exemple 2 : Cas ou les données sont regroupées en classe.

Une enquête faite auprès de 24 élèves d'une classe de première D portait sur la durée du trajet nécessaire à chacun pour se rendre au lycée.

Les résultats sont regroupés par le tableau suivant

Durée du trajet en (mn)	$[0,10[$	$[10,20[$	$[20,30[$	$[30,40[$
Nombre d'élèves n	5	6	9	4

Représentons les polygones des ECC et ECD de cette série :

Classes	$[0 ; 10[$	$[10 ; 20[$	$[20 ; 30[$	$[30 ; 40[$
n_i	5	6	9	4
E.C.C	5	11	20	24
E.C.D	24	19	13	4

Pour représenter les polygones des E.C.C on place dans un repère orthogonal les points $A_1(0, 0)$ $A_2(10, 5)$ $A_3(20, 11)$, $A_4(30, 20)$; $A_5(40, 24)$.

Pour représenter les polygones des E C D, on place dans un repère orthogonal les points $B_1(0, 24)$, $B_2(10,19)$, $B_3(20, 13)$, $B_4(30, 4)$ $B^5(40, 0)$

Echelle : En abscisse : 1 unité par 5
En ordonnée : 1 unité représentée par 5.

3°) **Histogramme** :
Considérons l'exemple précédant :

Classe	$[0,10[$	$[10,20[$	$[20,30[$	$[30,40[$
Eff	5	6	9	4

En abscisse : 1 cm \rightarrow 10
En ordonnée : 1 cm \rightarrow 1

III) Caractéristique de positions :

1°) Le mode.

Le mode d'une série statistique est toute valeur ou modalité d'effectif maximal.

Remarques.

1°) Une série statistique peut avoir plusieurs modes. Dans ce cas, on dit que la série est multimodale si la série admet 2 modes on dit qu'elle est bimodale.

Si la série admet 3 modes on dit qu'elle est trimodale.

2°) Lorsque les données sont regroupées ou classés, le mode est appelé classe modale.

2°) Médiane d'une série statistique :

On appelle médiane d'une série statistique tout nombre réel, M vérifiant la propriété suivante : « l'effectif des valeurs strictement inférieurs à M et l'effectif des valeurs strictement supérieurs à M ne dépassent pas la moitié de l'effectif total »

Remarque :

La médiane d'une série statistique est la valeur qui partage la série en deux séries de même effectif.

Lorsque les données sont regroupées en classe, la médiane est appelée **classe médiane.**

3°) Moyenne.

La moyenne d'une série statistique est le nombre réel noté \bar{x} définie par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Soit une série statistique représentée par le tableau suivant :

Valeur x	x_1	x_2	...	x_p
----------	-------	-------	-----	-------

Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p
----------------	-------	-------	-----	-------

On note $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p =$ effectif total.

Remarque :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p)$$

En utilisant le symbole \sum (somme) on obtient la formule $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$

Remarques.

Lorsque les données sont regroupées en classe les valeurs x_i sont remplacées par les centres des classes. Le centre de la classe $[a, b[$ est $\frac{a+b}{2}$

Le mode, la médiane et la moyenne sont appelés caractéristiques (ou paramètres) de position d'une série statistique.

IV) Caractéristique de dispersion.

Les caractéristiques de dispersion sont des indicateurs qui permettent d'apprécier la dispersion de la valeur autour de la moyenne.

1°) **Ecart moyen.**

L'écart moyen est la dispersion des écarts à la moyenne.

Soit une série statistique représentée par le tableau suivant :

Valeur x_i	x_1	x_2	x_p
Eff	n_1	n_2	...	$x_{p...}$

L'écart moyen de la série noté e_m est définie par :

$$e_m = \frac{n_1 |x_1 - \bar{x}| + n_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + n_p |x_p - \bar{x}|}{N}$$

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|$$

2°) **La variance**

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. On la note V

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

En utilisant le symbole \sum , on obtient la formule condensée.

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Autre formule de la variance.

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p ni(x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Par suite } V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p ni(x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$V = \frac{1}{N} \sum ni x_i^2 - 2ni x_i \bar{x} + ni \bar{x} + ni \bar{x}^2$$

$$V = \frac{1}{N} \sum ni x_i^2 - \frac{2}{N} \bar{x} \sum nix_i + \frac{\bar{x}^2}{N} \sum ni$$

$$\text{Or } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p nix_i^2 = \bar{x} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p ni = N$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{N} \sum ni x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \frac{\bar{x}^2}{N} \times N$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p ni x_i^2 - \bar{x}^2$$

3°) Ecart type.

L'écart type est la racine carrée de la variance. On le note $\sigma = \sqrt{V}$

Remarque.

L'écart moyen, la variance et l'écart type sont appelés caractéristiques ou paramètre de dispersion d'une série statistique. Ils sont d'autant plus grand que les valeurs x_i s'écartent d'avantage de la moyenne.

Exercice d'application.

On considère la série représentée par le tableau suivant :

Durée du trajet en mn	[0,10[[10,20[[20,30[[30,40[
Nombre d'élèves	5	6	9	4

1°) Calculer la durée moyenne (d_m) de cette série.

2°) Calculer l'écart type de cette série.