



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE



Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2 A
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



Durée : 10 heures

Code :

COMPÉTENCE 1 : Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

THÈME 2 : Fonctions

Leçon 5 Généralités sur les fonctions

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE :

Un transporteur achète un nouveau véhicule pour agrandir son parc automobile.

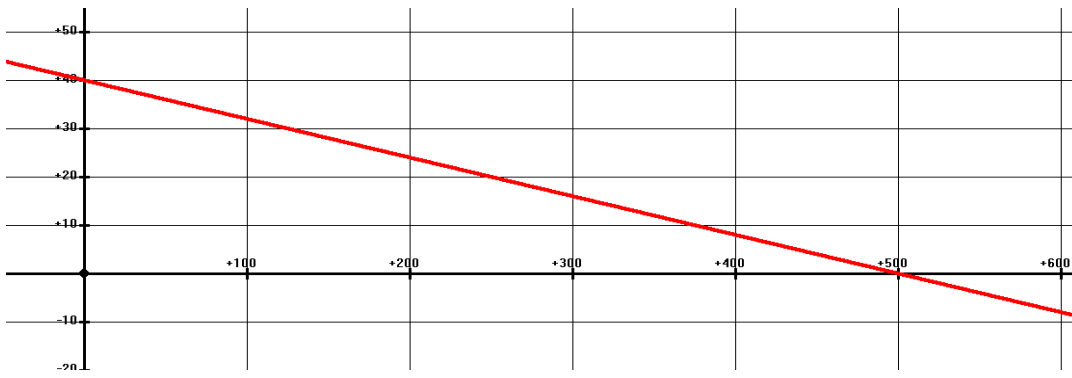
Afin de prévoir la rentabilité de son nouveau véhicule de transport, il souhaite déterminer la quantité d'essence nécessaire pour parcourir 300 km puis la distance maximale que peut parcourir le véhicule avec 10 litres d'essence.

En lisant la notice du constructeur, il découvre le graphique ci-dessous.

Le graphique représente la consommation en litre d'essence du véhicule en fonction de la distance parcourue en km.

Ne sachant pas comment utiliser ce graphique, il sollicite sa fille qui est élève en classe de seconde A.

Celle-ci soumet le problème à ses amis de classe et ensemble ils décident d'étudier les généralités sur les fonctions.



B. CONTENU DE LA LEÇON

I- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Notion de fonction

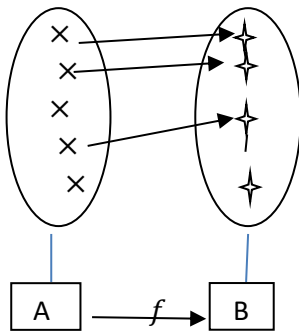
1.1 Définition

A et B sont deux ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B toute correspondance f qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.

On note : $f : A \rightarrow B$
 $x \mapsto f(x)$

et on lit : f est la fonction de A vers B qui, à x , associe $f(x)$



Exemple

L'application affine définie par : $f(x) = -2x + 5$ vue en classe de troisième est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

On écrit : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -2x + 5$

1.2 Vocabulaire

A est appelé l'**ensemble de départ** et B l'**ensemble d'arrivée** de f .

x est la **variable** et $f(x)$ l'image de x par f .

Lorsque v est l'**image** de u par f , on dit que u est un **antécédent** de v par f ; on écrit : $v = f(u)$.

Exemple : On considère la fonction f telle que :

$$f:]-2; 5] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$$

L'ensemble de départ de la fonction f est l'intervalle $]-2; 5]$ et son ensemble d'arrivée est l'ensemble \mathbb{R} .

L'image d'un élément x de l'intervalle $]-2; 5]$ par f est $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.

2- Ensemble de définition

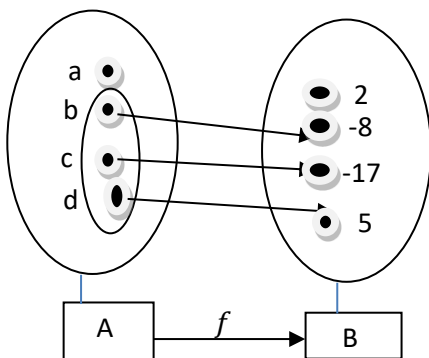
f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.

On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f .

On note généralement D_f l'ensemble de définition de f .

Exemple :

Soit la fonction f définie ci-dessous :



L'élément a n'a pas d'image par f .

Les éléments b, c et d ont une image par f .

Alors l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \{b; c; d\}$

3- Image et antécédents

3-1 Détermination de l'image d'un élément par une fonction définie par un tableau

Méthode :

Pour déterminer l'image d'un élément par une fonction définie par un tableau : On identifie l'élément à la première ligne du tableau et on lit à la deuxième ligne du tableau son image correspondante si elle existe.

Exemple

On considère la fonction f à variable x définie par le tableau suivant :

x	c	h	m	a	p	z
$f(x)$	3	8	13	1		26

L'image de m par f est 13, on écrit $f(m) = 13$

On a aussi $f(a) = 1$ et $f(h) = 8$.

p n'a pas d'antécédent par f

3-2 Détermination de l'image d'un réel par une fonction définie par une formule explicite

Méthode :

Pour déterminer l'image d'un réel a par une fonction définie par une formule explicite, on vérifie si a appartient à l'ensemble de définition de la fonction et on remplace dans la formule explicite, l'inconnue (généralement x) par a et on effectue les calculs.

Exemple

On considère la fonction g de $[-2; 6[$ vers \mathbb{R} définie par $g(x) = x^2 - 2x$.

On admet que : $D_g = [-2; 6[$

Calcule l'image de chacun des nombres : 5, 8 et -2 par g .

Réponse

$5 \in D_g$ et $g(5) = 5^2 - 2(5) = 25 - 10 = 15$. 15 est donc l'image de 5 par g et on note $g(5) = 15$.

$-2 \in D_g$ et $g(-2) = (-2)^2 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$; donc $g(-2) = 8$.

$8 \notin D_g$ donc 8 n'a pas d'image par g .

3-3 Détermination de l'image d'un réel par une fonction définie par sa représentation graphique

Méthode :

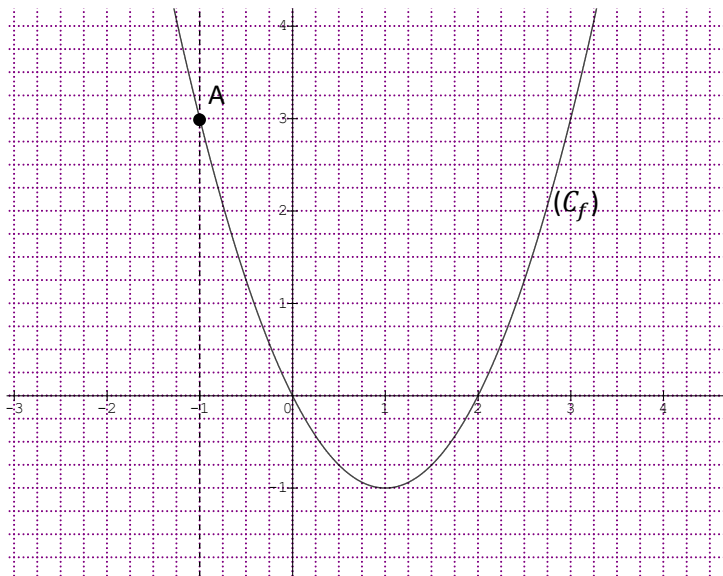
Lorsqu'on a la courbe représentative d'une fonction f , pour déterminer graphiquement l'image du réel a par la fonction f :

On trace la droite d'équation $x = a$ et on détermine le point d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f .

- Si ce point n'existe pas, alors a n'a pas d'image par f .
- Si ce point existe, alors l'ordonnée de ce point est l'image de a par f .

Exemple

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , dont la représentation graphique notée (C_f) est donnée ci-dessous.



Détermine graphiquement l'image de chacun des nombres suivants : -1 ; 2 et 3.

Réponse

La droite d'équation $x = -1$ coupe (C_f) au point A. L'ordonnée de A est 3, donc l'image de -1 par f est 3.

Par un procédé similaire, on a : l'image 2 est 0 et l'image 3 est 3.

3-4 Détermination des antécédents d'un nombre réel par une fonction définie par une formule explicite

Méthode :

Pour déterminer l'antécédent ou les antécédents d'un nombre réel b par une fonction g définie par une formule explicite :

-On résout l'équation $g(x) = b$,

-On vérifie si la ou les solutions trouvées sont éléments de l'ensemble de définition de g puis on conclut.

Exemple

On considère la fonction g de $[-2; 2[$ vers \mathbb{R} définie par $g(x) = x^2 - 2x$.

On admet que : $D_g = [-2; 2[$

Détermine le ou les antécédents éventuels de 3 par g .

Réponse

On résout l'équation $f(x) = 3$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 + 2)(x - 1 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$

$-1 \in D_g$ et $3 \notin D_g$, donc l'antécédent de 3 par g est -1 .

3-5 Détermination des antécédents d'un nombre réel par une fonction définie par sa représentation

graphique

Méthode :

Pour déterminer graphiquement l'antécédent ou les antécédents d'un nombre réel b par f :

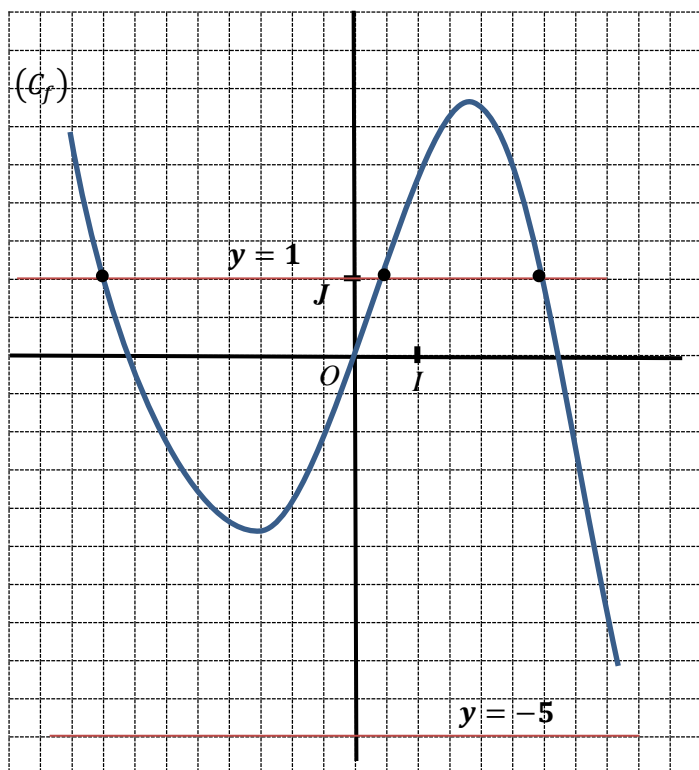
On trace la droite d'équation $y = b$ et on détermine les points d'intersections avec la courbe représentative de f .

- Si ces points n'existent pas alors b n'a pas d'antécédent par f .

- Si ces points existent, leurs abscisses respectives sont les antécédents de b par f .

Exemple

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , dont la représentation graphique notée (C_f) est donnée ci-dessous.



Détermine graphiquement l'antécédent ou les antécédents de chacun des nombres suivants : 1 et -5.

Réponse

- La droite d'équation $y = 1$ coupe (C_f) en trois points : A, B et C . Les abscisses respectives des points A, B et C sont $-4 ; 0,5$ et 3 . Donc les antécédents de 1 par f sont $-4 ; 0,5$ et 3 .
- La droite d'équation $y = -5$ ne coupe pas (C_f) , donc -5 n'a pas d'antécédent par f .

4 - Sens de variation, tableau de variation et extremums d'une fonction sur un intervalle borné

4.1- Sens de variations et tableau de variations d'une fonction

Définitions

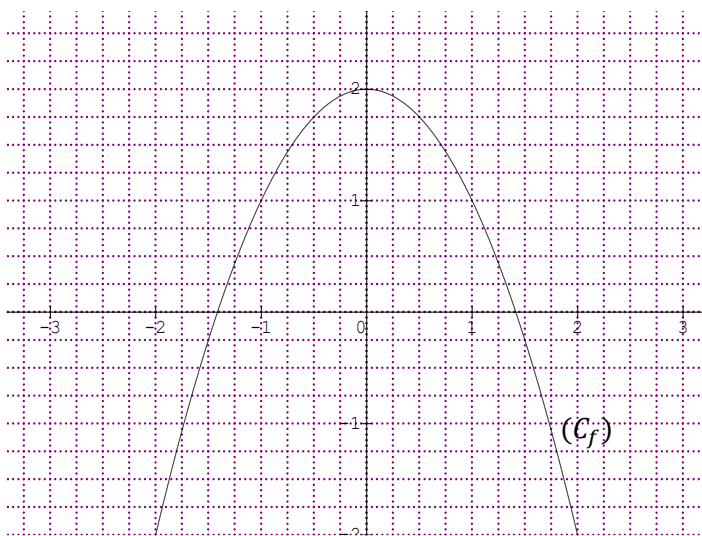
Soit f une fonction définie sur un intervalle borné I .

- On dit que f est croissante sur I lorsque, pour tous éléments a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est strictement croissante sur I lorsque, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I lorsque, pour tous éléments a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- On dit que f est strictement décroissante sur I lorsque, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
- On dit que f est monotone sur I lorsque f est croissante ou décroissante sur I .
- On dit que f est strictement monotone sur I lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .
- On dit que f est constante sur I lorsque, pour tous éléments a et b de I , on a $f(a) = f(b)$.

Exemple :

On donne la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = 2 - x^2$.

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction.



On constate graphiquement que :

- Lorsque x croît dans l'intervalle $[-2 ; 0]$, $f(x)$ son image par f prend des valeurs de plus en plus grande. On dit que fonction f est croissante sur $[-2 ; 0]$.
- Lorsque x croît dans l'intervalle $[0 ; 2]$, $f(x)$ son image par f prend des valeurs de plus en plus petite. On dit que fonction f est décroissante sur $[0 ; 2]$.
- $-2 \in [-2 ; 0]$ et $1 \in [-2 ; 0]$, comme $-2 \leq 1$ alors $f(-2) \leq f(1)$ car f est croissante sur $[-2 ; 0]$.
- $1 \in [0 ; 2]$ et $1,5 \in [0 ; 2]$, comme $1 \leq 1,5$ alors $f(1) \geq f(1,5)$ car f est décroissante sur $[0 ; 2]$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-2	0	2
$f(x)$		$f(0)$	
	$f(-2)$		$f(-2)$

Comme $f(-2) = f(2) = -2$ et $f(0) = 2$, le tableau de variation de f est :

x	-2	0	2
$f(x)$		2	
	-2		-2

4.2 - Extremum d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle borné I et a un élément de I .

- Lorsque pour tout élément x de I , $f(x) \leq f(a)$ alors, $f(a)$ est le maximum de f sur I .
- Lorsque pour tout élément x de I , $f(x) \geq f(a)$ alors, $f(a)$ est le minimum de f sur I .
- On appelle extremum de f sur I , le maximum ou le minimum s'ils existent de f sur I .

Exemple 1 :

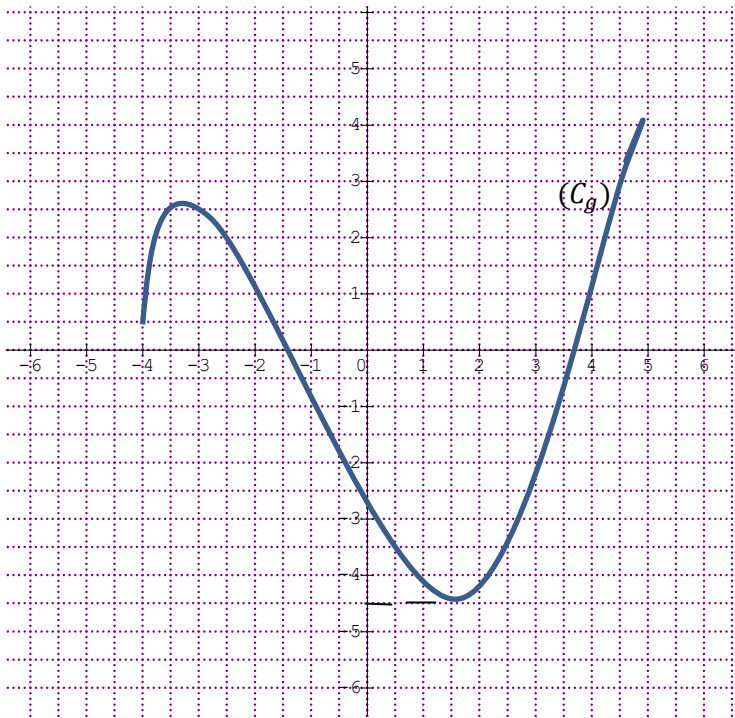
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f , définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = 2 - x^2$.

x	-2	0	2
$f(x)$		2	
	-2		-2

2 est le maximum de f sur $[-2 ; 2]$, car pour tout élément x de $[-2 ; 2]$, $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) = 2$.
2 est un extremum de f sur $[-2 ; 2]$.

Exemple 2 :

On donne ci-dessous la courbe représentative (C_g) de la fonction g , définie sur $[-4 ; 5]$.



$-4,5$ est le minimum de f sur $[-4 ; 5]$, car pour tout élément x de $[-4 ; 5]$, $f(x) \geq f(1,5)$ et $f(1,5) = -4,5$.

$-4,5$ est un extremum de f sur $[-4 ; 5]$.

II- Résolution graphique d'équations et d'inéquations

1- Résolution graphique d'équation

Méthode

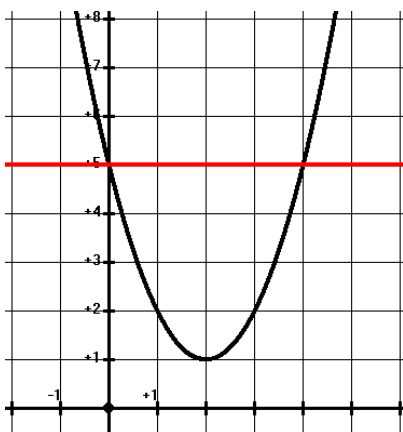
Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$

-On trace la droite d'équation $y = k$ et on cherche les points d'intersections avec la courbe représentative de f

-Si ces points existent, leurs abscisses respectives sont les solutions de l'équation $f(x) = k$

Exemple

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = (x-2)^2 + 1$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Résous graphiquement l'équation : $f(x) = 5$.

Réponse

La droite d'équation $y = 5$ coupe la courbe représentative de f en deux points dont les abscisses sont 0 et 4.

Les solutions de l'équation $f(x) = 5$ sont : 0 et 4.

2- Résolution graphique d'inéquation

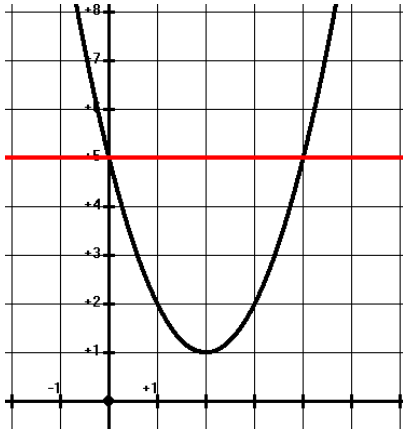
Méthode

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ (respectivement $f(x) > k$)

-On trace la droite (D) d'équation $y = k$

La solution de l'inéquation $f(x) < k$ (respectivement $f(x) > k$) est la réunion de tous les intervalles contenant les abscisses des points de la courbe (C_f) situés au-dessous (respectivement au-dessus) de (D)

Exemple : On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = (x-2)^2 + 1$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Résous graphiquement l'inéquation $f(x) > 5$

Réponse

La droite d'équation $y = 5$ coupe la courbe représentative de f en deux points dont les abscisses sont 0 et 4.

Les abscisses des points situés au-dessus de la droite d'équation $y = 5$ sont : $] \leftarrow; 0[\cup] 4; \rightarrow [$. Donc l'ensemble solutions de l'inéquation $f(x) > 5$ est : $] \leftarrow; 0[\cup] 4; \rightarrow [$

C. SITUATION COMPLEXE

Un entrepreneur désire ouvrir une station d'essence. Après conseil auprès d'un conseiller financier, celui-ci affirme : Pour ce type de station, pendant la première année d'ouverture, l'affluence des clients en fonction des x journées est définie par la fonction :

$$f: [1; 360] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 20x - \frac{1}{4}x^2$$

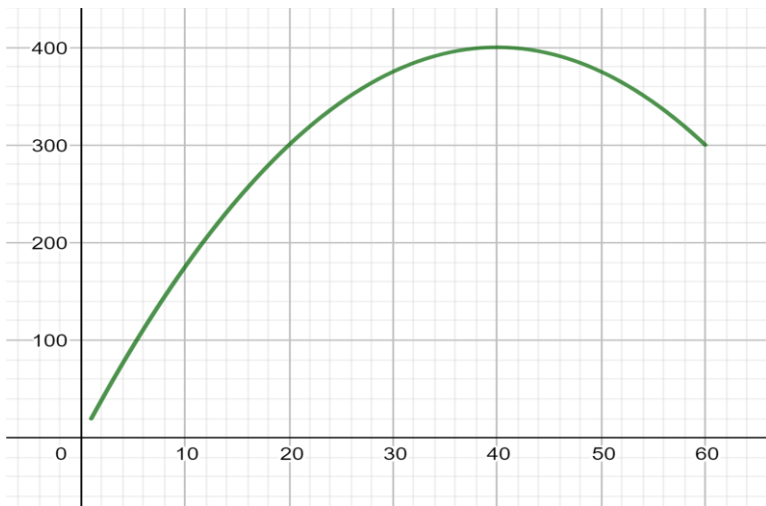
Afin de lui permettre de déterminer aisément son jour de plus grande affluence pour prévoir un stock conséquent, il lui remet la représentation graphique de la fonction f . Par inadvertance, il range cette courbe dans un dossier en contenant une autre.

Au moment de déterminer ce jour d'affluence, il constate deux courbes.

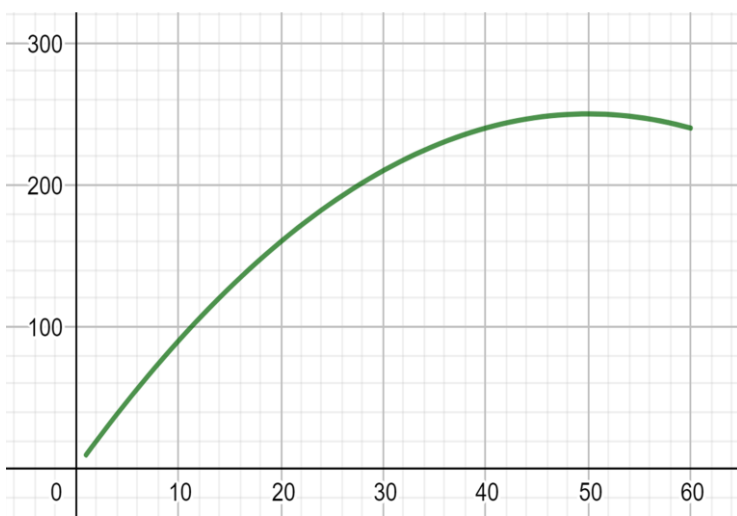
Ne sachant distinguer les deux courbes, il demande à son fils qui est élève en seconde A de l'aider à déterminer le jour d'affluence.

Son fils qui est ton voisin de classe te sollicite.

A l'aide d'une démarche argumentée, apporte une solution à la préoccupation de ton voisin.



COURBE 1



COURBE 2

Réponse

Pour répondre à la préoccupation de mon voisin, je vais utiliser des notions de fonctions.

Pour cela, je vais :

- Pour chaque courbe déterminer graphiquement l'image d'un même nombre ;
- Déterminer l'image de ce même nombre en utilisant la formule explicite de f ;
- Comparer les images trouvées pour identifier la bonne courbe ;
- Utiliser la bonne courbe pour déterminer la valeur pour laquelle le maximum de la fonction f est atteint ;
- Proposer une solution à mon voisin.

- Déterminons graphiquement l'image d'un nombre convenablement choisi

- Pour la courbe 1, l'image du nombre 20 est 300

- Pour la courbe 2, l'image du nombre 20 est 160

- Déterminons l'image du nombre 20 en utilisant la formule explicite de f

$$f(20) = 20(20) - \frac{1}{4}(20)^2 = 300$$

- Comparons les images trouvées

L'image de 20 par la courbe 1 correspond à l'image de 20 obtenue en utilisant la formule explicite de f , donc la représentation graphique de f est la courbe 1.

- Détermination de la valeur pour laquelle le maximum de la fonction f est atteint

Par lecture graphique, de la courbe représentative de f , le maximum de f est 400 et il est atteint pour $x = 40$.

- Proposons une solution à mon voisin

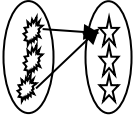
Le jour de plus grande affluence pendant les deux premiers mois est le 40-ième jour à compter de l'ouverture.

1) Exercices de fixation

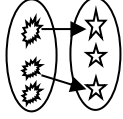
Exercice 1

Dans les cas ci-dessous, dis si la correspondance est une fonction ou non

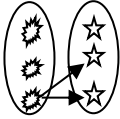
Cas 1



Cas 2



Cas 3



Réponse

Cas 1 : la correspondance est une fonction

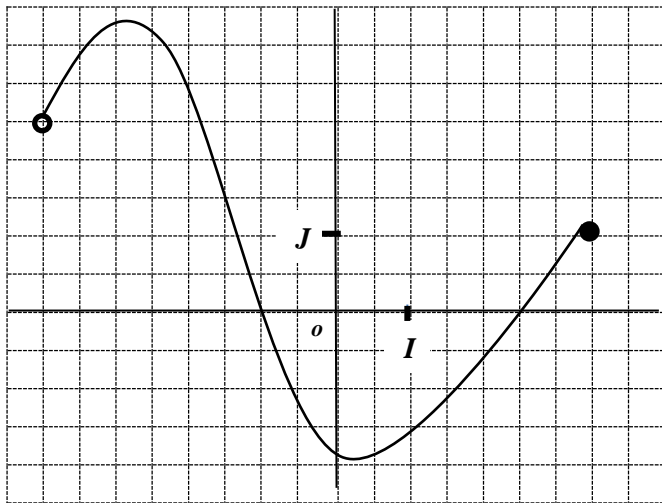
Cas 2 : la correspondance est une fonction

Cas 3 : la correspondance n'est pas une fonction

Exercice 2

Soit (C_f) la représentation graphique de f .

Observe le schéma ci-dessous et déterminer l'ensemble de définition de f



Réponse

$$D_f =]-4; 3,5]$$

2-Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 3

Soit l'ensemble $A = \left\{ -1; \frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 0; 4 \right\}$

et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-2x+7}}$$

1- Calcule si possible $f(-1); f\left(\frac{7}{2}\right); f\left(\frac{3}{2}\right); f(0)$ et $f(4)$

2- Détermine l'ensemble de définition de f

Réponse

1- Calculons si possible $f(-1)$; $f\left(\frac{7}{2}\right)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f(0)$ et $f(4)$

- $f(-1) = \frac{1}{\sqrt{-2 \times (-1) + 7}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$
- $\frac{7}{2}$ n'a pas d'image par f car $\sqrt{-2 \times \left(\frac{7}{2}\right) + 7} = 0$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{-2 \times \left(\frac{3}{2}\right) + 7}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
- $f(0) = \frac{1}{\sqrt{-2 \times (0) + 7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$
- 4 n'a pas d'image car $-2 \times 4 + 7 = -1 < 0$

2- L'ensemble de définition de f est $D_f = \left\{-1; \frac{3}{2}; 0\right\}$

Exercice 4

Soit f la fonction de A vers B définie par le tableau ci-dessous

x	-5	-2	0	1	2	4
$f(x)$	4	0	-5	4	1	0

- 1- Détermine les images par f de -2 ; 0 et 4
- 2- Détermine les antécédents par f de 0 ; 4 et -5

Réponse

- 1- $f(-2) = 0$; $f(0) = -5$; $f(4) = 0$
- 2- Les antécédents de 0 par f sont : -2 et 4
 Les antécédents de 4 par f sont : -5 et 1
 L'antécédents de -5 par f est : 0

Exercice 5

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = -x + 3$

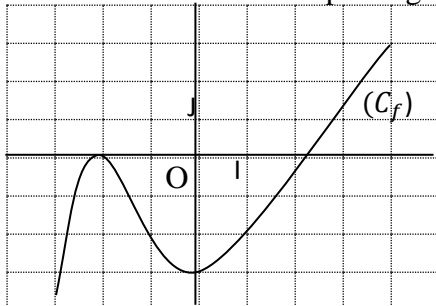
Détermine l'image par f de chacun des nombres suivants : -3 ; 0 et 5.

Réponse

$f(-3) = -(-3) + 3 = 6$; $f(0) = -(0) + 3 = 3$; $f(5) = -(5) + 3 = -2$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par le graphique ci-dessous.



Par lecture graphique , détermine l'image par f de chacun des nombres suivants : -2 ; -1 ; 0 et 4.

Réponse

$$f(-2) = 0 \quad ; \quad f(-1) = -2 \quad ; \quad f(0) = -3 \quad ; \quad f(4) = 3$$

Exercice 7

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x^2 - 1$

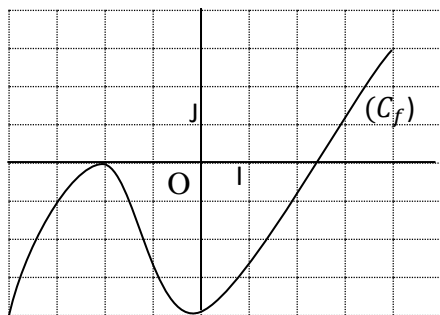
Détermine le ou les antécédents éventuels par f de chacun des nombres suivants : -3 et 0 .

Réponse

- Le ou les antécédents éventuels de -3 .
Posons : $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = -3 \Leftrightarrow x^2 = -2$ impossible. On conclut que -3 n'a pas d'antécédents par f .
- Le ou les antécédents de 0 par f .
Posons : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. On conclut que les antécédents de 0 sont 1 et -1

Exercice 8

Soit f la fonction définie par le graphique ci-dessous.



Par lecture graphique , détermine les antécédents par f de chacun des nombres suivants : -4 ; 0 et 1

Réponse

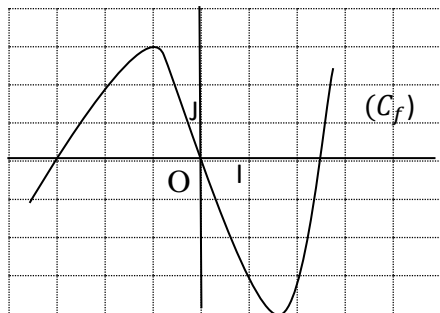
Les antécédents par f de -4 sont : 0 et -4

Les antécédents par f de 0 sont -2 et $2,4$

L'antécédent par f de 1 est : 3

Exercice 9

Soit f la fonction définie par le graphique ci-dessous.



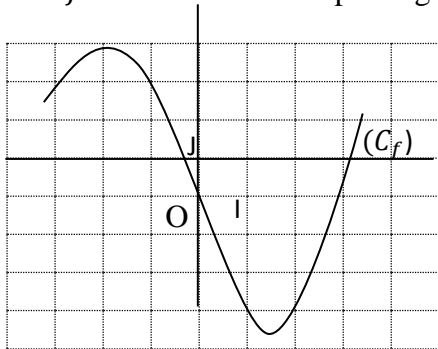
- 1) Détermine les extremums de f
- 2) Résous graphiquement les équations suivantes :
 $f(x) = -3$; $f(x) = 0$; $f(x) = 4$

Solution :

- 1) -4 est le minimum de f et 3 est le maximum de f donc les extremums de f sont 3 et -4
- 2) Résolvons graphiquement $f(x) = -3$ et $f(x) = 0$
 - **Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$**
 -On trace la droite d'équation $y = -3$ et on cherche les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f .
 -Il y a deux points d'intersection, leurs abscisses approximatives sont 1 et 2 .
 Les solutions de l'équation $f(x) = -3$ sont 1 et 2 .
 - **Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$**
 -On cherche les points d'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe représentative de f .
 -Il y a trois points d'intersection, leurs abscisses approximatives sont -3 ; 0 et $2,5$.
 Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -3 ; 0 et $2,5$.
 - **Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$**
 -On trace la droite d'équation $y = 4$ et on cherche les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f .
 -Il y a aucun points d'intersection.
 L'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution

Exercice 10

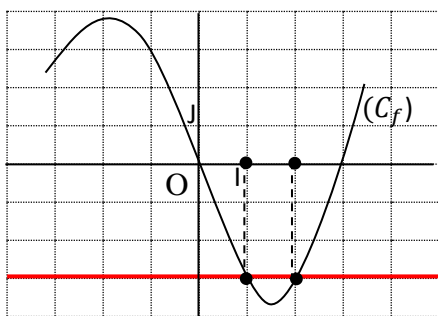
Soit f la fonction définie par le graphique ci-dessous.



Résous graphiquement les inéquations suivantes :
 $f(x) \geq -3$; $f(x) < 0$

Réponse

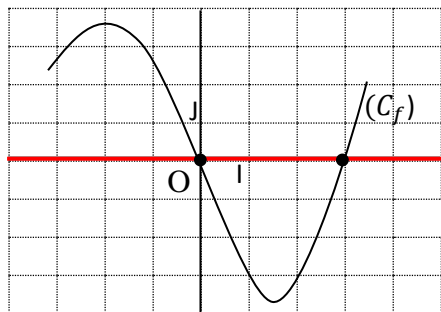
✓ $f(x) \geq -3$



On trace la droite d'équation $y = -3$. Les points de la courbe représentative de f situés au-dessus de la droite d'équation $y = -3$ ont leurs abscisses appartenant à la réunion d'intervalles : $]←; 1] \cup [2; →[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq -3$ est la réunion l'intervalle : $]←; 1] \cup [2; →[$

✓ $f(x) < 0$



On en déduit de la figure ci-dessus que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'intervalle : $]←; 0] \cup [3; →[$