

COUR PAR ANTICIPATION (C.P.A)

JUILLET 2023



1^{ère}D

MATHEMATIQUES

NOM & PRENOMS :

.....

ÉTABLISSEMENT :

.....

CONTACT :

.....

<u>Sommaire</u>	Page
Leçon 1 : Équations Et Inéquations Du Second	1
Leçon 2 : Dénombrement	8
Leçon 3: Généralités Sur Les Fonctions	14
Leçon 4 : Limites Et Continuité	21
Leçon 05 : Probabilité	26
Leçon 06 : Dérivation	31
Leçon 07 :Barycentre	37
Leçon 08 : Extension de limites	42
Leçon 09 : Étude Et Représentation Graphique D'une Fonction	48
Leçon10 :Angles Orientés et Trigonométrie	54
Leçon 11 : Systèmes D'équations Linéaires Dans $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$	63
Leçon 12 : Suites Numériques	68
Leçon 13 : Orthogonalité De L'espace	74
Leçon 14 : Composée de Transformation	82
Leçon 15 : Statistiques À Une Variable	88

Compétence 1 :

Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème 1 : Calculs algébriques

LEÇON 1 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS IR

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève en classe de première, décide de faire un jardin de tomates dans la grande cour familiale. Pour l'encourager, son père lui offre 20 mètres de grillage pour la clôture qu'elle décide d'utiliser entièrement. Elle décide de réaliser son jardin de forme rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous, laissant sans clôture un de ses côtés dans le sens de la longueur. Elle veut que l'aire du jardin soit de 48 m^2 . Devant la difficulté à déterminer les dimensions de ce jardin, elle explique sa préoccupation à ses camarades de classe. Ensemble, ils décident de déterminer les dimensions du jardin.



B- CONTENU DE LA LEÇON

I- EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

1- Discriminant d'un polynôme du second degré

a) Définition

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

On appelle discriminant du polynôme P le nombre réel noté Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemple

Soit le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Dans ce cas on a : $a = 3$; $b = 2$ et $c = -4$

Son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 52$

b) Propriété

On considère le polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, P admet un zéro double $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Dans ce cas la forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de zéro et P n'est pas factorisable.

Exercice de fixation 1

Calcule les zéros éventuels des polynômes P , Q et R ci-dessous, puis factorise si possible chacun d'eux. $P(x) = -2x^2 + x - 3$, $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ et $R(x) = 2x^2 + 3x - 5$

2-- Équations du second Degré

a) Définition

On appelle équation du second degré, toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b , et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Exemple

L'équation : $x \in \mathbb{R}, -3x^2 + x + 4 = 0$ est une équation du second degré.

b) Résolution d'une équation du second degré

➤ Résolution algébrique

Résoudre l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

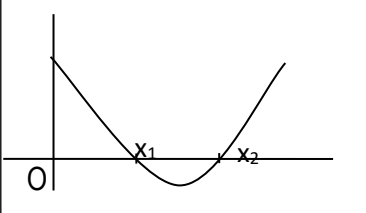
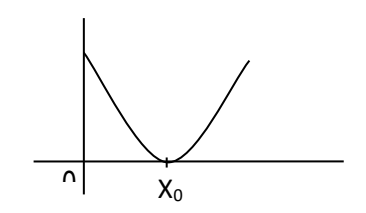
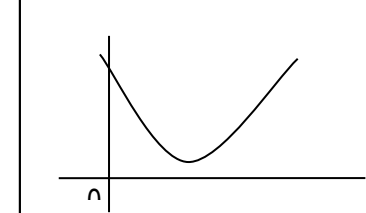
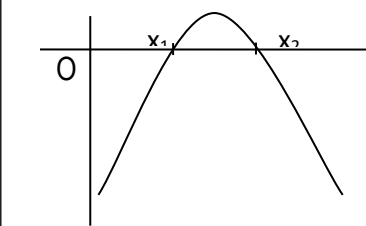
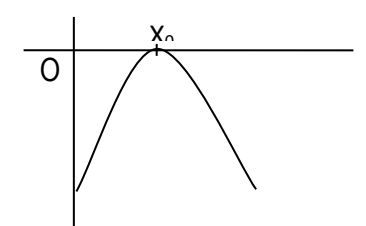
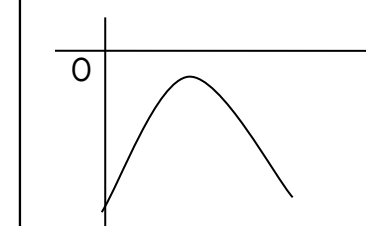
Exercice de fixation 2 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $-x^2 + x + 2 = 0$.

Remarque :

Si l'équation du second degré (E) : $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ est telle que a et c sont de signes contraires, (le discriminant est positif dans ce cas), alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.

➤ Résolution graphique

Pour résoudre graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$, on peut utiliser le tableau récapitulatif suivant.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$
(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2	(E) admet une solution unique x_0	(E) n'admet pas de solutions	

c) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Si l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 , (distinctes ou non) alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Exercice de fixation 3

L'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 4 = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 .
Détermine l'autre solution de (E).

Propriété 2

Soit S et P deux nombres réels.

Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors il existe deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P .
Ces deux nombres sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Point méthode

Pour déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme S et le produit P , on peut procéder de la manière suivante :

- on vérifie que : $S^2 - 4P \geq 0$;
- on résout l'équation $x^2 - Sx + P = 0$;
- les nombres réels recherchés sont les solutions de l'équation précédente.

Exercice de fixation 4

Détermine deux nombres réels s'ils existent dont leur somme est -3 et leur produit est -4 .

3- Inéquations du second degré

a) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P le polynôme du second degré définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où

a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P a deux zéros distincts x_1 et x_2 . (on suppose que $x_1 < x_2$)

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	Signe de a	$\emptyset$	Signe de $-a$	$\emptyset$	Signe de a

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet un zéro double x_0 ; on obtient le tableau :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de zéro ; on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	

Exercice de fixation 5

Étudie le signe de chacun des polynômes suivants, connaissant leurs zéros éventuels :

- 1) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros de P sont 1 et 3 ;
- 2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ;
- 3) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5.

b) Définition d'une inéquation du second degré

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b , et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.

$x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) < 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0$.

Exemple

L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, -3x^2 + 5x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré.

c) Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation de l'un des types ci-dessus revient à étudier le signe du polynôme $P(x)$, puis trouver l'intervalle ou les intervalles correspondants à l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exercice de fixation 6 : Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

- 1) $2x^2 - 5x + 3 < 0$;
- 2) $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$;
- 3) $x^2 + x + 2 > 0$

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1- Equations bicarrées

a) Définition

On appelle équation bicarrée une équation du type : $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemple : L'équation : $x \in \mathbb{R}, -3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ est une équation bicarrée.

b) Résolution d'une équation bicarrée

Point méthode

Pour résoudre une équation du type : $x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$). On peut procéder de la façon suivante :

- on pose : $X = x^2$;
- on résout l'équation du second degré : $aX^2 + bX + c = 0$;
- on résout, s'il y a lieu, les équations d'inconnue x du type $x^2 = X$.

(X étant solution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$)

Exercice de fixation : Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

2. Equations et inéquations irrationnelles

a) Résolution d'une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$

Point méthode

Pour résoudre une équation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$ on peut

Utiliser l'équivalence suivante : $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation 7 : Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$.

b) Résolution d'une inéquation irrationnelle du type : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$.

Point méthode

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$ on peut utiliser

l'équivalence suivante : $\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation 8 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$

c) Résolution d'une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

Point méthode :

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ on peut utiliser

l'équivalence suivante : $\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \right)$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation 9 : Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\sqrt{2 - x} \geq x + 4$

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Écris le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Polynôme du 2 nd degré	Discriminant		
		a	b	c
1.	$2x^2 - 3x + 1$	15	1	-15
2.	$x^2 + x - 2$	-7	3	9
3.	$4x^2 - 5x + 3$	3	13	-23
4.	$15x^2 - 27x + 10$	129	49	9
5.	$x^2 - 2x + 1$	0	-1	5

Exercice 2

Par la méthode du discriminant, résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$; 2) $9x^2 + 4x + 5 = 0$; 3) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, détermine deux nombres réels s'ils existent, dont on connaît la somme S et le produit P : 1) $S = 28$; $P = 195$ et 2) $S = 2\sqrt{5}$; $P = 3$

Exercice 4 : Détermine deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est 41.

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : (I_1): $x^2 - 2x + 3 > 0$ et (I_2): $-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$

Exercice 6 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + 1 = \sqrt{5 - x^2}$

Exercice 7

Détermine les nombres x et y tels que : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

Exercice 8

a) Vérifie que : $A = \sqrt{3} + 2$ et $B = -\sqrt{3} + 2$ sont inverses l'un de l'autre.

b) Vérifie que $A + B = 4$

c) Déduis-en (sans calcul mais en justifiant) les solutions de l'équation

(E) : $x^2 = 4x - 1$

Exercice 9

L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m^2 .

Si on augmente sa longueur L de 6m et sa largeur l de 6m, alors l'aire est alors égale à 630 m^2 .

Détermine les dimensions de ce jardin.

Exercice 10: situation complexe

Lors d'une visite d'entreprise, les élèves d'une classe de 1^{ère} scientifique ont été informés que dans cette entreprise, le coût de production de q objets et les frais d'entretien sont donnés en milliers de francs CFA par la formule $c(q) = 0,1q^2 + 10q + 1500$ et que chaque objet est vendu à 87.000 F. Un agent de cette entreprise affirme que pour maintenir le bénéfice supérieur ou égal à 12.832.500 F, le nombre d'objets q à produire doit être compris entre 310 et 460.

En utilisant leurs acquis mathématiques, les élèves doivent vérifier si l'agent a raison ou pas.

A l'aide d'une production argumentée, dis si l'agent a raison.

Compétence 2 :

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 2 :: Modélisation de phénomènes aléatoires

LEÇON 2 : DENOMBREMENT

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des compétitions de l'OISSU, un sponsor a remis un lot de maillots au Chef d'un établissement. Le professeur d'EPS de la classe de 1^{ère} scientifique a fourni à ce Chef d'établissement les informations suivantes :

Sur les 25 élèves régulièrement inscrits en 1^{ère} scientifique :

- ✓ 15 jouent au Handball ;
- ✓ 10 jouent au Basketball ;
- ✓ 5 pratiquent les deux sports.

Le premier lot de maillots parvenu n'étant pas suffisant pour tous les élèves, le Chef d'établissement décide de dénombrer les élèves de 1^{ère} scientifique qui ne pratiquent aucun sport. Il se rend dans la classe afin de procéder au comptage. Malheureusement, ayant terminé leur cours du jour, la plupart des élèves des élèves sont rentrés chez eux.

Vu l'urgence et dans le souci d'avoir le nombre exact de maillots restants pour cette classe, il sollicite les élèves de la classe présents. Ceux-ci s'organisent pour répondre à la préoccupation du Chef d'établissement.

B-RESUME DE COURS

1. ENSEMBLE FINI

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de E.

On note : **Card (E)**.

Exemple : $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ et $\text{Card}(A) = 4$

1.2 Réunion et intersection de deux ensembles

Définitions

- Soit A et B deux ensembles.

On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

On note $A \cup B$ et on lit : A union B.

- Soit A et B deux ensembles.

On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

On note $A \cap B$ et on lit : A inter B.

Propriété : Soit A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Exercice de fixation

On considère les ensembles E et F tels que $\text{Card}(E) = 30$, $\text{Card}(F) = 25$ et $\text{Card}(E \cap F) = 15$

Détermine $\text{Card}(E \cup F)$

1.1 Complémentaire d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E. On appelle complémentaire ou partie complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note : C_E^A ou $\bar{A}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple

Soit A et E deux ensembles tels que $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

le complémentaire de A dans E est : $\bar{A} = C_E^A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Propriété 1

Soit E un ensemble et A une partie de E. On a : $A \cup C_E^A = E$ et $A \cap C_E^A = \emptyset$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \bar{A}$ et $A = \{2; 3; 6\}$ et $B = \{t; 4; v; y\}$.

Écris l'ensemble E.

Propriété 2

Soit A une partie d'un ensemble E et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

On a : $\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(\bar{A})$

Exercice de fixation

On donne B et A deux parties d'un ensemble E tel que $B = \bar{A}$ et $A = \{2; 3; 6\}$ et $\text{card}(E) = 12$

Trouve le cardinal de l'ensemble B.

1.1 Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soit A et B deux ensembles.

On appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples (a ; b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

Notation : Le produit cartésien de A par B se note : $A \times B$ (et se lit : A croix B).

Exemple

Soit A et B des ensembles telle que $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{a; b; c; d\}$

Les éléments du produit cartésien de $A \times B$ sont :

(On pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrées)

- Arbre de choix (à faire)
- tableau à double entrées

Remarques

- De la même manière, on définit $A \times B \times C$ l'ensemble des triplets (a; b; c) où $a \in A, b \in B$ et $c \in C$.
- $A \times A$ se note A^2 , $A \times A \times A$ se note A^3 .
- Soit n est un entier supérieur ou égal à 2 et $A \times A \times \dots \times A = A^n$ (A apparaît n fois dans le produit)
Les éléments de A^n sont n éléments $x_1; x_2; \dots$ et x_n de A totalement ordonnés. On les note $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.
 x_1 est premier ; x_2 est deuxième ; ... x_n est n-ième.
Lorsque $x_1 \neq x_2$ on a : $(x_1; x_2; \dots; x_n) \neq (x_2; x_1; \dots; x_n)$ en particulier : $(a; b) \neq (b; a)$ ainsi, dans un couple l'ordre des éléments est très important.

Propriété

Pour tous ensembles finis A et B, on a : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

Exercice de fixation

Soit E et F deux ensembles tels que : $\text{card}(A) = 5$ et $\text{card}(F) = 8$.

Détermine $\text{Card}(E \times F)$.

Conséquence

Pour tout ensemble fini A, pour tout entier naturel p non nul, $\text{Card}(A^p) = [\text{Card}(A)]^p$.

Exercice de fixation

On lance au hasard trois fois de suite un dé parfait en notant à chaque lancer le numéro de la face supérieure.

Détermine le nombre de résultats possibles.

2. P-UPLETS, ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS

2.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

On appelle p -uplet de E tout élément de l'ensemble E^p .

Cas particuliers

$p = 2$: On parle de couple ;

$p = 3$: On parle de triplet ;

$p = 4$: On parle de quadruplet.

Exemple

On donne $E = \{0 ; 5 ; 6\}$.

$(0 ; 0 ; 1) ; (0 ; 5 ; 6)$ sont des 3-uplets ou triplets de l'ensemble E^3 .

2.1 Propriété

Le nombre de p -uplet(s) d'un ensemble à n éléments est égal à n^p .

Remarque : Dans les p -uplets, un élément peut apparaître plusieurs fois (répétition possible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation

Détermine le nombre de numéros de téléphones de 8 chiffres puis de 10 chiffres qu'on peut former avec les nombres du système décimal.

3 Arrangements

3.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple

$E = \{a ; 1 ; 4 ; b ; 9 ; c\}$

$(1 ; a ; 4 ; 9) ; (b ; c ; 9 ; 1) ; (9 ; a ; 4 ; 1)$ sont trois arrangements de 4 éléments de E .

Par contre $(b ; 4 ; b) ; (9 ; b ; 9)$ sont des triplets qui ne sont pas des arrangements de E .

3.2 Propriété

n et p sont deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal à A_n^p .

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$$

NB : Le nombre d'arrangement de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal au produit de p nombres entiers naturels consécutifs dont le plus grand est n .

Remarque : Dans les arrangements, un élément ne peut apparaître qu'au plus une fois (répétition impossible) et l'ordre dans lequel les éléments apparaissent est important.

Exercice de fixation : Calcule A_{10}^4 et A_7^5

Cas particulier : $A_n^1 = n$; Par convention $A_n^0 = 1$;

4 Permutation

4.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E .

Exemple : $(0 ; 1 ; 6) ; (6 ; 0 ; 1) ; (0 ; 6 ; 1)$ sont des permutations de l'ensemble $A = \{0 ; 1 ; 6\}$.

4.2 Propriétés

Propriété1

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est A_n^n .

$$A_n^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1.$$

Exercice de fixation : Détermine le nombre de mots ayant un sens ou non, que l'on peut former à partir des lettres du nom KENDAL.

Notation factorielle

$n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ se note $n!$ On lit factorielle n .

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$$

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Propriété2

- Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $1 \leq p \leq n$. On a

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- $n! = A_n^n$

Exercice de fixation

Calcule le nombre de 4 arrangements dans 10.

5 COMBINAISONS

5.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E tout sous- ensemble de E ayant p éléments.

Exemple

Les ensembles $\{0 ; e ; u\}$, $\{v ; e\}$ sont des combinaisons de l'ensemble

$$A = \{0 ; 1 ; e ; v ; u\}$$

Remarque

L'ensemble $\{d ; a ; c\}$ possède les mêmes éléments que l'ensemble $\{a ; d ; c\}$. Ils sont donc égaux.

Par conséquent, contrairement aux listes, l'ordre d'écriture des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Cette absence d'importance de l'ordre est marquée par l'utilisation de l'écriture avec accolades, écriture réservées aux ensembles.

Par ailleurs, chaque élément ne peut apparaître qu'au plus une fois (répétition impossible).

5.2 Propriétés

Propriété 1 : Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exercice de fixation : Calcule le nombre de combinaisons de 5 dans 11.

Propriété 2

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$.

- On a : $C_n^{n-p} = C_n^p$.
- Si de plus $0 < p < n$, alors on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Tirages simultanés, tirages successifs sans remise, tirages successifs avec remise

TIRAGES	SIGNIFICATION	MODELES
Simultanés de p parmi n ($0 \leq p \leq n$)	Tirer en même temps des p éléments dans n	C_n^p
Successifs sans remise de p parmi n ($0 \leq p \leq n$)	Tirer élément après élément sans remettre	A_n^p
Successifs sans remise de n parmi n	Tirer élément après élément sans remettre jusqu'à tirer les n éléments	$n!$
Successifs avec remise de p parmi n	Tirer élément le remettre et ainsi de suite	n^p

Vocabulaire

- Tirer au moins n éléments, c'est tirer un nombre plus grand ou égal à n . Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au plus $n - 1$ »
- Tirer au plus n éléments, c'est tirer un nombre plus petit ou égal à n . Cet ensemble a pour complémentaire « Tirer au moins $n + 1$ »

5.4 Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^p a^{p-1} b^p + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Exemples

$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$$

$$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$$

$$(3 + b)^4 = 1 \times 3^4 + 4 \times 3^3 b^1 + 6 \times 3^2 b^2 + 4 \times 3^1 b^3 + 1 \times b^4$$

$$(a - b)^5 = 1.a^5 - 5.a^4 b^1 + 10.a^3 b^2 - 10.a^2 b^3 + 5.a^1 b^4 - 1.b^5$$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Compléter par : $\in$ ou $\notin$.

$(0, 1) \dots \dots A \times B$; $(1, 3) \dots \dots B \times A$; $(6, 0) \dots \dots B \times A$

$(3, 6) \dots \dots B \times B$; $(2, 3) \dots \dots A \times B$; $(3, 4) \dots \dots B \times A$

Exercice 2

Le code secret d'un téléphone portable est composé de 4 chiffres tapés sur un clavier numérique comportant les chiffres 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 et 9.

Détermine le nombre de codes possibles.

Exercice 3

Un parking comprend cinq (5) places disponibles. Trois automobilistes se présentent au parking et doivent stationner au hasard l'un après l'autre. Chaque véhicule ne peut occuper qu'une seule place. Détermine le nombre de rangements possibles.

Exercice 4

Dans un jeu de 32 cartes, chaque joueur reçoit 8 cartes.

Détermine le nombre de "main" que l'on peut obtenir à partir de 32 cartes.

Une "main" est un sous ensemble de huit cartes prises parmi 32.

Exercice 5

Une urne contient cinq (5) boules indiscernables au toucher et de couleurs différentes (noire, blanche, verte, rouge, bleue). On tire simultanément trois boules.

Détermine le nombre de tirage possibles.

Exercice 6

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».

a) Combien y a-t-il de mains différentes ?

Dénombrer les mains qui contiennent :

b) Exactement deux as.

c) Aucun as.

d) Au moins un as.

e) Au plus deux as.

f) Exactement deux cœurs et trois piques.

g) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Exercice 7 : situation d'évaluation.

Les élèves d'un lycée souhaitent participer à la kermesse organisée par une société de la place.

Pour gagner des tee-shirts, il faut miser la somme de 20.000F avant de faire le tirage de deux cartons dans une urne contenant quatre cartons numérotés de 1 à 4. Le nombre de résultats possibles de chaque tirage correspond au nombre de tee-shirts gagnés. Les organisateurs de ce jeu proposent alors trois tirages au choix :

- "Tirer simultanément deux cartons de cette urne" ;
- "Tirer successivement sans remise deux cartons de cette urne" ;
- "Tirer successivement avec remise deux cartons de cette urne".

Après être informés, les élèves décident de connaître le tirage le plus avantageux

Mais ne savent pas comment procéder. Il te sollicite. Élève de première C, utilise tes connaissances mathématiques pour déterminer le tirage le plus avantageux.

Compétence 1 :
Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions
Thème 1 : Calculs algébriques

LEÇON 3: GENERALITES SUR LES FONCTIONS

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une Petite et Moyenne Entreprise (PME) emploie 6 personnes. Le Directeur est payé à 200 000 F CFA, le comptable à 150 000 F CFA et les 4 autres employés à 70.000 CFA chacun. Vu l'accroissement des activités de la PME, le propriétaire décide d'embaucher de nouveaux employés qu'il veut aussi payer à 70 000F chacun. La condition fixée par les bailleurs de fonds est que le salaire moyen de tous ceux qui travaillent doit être supérieur à 80 000 F CFA. Le propriétaire veut savoir le nombre de personnes qu'il peut embaucher sans changer les salaires. Il en parle à son fils qui est en classe de première scientifique. Ce dernier, soucieux d'aider son père, pose le problème à son professeur de mathématiques qui affirme qu'il est possible de résoudre ce problème

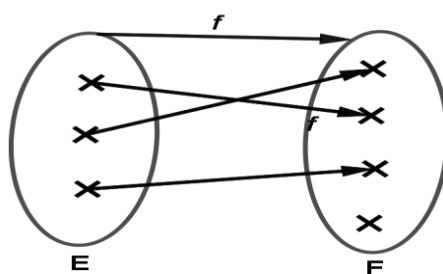
B- CONTENU DE LA COURS

I- Applications

1. Définition

Une application, d'un ensemble E dans un ensemble F (ou de E vers F) est une correspondance, qui à tout élément x de E associe un élément y de l'ensemble F. y est appelé l'image de x par f et se note : $f(x)$; x est un antécédent de y par f ; E est l'ensemble de départ, et F est l'ensemble d'arrivée.

Exemple : f est une application.

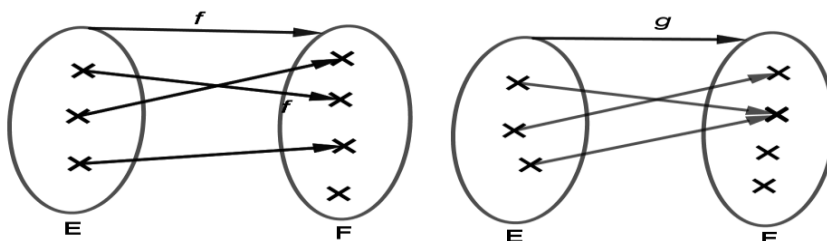


2 Applications injectives

Définition : Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection ou une application injective lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Exemple et contre-exemple

On donne les applications f et g de E vers F



L'application f est injective, par contre l'application g n'est pas injective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est injective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$,

l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet au plus une solution,

(c'est-à-dire soit 0 solution, soit une unique solution).

Exemple

L'application f de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x}+1$ est injective car :

Soit y un nombre réel,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y-1$$

Si $y \geq 1$ alors $x = (y-1)^2$

Pour tout nombre réel y , l'équation $f(x) = y$, admet au plus une unique solution.

Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une injection si et seulement si pour tous a et b éléments de E , $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Exercice de fixation

On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

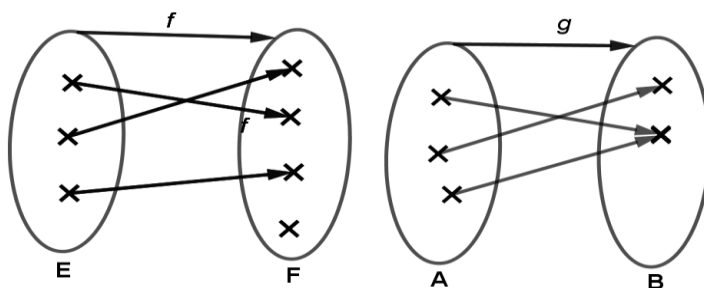
Justifie que l'application f est injective.

3. Applications surjectives

Définition

Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une surjection ou une application surjective lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E .

Exemple et contre-exemple : Soit les applications f de E vers F et g de A vers B



L'application g est surjective et l'application f n'est pas surjective.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est surjective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet au moins une solution dans E , (c'est-à-dire soit une unique solution, soit plusieurs solutions).

Exercice de fixation

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2+1$.

Justifie que l'application f est surjective

4. Applications bijectives

a) Définition

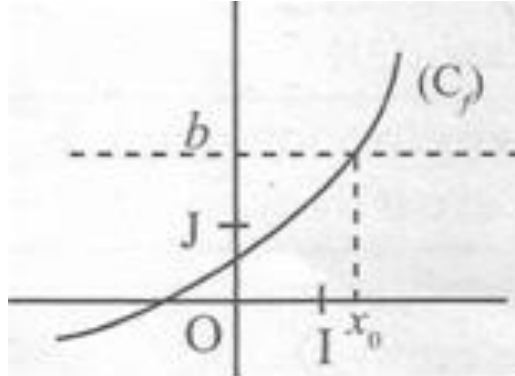
Une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection ou une application bijective lorsque tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E .

Exemple : Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x+1$. L'application f est bijective.

Point méthode

- Pour démontrer qu'une application f , d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective, il suffit de justifier que pour tout $b \in F$, l'équation : $x \in E, f(x) = b$ admet une unique solution dans E .
- Soit f une application d'un intervalle K dans un intervalle L et (C_f) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) .

Pour vérifier graphiquement que f est une bijection, il suffit de vérifier que toute droite d'équation : $y = b$ coupe (C_f) en un unique point dont l'abscisse x_0 appartient à K où $b \in f(K)$.



b) Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice de fixation :

On considère l'application f de $]-\infty ; 0]$ vers $[0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2$.

Justifie que l'application f est bijective.

5. Bijection réciproque d'une bijection

Définition

b) Propriété

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice de fixation : On considère l'application f de $]-\infty ; 0]$ vers $[0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2$.

Justifie que l'application f est bijective.

5. Bijection réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une bijection de E dans F . On appelle bijection réciproque de f , l'application de F dans E , notée f^{-1} qui, à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E .

Exemple

On considère l'application f de $]-\infty ; 0]$ vers $[0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2$. f est bijective, alors sa bijection réciproque est tel que :

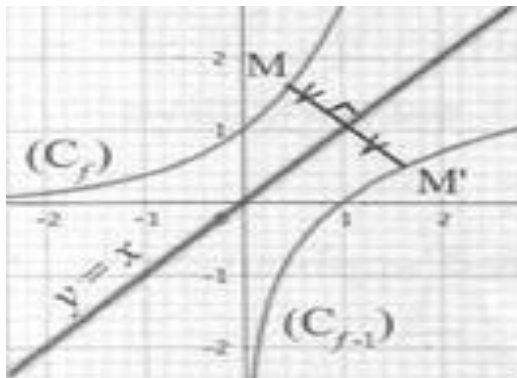
$$f^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow]-\infty; 0] \text{ et } f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

Remarque

Si f est une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque alors f est la bijection réciproque de f^{-1} .

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$. (la première bissectrice)



Exercice de fixation

Soit l'application bijective $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sqrt{x}$.

Représenter dans un même repère la courbe représentative de la fonction f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} .

II – Compléments sur les Fonctions

1. Restriction d'une fonction

Définition

Soit f une fonction d'un ensemble E vers l'ensemble F et A une partie non vide de l'ensemble de définition de f . On appelle restriction de f à A l'application $g: A \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x + 3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2. Opérations sur les fonctions numériques

Définition

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On note D l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $g(x) \neq 0$, D_f et D_g les ensembles de définition respectifs de f et g . On a :

Fonction	Ensemble de définition	Expression
Somme $f + g$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit fg	$D_{fg} = D_f \cap D_g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient $\frac{f}{g}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = x-1$.

3. Comparaison de deux fonctions

Définitions et notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions données sur un intervalle I .

- f est inférieure ou égale à g sur I , lorsque pour tout élément x de I , $f(x) \leq g(x)$.

On note : $f \leq g$ sur I .

- f est supérieure ou égale à g sur I , lorsque pour tout élément x de I , $f(x) \geq g(x)$.

On note : $f \geq g$ sur I .

Point méthode

- Pour comparer deux fonctions f et g données par leurs formules explicites sur un intervalle I , on peut :
 - calculer, pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x)$;
 - étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur I :
 - Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $f \leq g$ sur I ;
 - Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors $f \geq g$ sur I .
- Pour comparer deux fonctions f et g dont on connaît les représentations graphiques respectives (C_f) et (C_g) sur un intervalle I dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on peut procéder comme suit :
 - si (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I , alors $f \leq g$ sur I ;
 - si (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I , alors $f \geq g$ sur I .

Exercice de fixation : Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$.

4. Composition de fonctions

- Soient E, F et G trois parties de $\mathbb{R}$, f une fonction de E vers F et g une fonction F vers G . On appelle composée de f par g la fonction de E vers G notée $g \circ f$ et définie par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.
- D_f, D_g et $D_{g \circ f}$ sont les ensembles de définition respectifs de f, g et $g \circ f$.
 $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exercice de fixation

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) Détermine l'ensemble de définition E de $g \circ f$.

b) Pour tout x élément de E , explicite $g \circ f(x)$.

Propriété

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque, alors :

- $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de E .
- $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de F .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f^{-1} \circ f} & \\ \begin{array}{c} \downarrow f \\ E \end{array} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \begin{array}{c} \downarrow f^{-1} \\ F \end{array} \\ & \xrightarrow{\quad f \quad} & \\ \begin{array}{c} \downarrow f^{-1} \\ E \end{array} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \begin{array}{c} \downarrow f \\ F \end{array} \end{array}$$

Exercice de fixation

On considère la bijection $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque : $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$x \mapsto x^2$$

Détermine $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$

5. Représentations graphiques de fonctions associées

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a et b sont deux nombres réels.

On note (C_f) la représentation graphique de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Fonction g

Représentation graphique (C_g) de g

$x \mapsto f(x - a)$ (C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur $a\overrightarrow{OI}$

$x \mapsto f(x) + b$ (C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$

$x \mapsto f(x - a) + b$ (C_g) est l'image de (C_f) par la translation t de vecteur directeur $a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$

$x \mapsto f(-x)$ (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OJ)}$ d'axe (OJ)

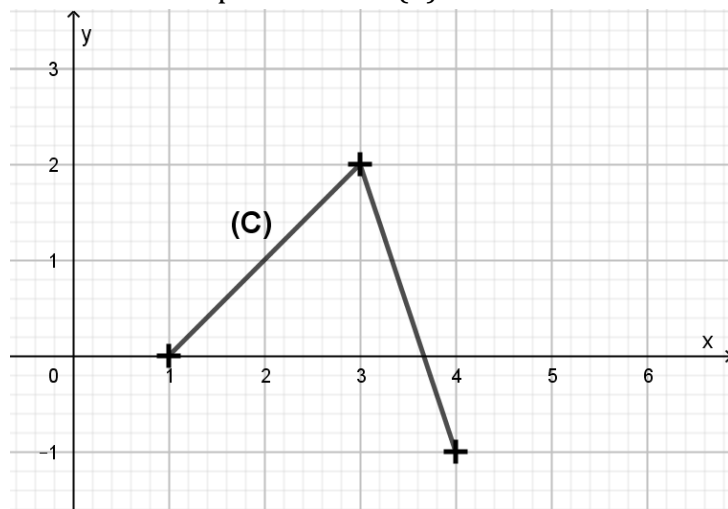
$x \mapsto -f(x)$ (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale $S_{(OI)}$ d'axe (OI)

$x \mapsto -f(-x)$ (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie centrale $S_{(O)}$ de centre O

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique le centimètre.

On donne la courbe représentative (C) d'une fonction numérique définie sur $[1 ; 4]$.



On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = f(x-3)+1$.

On note (C') la courbe représentative de g dans le plan.

Construis (C') à partir de (C) .

TRAVAUX DIRIGES 3

Exercice 1

On considère l'application f de $]-\infty ; 1]$ vers $[-4 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Justifie que f est une bijection.

b) Explicite la bijection réciproque f^{-1} de f .

Exercice 2

On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$.

a) L'application f est-elle injective ? (Justifie ta réponse).

b) L'application f est-elle surjective ? (Justifie ta réponse).

c) Justifie que f n'est pas bijective.

Exercice 3

Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ qui à x associe $\frac{2x-3}{x-1}$.

1. Démontre que g est une bijection.
2. Détermine g^{-1} .

Exercice 4

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 3 - |2 - x|$.

Détermine la restriction f de h à l'intervalle $] -\infty; 2]$.

Exercice 5

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2 - x^2 + 2x$.

1. Justifie que pour tout nombre réel x , $f(x) = 3 - (x - 1)^2$.
2. Justifie que pour tout nombre réel x , $f(x) \leq 3$.

Exercice 6

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ et } g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}$$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f + g; f - g; f \times g \text{ et } \frac{f}{g}.$$

- 2) Détermine $(f + g)(x)$; $(f - g)(x)$ et $(\frac{f}{g})(x)$.

Exercice 7

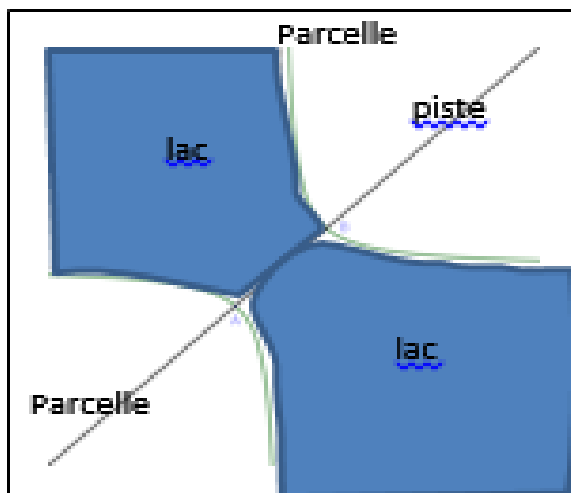
f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 + x - 2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}.$$

- a) Détermine D_f ; $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$.
- b) Détermine $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Exercice 8 : Situation Complexe

Un monsieur cède une parcelle de terrain cultivable à ses deux enfants avec les mêmes conditions d'accessibilité et de superficie. Un grand lac traverse la parcelle. Un pont $[AB]$ et une piste (AB) permettent de traverser aisément la parcelle. Les contours du lac s'apparent à la courbe de la fonction inverse et la piste s'identifie à la première bissectrice dans un repère orthonormé naturel comme l'indique la figure ci-contre. Les deux parts sont séparées par la piste. Le plus jeune pense qu'il est lésé et menace de ne plus s'adresser à son père. Ayant assisté à cette scène, élève de 1^{ère} C et amis du jeune fils, rassure le en utilisant tes connaissances mathématiques.



Compétence 1 :
Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions
Thème 2 : Fonctions

LEÇON 4 : LIMITES ET CONTINUITÉ

Situation d'apprentissage

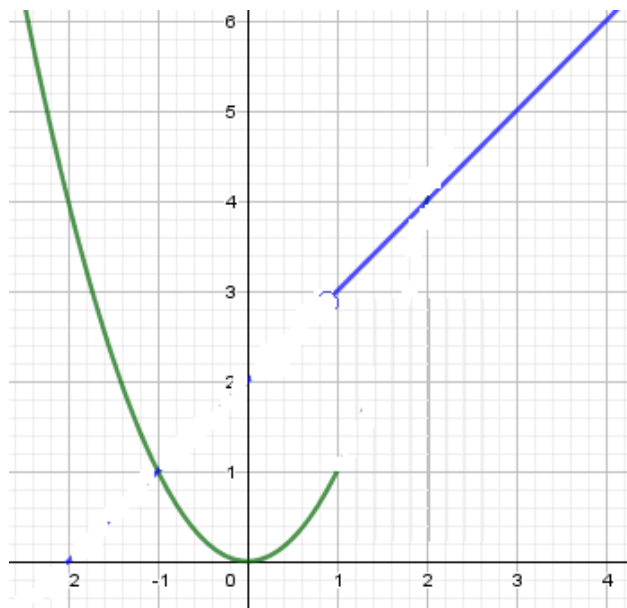
Pendant une séance de cours en informatique qu'organise le club scientifique, les élèves d'une classe de première D apprennent à tracer des courbes à l'aide de l'ordinateur de leur salle multimédias.

Ainsi pour la fonction f définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = x + 2 \text{ si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Ils observent sur l'écran de leur ordinateur une figure morcelée en deux parties au point d'abscisse 1 (voir figure). Cherchant à expliquer cette particularité de la courbe, un professeur de mathématiques encadreur du club scientifique les renvoie aux notions de continuité d'une fonction.

Désireux de comprendre le comportement de la courbe de la fonction f en 1, les élèves décident d'approfondir les connaissances sur les fonctions.



B--RESUME DE COURS

I. LIMITES

1- Notion de limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

On constate par le calcul que lorsque l'on choisit « x suffisamment proche de 2 », on obtient « $f(x)$ suffisamment proche de 4 ».

On dit alors que : **$f(x)$ tend vers 4**, lorsque **x tend vers 2**

ou bien : **la limite, lorsque x tend vers 2, de $f(x)$ égale 4.**

On dit aussi que : **4 est la limite de f en 2.**

On note : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte

1) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 8$

2) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5$

3) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 9$

2- Notion de continuité

Propriété

Soit f une fonction définie en a .

Si f admet une limite en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exercice de fixation : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

2) La fonction f admet une limite en -2

3) La fonction f admet une limite en 0

Définition : Soit f une fonction et a un élément de l'ensemble de définition de f

On dit que la fonction f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a .

(c'est - à - dire : **f est continue en a** signifie que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

- La fonction f est continue en 2 car f est définie en 2 et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{5}{2}$.

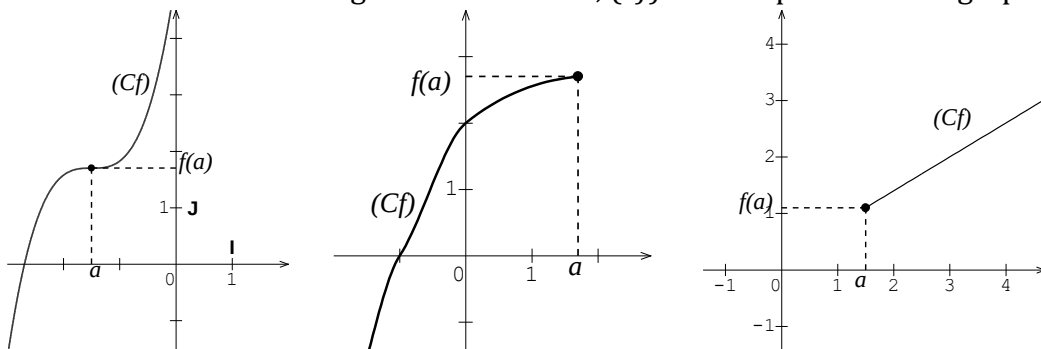
- La fonction f n'est pas continue en 0 car f n'est pas défini en 0

Remarque

- On démontre et on admet que : lorsqu'une fonction admet une limite en a , cette limite est unique.
- Pour qu'une fonction f soit continue en a , il est nécessaire qu'elle soit définie en a .

Illustration graphique de la continuité d'une fonction en un point

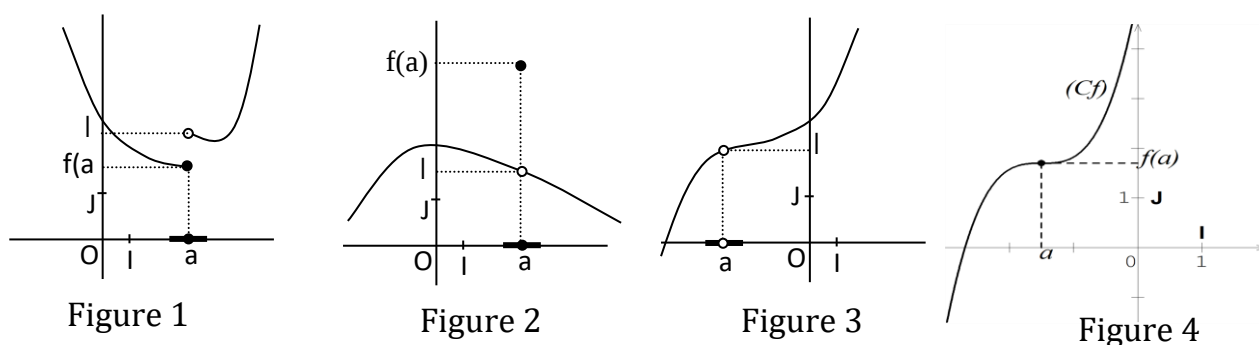
Dans chacun des cas de figures ci - dessous, (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f .



Dans chacun de ces trois cas, la fonction f est continue en a .

Exercice de fixation

Sur chacune des figures ci - dessous, la courbe donnée est la représentation graphique d'une fonction f et a désigne un nombre réel. Indique dans quels cas la fonction f est continue en a .



3- Continuité en a de fonctions élémentaires

a) Propriété 1

Les fonctions élémentaires définies respectivement par : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) ; $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout élément a de leurs ensembles de définition respectifs.

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 15} \cos x = \dots; \lim_{x \rightarrow -2} (3) = \dots; \lim_{x \rightarrow -3} (x^2) = \dots; \lim_{x \rightarrow 49} (\sqrt{x}) = \dots; \lim_{x \rightarrow -1,8} |x| = \dots; \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x}\right) = \dots$$

b) Propriété 2

f et g étant deux fonctions continues en a :

- Les fonctions $f + g$, fg , kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues en a .
- Si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a .
- Si f est positive alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a .

Exercice de fixation : Soit f et g deux fonctions continues en 5

Justifie que chacune des fonctions f^2 ; $f - g$ et $4f$ est continue en 5.

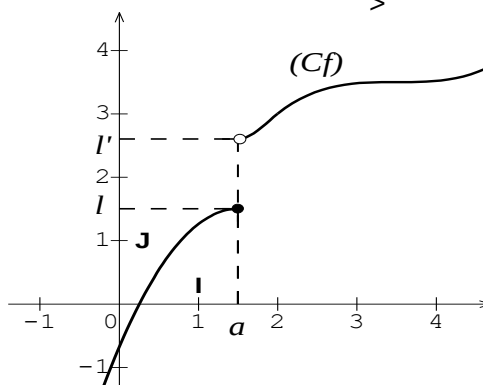
Remarque : Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE

1) Présentation

Sur la figure ci – dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f et a est un nombre réel.

- Lorsqu'on choisit x dans $]-\infty; a[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l . On dit alors que l est la limite de f à gauche en a et on note : $\lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = l$
- Lorsqu'on choisit x dans $]a; +\infty[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l' . On dit alors que l' est la limite de f à droite en a et on note : $\lim_{x \rightarrow a}^+ f(x) = l'$



Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 3[\\ f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \in]3; +\infty[\end{cases}$$

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) La limite de f à gauche en 3 se note $\lim_{x \rightarrow 3}^- f(x)$

2) La limite de f à droite en 3 est égale à 9

3) $\lim_{x \rightarrow 3}^+ f(x) = 7$

4) $\lim_{x \rightarrow 3}^- f(x) = 7$

2) Propriétés

a et l sont des nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a .

- f n'est pas définie en a .

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a , une limite à gauche et une limite à droite égales à l .

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x) = l)$$

- f est définie en a .

La fonction f admet une limite en a si et seulement si f admet en a , une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x) = f(a))$$

Exercice de fixation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ telle que : $\lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) = 7$,

$$\lim_{x \rightarrow 4}^+ f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 4}^- f(x) = -2 \text{ et } f(1) = 3.$$

A chacune des affirmations ci - dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) f admet une limite en 1

2) f admet une limite en 4

Remarque : f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x) = f(a)$

III- CALCUL DE LIMITES

1- Opérations sur les limites

Propriétés

a, l et l' désignent des nombres réels.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = ll'$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' (l' \neq 0)$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

Exercice de fixation

f et g sont deux fonctions telles que : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$.

Calcule chacune des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (\frac{f}{g})(x)$

remarque

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro, est une fonction continue en a .

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2 - \sqrt{7}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exercice 2

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 3$.

Etudie la continuité de f en 2.

Exercice 3 : On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \text{Pour } x < 1, f(x) = 3x - 1 \\ \text{Pour } x \geq 1, f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$$

1) Calcule la limite de f à gauche en 1 et la limite de f à droite en 1.

2) Justifie que la fonction f n'admet pas limite en 1.

Exercice 4

Calcule chacune des limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Etudie la continuité de f en a .

1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$; $a = 1$

2) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 3}$; $a = -3$

3)
$$\begin{cases} \text{Pour } x \neq -2, f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 2} \\ f(-2) = 0 \end{cases} ; a = -2$$

Exercice 6 : Situation complexe

Deux frères, élèves d'une classe de 1^{ère}C, souhaitent communiquer avec leur oncle résidant à Paris en France.

Ils se rendent dans une cabine téléphonique et le gérant de la cabine leur propose le contrat suivant :

- 150F CFA la minute de 0 à 5 minutes de communication,
- 750F CFA forfaitaire entre 5 minutes et 10 minutes de communication,
- 100F CFA la minute, de 10 minutes à 30 minutes de communication,
- Au - delà de 30 minutes, 3000F CFA de forfait plus 50F CFA pour chaque minute de communication supplémentaire.

Dans leurs échanges l'aîné affirme que le contrat proposé par le gérant de la cabine traduit une fonction continue en 5 et discontinue en 30 mais son petit frère soutient que cette fonction est continue en 5 et en 30. Ils ont présenté cette situation à leurs camarades de classe qui n'ont pu départager. En tant qu'élève de 1^{ère}C, ils te sollicitent. A l'aide d'une production argumentée, en utilisant tes connaissances mathématiques, indique lequel des deux frères a raison.

Compétence 2 :

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données.

Thème 2 : Modélisation de phénomènes aléatoires

LEÇON 05 : PROBABILITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

M. Konan a oublié le code secret de son compte bancaire. Après deux essais infructueux, il appelle son épouse pour de l'aide. Celle-ci lui communique les quatre chiffres mais pas dans le bon ordre ! Ne disposant que d'un dernier essai, il joue la carte de la prudence en envisageant tous les cas et en quantifiant la chance qu'il a, de retirer l'argent, à l'ultime essai.

B -CONTENU DE LA LECON

I. VOCABULAIRES ET PROPRIETES

1- Vocabulaires et définition

a) Expérience aléatoire

Une expérience ou une épreuve aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas d'avance le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.

Exemples

1.

Expérience 1 : Le lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré.

Expérience 2 : Le lancer d'une pièce de monnaie.

2.

Soit les expériences suivantes :

a) *Trois bouteilles de limonade : Fanta, Coca et Sprite sont posées sur une table.*

« Choisir la bouteille de Fanta » n'est pas une expérience aléatoire.

b) *"Cinq boules numérotées de 1 à 5 sont placées dans un carton non transparent. Les boules ont la même taille et sont indiscernables au toucher.*

« Choisir une boule parmi elles » est une expérience aléatoire.

b) Univers-Eventualité

$\mathcal{E}$ est une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles.

Chaque résultat possibles est appelé **éventualité**.

L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers** des éventualités de $\mathcal{E}$.

On le note **U** ou **Ω** .

Exemple

EXPERIENCE ALEATOIRE	EVENTUALITES	UNIVERS
Lancer d'un dé	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	{1; 2; 3; 4; 5; 6}
Lancer d'une pièce	Pile (P) ou face (F)	{P; F}

Exemple2

En considérant le lancer de deux pièces de monnaie. Tous les résultats possibles (on dit qu'on écrit l'univers en extension) sont :

Soit U l'univers de toutes les éventualités. $U = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$

c) Évènement

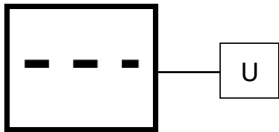
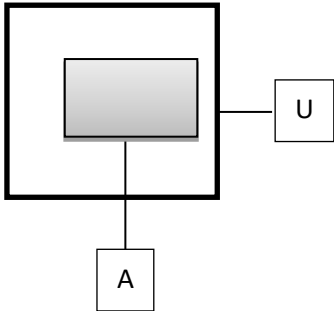
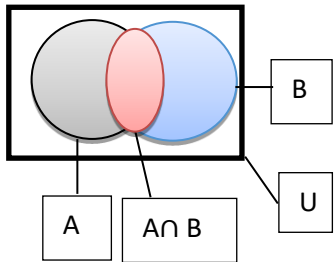
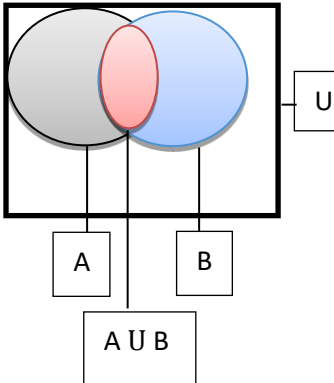
Définition

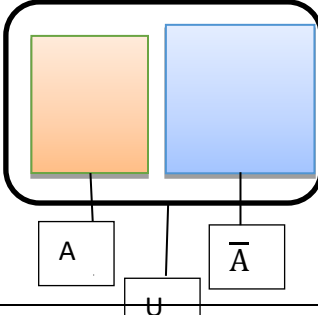
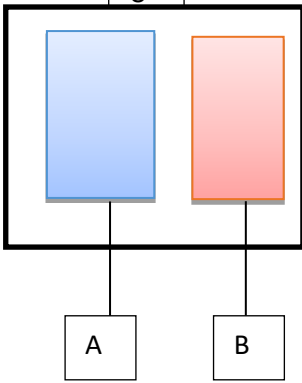
- Lorsque cette partie de U est un singleton, on l'appelle **évènement élémentaire** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble vide, on l'appelle **évènement impossible** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble U , on l'appelle **évènement certain**.

Exemple

- Lors d'un lancer de pièce de monnaie, le résultat obtenu est un évènement élémentaire : "soit pile" ou "face".
- Lors d'un lancer de Dé (parfaitement équilibré et dont les faces sont numéroté de 1 à 6), obtenir le chiffre 7 est un évènement impossible.
- Pour une femme qui porte une grossesse, "accouché d'un garçon ou d'une fille" est un évènement certain.

TABLEAU RECAPITULATIF

	Langage des ensembles	Langage des probabilités	Illustrations
Univers	U est un ensemble $e_i \in U$	U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. e_i est une éventualité	
Evènement	$A \subset U$ $e_i \in A$ $\{e_i\} \subset U$ $A = \emptyset$ $A = U$	A est un évènement . e_i réalise l'évènement A . $\{e_i\}$ est un évènement élémentaire. L'évènement A est impossible. L'évènement A est certain.	
Intersection de deux évènements	$A \cap B$ $e_i \in A \cap B$	L'évènement (A et B) e_i réalise l'évènement A et e_i réalise l'évènement B .	
Réunion de deux évènements	$A \cup B$ $e_i \in A \cup B$	L'évènement (A ou B) e_i réalise l'évènement A ou e_i réalise l'évènement B .	

Contraire d'un évènement	$\bar{A} = C_U^A$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A \cup \bar{A} = U \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$ $e_i \in A \Leftrightarrow e_i \notin \bar{A}$	$\bar{A}$ est l'évènement contraire de A. A et $\bar{A}$ sont des évènements disjoints. e_i réalise l'évènement A si et seulement si, e_i ne réalise pas l'évènement $\bar{A}$.	
Evènement incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints	L'évènement (A et B) est impossible. L'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	

Exemple

Lors du lancer de deux pièces de monnaie, deux évènements de cette expérience sont :

A : « obtenir Pile (P) au 1^{er} lancer » : on a $A = \{(P, P), (P, F)\}$

B : « obtenir Pile au 2nd lancer » : on a $B = \{(F, P), (P, P)\}$

II. NOTION DE PROBABILITE

1. Probabilité d'un évènement

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Une probabilité P sur l'univers U est une application de l'ensemble des parties de U vers l'intervalle [0;1], qui à chaque évènement A, associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $P(U) = 1$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple

Lors d'un lancer de dé non truqué, l'univers est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Soit A l'évènement 'avoir un nombre pair'. $A = \{2 ; 4 ; 6\}$;

$$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriétés

- Pour tout évènement A, on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si A est évènement tel que : $A = \{e_1 ; e_2 ; \dots e_k\}$
alors $P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_k\})$.
- Pour tous évènements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice de fixation

On lance un dé truqué tel que :

$$P(\{1\}) = \frac{1}{16}; P(\{2\}) = \frac{3}{16}; P(\{3\}) = \frac{5}{16}; P(\{4\}) = \frac{2}{16}; P(\{5\}) = \frac{3}{16} \text{ et } P(\{6\}) = \frac{2}{16}.$$

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « le résultat du lancer est un nombre pair »

B : « le résultat est un nombre multiple de 3 ».

C : « le résultat est un nombre différent de 6 ».

Équiprobabilité

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur U.

On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des évènements élémentaires lorsque tous les évènements élémentaires de U ont la même probabilité.

Exemple

Un lancer de dé non truqué est une situation d'équiprobabilité. Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître lors du lancer.

Propriété1

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $\text{card}(U) = n$.

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Exercice de fixation

On lance un dé parfaitement équilibré. Détermine la probabilité d'apparition de chaque face.

Propriété2

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}U}.$$

Exercice de fixation

On lance un dé équilibré à 6 faces.

- 1) Justifie que nous sommes en présence d'une situation d'équiprobabilité.
- 2) Détermine la probabilité de l'évènement E suivant « on obtient un multiple de 3 »

Remarque

Dans certains exercices de probabilité, il est dit clairement que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée. Cependant, voici quelques mots clés qui permettent de reconnaître une situation d'équiprobabilité.

- « Equitable »
- « Equilibré »
- « Parfait »
- « Uniforme »
- « Même chance »
- « Indiscernable au toucher »

Remarque 2

Il n'est pas évident d'écrire un évènement en extension avant de déterminer son cardinal. Les formules de dénombrement permettent de déterminer directement le cardinal d'un évènement.

TRAVAUX DIRIGÉS

Exercice 1

Soit A et B deux évènements quelconques.

Complete par vrai ou faux les propositions suivantes

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Exercice 2

Soient deux évènements A et B tels que $P(A) = 0.33$; $P(B) = 0,15$ et

$P(A \cap B) = 0,09$.

Détermine $P(A \cup B)$.

Exercice 3

Une coopérative comprend sept hommes et trois femmes. Le couple Zamblé fait également partie de cette coopérative.

La coopérative choisit au hasard une délégation de quatre membres pour la représenter à une cérémonie.

- 1) Détermine le nombre de délégations possibles.
- 2) Calcule la probabilité que le couple Zamblé en fasse partie.
- 3) Calcule la probabilité que monsieur ou madame fasse partie de la délégation.

Exercice 4 : Situation Complexe

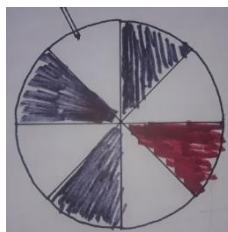
Une loterie consiste à tourner une roue partagée en huit secteurs. On admet que chaque secteur a autant de chance d'être désignée. (Voir figure ci-dessous)

Lorsque le secteur désigné par la flèche est :

- Le blanc, on perd 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on remet 2 000FCFA aux organisateurs) ;
- Le noir, on gagne 1 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 1 000FCFA des organisateurs) ;
- Le rouge, on gagne 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 2 000FCFA des organisateurs) ;

Un groupe d'élèves qui assistent à cette loterie affirment qu'un joueur a autant de chance de gagner que de perdre.

Par des calculs appropriés dis si ce groupe a raison ou pas.



LEÇON 06 : DERIVATION

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

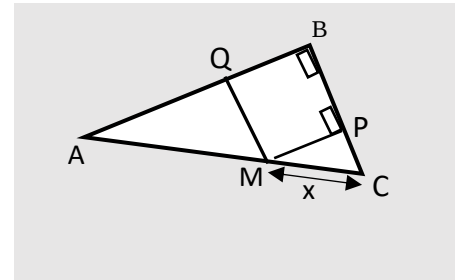
Lors de la préparation du concours d'excellence de sa région, un élève de première scientifique découvre dans ses recherches la figure ci-contre.

Cette figure est un triangle ABC rectangle en B tel que :

$AB = 8$; $BC = 6$ et $AC = 10$. À l'intérieur de ce triangle,

on a construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$

$P \in]BC[$ et on a posé $MC = x$.



En faisant varier M de C à A, il constate que l'aire du rectangle croît puis décroît par la suite.

Il veut déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle BPMQ est maximale sans passer par la forme canonique. Après plusieurs tentatives sans succès, il présente la situation à toute la classe à un cours de Mathématiques.

Le professeur de mathématiques propose d'étudier ce problème d'optimisation en utilisant les dérivées de fonctions. Ensemble les élèves font des recherches sur la dérivation.

B. RESUME DE COURS

I. DERIVATION D'UNE FONCTION EN UN POINT

1. Nombre dérivé d'une fonction dérivable en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 .

Cette limite finie est appelée le **nombre dérivé de f en x_0** et est notée $f'(x_0)$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice

1) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

En utilisant la définition, montrons que f est dérivable en 3.

2) Soit la fonction g de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0}$$

2. Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et A un point de (C_f) d'abscisse x_0 .

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet en son point A une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2. Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et A un point de (C_f) d'abscisse x_0 .

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet en son point A une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exercice De Fixation

Soit la fonction f définie et dérivable en 2 telle que $f(2) = -4$ et $f'(2) = -3$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J) .

Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

3. Dérivabilité et continuité

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Remarque

Réciproquement, f continue en x_0 n'implique pas que f dérivable en x_0 .

En effet la fonction g de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. (Voir exemple 2 ci-dessus)).

Exercice D'application

Réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux sinon.

1- Toute fonction continue en x_0 est dérivable en x_0

2- Toute fonction qui n'est pas continue en x_0 n'est pas dérivable en x_0

3- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 .

II. FONCTION DERIVEE

1. Définitions

• Fonction dérivable sur un intervalle

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert K lorsqu'elle est dérivable en chaque élément de K .

• Fonction dérivée

Soit f une fonction numérique et K un intervalle ouvert sur lequel f est dérivable.

L'application qui à chaque élément x de K , associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur K et notée f' . $f' : \begin{matrix} K & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{matrix}$

Exercice d'application

Détermine la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3$.

Remarques

- On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction f , l'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f . Elle est notée f'
- Les fonctions élémentaires (constante, puissance, inverse), polynômes, rationnelles et trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle ouvert inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions élémentaires racine carrée et valeur absolue sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Dérivées de fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b \ (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n ; \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice De Fixation

Relie chaque fonction à sa fonction dérivée

Fonction f		Fonction dérivée f'
$x \mapsto -3$	•	$x \mapsto 0$
$x \mapsto -3x$	•	$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto x^4$	•	$x \mapsto -3$
$x \mapsto \cos x$	•	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	•	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	•	$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto \tan x$	•	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \sin x$	•	$x \mapsto -\sin x$

1. Dérivées et opérations

Propriété

On suppose que u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$.

Fonction f	Fonction dérivée f'
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
$x \mapsto u(x)v(x)$	$x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$x \mapsto a u(x), \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a u'(x)$
$x \mapsto \frac{1}{u(x)}, \ (u \neq 0 \text{ sur } K)$	$x \mapsto \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$

$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}, (v \neq 0 \text{ sur } K)$	$x \mapsto \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$
$x \mapsto \cos(ax + b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$
$x \mapsto \sin(ax + b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \sqrt{ax + b}, (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$. ; 2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$ et 3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$

III. Application de la dérivabilité

1. Dérivée et sens de variation

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K

f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K

f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

f est strictement croissante sur K si et seulement si f' est strictement positive sur K

f est strictement décroissante sur K si et seulement si f' est strictement négative sur K

Exercice De Fixation : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - 3x$.

1- Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x .

2- Détermine les sens de variation de f .

Remarques

- Si f' est positive sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement croissante sur K
- Si f' est négative sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement décroissante sur K

2. Extremums relatifs d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de K .

Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f .

x			
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$			
$f(x_0)$ est un maximum relatif de f			

x	x_0		
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			
$f(x_0)$ est un minimum relatif de f			

Exercice de fixation

On donne le tableau de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^3}{x-1}$

x	$-\infty$	0		1	$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$							

Indique l'extremum relatif de g

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0 .

Indique dans quel cas la fonction f est dérivable en x_0

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$; b) La limite en x_0 de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas ;

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule, en utilisant la définition, le nombre dérivé de f en x_0

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $x_0 = 2$

Exercice 3

Détermine la fonction dérivée de f dans chacun des cas suivants :

(Tu préciseras l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chaque cas)

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$

b) $f(x) = (25x - 1)^4$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x + \pi)$

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

1. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$

b) Etudie les variations de h .

2. a) Dresse le tableau de variation de h .

b) Déduis-en les extrema de la fonction h .

3. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de h au point d'abscisse 0

Exercice 8

Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$; On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1) Détermine les nombres réels a et b sachant que :

- (Γ) passe par le point $A(2; 2)$
- $f'(2) = 0$

2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

3. Dans la suite, on prend : $a = -1$ et $b = 3$

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, g'(x) = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$

b) Étudie les variations de g .

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AB = 8$; $BC = 6$ et $AC = 10$.

A l'intérieur de ce triangle, on construit le rectangle $BPMQ$ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$

$P \in]BC[$ et on pose : $MC = x$.

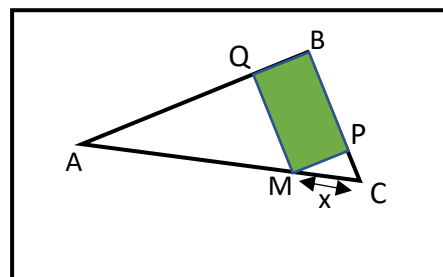
1. Exprime MQ et MP en fonction de x .

2. On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $]0; 10[$ et représentant l'aire du rectangle $BPMQ$. On a donc $f(x) = MQ.MP$

a) Justifie que $f(x) = \frac{12}{5}x \left(2 - \frac{1}{5}x\right)$.

b) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

3. Déduis-en la valeur de x pour que l'aire du rectangle $BPMQ$ soit maximale et calcule alors cette aire.



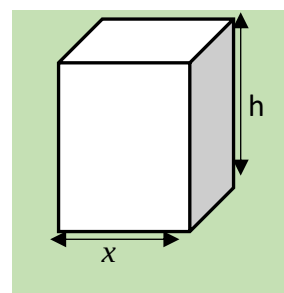
Exercice 10 : situation complexe

Monsieur Moussa est un menuisier. Il veut confectionner une caisse en bois semblable à un pavé droit tel que représenté sur la figure ci-contre. Cette caisse doit avoir les caractéristiques suivantes :

- Son volume est égal à 8 m^3 ;
- Sa base est un carré.

Monsieur Moussa se demande quelles dimensions doivent avoir la base et la hauteur de cette caisse afin d'utiliser le moins de bois possible pour minimiser les dépenses. Ne sachant comment effectuer ses calculs, il te sollicite.

En utilisant tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Moussa dans une production écrite.



COMPETENCE 3 :

Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

Thème 1 : Géométrie du plan.

LEÇON 07 : BARYCENTRE

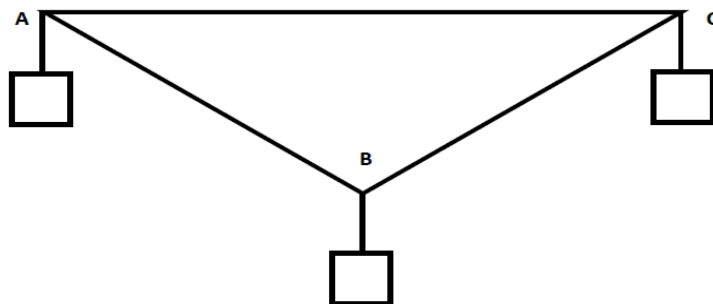
A -SITUATION D'APPRENTISSAGE

Au cours d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de première scientifique découvrent le dispositif ci-dessous.

Ce dispositif est une plaque triangulaire ABC de masse négligeable. On suspend à chacun de ses sommets des solides de masse ($m_A = 2\text{g}$) ; ($m_B = 5\text{g}$) et ($m_C = 3\text{g}$).

Les élèves veulent déterminer en quel point G, accrocher le fil pour que la plaque reste en équilibre.

L'un des élèves affirme que le point G cherché doit vérifier la relation : $2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, mais n'arrive pas à justifier son affirmation. Ils décident de s'organiser pour déterminer la position exacte de G.



B- RESUME DE COURS

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Point pondéré

Définition

Soit A est un point du plan et a un réel non nul, on appelle point pondéré, le couple (A, a) .

Exemple : les couples $(A, 2)$; $(B, -5)$. Sont des points pondérés

2. Propriété et Définition

A et B sont deux points du plan, a et b sont deux nombres réels tels que : $a + b \neq 0$.

Il existe un point G et un seul tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

Notation

Le barycentre G de deux points pondérés (A, a) et (B, b) se note :

$G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\}$ ou $G = \text{bar}$

A	B
a	b

Exercice de fixation

Soient A, B et G trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

On note $G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 3)\}$

a. Conséquence

$$G = \text{bar} \{(A,);(B,b)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

Exemple

$$G = \text{bar} \{(A,2);(B,-3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2+(-3)} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{De même : } G = \text{bar} \{(A,2);(B,-3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{2+(-3)} \overrightarrow{BA}$$

b. Théorème : Le barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB)

Exercice de fixation

Soient A,B et K trois points du plan tels que : $-2\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Justifie que K appartient à la droite (AB).

Remarque

- Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre $G \in [AB]$
- Si les coefficients sont de signes contraires, alors le barycentre $G \in (AB) \setminus [AB]$
- Si les coefficients sont égaux, alors le barycentre G est le milieu de [AB]

3. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et deux points pondérés **(A, a) et (B, b)**.

G est barycentre des points pondérés **(A, a) et (B, b)** équivaut à G est barycentre des points pondérés **(A, ka) et (B, kb)**.

Exercice de fixation : On donne $G = \text{bar} \{(A,2);(B,7)\}$

Détermine le nombre réel a tel que $G = \text{bar} \{(A,a);(B,21)\}$

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé l'isobarycentre des points A et B, c'est le milieu de [AB].

Exemple : $G = \text{bar} \{(A,3);(B,3)\}$ équivaut à G est l'isobarycentre des points A et B

G est le milieu du segment [AB].



c. Conservation du barycentre par projection

Propriété

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces points affectés des mêmes coefficients.

Exercice de fixation

Soit $G = \text{bar} \{(A,);(B,b)\}$ et P une projection tel que : $P(A)=A'$, $P(B)=B'$ et $P(G)=G'$.

Quel est le barycentre des points pondérés $(A',)$ et (B',b) .

d. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

Exercice de fixation

Soit le barycentre K des points pondérés $(C, 3)$ et $(D, 1)$. Pour tout point M du plan exprime $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MK}$.

e. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) , alors $G(\frac{ax_A + by_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b})$

Exercice de fixation : Soit $A(1; 2)$ et $B(-1; 3)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2)\}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

Notation : $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

Exercice de fixation

Soient A, B, C et G quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

À partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

Conséquence

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Exemple : $-2\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à : $G = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

2. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

G est barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) équivaut à G est barycentre des points pondérés (A, ka) , (B, kb) et (C, kc) .

Exercice de fixation : On donne $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, -7); (C, -4)\}$

Détermine les nombres réels a et c tels que $G = \text{bar} \{(A, a); (B, 143); (C, c)\}$.

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, α) et (C, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé

L'isobarycentre des trois points A, B et C .

Exemple : $-4\overrightarrow{GE} - 4\overrightarrow{GH} - 4\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ équivaut à G est l'isobarycentre de E, F et H .

Remarque

L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .

c. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

Exercice de fixation

Soit le barycentre E des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 4)$ et $(C, -7)$.

Pour tout point M du plan, exprime $-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{ME}$.

Remarque : Lorsque $a + b + c = 0$, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

d. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et si G est le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) alors

$$G\left(\frac{ax_A + by_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$$

Exercice de fixation : Soit $A(1; 2)$ et $B(-1; 3)$ et $C(0; -2)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Soient A et B deux points distincts.

1) Justifie qu'il existe un point G barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

2) Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis place G.

3) Soit M un point du plan. Écris en fonction de M, $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, on donne les points A, B et G alignés sur une droite régulièrement graduée. Ecris G comme barycentre des points A et B avec des coefficients à préciser.



Exercice 2

Construis le barycentre de $(A, 2)$; $(B, -1)$ et $(C, 4)$ où $BC = 6$ cm.

Exercice 3

ABC est un triangle et G est le barycentre de $(A, 1)$; $(B, 4)$; $(C, -3)$.

1) Construis le barycentre de H de $(B, 4)$ et $(C, -3)$.

2) Justifie que G est l'isobarycentre de points A et H.

3) Construis le point G.

4) Soit $A(1, -2)$, $B(-3, -2)$ et $C(-1, 0)$ dans le repère $(O; i, j)$.

Détermine les coordonnées du barycentre G.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 8$ (l'unité est le centimètre).

H est le milieu de $[BC]$.

a) Construis le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$; $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

b) Quel est l'ensemble $(D1)$ des points M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ et de même sens que $\overrightarrow{BC}$? Construis $(D1)$.

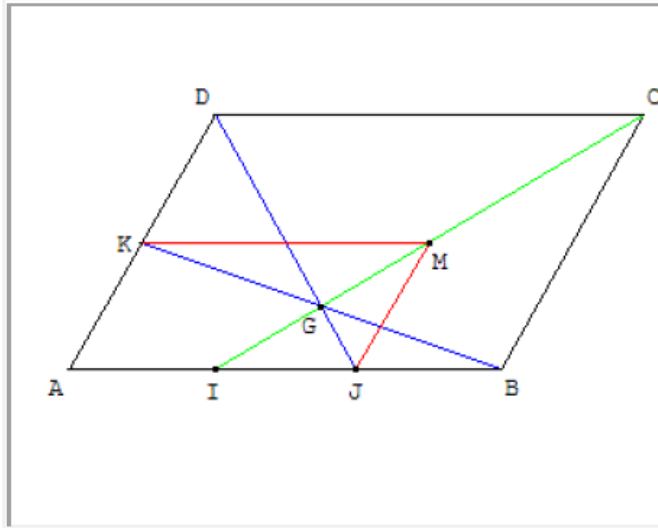
c) Quel est l'ensemble $(D2)$ des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$. Construis $(D2)$.

d) Quel est l'ensemble $(C1)$ des points M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Construis $(C1)$.

e) Quel est l'ensemble $(C2)$ des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 8\sqrt{7}$. Construis $(C2)$. Montre que $(C2)$ contient le point B.

Exercice 5

On considère un parallélogramme ABCD. K est le milieu de [AD], L le milieu de [BC] et les points I et J partagent [AB] en trois parties égales.



Soit M est le quatrième sommet du parallélogramme JAKM.

Le but de l'exercice est de montrer que les points C, M, G et I sont alignés.

- Exprime I, J, K, M et C comme barycentre des points A, B et D.
- Montrer que les droites (BK), (DL) et (CI) sont concourantes au point G, barycentre de (A, 1), (B, 2) et (D, 1).
- Conclure en montrant que G et M sont des barycentres de I et C.

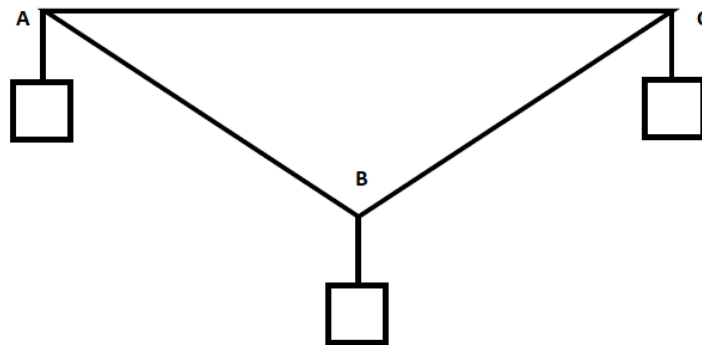
Exercice 6: Situation Complexe

Au cours d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de première scientifique découvrent le dispositif ci-dessous.

Ce dispositif est une plaque triangulaire ABC de masse négligeable. On suspend à chacun de ses sommets des solides de masse ($m_A = 2g$); ($m_B = 5g$) et ($m_C = 3g$).

Les élèves veulent déterminer en quel point G, accrocher le fil pour que la plaque reste en équilibre.

Détermine la position exacte du point G, en expliquant ta démarche



Compétence 1
Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions
Thème 2 : Fonctions

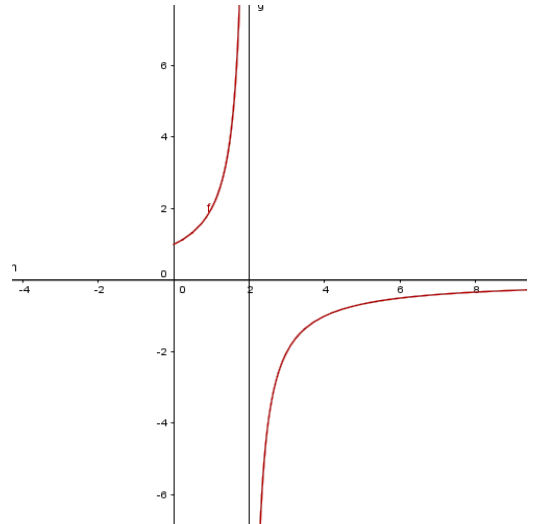
LEÇON 08 : EXTENSION DE LA NOTION DE LA LIMITE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans la perspective d'aborder le prochain cours dans ta classe de 1^{ère} C, ton professeur de mathématiques présente la courbe suivante qui décrit dans un repère orthonormé, la trajectoire de deux projectiles à l'aide de l'équation horaire suivante :

$y(t) = \frac{2}{2-t}$, $t \in [0; +\infty[$, où pour le premier projectile,
 $t \in [0; 2[$ et pour le deuxième,
 $t \in]2; +\infty[$.

Tes amis et toi constatez que sur $]2; +\infty[$ lorsque t tend vers $+\infty$, la trajectoire du projectile se rapproche de la droite d'équation $y = 0$ comme l'indique le graphique ci-contre. Dans le but d'expliquer ce résultat le professeur vous organise en groupe afin de traduire ce résultat en limite de la fonction.



B- RESUME DE COURS

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Limite infinie d'une fonction en a (a est un nombre réel)

Propriété

Soit a un nombre réel.

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est pair ; $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est impair ou pair
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^n} \right) = -\infty$ si n est impair

Cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Exercice d'application

Complète chacune des égalités suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} \right) = \dots$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \dots$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-4)^5} \right) = \dots$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = \dots$

2) Asymptote verticale

Définition : Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a est un nombre réel et f est une fonction de représentation graphique (C_f)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est infinie, on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

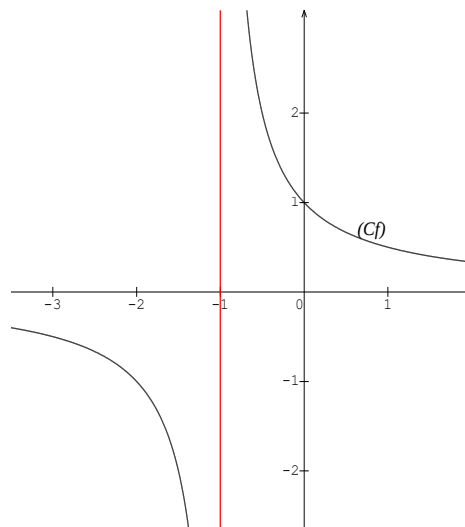
Exemple

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

donc la droite d'équation $x = -1$
est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .



II - LIMITE A L'INFINI D'UNE FONCTION

1) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

Propriétés

On a :

- Pour tout nombre réel c : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (c) = c$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (c) = c$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$
- Pour tout nombre entier naturel non nul n :
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = +\infty$ si n est pair
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = -\infty$ si n est impair
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^n}) = 0$

Exercice de fixation : Complète les égalités suivantes:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^5}) = \dots$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6) = \dots$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{15}) = \dots$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^4}) = \dots$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7) = \dots$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^3}) = \dots$

2) Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et (C) la courbe représentative de f dans

le plan muni d'un repère orthogonal. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^3}) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$
est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

III - Opérations sur les limites

1) Limite de la somme de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes : 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 + x^3)$ et 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5} + \sqrt{x})$

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Résultat pas immédiat

Exemples

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-10) = -10$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-10x^3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7(x^3)) = +\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} (\frac{1}{x-2} (3x-5)) \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3(-2 + \frac{1}{x^7})) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} ((6 + \frac{1}{x})(-2 + \frac{1}{x^7})) \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}(x^3))$$

3) Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

l désigne un nombre réel non nul et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 3}$

4) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

l et l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l' non nul	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat	

Exercice de fixation

f et g sont deux fonctions. Complète les égalités suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -6$ donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 15$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

Remarque

Pour calculer la limite du quotient d'une fonction f par une fonction g , on peut écrire le quotient comme produit de f par l'inverse de g . $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right)\right)$.

5) Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme f est la limite en l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

NB : a_n est un nombre réel non nul

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x + 8)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x^7 + 8x - 9)$

6) Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite en l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus hauts degrés de $p(x)$ et de $q(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

NB : a_n et b_p sont des nombres réels non nuls

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^5 - 6x + 8}{5x^3 + 2x^2 - x + 7} \right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 8}{2x^2 - x + 7} \right)$$

7) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

- S'il existe une fonction g telle que $g \leq f$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Calcule chacune des limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ >}} \frac{3x}{x+4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (9 - 7x^2 + 6x - 8x^4) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9 - 7x^2 + 6x}{x^3 + 2x - 4} \right)$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ et de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- 1) Justifie que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).
- 2) Justifie que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Exercice 3

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est juste et réponds par Faux si elle est incorrecte

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -7$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 2x - 8) = \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2) \quad ; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ <}} \left(\frac{1}{(x-8)^4} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x+9}{3x-8} \right) = -\frac{1}{3}$$

Exercice 4

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté au repère (O, I, J) .
 (OI) , (D) et (D') sont asymptotes à (C_f) .

Observe attentivement la figure et donne chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ >}} f(x); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ <}} f(x).$$

Exercice 5

Calcule les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - 1); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad \text{et} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}} \right)$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{5x-2}{3-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) Calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.
- 2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

Exercice 7 : situation complexe

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première scientifique d'un lycée découvrent une ville d'Afrique créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une fonction croissante f telle que : $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$ est exprimée en dizaines de milliers d'habitants.

Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra jamais dépasser 600000 habitants mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux.

En tant que major de ta classe en mathématiques, utilise tes connaissances mathématiques pour les départager.

LEÇON 09 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation suivante : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$. Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.

Par solidarité, toute la classe décide de t'aider à répondre à la préoccupation de ta tante en étudiant la fonction V .

B. CONTENU DU COURS

I -PARITE

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. Fonction paire

a) Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exercice d'application

Justifiez que :

a) Les fonctions : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) , $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos x$ sont paires.

b) La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{1+|x|}$ est paire .

Interprétation graphique

Propriété

La fonction f est paire si et seulement si la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J) .

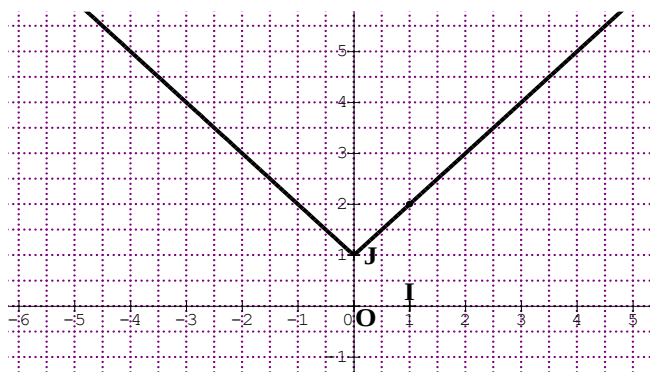
Exemple

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2$ admet la droite des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie dans un repère orthogonal (O, I, J) .

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-6; 6]$ dans $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé (O, I, J) . Cette représentation graphique admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Justifie que la fonction f est paire.



2. Fonction

impair

a) Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exercice d'application

Justifiez que :

- a) Les fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont impaires.
 b) La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est impaire

b) Interprétation graphique

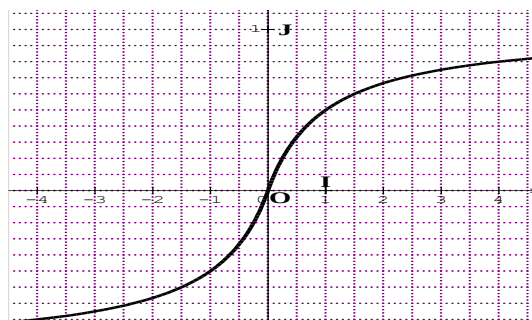
Propriété

La fonction f est impaire si et seulement si le point O est un centre de symétrie de (C_f) dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) .

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-4; 4]$ dans $\mathbb{R}$ dans un repère (O, I, J) .

Cette représentation graphique admet le point O comme centre de symétrie.



II-ELEMENTS DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Soit une droite (D) d'équation : $x = a$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f .

La droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

$(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci-dessous

La droite (D) : $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $f(a + h) = f(a - h)$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Soit une droite (D) d'équation : $x = 3$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2(x - 3)^2 + 5.$$

Démontrez que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f .

2. Centre de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Soit un point A de couple de coordonnées (a, b) et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f .

Le point A est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a : $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci dessous

La droite $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $\frac{f(a+h)f(a-h)}{2} = b$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Soit A de coordonnées $(2; 3)$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = (x - 2)^3 + 3.$$

Démontre que le point A est un centre de symétrie de la courbe de g .

1. Fonction périodique

Définition

Soit T un nombre réel strictement positif.

Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$:

$$x + T \in D_f, \quad x - T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Remarque

on dit souvent qu'une fonction f est T -périodique pour exprimer qu'elle est périodique de période T .

Exemple

- Les fonctions : $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π .
 - La fonction : $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π .
- La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(2x)$ est π -périodique
- car l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$; et donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi$ et $x - \pi$ appartiennent à $\mathbb{R}$.
 - Ensuite $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ car la fonction sinus est 2π -périodique.
- Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarques

- Si T est une période de f alors $\forall (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad f(x + kT) = f(x)$.
- Si f est périodique de période T , il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + T[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par les translations de vecteurs $\overrightarrow{TOI}$ et $-\overrightarrow{TOI}$.

III- ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

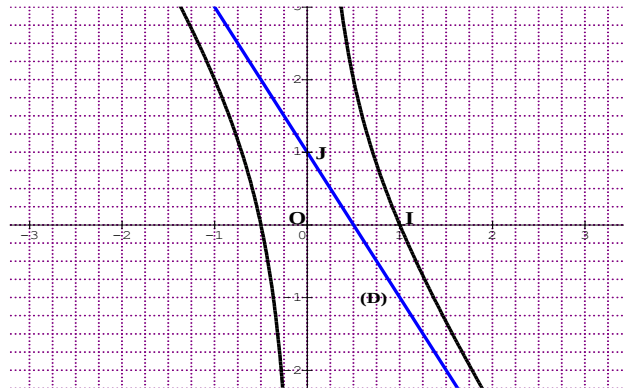
f est une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Soit a et b des nombres réels ($a \neq 0$).

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exemple

Sur la représentation ci-dessous, la droite (D) est une asymptote (oblique) à la courbe en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.



TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, étudie la parité de f .

- 1) $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 8$. **Exercice 2**

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Démontre que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Exercice 2

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$. On note (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

- 1) Démontre que pour tout x de D_f , $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$
- 2) Démontre que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1-Justifie que le point $A(0 ; -1)$ est un centre de symétrie de (C) .

2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Calcule la dérivée de f .

b) Etudie les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.

4-a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Etudie la position de (C) par rapport (T) .

5- Trace la droite (T) et construis (C) sur $[0 ; +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni du même repère orthonormé (O, I, J) tel que : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

Exercice 4 : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

1-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3-a) Calcule la dérivée de f .

b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4-Justifie que le point $A(-1 ; 2)$ est un centre de symétrie de (C) .

5-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

Exercice 5 : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

1-Calcule : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-a) Détermine les réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudie les positions de (C) par rapport à (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

6-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

Exercice 6 : Soit $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1-a) Démontre que f est impaire et périodique de période 2π .

b) Justifie que l'on peut limiter l'ensemble d'étude à l'intervalle : $I = [0 ; \pi]$.

2-Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

3-Etudie les variations de f sur l'intervalle I puis dresse son tableau de variation sur I.

4-Trace (C) sur I puis sur $\left[-\frac{7\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3}\right]$. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

Exercice 7

Partie A

Soit p la fonction polynôme définie par : $p(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

1-Justifie que : $p(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 9)$.

2-Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ et on note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2 + 3}$.

b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + 3)^2}$.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre qu'il existe un unique point A de (C) tel que la tangente à (C) en A soit parallèle à (D).

6-a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 est :

$$y = 2x + 2.$$

b) Vérifie que : $\forall x \in D_f, f(x) - (2x + 2) = -\frac{(x+1)^3}{x^2 + 3}$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (T).

7-Trace les droites (D) et (T) et construis la courbe (C). Unité graphique : 1cm.

Exercice 8_situation complexe

Des élèves de 1^{ère} D ont découvert le texte suivant dans une revue.

« Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite `` économique de 20 watts''. Chaque ampoule est vendue à 100 francs CFA. Il a été établi que le coût de production de x ampoule(s) est donné par la fonction suivante : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[10 ; 100]$. Le Directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal ». Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, tu cherches à répondre aux préoccupations du Directeur.

Réponds, à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques aux préoccupations du Directeur.

Compétence 3 :

Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan

Thème 1 : Géométrie du plan

LEÇON 10 : ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

Dans cette leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, I, J)$.

(C) est le cercle trigonométrique, I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J . (T) est la tangente à (C) en I . L'unité de mesure d'angle est le radian.

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 1^{ère} C d'un lycée Moderne fait des recherches sur les équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ dans la salle multimédia de son établissement. Il découvre des équations de types :

$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$); $a \cos x + b \sin x + c = 0$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Il présente ses recherches à ces camarades de classe. Ceux-ci constatent que ces équations ne sont pas habituelles. Ils décident d'approfondir leurs connaissances sur la trigonométrie afin de résoudre ces équations.

B- RESUME DE COURS

I) ANGLES ORIENTÉS

1) Mesures d'un angle orienté

a) Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, tout nombre réel de forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi$.

Exemple

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}.$$

$\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{11\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarques : A tout nombre réel x correspond un unique point M de (C) ; donc un unique angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ dont une mesure est x .

- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle orienté sont les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$)
- Toutes les mesures d'un même angle orienté ont le même point image M sur (C) .

Notations

- L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle plat seront notés respectivement $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$.

b) Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α , $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre réel $x \in]-\pi; \pi]$ tel que $\text{Mes}(\hat{\alpha}) = x$.

Méthode

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure x est connue, consiste à écrire $\alpha = x + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$;
- Puis l'on détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$.

Exercice de fixation

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : $-\frac{119\pi}{4}$.

2) Somme et différence de deux angles orientés

Définitions

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β .

- On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté dont une mesure est $\alpha + \beta$.
- Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$, il a pour mesure $-\alpha$.
- La différence des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, noté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté $\hat{\alpha} + (-\hat{\beta})$ dont une mesure est $\alpha - \beta$.

Exemple : Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-2\pi}{5}$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{5}$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}$

Remarque : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$

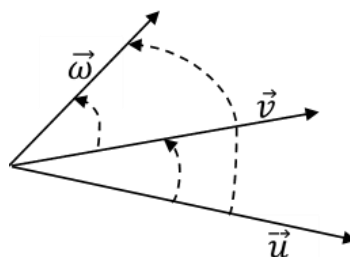
II) PROPRIETES DES ANGLES ORIENTES

1) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}).$$



Exercice De Fixation

A, B, C et D sont quatre points distincts. Choisis l'égalité correcte :

- $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}}) + (\widehat{\vec{AC}, \vec{DC}})$
- $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}}) + (\widehat{\vec{DC}, \vec{AC}})$
- $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = (\widehat{\vec{AC}, \vec{DC}}) + (\widehat{\vec{DC}, \vec{AB}})$

2) Double d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté.

On appelle double de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et on note $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ l'angle orienté défini par : $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et I le milieu de [BC]

$$2(\widehat{AC, AI}) = (\widehat{AC, AI}) + (\widehat{AC, AI}) = (\widehat{AC, AI}) + (\widehat{AI, AB}) = (\widehat{AC, AB})$$

Remarques

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α .
- Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\frac{\pi}{2}$ l'angle orienté droit direct. On a :

- $2\hat{\alpha} = \hat{\alpha} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\alpha} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\pi})$
- $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi})$
- $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2} \text{ ou } \hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2})$

Exercices de fixation : A, B et C sont trois points distincts tels $2(\widehat{AB, AC}) = \hat{0}$.

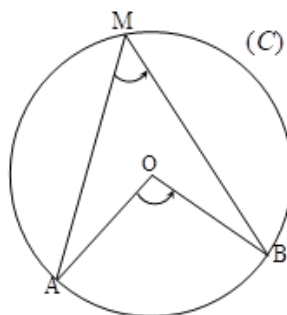
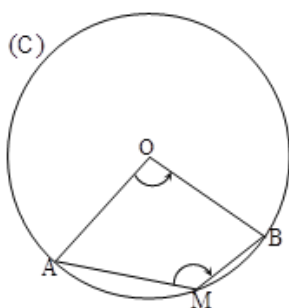
Démontrez que les points A, B et C sont alignés.

1) Angles orientés et cercle

a) Angles orientés inscrits dans un cercle.

Propriété

Soit (C) un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Soit M un point de (C) distinct de A et B

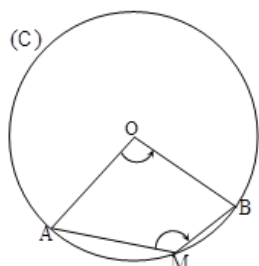


$$(\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA, OB}) + \hat{\pi} : (\widehat{MA, MB}) = \frac{1}{2}(\widehat{OA, OB})$$

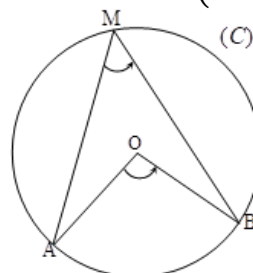
Exercice de fixation

1) On donne $\text{Mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{2\pi}{3}$.

2) On donne $\text{Mes}(\widehat{MA, MB}) = \frac{\pi}{4}$



Calculez $\text{Mes}(\widehat{MA, MB})$



Calculez $\text{Mes}(\widehat{OA, OB})$.

c) Points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = 2(\widehat{DA}, \widehat{DB})$.

Exercice De Fixation

Soit ABC un triangle rectangle en C et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Démontrez que les points A, B, C et D sont cocycliques.

III) TRIGONOMETRIE

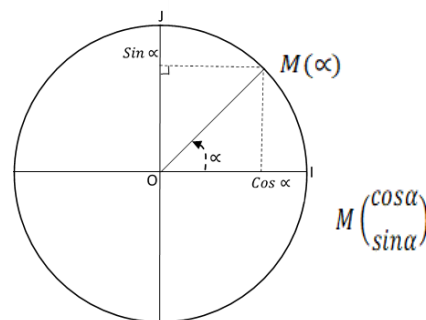
1) Lignes trigonométriques d'un angle orienté

a) Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- Le cosinus de $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est l'ordonnée de M.



b) Tangente d'un angle orienté

Définition

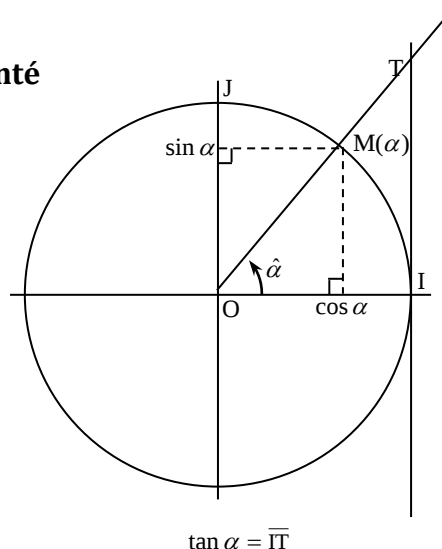
Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté non droit de mesure α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

La tangente du $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est le nombre réel noté $\tan(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

$$\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Exemple

$$\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$



Remarques

- $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α . Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- $\tan$ n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α .

Les angles orientés de mesures $-\alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dit associés à $\hat{\alpha}$

Propriété

Pour tout nombre réel α on a :

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

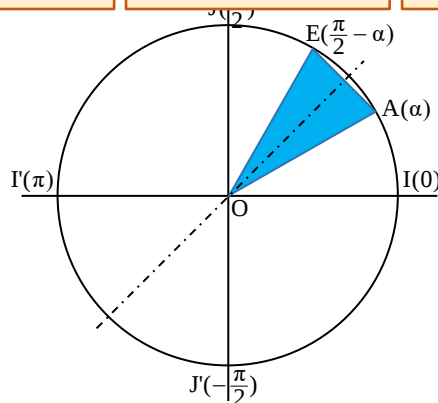
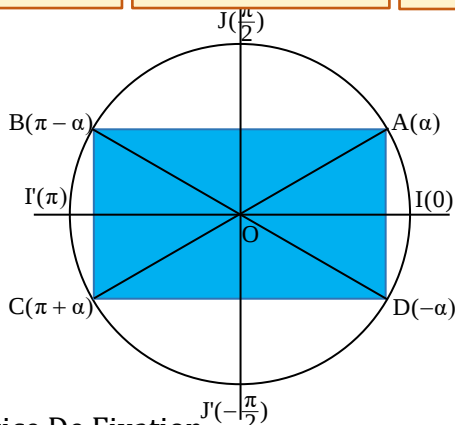
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$



Exercice De Fixation

Détermine $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ dans chacun des cas suivants :

$$1) \alpha = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}; \quad 2) \alpha = -\frac{\pi}{3}; \quad 3) \alpha = \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}; \quad 4) \alpha = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Remarque

Les tangentes des angles associés, non droits, se déduisent des formules précédentes.

Exemple : Pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha; \quad \tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

2) Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$1) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad 3) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$2) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b; \quad 4) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Exercice De Fixation : En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, détermine $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

a) Formules de duplication et de linéarisation

Propriété : Pour tout nombre réel a , on a :

Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exercice De Fixation

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte. Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		A	B	C
1	$\cos^2 a - \sin^2 a$ est égale à	1	$\cos 2a$	$\sin 2a$
2	$\sin 2a$ est égale à	$2 \sin a$	$1 - 2 \sin^2 a$	$2 \cos a \sin a$
3	$2 \sin^2 a$ est égale à	$1 - \cos 2a$	$1 + \cos 2a$	$4 \sin a$
4	$1 + \cos 2a$ est égale à	$2 \cos^2 a$	$1 - 2 \sin^2 a$	$1 - 2 \cos^2 a$

3) Fonctions circulaires

a) Fonctions cosinus ; fonctions sinus

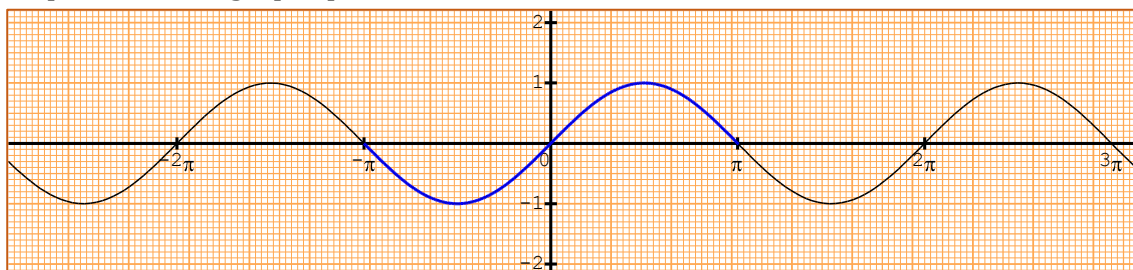
Définitions

- On appelle fonction sinus, la fonction notée $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$
- On appelle fonction cosinus, la fonction notée $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$

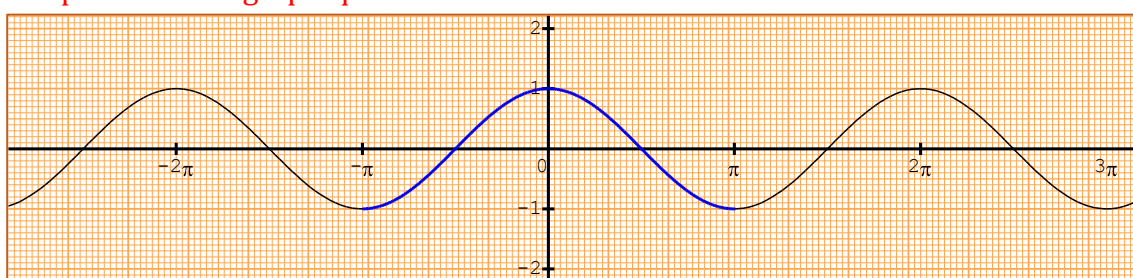
b) Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

Pour construire les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$, on construit les courbes sur $]-\pi, \pi]$ puis on complète en utilisant les translations de vecteurs $2\pi\overrightarrow{OI}$ et $-2\pi\overrightarrow{OI}$.

Représentation graphique de la fonction sinus



Représentation graphique de la fonction cos



b) Fonction tangente

La fonction tangente notée $\tan$ est la fonction : $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

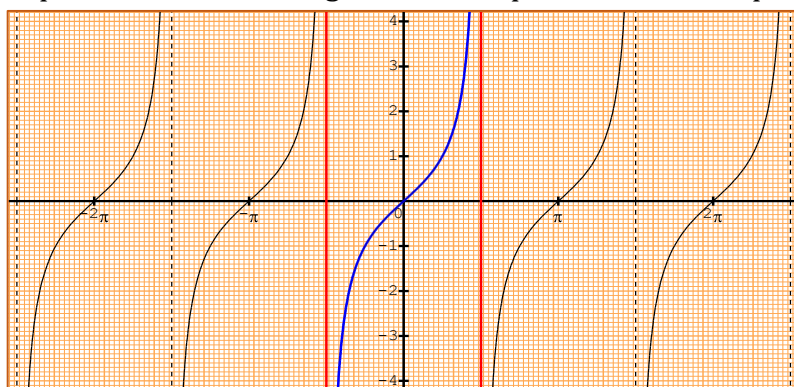
L'ensemble de définition de la fonction $\tan$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Cette fonction est continue en tout élément de son ensemble de définition

On construit sa courbe représentative sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ puis on complète en utilisant les translations de vecteur $\pi \times \overrightarrow{OI}$ et $-\pi \times \overrightarrow{OI}$.

Exemple

Représentation graphique de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthonormé



Exercice De Fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Représente graphiquement la fonction :
 $f: x \mapsto \cos(2x + 5)$

IV) EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Equations du type : $\cos x = \cos a$; $\sin x = \sin a$ et $\tan x = \tan a$

Propriétés

Pour tous nombres réels x et a , on a :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pour x et a différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice De Fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations : a) $\cos x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et c) $\tan x = 1$

Remarques : cas particuliers d'équations trigonométriques

1) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Equations du type : $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a \cos x + b \sin x$, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$

- On détermine un nombre réel α tel que :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

- On écrit ensuite : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$
- Donc : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$
- On résout l'équation : $\cos(x - \alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice De Fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$

I) INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées sous forme d'exercices.

Exercice De Fixation

- a) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_1) : $\sin x > -\frac{1}{2}$.
- b) Résous dans $[0, 2\pi]$, l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_3) : $\tan x < 1$.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{149\pi}{3}$ et place sur le cercle trigonométrique le point M $(\frac{149\pi}{3})$.

Exercice 2

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

Parmi les nombres ci-dessous indique ceux qui sont des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\frac{\pi}{12} + 3\pi ; \quad \frac{\pi}{12} - 6\pi ; \quad \frac{\pi}{12} + 2020\pi ; \quad \frac{\pi}{12} - 2021\pi$$

Exercice 3

Calcule la tangente de l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, détermine le sinus et le cosinus de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de mesure α .

- a) $\alpha = \pi$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Indique les égalités justes :

- a) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$; b) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{\pi}$; c) $2(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{0}$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : a) $\frac{2021\pi}{6}$ et b) $-\frac{37\pi}{3}$

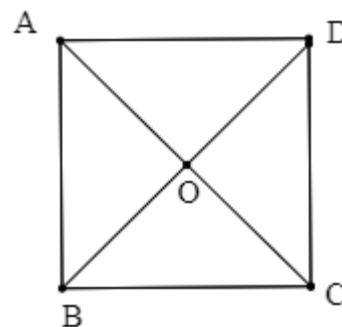
Exercice 7

- 1) Démontre pour tout nombre réel x , $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- 2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -1$.
- b) Représente les solutions sur le cercle trigonométrique.
- c) Donne les solutions de (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. Relie chaque élément du tableau A à un élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A		Tableau B
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$	•	$\hat{\pi}$
$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$	•	$\hat{0}$
$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$	•	$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
$2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD})$	•	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$



Exercice 8

1. Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

2. Soit A le nombre réel défini par : $A = 2\sin \frac{\pi}{11} (\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11})$

a) Démontre que : $A = \sin \frac{10\pi}{11}$

b) Déduis-en que : $A = \sin \frac{\pi}{11}$

c) Démontre que : $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

Exercice 10

ABCD est un carré de sens direct. ABF et CBE sont des triangles équilatéraux directs

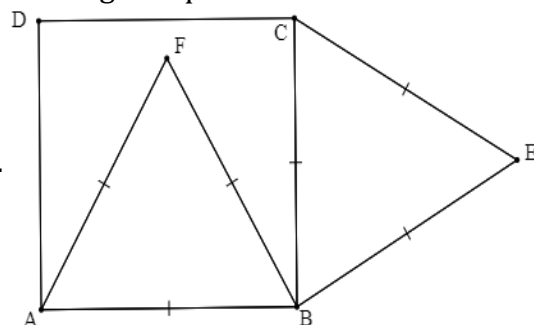
1. Justifie que : $Mes(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}) = \frac{5\pi}{12}$

2. Démontre que : $Mes(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{12}$

3. a) Donne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE})$.

b) Déduis-en que : $Mes(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = -\frac{\pi}{12}$

4. Démontre que les points D, E et F sont alignés.

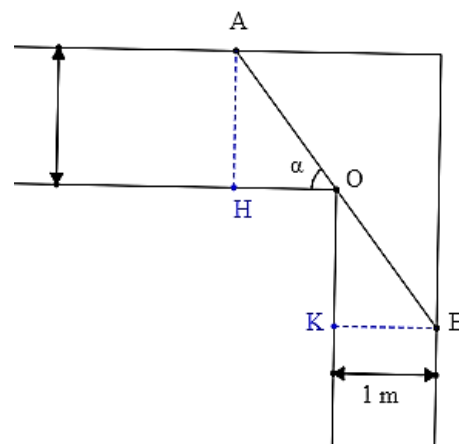


Exercice 11 : situation complexe

Au cours d'une séance de travaux dirigés en Physique chimie, des élèves de 1^{ère} C découvrent la figure ci-contre : Cette figure représente un couloir de largeur $\sqrt{3}$ m qui tourne à l'angle droit et cette largeur n'est plus alors que de 1 m

Sur la figure, une droite passe par O fait avec l'un des murs un angle α et coupe les deux autres murs en A et B ($0 < \alpha <$

$\frac{\pi}{2}$ et $AB = 4$). L'unité de longueur est le mètre



En observant la figure, Séri, le chef de classe, affirme que l'angle α admet deux valeurs $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$. Par contre, son voisin affirme que α n'a qu'une seule valeur égale à $\frac{\pi}{3}$. Tu es sollicité pour les départager.

Dis, en le justifiant par une production argumentée, qui de Séri ou de son voisin a raison.

Compétence 1 :
Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions.
Thème 1 : Calculs algébriques

LEÇON 11 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Trois élèves d'une classe de première C font des recherches sur les hydrocarbures. Ils découvrent le texte suivant :

« Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume de 70 cm^3 . Après le passage d'une étincelle, il se produit une réaction. Au retour dans les conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène ».

Impressionnés par les résultats de cette expérience, ils veulent déterminer les volumes respectifs des gaz qui composent le mélange initial.

Pour cela, ils décident d'apprendre à résoudre des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$.

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

1) Définition

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

On appelle déterminant du système (S), le nombre réel $ab' - a'b$. On le note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Exemple

Le déterminant du système (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ est : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13$

2) Propriété

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{où } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a', b') \neq (0, 0).$$

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarque

Le système (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

Exercice De Fixation

Pour chacun des systèmes ci-dessous, détermine le nombre de solutions.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases} .$$

3) Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode

Un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, peut se résoudre :

- Par le calcul à l'aide de la substitution, de la combinaison ou du déterminant.
- Graphiquement.

Exemple1 : Par le calcul à l'aide du déterminant

Résous les systèmes d'inconnue $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$:

a) $(S_1): \begin{cases} 3x + 15y + 2 = 0 \\ 2x + 10y - 6 = 0 \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$ Donc le système (S_1) admet zéro solution ou plusieurs solutions.	le couple $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ vérifie l'équation $3x + 15y + 2 = 0$ et ne vérifie pas l'équation $2x + 10y - 6 = 0$. Donc (S_1) n'admet aucun couple solution.
--	--

b) $(S_2): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7$ Donc le système (S_2) admet une seule solution.	$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17$ donc $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$. L'unique couple de solutions de (S_2) est $\left(\frac{1}{7}; \frac{17}{7}\right)$.
---	--

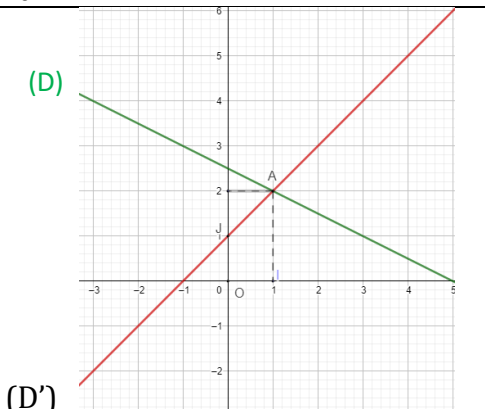
Synthèse : Cas général

$S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Lorsque le déterminant $D \neq 0$, le système admet une unique solution.

On calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ puis $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Exemple 2 : Graphiquement, résous le système $(S): \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y - 5 = 0$ et $x - y + 1 = 0$ puis on lit les coordonnées du point d'intersection des droites. (D) et (D') sont sécantes en A et A(1 ; 2). La solution du système est (1 ; 2).	
---	--

II. SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^3$

1) Définitions

- On appelle système linéaire de trois équations du premier degré à trois inconnues $(x; y; z)$, un système du type :
$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \\ a''x + b''y + c''z = m'' \end{cases}$$
 où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', m, m' \text{ et } m''$ sont des nombres réels.

- Un système triangulaire d'équations dans $\mathbb{R}^3$ est un système du type :
$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ b'y + c'z = m' \\ c''z = m'' \end{cases}$$
 où $a, b, c, b', c', c'', m, m' \text{ et } m''$ sont des nombres réels.

Exemples

$$:(\Sigma_1) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad (S) \quad \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

2) Résolution d'un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

a) Par substitution

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de substitution :
$$:(\Sigma_1) \begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 2(2y + 3z - 9) + 5y - 3z = 0 \\ 2y + 3z - 9 + y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 9y + 3z = 18 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 5z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ 3y + 5(6 - 3y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z - 9 \\ z = 6 - 3y \\ -12y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; 1; 3)\}$$

b) Par la méthode du pivot de Gauss

Exemple :

Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss :
$$:(\Sigma_2) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (L_2) \\ 3x + y - 2z = -1 & (L_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 0 + 28y + 36z = -12 & (L'_2) = (L_2) - 5(L_1) \\ 0 + 16y + 19z = -10 & (L'_3) = (L_3) - 3(L_1) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 14y + 18z = -6 & (L'_2) \\ 16y + 19z = -10 & (L'_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (L_1) \\ 14y + 18z = -6 & (L'_2) \\ 0 - 22z = -44 & (L''_3) = 14(L'_3) - 16(L'_2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -3 \\ x = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc : $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; -3; 2)\}$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants, puis indique le nombre de solutions du système.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}; \quad (S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}; \quad (S_3) \begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = \sqrt{2} \\ 2x - 2\sqrt{2}y = -2 \end{cases}$$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci-dessous en utilisant :

- 1) La méthode de substitution ;
- 2) La méthode de combinaison.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}; \quad (S_2) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}; \quad (S_3) \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = \sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{2}y = -\sqrt{6} \end{cases};$$

Exercice 3

- 1) Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes a) b) c) ci-dessous en utilisant La méthode de substitution et d) e) et f) par la méthode du Pivot de Gauss ;

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y - 2z = -12 \\ -22z = -66 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 2x + y - 4z = 4 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}; \quad e) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases}; \quad f) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 7z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Détermine une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On donne les points : $A(2; 6)$, $B(-3; 1)$, $C(7; -2)$; $D(4; 0)$, $E(-4; 4)$ et $F(11; -1)$.

Les droites (AB) , (CD) et (EF) sont-elles concourantes ? Justifie ta réponse.

Exercice 6

Détermine un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme des chiffres est égale à 14 ;
- Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 180 ;
- Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 297.

Exercice 6 : situation complexe

On propose un jeu à trois groupes d'élèves d'une classe de première.

A ce jeu, les groupes peuvent solliciter une personne ressource. Le problème posé est le suivant : « un fermier élève des canards, des lapins et des dromadaires. Il compte le nombre de pattes de ses canards, de ses lapins et de bosses de ses dromadaires. Il trouve 130. Il compte le nombre de têtes de ceux-ci, et il trouve 46. Il compte ensuite le nombre d'oreilles des lapins et des dromadaires et trouve 38. Enfin, le fermier affirme avoir dénombré au moins 16 lapins et souhaite déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce. »

Tu es la personne ressource sollicitée, A l'aide de tes connaissances mathématiques aide ce fermier.

Compétences relatives aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème 2 : Fonctions

LEÇON 12 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire veut monter un projet de construction de ferme. Pour ce fait le président encourage ses 45 membres à cotiser une somme de 1000 F par mois pendant 9 mois. Au bout de la première année, il compte ouvrir un compte et déposer cet argent dans une banque qui accorde un intérêt de 5% chaque année, sur tout montant resté immobilisé sur ce compte. Le budget primitif du projet s'élève à 623 000F.

Le président de la coopérative, en classe de première est curieux de savoir si pendant 4 années la coopérative pourra réunir ce montant grâce à la banque. Il recherche un procédé efficace pour effectuer les calculs nécessaires.

B-CONTENU DU COURS

I- GENERALITES

1- Définition

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto U(n)$. L'image $U(n)$ de n est généralement notée U_n .

La suite numérique ainsi définie est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (U_n) .

U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite (U_n) .

Exemple

Parmi les fonctions suivantes, seule la fonction de la colonne C est une suite numérique

A	B	C
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto 2n - 1$	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n+3}$	$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto \frac{2n-1}{n}$

2- Différentes présentations d'une suite

Une suite peut être définie par une formule explicite ou par une formule de récurrence.

a- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) de terme général.

$U_n = f(n)$ est dite définie par une formule explicite.

Exemples :

• $U_n = 3n + 5$ et $V_n = \frac{2n^2+1}{n}$ sont des suites définies par des formules explicites.

• Soit la suite suivante : $W_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$. On a :

$$W_0 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 10 = 4 ; W_5 = -6\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 = \frac{157}{12} ; W_{10} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 = \frac{5117}{512}$$

b- Suite définie par une formule de récurrence

La suite (U_n) définie par la donnée :

- d'un terme (en général le 1^{er} terme)
- et d'une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

est dite suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 1 : $\begin{cases} P_1 = 3500 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n + 25 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence.

Soit la suite (V_n) définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 5 \end{cases}$$

On a :

$$V_1 = 2V_0 - 5 = 9;$$

$$V_4 = 2V_3 - 5. \text{ Il nous faut calculer } V_3.$$

$$V_3 = 2V_2 - 5; \text{ il nous faut calculer } V_2.$$

$$V_2 = 2V_1 - 5. \text{ On a donc } V_2 = 14; V_3 = 23 \text{ et enfin } V_4 = 41.$$

3- Représentation graphique d'une suite

a- Suite définie par une formule explicite

$$U_n = f(n).$$

Méthode :

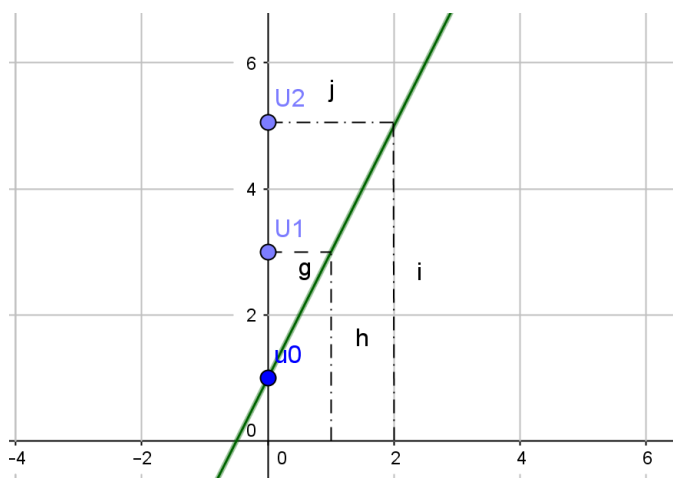
- On représente (Cf) , la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n) .

- On détermine graphiquement

$$U_0 = f(0); U_1 = f(1); U_2 = f(2); U_3 = f(3) \text{ etc.}$$

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par : $U_n = 2n + 1$.



b- Suite définie par une formule de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$

Méthode :

- On représente (Cf) , la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n) .

- On trace la droite (Δ) d'équation : $y = x$ (la première bissectrice)

- On marque U_0 sur l'axe des abscisses (OI).

- On projette le point obtenu verticalement sur (Cf) , on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI), on obtient U_1 .

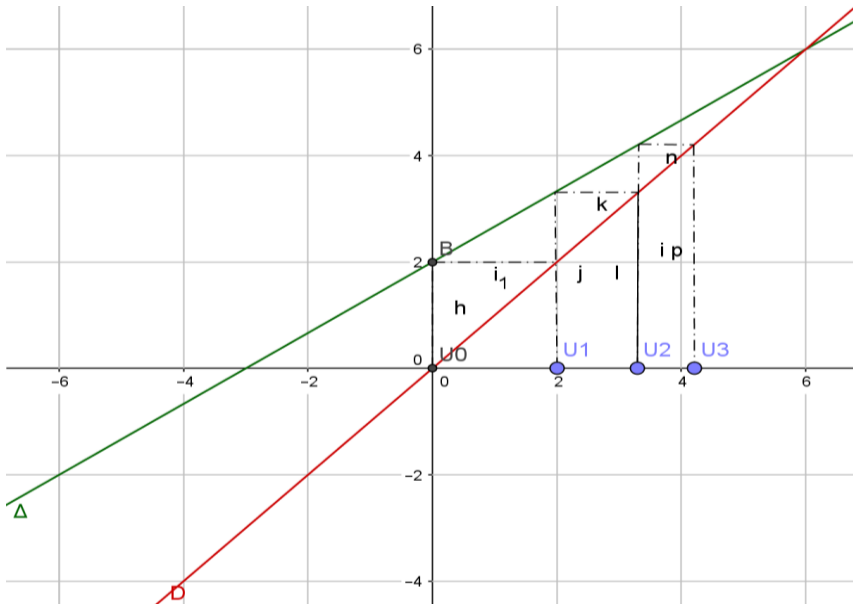
- Refaire ce même processus avec U_1 pour obtenir U_2 .

- Et ainsi de suite...

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \end{cases}$$



II- SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

1- Suites arithmétiques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$.

* r est appelé la **raison** de la suite (U_n)

Exemples :

- Voici des exemples de suite arithmétique :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 3$; 3 est la raison et U_0 le premier terme.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ est la raison et V_1 le premier terme.

- On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2}n - 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) - 3 = \frac{1}{2}n - 3 + \frac{1}{2}$. Donc $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (U_n) est arithmétique. Sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme est : $U_0 = -3$.

b- Détermination du terme général

Propriété

Soit n et k des entiers naturels ; (U_n) une suite arithmétique de raison r , on a :

$$U_n = U_k + (n-k)r$$

Cette forme est appelée terme général de (U_n)

Cas particuliers:

$$U_n = U_0 + nr$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Exercice de fixation

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $U_0 = 5$.

Exprime U_n en fonction de n .

c- Somme des termes consécutifs

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes.

Conséquences :

- Si $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) alors
$$S = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$$
- Si $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_j$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) , alors
$$S = (j - k + 1) \times \frac{(U_k + U_j)}{2}$$

Exemples

- $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2020 = 2020 \times \frac{(1+2020)}{2} = 2\,041\,210$
- $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \times \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$
- $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$
- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 9 et de premier terme $U_0 = -2$.

Alors : Si on pose

- 1) $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. De 0 à $n-1$, on additionne n termes.

Donc $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. Soit donc $S = \frac{n(9n-13)}{2}$

- 2) $T = U_3 + U_4 + \dots + U_{77}$; de 3 à 77, on additionne $77 - 3 + 1 = 75$ termes.

Donc $T = \frac{75}{2}(U_3 + U_{77})$ soit $T = 26\,850$.

2- Suites géométriques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q U_n$

* q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple :

- Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases} \text{ est une suite géométrique.}$$

- On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$.

Donc la suite (V_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b- Détermination du terme général

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et k un entier naturel inférieur à n .

On a : $U_n = q^{(n-k)} U_k$

Cas particuliers :

- $U_n = q^n U_0$

$$\bullet U_n = q^{n-1} U_1$$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_1 = 3$.

Exprime V_n en fonction de n .

c-Somme de termes consécutifs

Propriété

La somme S des n termes consécutifs d'une suite géométrique de 1^{er} terme a et de raison q est :

Si $q \neq 1$ alors : $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

• Si $q = 1$ alors $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = (\text{nombre de termes}) \times (1^{\text{er}} \text{ terme})$;

$$S = n \times U_1$$

• De façon générale : $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$$U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_{k+p} = U_k \times (p+1) \quad \text{si } q = 1$$

Exercice de fixation : Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Calcule la somme T suivante: $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* V_{n+1} = -5V_n \end{cases}$

Exprime V_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} U_2 = 5 \\ \forall n \geq 2, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

Exprime U_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que : $V_1 = -\frac{3}{2}$ et $V_3 = -\frac{27}{2}$.

Détermine les valeurs possibles de q .

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 1$

1) Calcule les quatre premiers termes de cette suite.

2) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique.

3) Dédus-en le calcul de la somme des cents premiers nombres impaires.

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I, J)$.

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Représente sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite

Exercice 6

Soit (P_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} P_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2P_{n+1} = 2P_n - 5 \end{cases}$

Démontre que : $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

Exercice 7

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_n = 7 \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démontre que : $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique puis précise le premier terme et la raison.

Exercice 8

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 4$ et $U_{20} = 28$

1- Détermine la raison de cette suite

2- Calcule U_{18} puis en déduis U_{19}

Exercice 9

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Exprime T_n en fonction de n

Exercice 10 :

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

1- Calcule U_1, U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Exprime T_n puis S_n en fonction de n .

Exercice 16 : situation complexe

Chaque année, depuis 2010 la production d'un article de l'usine citoyenne O.B.V en Côte d'Ivoire subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.

Une étude de marché a montré que la production de cet article n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 56 000 articles

Les premiers responsables de cette usine désirent savoir à partir de quelle année la production de cet article ne sera plus rentable.

Elève en classe de 1C, Ton professeur de mathématiques a son épouse qui travaille dans cette usine. Il présente la situation à la classe puis accorde un bonus de deux à chacun des trois premiers élèves qui trouveront la solution. Tu désires obtenir ce bonus.

Propose une solution argumentée à ce problème.

Compétence 3 :

Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

Thème 2 : Géométrie de l'espace

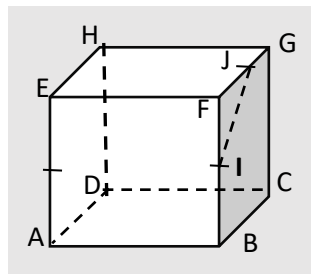
LEÇON 13 : ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Hermann, un élève en classe 1^{ère} C ne comprend pas pourquoi son frère aîné affirme que dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (HG) et (IJ) sont orthogonales ; avec I et J milieux respectifs de [FB] et [FG].

Afin de comprendre cette affirmation, Son professeur de mathématiques lui demande de faire des recherches sur les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace.



B- CONTENU DE LA LEÇON

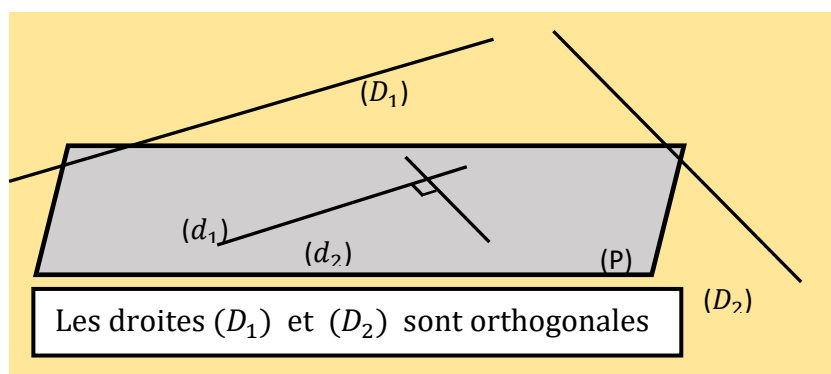
1. DROITES ORTHOGONALES DE L'ESPACE

a) Définition

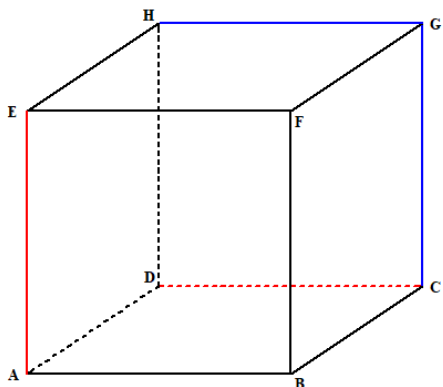
Dans l'espace (ϵ), deux droites (D_1) et (D_2) sont dites orthogonales lorsqu'il existe deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) telles que (D_1) est parallèle à (L_1) et (D_2) est parallèle à (L_2).

La droite (D_1) est orthogonale à la droite (D_2) se note : $(D_1) \perp (D_2)$

$$\begin{cases} (L_1) \text{ et } (L_2) \text{ perpendiculaires} \\ (D_1) \parallel (L_1) \\ (D_2) \parallel (L_2) \end{cases} \Rightarrow (D_1) \perp (D_2)$$



Exemple :



Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet, (GH) est perpendiculaire à (CG). De plus (GH) $\parallel$ (DC) et (CG) $\parallel$ (AE).

Remarque : le terme perpendiculaire ne s'utilise que lorsque les droites sont orthogonales et sécantes. Autrement dit, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

b) Propriétés

Propriété 1 :

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

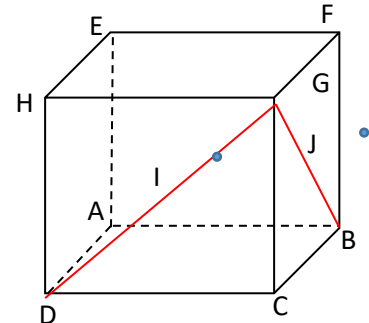
Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre :

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et

J est le milieu de [BG].

Démontrez que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.



Remarque :

Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

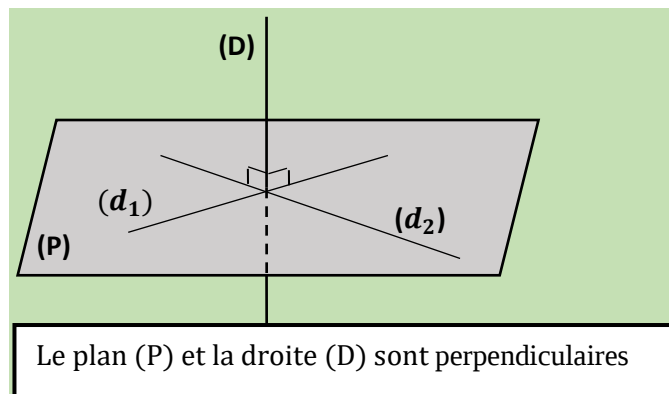
2. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

a) Définition

Dans l'espace, on dit qu'une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (P).

La droite (D) est perpendiculaire au plan (P) se note : $(D) \perp (P)$

$$\begin{cases} (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sécantes dans } (P) \\ (D) \perp (d_1) \\ (D) \perp (d_2) \end{cases} \Rightarrow (D) \perp (P)$$



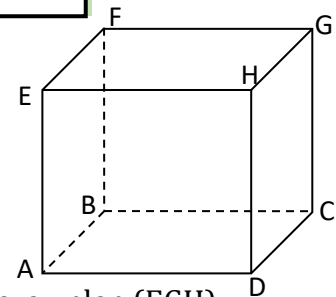
Exemple

On donne la figure ci-contre : ABCDEFGH est un cube.

(DH) est perpendiculaire au plan (EGH). En effet, $(DH) \perp (HE)$

et $(DH) \perp (HG)$. La droite (DH) est orthogonale à deux droites

sécantes en H incluses du plan (EGH), alors (DH) est perpendiculaire au plan (EGH).



b) Propriétés

Propriété 1 (propriété fondamentale) :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, justifie que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.

Propriété 2 :

Il existe une unique droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de droites passant par le point B et perpendiculaire au plan GCD ?

Propriété 3 :

Il existe un unique plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

Exercice de fixation

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de plans passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) ?

Propriété 4 :

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Propriété 5 :

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Exercice de fixation

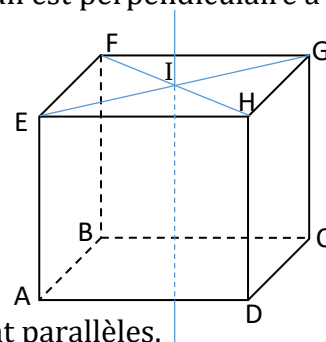
Justifie que les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Propriété 6 :

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, la droite (D) est perpendiculaire aux droites (FH) et (EG) en I.
Justifie que (D) est perpendiculaire au plan (ABD).



Propriété 7 :

Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

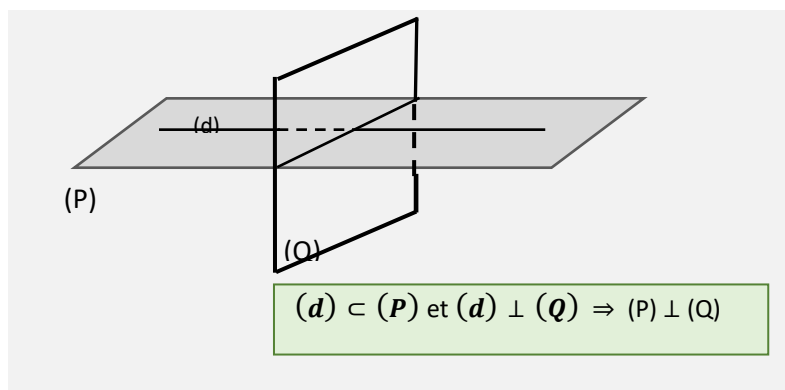
3. PLANS PERPENDICULAIRES DE L'ESPACE

a) Définition

Dans l'espace, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre plan.

Le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) se note : $(P) \perp (Q)$

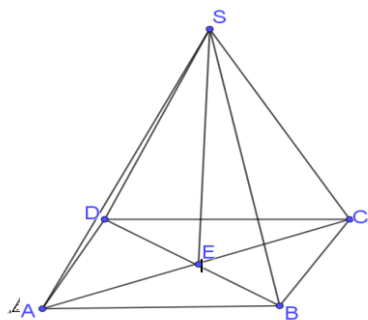
$$\left\{ \begin{array}{l} (d) \text{ est une droite du plan } (P) \\ (Q) \perp (d) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



Exemple

On donne la pyramide régulière SABCD ci-dessous de hauteur $[SO]$

Démontrons que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.



(AO) est une droite incluse dans le plan (ADB)
(AO) est perpendiculaire au plan (SDB) donc les
plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

Conséquences

* Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) , alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P) .

* Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

b) Propriétés

Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

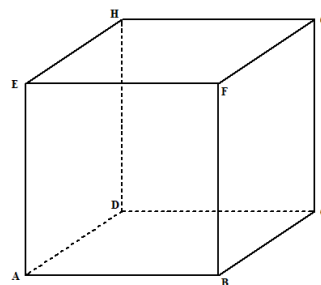
Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

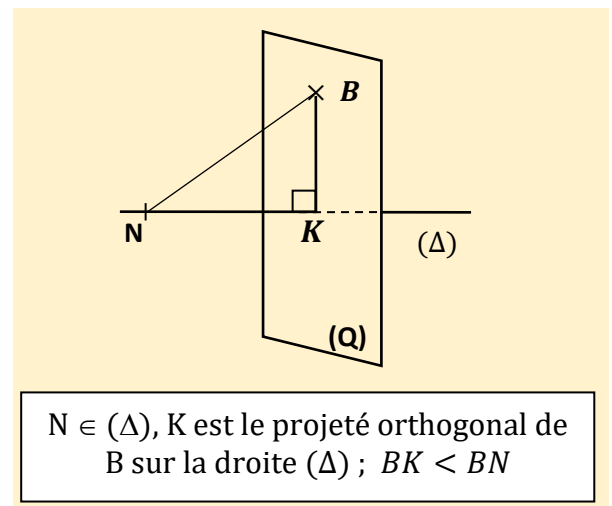
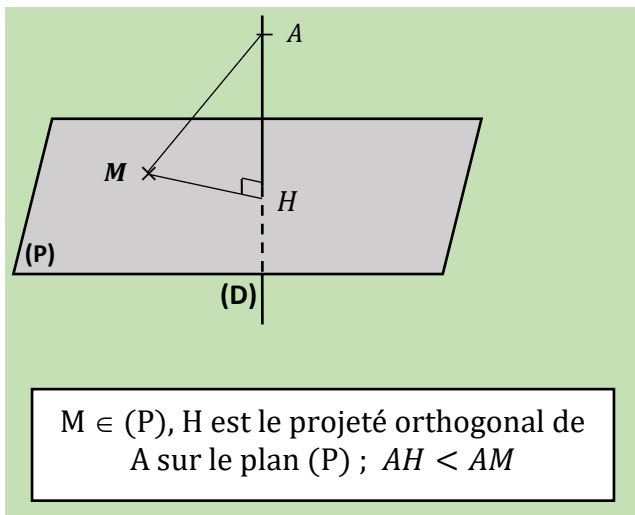
Démontre que les plans (ACE) et (DEH) sont
perpendiculaires au plan (ABC).



4. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN, SUR UNE DROITE DE L'ESPACE

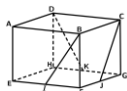
Définitions

- Soit A un point et (P) un plan de l'espace. Soit (D) l'unique droite passant par A et perpendiculaire à (P) en H.
Alors le point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur le plan (P)
La distance AH est appelée **la distance du point A au plan (P)**
- Soit B un point et (Δ) une droite de l'espace. Soit (Q) l'unique plan passant par B et perpendiculaire à (Δ) en K.
Alors le point K est appelé le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (Δ) .
La distance BK est appelée **la distance du point B à la droite (Δ)** .



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont des points respectifs des arêtes [EF], [FG] et [GH]. p est la projection orthogonale sur le plan (EHD)



Complétons le tableau ci-dessous.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
p(M)										

b -Propriétés

Propriété 1

Par une projection orthogonale sur un plan (P), l'image d'une droite (D) est :

- un **singleton** si (D) est **perpendiculaire** à (P).
- une **droite** si (D) n'est **pas perpendiculaire** à (P).

Propriété 2

Par une projection orthogonale sur un plan (P), l'image d'un segment [AB] est :

- un **singleton** si la droite (AB) est **perpendiculaire** à (P).
- un **segment** si la droite (AB) n'est **pas perpendiculaire** à (P).

Propriété 3 (Projeté orthogonal du milieu d'un segment)

Par une projection orthogonale sur un plan (P), l'image du milieu d'un segment [AB] est le milieu de l'image du segment [AB] si (AB) n'est pas perpendiculaire à (P).

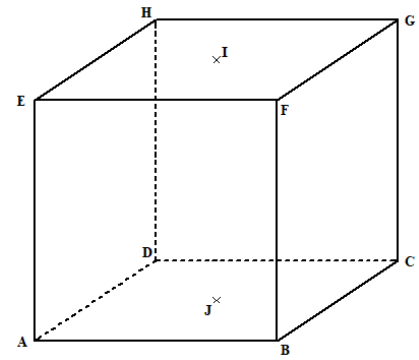
Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

J est le centre du carré ABCD et I le centre du carré EFGH.

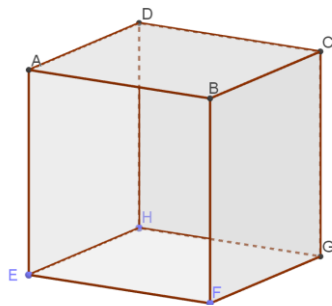
Détermine le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC).

Justifie ta réponse.



TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

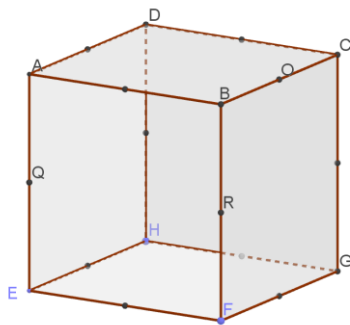


Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube.

Justifie que la droite (EF) est orthogonale au plan (BFG).

Exercice 2

La figure ci-dessous représente un cube. Les points Q et R désignent les milieux respectifs des arêtes [AE] et [BF]

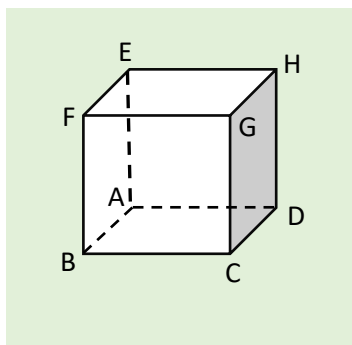


1) Justifie que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

2) Justifie que les droites (AR) et (HG)

ne sont pas orthogonales.

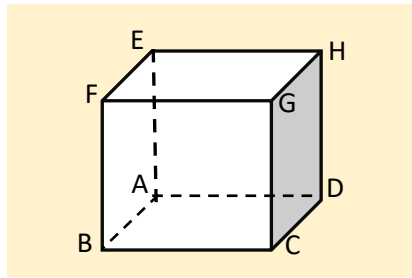
Exercice 5



La figure ci-dessus est le cube ABCDEFGH

1. Détermine le projeté orthogonal de G sur (ABF).
2. Détermine la distance de B au plan (EGH).
3. Cite 3 droites perpendiculaires à la droite (EF).
4. Cite 3 droites orthogonales et non perpendiculaires à la droite (EF).
5. Cite 3 plans orthogonaux au droite (CD).
6. Cite 3 plans orthogonaux au plan (CDH).

On utilisera le cube ABCDEFGH pour résoudre les exercices allant de Ex 6 à Ex10.



Exercice 6 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier que deux droites sont orthogonales

1. Démontre que : $(BC) \parallel (AD)$ et $(HD) \parallel (AE)$
2. Déduis-en que : $(BC) \perp (HD)$

Exercice 7 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre une droite et un plan.

1. Démontre que : $(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \perp (AE)$
2. Déduis-en que la droite (AB) est orthogonale au plan (AHD)

Exercice 8 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la propriété fondamentale pour justifier l'orthogonalité entre deux droites.

1. Démontre que : $(AB) \perp (AHD)$.
2. Déduis-en que : $(AB) \perp (HD)$.

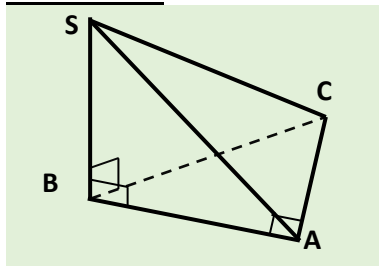
Exercice 9 : L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre deux plans.

1. Démontre que : $(AB) \perp (AHD)$.
2. Déduis-en que : $(AEB) \perp (AHD)$.

Exercice 10 L'objet de cet exercice est de trouver le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan et de calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan

1. a) Justifie que E est le projeté orthogonal de A sur le plan (FHG) .
b) Déduis-en, la distance de H à la droite (HG)
2. a) Justifie que D est le projeté orthogonal de C sur le plan (EHA) .
b) Déduis-en, la distance de C au plan (EHA) .

Exercice 11

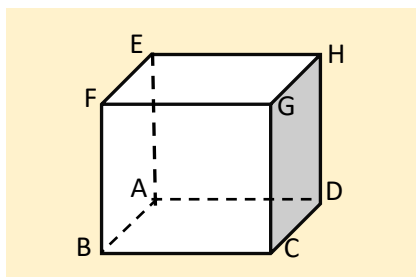


La figure ci-dessus est un tétraèdre $SABC$ tel que :

- La droite (SB) est orthogonale au plan ABC
 - Le triangle ABC est rectangle en A
1. Démontre que la droite (AC) est orthogonale à la droite (SB) .
 2. Déduis-en que les plans (SAB) et (SAC) sont

Exercice 12 Orthogonalité entre les plans

On donne ci-dessous le cube ABCDEFGH



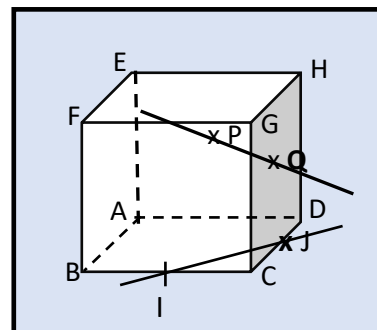
1. Démontre que : $(ABC) \perp (AEC)$
2. Démontre que : $(AEC) \perp (HDB)$
3. Démontre que : $(FCH) \perp (AEG)$

Indications :

1. on étudiera l'orthogonalité entre (AE) et (ABC)
2. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (AC) et les droites (BD) et (HD)
3. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (FH) et les droites (EG) et (AE)

Exercice 13 : situation complexe

Soit ABCDEFGH un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces AEHD et CDHG. Lors du cours le professeur de Mathématiques d'une classe de 1^{ère} C affirme que : « les droites (PQ) et (IJ) sur la figure ci-contre sont orthogonales non sécantes ». Il donne la démonstration à faire en exercice en classe et accorde trois points en bonus au premier élève qui aura fait une démonstration correcte. Etant élève de cette classe et désireux d'obtenir les points bonus, justifie cette affirmation du professeur de Mathématiques



Compétence 3 :
Traiter une situation relative à la géométrie du plan,
à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan
Thème 1 : Géométrie du plan

LEÇON 14 : COMPOSÉES DE TRANSFORMATIONS

A. Situation d'apprentissage

Des élèves de 1^{ère}c d'un lycée revenus d'un jeu de cracks sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre:

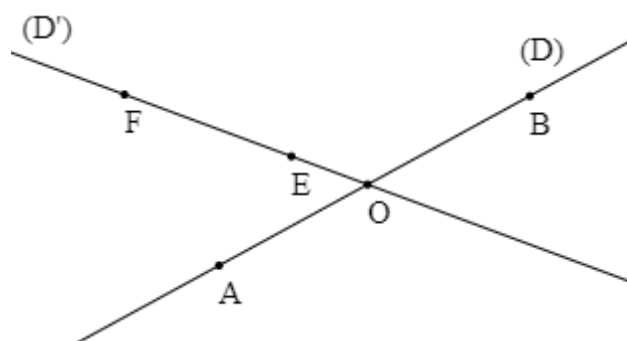
sur la figure ci- contre, (d) et (d') sont deux droites sécantes en o.

Il existe une l'homothétie h_a de centre a qui transforme o en b et il existe une l'homothétie h_o de centre o qui transforme f en e.

Les points a, o, b, e et f sont tels que : $\frac{ab}{ao} \neq \frac{Of}{oe}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$.

Ensemble les élèves de la classe veulent relever le défi. Pour cela ils décident de faire des recherches sur les composées d'homothéties.



B. Contenu du cours

I- Composée de deux translations

1) Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et f est une application du plan dans lui-même.

Dans chacun des cas suivants, dis si f est une translation

- 1) $f(A) = C$ et $f(D) = B$
- 2) $f(A) = B$ et $f(D) = C$
- 3) $f(C) = B$ et $f(D) = A$

2) Composée de deux translations

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(2; 1)$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

Remarques

- 1) On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$
- 2) Toute translation est une transformation (une bijection) du plan ; La transformation réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$

3) Expression analytique d'une translation

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. On a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

On dit que l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Exercice de fixation : Soit $A(-1; 4)$ un point du plan et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

Détermine les coordonnées du point A' , image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

II- Composée de deux rotations

1) Composée de deux rotations de même centre

Propriété

Soient $r(O, \alpha)$ et $r'(O, \theta)$ deux rotations de même centre O et d'angles respectifs α et θ .

La composée $r(O, \alpha) \circ r'(O, \theta)$ est la rotation $R(O, \alpha + \theta)$.

Exercice de fixation

I est un point du plan, r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$; r' est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée : $r \circ r'$.

Remarques

- 1) Etant donné deux rotations r et r' de même centre, on a : $r \circ r' = r' \circ r$.
- 2) Toute rotation est une transformation (une bijection) du plan. La transformation réciproque de la rotation $r(O, \alpha)$ est la rotation $r(O, -\alpha)$.

2) Composée de deux rotations de centres différents.

Propriété

Soient r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et θ .

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une translation**.

Si $\hat{\alpha} + \hat{\theta} \neq \hat{0}$ alors la composée $r \circ r'$ est **une rotation** d'angle orienté $\alpha + \theta$.

Exercice de fixation

A et B sont deux points distincts du plan. r est la rotation de centre A et d'angle α , r' est la rotation de centre B et d'angle θ

Détermine la nature de $r \circ r'$ dans les cas suivants :

$$\text{a) } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \theta = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{b) } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Remarques

1) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une translation alors son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par la rotation $r(A, \alpha)$.

2) Si $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ est une rotation alors :

- on construit le point B' image du point B par la rotation $r(A, \alpha)$
- on marque un point E et on construit son image E' par $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$
- Si les segments $[BB']$ et $[EE']$ n'ont pas la même médiatrice alors le point d'intersection de leurs médiatrices est le centre de $r(A, \alpha) \circ r(B, \theta)$ sinon le centre est le point d'intersection des droites (EB) et $(E'B')$.

Exercice de fixation

ABCD est un carré de sens direct. On considère les rotations suivantes :

$$r_A = r(A, \frac{\pi}{2}), \quad r_B = r(B, -\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad r_D = r(D, \pi)$$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de : a) $r_B \circ r_A$ et b) $r_D \circ r_A$

Remarques

- En général, la composée de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative ($r(A, \alpha) \circ r(B, \theta) \neq r(B, \alpha) \circ r(A, \theta)$).
- Toute rotation d'angle π est une symétrie centrale

III- **COMPOSEE DE DEUX HOMOTHETIES**

1- Composée de deux homothéties de même centre

Propriété

Soient h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' .

La composée $h \circ h'$ est l'homothétie de centre O et de rapport kk' .

Remarques.

On a : $h \circ h' = h' \circ h$

On dit que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports.

Exercices de fixation

Parmi les affirmations ci-dessous, indique celle qui est correcte.

A est un point du plan. La composée de l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est :

- a) Une rotation de centre A
- b) L'homothétie de centre A et de rapport $\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2}\right)$
- c) L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- d) L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

2 Composée de deux homothetiees de centres differents

Propriété

Soient $h(A, k)$ et $h'(B, k')$ deux homothéties de centres différents A et B .

- Si $kk' = 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une translation**.
- Si $kk' \neq 1$ alors la composée $h(A, k) \circ h'(B, k')$ est **une homothétie** de rapport kk' .

On dit que la composée de deux homothéties de centres différents est soit une homothétie, soit une translation.

Remarques

On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :

- 1) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par $h(A, k)$.
- 2) Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) des centres A et B est globalement invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O . Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE') .

Exercice de fixation

Exercice 1

ABC est un triangle. Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C , de rapports respectifs 2 et $\frac{3}{5}$. Justifie que $h \circ h'$ est une homothétie et précise son rapport

Remarques

- De manière générale, $h(A, k) \circ h(B, k') \neq h(B, k') \circ h(A, k)$
- On peut déterminer le vecteur de la translation ou le centre de l'homothétie de la manière suivante :
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une translation, son vecteur est $\overrightarrow{MM'}$ où M' est l'image d'un point quelconque M par $h(A, k) \circ h(B, k')$.
 - Si $h(A, k) \circ h(B, k')$ est une homothétie, soit O son centre.

Soit E un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB) et E' son image par $h(A, k) \circ h(B, k')$. La droite (AB) est invariante par $h(A, k) \circ h(B, k')$ donc elle contient le point O . Donc O est le point d'intersection des droites (AB) et (EE') .

IV- **Composée de deux symétries orthogonales**

1-composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites parallèles, $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ des symétries orthogonales d'axes respectives (D) et (D')

La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2OO'}$ où O est un point de (D) et O' le projeté orthogonal de O sur (D') .

Remarque

La composée $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2O'O}$

On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.

Exercice de fixation

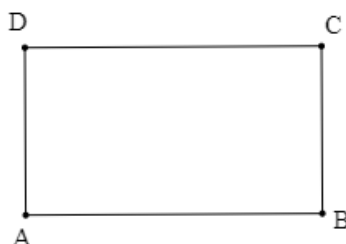
$ABCD$ est un rectangle

Donne la nature et l'élément caractéristique de chacune des composées suivantes :

a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$

b) $S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$

c) $S_{(AD)} \circ S_{(BC)}$



2-composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

On dit que la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation

Cas particulier : lorsque les axes (D) et (D') sont perpendiculaires en O, la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la symétrie centrale de centre O. On a $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_O$

Exercice de fixation

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Donne la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes :

a) $S_{(AA')} \circ S_{(AB)}$

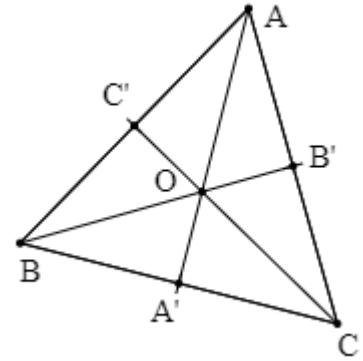
b) $S_{(AA')} \circ S_{(BB')}$

c) $S_{(CC')} \circ S_{(AB)}$

c) (CC') et (AB) sont sécantes en C' donc : $S_{(CC')} \circ S_{(AB)}$ est la

rotation de centre C' et d'angle $2(\widehat{C'B, C'C})$. Une mesure de

$2(\widehat{C'B, C'C})$ est π . $S_{(CC')} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre C et d'angle π



TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

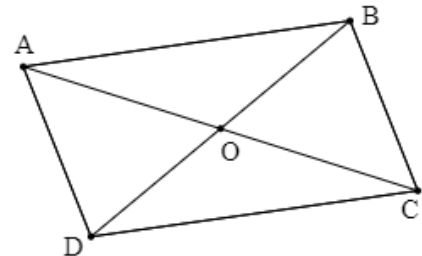
Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. Justifie que $h(A, 2) \circ h(D, \frac{1}{2})$ est une translation.

2. a) Déterminer $h(A, 2) \circ h(D, \frac{1}{2})(B)$

b) Détermine le vecteur de la translation

$h(A, 2) \circ h(D, \frac{1}{2})$.

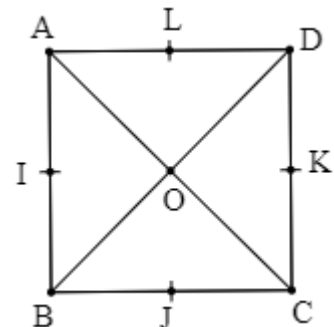


Exercice 2

Soit ABCD un carré de sens direct, de centre O. On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB]; [BC]; [CD] et [DA].

1. Justifie que $S_{(LJ)} \circ S_{(DC)}$ est une translation et précise son vecteur.

2. Démontre que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation et détermine son angle orienté.



Exercice 3

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les

rotations suivantes : $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$, $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$ et $r_3 = r(O, -\frac{\pi}{2})$

1) a) Détermine l'image du point C par $r_2 \circ r_1$.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$

2) Détermine l'image de la droite (BD) par $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) .

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-2; 3)$.

1) Détermine l'expression analytique la translation t .

2) Soit le point $E(4, -5)$. Détermine les coordonnées du point E' image de E par la translation t .

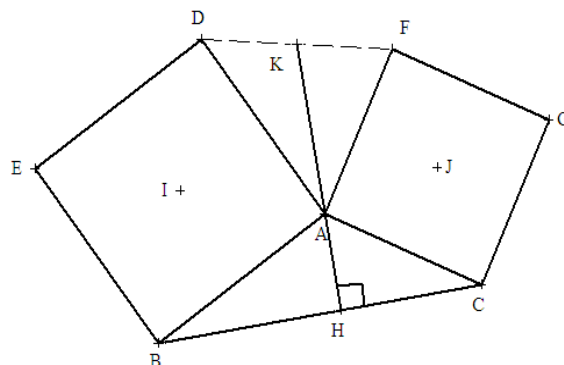
3) Soit (D) la droite d'équation : $-x + 3y + 2 = 0$

Détermine une équation de la droite (D') image de (D) par la translation t .

Exercice 5

Sur la figure ci-contre

- ABC est un triangle de sens direct ;
- $ABED$ et $ACGF$ sont les carrés construits extérieurement à ABC sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$.
- H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) .
- K est le milieu du segment $[FD]$
- I et J sont les centres respectifs des carrés $ABED$ et $ACGF$.



1. On considère les rotations r et r' de centres respectifs I et J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a) Détermine $r \circ r'(F)$ et $r'^{-1} \circ r^{-1}(D)$
 - b) Démontre que $r \circ r' = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$ où S_K est la symétrie centrale de centre K .
2. a) Justifie que l'image de la droite (AH) par $r'^{-1} \circ r^{-1}$ est la droite (AH) .
b) Dédus-en que les points K, H et A sont alignés.
3. Soit A' l'image de A par S_K .
 - a) Démontre que $A' = r(C) = r'^{-1}(B)$.
 - b) Détermine l'image de E par r et l'image de G par r'^{-1} .
 - c) Justifie que $(EC) \perp (A'B)$ et $(BG) \perp (A'C)$.
4. Dédus des questions 2-b et 3-c) que les droites $(EC), (BG)$ et (AH) sont concourantes..

Exercice 6 : Situation Complexe

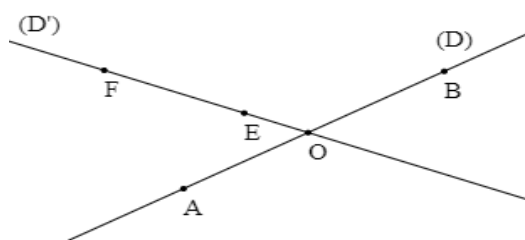
Des élèves de 1^{ère}C d'un lycée revenus d'un jeu de cracks, organisé par le conseil municipal, sur les mathématiques proposent à leurs camarades l'exercice suivant qu'ils n'ont pu résoudre: « Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites sécantes en O .

Il existe une l'homothétie h_A de centre A qui transforme O en B et il existe une l'homothétie h_O de centre O qui transforme F en E . Les points A, O, B, E et F sont tels que : $\frac{AB}{AO} \neq \frac{OF}{OE}$

Donne un programme de construction du centre de l'homothétie $h_A \circ h_O$. »

Tu fais partie des trois élèves du groupe compétiteur et tu veux relever le défi.

Donne la solution l'exercice proposé au jeu.



Compétence 2 :

Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données

Thème 1 : Organisation et traitements de données

LEÇON 17 : STATISTIQUES À UNE VARIABLE

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

L'équipe de course à pied d'un lycée a un nouvel entraîneur. Celui-ci vient de recevoir le tableau ci-dessous indiquant le temps mis par chacun des membres de l'équipe lors de la dernière épreuve de 10 km.

Nom	Temps (en min)
Agnero	53
Aka	51
Akalé	66
Allou	63
Amani	59
Ballo	61
Camara	48
Dago	41
Ehouman	47
Fallé	46

Nom	Temps (en min)
Goly	51
Gnali	60
Kassi	49
Koffi	46
Kouamé	44
Kouman	43
Lath	52
Lamine	39
Lohess	42
Manouan	53

Nom	Temps (en min)
Pakora	51
Sery	57
Seyo	62
Tiékkoura	50
Traoré	43
Vanié	47
Yao	48
Yéo	56
Zadi	49
Zatto	61

Soucieux d'améliorer les performances de l'équipe, l'entraîneur expose ses décisions suivantes à l'équipe.

« Je vais vous partager en cinq équipes de même effectif et de niveau équivalent (selon le temps mis lors de votre dernière épreuve).

Pour exposer les raisons de mon choix, je vais faire un affichage présentant une représentation graphique sous forme d'un histogramme.

Chacun des sportifs sera situé par rapport aux autres avec le classement, ainsi qu'une mise en évidence du premier quart, de la moitié et du troisième quart et des temps correspondants ».

Les élèves des classes de première scientifique faisant partie de l'équipe sont impatients de savoir dans quelles équipes ils seront et quelle est la situation de chacun par rapport aux autres.

Ils se mettent ensemble à organiser les données ci-dessus pour répondre à leurs préoccupations.

B. RESUME DE COURS

I. SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSES

1. Rappel

Lorsqu'il est question d'une série statistique regroupée en classes, on considère le tableau suivant :

Valeurs de X	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$[x_3; x_4[$	...	$[x_p; x_{p+1}[$	TOTAL
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p	N
Centre	c_1	c_2	c_3	...	c_p	

- L'amplitude de la classe $[x_i; x_{i+1}[$ est $x_{i+1} - x_i$
- Le centre $c_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$

2. Densité

Définition

On appelle densité d'une classe, le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

II. Caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes

1. Classe modale

Définition

On appelle classe modale toute classe dont la densité est maximale

Cas particulier :

Si toutes les classes ont la même amplitude, alors une classe modale est une classe dont l'effectif est maximal.

2. Moyenne

La moyenne d'une série statistique, notée : $\bar{x}$, est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i c_i}{N} = \frac{1}{N} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_p c_p)$$

En utilisant les fréquences, on a :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p f_i c_i = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots + f_p c_p$$

3. Médiane

Définition :

La médiane d'une série statistique continue est un nombre qui sépare les valeurs ordonnées de la série en deux familles de même effectif.

Autrement dit : c'est un nombre M tel qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Elle se détermine :

- Soit graphiquement : c'est l'abscisse du point de la courbe cumulative des effectifs (resp. fréquences) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5).

4. Quartiles

Définition :

Les valeurs de la série étant ordonnées :

- Le premier quartile, noté Q_1 , est la valeur de la variable telle que 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 et 75% lui sont supérieures.
- Le deuxième quartile Q_2 , est la médiane.
- Le troisième quartile, noté Q_3 , est la valeur de la variable telle que 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3 et 25% lui sont supérieures.

➤ Graphiquement,

- Q_1 correspond à 25% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
- Q_3 correspond à 75% de l'effectif sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.

III. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1. Histogramme

- L'histogramme d'une série statistique regroupée en classes est constitué de rectangles juxtaposés.
- L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (resp. la fréquence) de la classe correspondante.
- Les largeurs des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes des classes.
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes.

Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Modalité	[2 ; 3[	[3 ; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Amplitude					
Centre					
Densité					

a- Complète le tableau

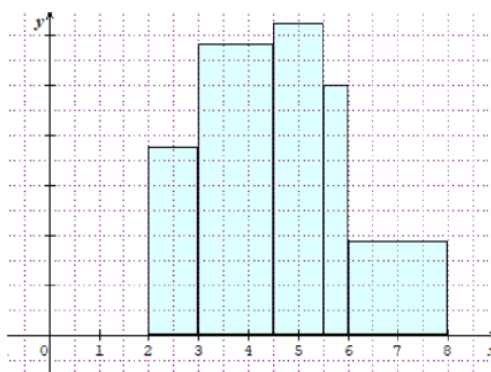
b- Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

2. Polygones des effectifs et des fréquences

Le polygone des effectifs (resp. fréquences) est obtenu en joignant les milieux successifs des côtés les plus hauts de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice de fixation

Construis le polygone des fréquences de la série statistique dont l'histogramme des fréquences est donné ci-dessous.



3. Courbes cumulatives

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; N]$ telle que :

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $(x_i) = N_i$ et $g(x_{i+1}) = N_{i+1}$, où N_i est l'effectif cumulé croissant de $[x_i; x_{i+1}[$ et N_{i+1} celui de $[x_{i+1}; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = N$.

La courbe cumulative des fréquences est la représentation graphique de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que :

- Si $x \leq x_1$, alors $F(x) = 0$
- Sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}[$ F coïncide avec la fonction affine g telle que $(x_i) = F_i$ et $g(x_{i+1}) = F_{i+1}$, où F_i est la fréquence cumulée croissante de $[x_i; x_{i+1}[$ et F_{i+1} celle de $[x_{i+1}; x_{i+2}[$
- Si $x \geq x_{p+1}$, alors $F(x) = 1$.

Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Classes	[2 ; 3[	[3 ; 4,5[	[4,5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquences	0,15	0,35	0,25	0,1	0,15
Fréquences cumulées	0,15	0,5	0,75	0,85	1

Construis la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

IV. CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIQUE REGROUPEES EN CLASSES

1. Variance

La variance d'une série statistique regroupée en classe, notée V , est donnée par la formule :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (c_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (c_p - \bar{x})^2 \right]$$

Autre formule :

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i c_i^2 \right) - (\bar{x})^2 = \frac{1}{N} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_p c_p^2) - \bar{x}^2$$

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

a- Justifions que la moyenne est 39,84

b- Calcule la variance de cette série.

2. Écart type

L'écart type d'une série statistique, noté $\sigma = \sqrt{V}$.

Interprétation

Plus l'écart type est plus élevé, plus la dispersion des valeurs autour de la moyenne est plus élevée.

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

3. Écart absolu moyen

L'écart absolu moyen, noté e_m , est le réel :

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |c_i - \bar{x}| = \frac{1}{N} (n_1 \times |c_1 - \bar{x}| + n_2 \times |c_2 - \bar{x}| + \dots + n_p \times |c_p - \bar{x}|).$$

Interprétation

L'écart moyen nous indique la distance moyenne entre la moyenne et les valeurs de la série statistique

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

Calcule l'écart absolu moyen de cette série et interprète le résultat.

4. Écart interquartile

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est le nombre $Q_3 - Q_1$.

Interprétation

50% des valeurs sont comprises entre le premier quartile et le troisième quartile .

Exercice de fixation

On a relevé, pour 125 élèves d'un lycée, le temps consacré à la pratique de sport par semaine. On obtient le tableau suivant :

Temps en (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 100[	[100 ; 140[	[140 ; 200[
Effectif	35	41	30	12	5	2

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Le tableau ci- dessous indique la répartition du salaire journalier (en milliers de francs CFA) des ouvriers d'une entreprise.

Salaire	[1; 2[	[2; 3[	[3; 5[	[5; 8[
Nombre d'ouvriers	34	76	51	39

1. Dans un tableau détermine la densité et l'amplitude de cette série statistique.
2. Construis l'histogramme des effectifs de cette série statistique.
3. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des polygones des effectifs cumulés décroissants.
4. a) Déduis graphiquement une valeur approchée de la médiane.
b) Détermine par le calcul une estimation de la médiane.

Exercice 2 : On donne la série statistique suivante :

Tranche d'âge (en année)	[0; 10[	[10; 15[	[15; 17[	[17; 20[
Effectif (n_i)	7	16	18	9

1. Dresse, en pourcentage, le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série.
2. Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.
3. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. a) Déduis graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près des quartiles de cette série statistique.
b) Détermine par le calcul une estimation des quartiles de cette série statistique.
(On donnera les résultats à l'arrondi d'ordre 1).
c) Calcule l'écart interquartile.

Exercice 3

On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant :

Classe	[1; 2[	[2; 4[	[4; 5[	[5; 6[	[6; 9[
Effectif	258	133	164	108	337

1. Construis les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Détermine le nombre d'individus dont la modalité est :
a) inférieure à 3 ; b) supérieure à 5,3 ; c) comprise entre 3 et 5,3
3. Calcule la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

Exercice 5

On considère la série statistique suivante :

Surface (en m ²)	[0; 10[	[10; 15[	[15; 17[	[17 ; 20[
Individu (x_i)	20	10	15	5

1. Détermine la classe modale et calcule la moyenne $\bar{x}$ de cette série.
2. Calcule les caractéristiques de dispersion de cette série.

Exercice 6 : SITUATION COMPLEXE

Le président du comité de gestion scolaire (COGES) de ton lycée veut acquérir une machine pour stocker sa récolte dans des sacs de 50 kg. Un commerçant lui propose deux machines, A et B, qu'il teste sur 80 sacs. Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

Classe	Machine A	Machine B	Classe	Machine A	Machine B
[49; 49,2[	7	4	[49,8; 50[	11	14
[49,2; 49,4[	6	6	[50; 50,2[	14	16
[49,4; 49,6[	14	9	[50,2; 50,4[	9	17
[49,6; 49,8[	14	11	[50,4; 50,6[	5	3

Un agent de l'agriculture du service qualité estime que la machine est bonne si les conditions suivantes sont simultanément réalisées :

- la moyenne $\bar{x}$ doit être comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart-type σ doit être inférieur à 0,5 kg ;
- l'intervalle [49,3; 50,5] doit contenir 85% des sacs.

Sollicité par un membre du bureau du COGES pour le choix de la machine convenable, tu décides de répondre à la préoccupation de leur président en utilisant tes connaissances en mathématiques.

CONSEILS

Pour tirer profit des Cours Par Anticipation (C.P.A) que nous organisons, il faut être conscient de l'enjeu. Ces cours sont faits afin de vous donner un aperçu de ce qui vous attend l'année scolaire prochaine. Le sérieux dans l'apprentissage et la concentration vous permettront de vous démarquer en cours d'année, c'est pourquoi nous vous demandons de prendre rendez-vous avec vous-mêmes après ces cours afin de planifier votre année scolaire. Être élève est un métier, prenez votre métier au sérieux afin d'être parmi les meilleur(e)s. Nous vous souhaitons plein de succès. !!!