

COMPOSITION DU 2^è TRIMESTRE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrices non autorisées)

N.B : Soignez vos écritures et vos présentations !

Exercice 1

1. Déterminer les limites suivantes. (4pts)

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 1)$.

c. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{5}{4 - x^2} \right)$.

d. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} \right)$

2. Sachant que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, calculer les limites suivantes : (2pts)

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$;

3. Dans chacun des cas suivants étudier la limite de la fonction f en a (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite). (2pts)

$$f(x) = \frac{-2}{(x-3)^5}; a = 3$$

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{2-x}}; a = 2$$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$. (C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f . (1pt)

2. Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$. (1pt)

3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f . (2pts)

4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$. (1pt)

5. Déterminer l'autre asymptote à la courbe. (1pt)

Exercice 3

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

1. a. Démontrer que $f(x) = \frac{2(\sin x)^2}{x^2}$; (1pt)
 b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (1pt)
2. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$. (1pt)

Exercice 4

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$.

On sait que :

1. Pour $x < 1$; $f(x) + 1 > 0$ et pour $x > 1$, $f(x) - 1 < 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Tâche :

- T_1 . Montrer que $\forall x < 1$ la courbe représentative de f est en dessus de la droite d'équation $y = -1$. (0, 5pt)
- T_2 . Montrer que $\forall x > 1$ la courbe représentative de f est au dessous de la droite d'équation $y = 1$. (0, 5pt)
- T_3 . $\forall x \in] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$, la fonction f est croissante dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ illustrer graphiquement ces limites de la fonction f . (2pts)

BONNE INSPIRATION!!!!!!!