MINISTÈRE DE L'EDUCATION
NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 08 heures Code :

COMPETENCE 1 : **Traiter une situation relative au calculs algébriques et aux fonctions**

THEME 2 : **Fonctions**

Leçon 6 : **ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES**

A-SITUATION D’APPRENTISSAGE

Pour une bonne production agricole un cultivateur veut connaitre la pluviométrie de sa région. Il se rend à la station météo de la ville où on lui remet les prévisions relatives à l’évolution de la pluviométrie en fonction des douze mois de l’année.

Ces prévisions se présentent comme suit : $\begin{cases} pour\ x \in [1;5], h(x) = 2x \\ pour\ x \in]5;8], h(x) = 1{,}5 \\ pour\ x \in]8;12], h(x) = -x + 10 \end{cases}$

où x désigne le rang du mois de l’année et $h(x)$ désigne en millimètre la quantité de pluie attendue.

Ne sachant pas interpréter ces données, il demande à son fils élève en classe de seconde A, de l’aider à identifier la période où la pluviométrie est constante. Ce dernier sollicite ses camarades de classe. Ensemble ils décident de faire des recherches sur l’étude de fonctions élémentaires.

B-CONTENU DE LA LEÇON

I-Fonctions affines et fonctions linéaires :

1- Définitions

- On appelle **fonction affine**, toute fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur ℝ par :$g(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.
- On appelle **fonction linéaire**, toute fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur ℝ par :$f(x) = ax$ où a est un nombre réel.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 21x - 15$ est une fonction affine et la fonction g définie par $g(x) = -93x$ est une fonction linéaire.

Remarques

- Toute fonction linéaire est une fonction affine.
- Dans le plan muni d’un repère, la représentation graphique d’une fonction affine f définie par : $f(x) = ax + b$ est la droite (D) d’équation : $y = ax + b$.
- La représentation graphique d’une fonction linéaire qui n’est pas une fonction affine est une droite qui passe par l’origine du repère.

2-Etude d’une fonction affine

2.1-Ensemble de définition

Toute fonction affine est définie sur ℝ.

2.2-Sens de variation d'une fonction affine :

Propriétés

Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

f est croissante si et seulement si $a > 0$

f est décroissante si et seulement si $a < 0$

f est constante si et seulement si $a = 0$

Exercice de fixation

Etudie les variations de chacune des fonctions affines suivantes :

$f(x) = 2x - 5;\quad g(x) = -3x + 7\ ;\quad h(x) = -2021$

Corrigé

f est croissante car 2 > 0 ; g est décroissante car -3 < 0 et h est constante car a = 0

3- Fonctions affines par intervalles :

3.1- Définitions :

On appelle **fonction affine par intervalles,** toute fonction numérique f d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels l'expression de f est celle d'une fonction affine.

Exemple

La fonction f définie par : $\begin{cases} si\ x \in [-3; 0[, f(x) = 2x + 1 \\ si\ x \in [0; 2[, f(x) = 5 \end{cases}$ est une fonction affine par intervalle.

3.2-Représentation graphique d'une fonction affine par intervalles :

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalle dans le plan muni d'un repère est une réunion de segments ou de demi-droites.

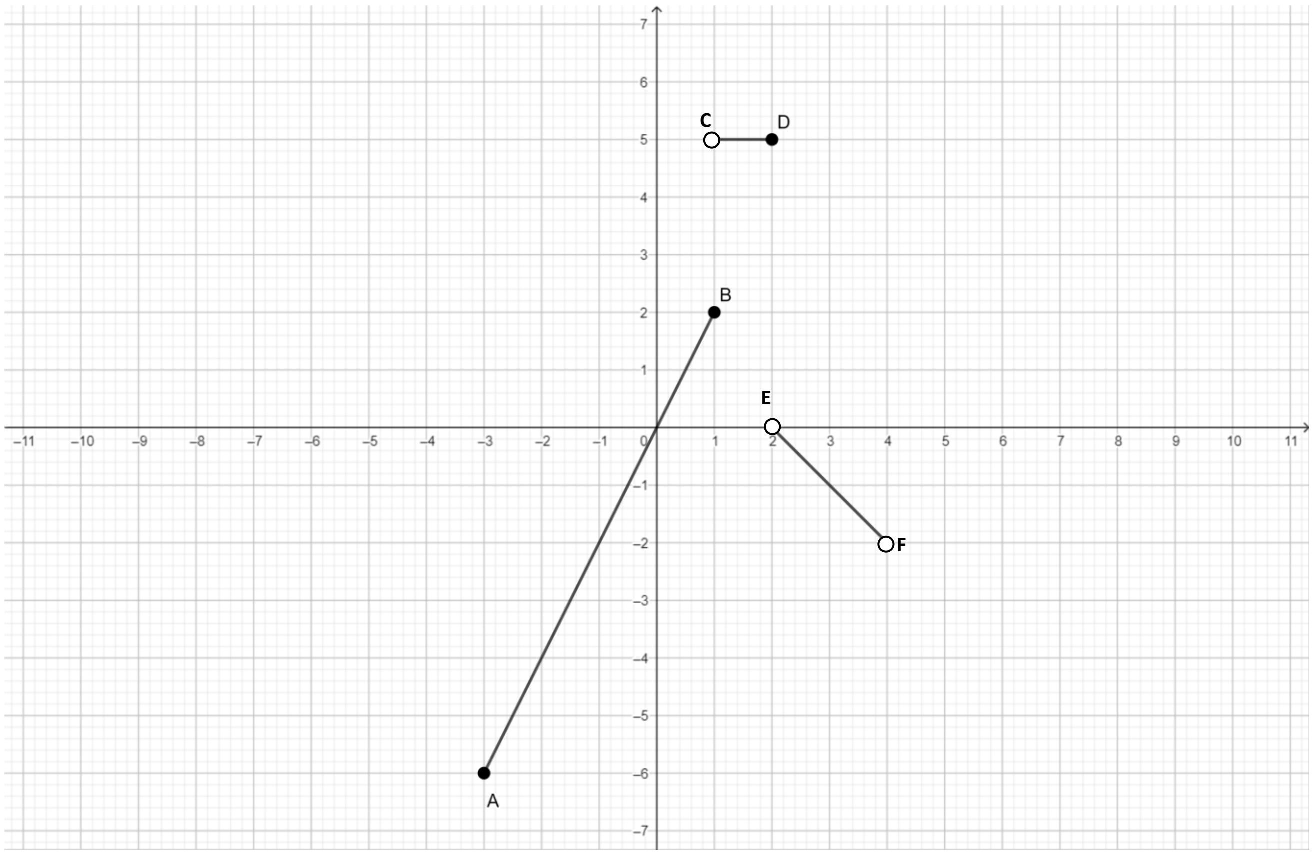
Exemple

On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} pour\ x \in [-3; 1], h(x) = 2x \\ pour\ x \in]1; 2], h(x) = 1{,}5 \\ pour\ x \in]2; 4[, h(x) = -x + 2 \end{cases}$$

Représentons graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[-3; 4[$

La représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-3; 4[$ est donné dans le repère ci-dessous où le segment $[AB]$ est la représentation graphique de h sur $[-3; 1]$, $[CD]$ est la représentation graphique de h sur $]1; 2]$ et $[EF]$ est la représentation graphique de h sur $]2; 4[$.



II-Etude de quelques fonctions élémentaires :

1- La fonction $\boldsymbol{f : x \mapsto x^2}$

1.1- Ensemble de définition

La fonction $\boldsymbol{f : x \mapsto x^2}$ est définie sur IR

1.2- Sens de variations

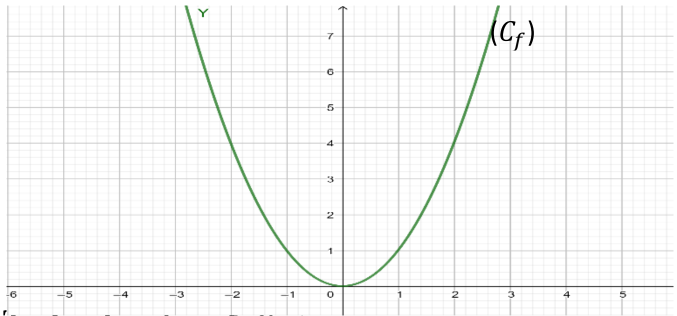
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[.

1.3- Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

1.4- Représentation graphique

La courbe représentative de f est donné dans le tableau ci-dessous.



2- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

2.1- Ensemble de définition

La fonction $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ est définie sur]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[

2.2- Sens de variations

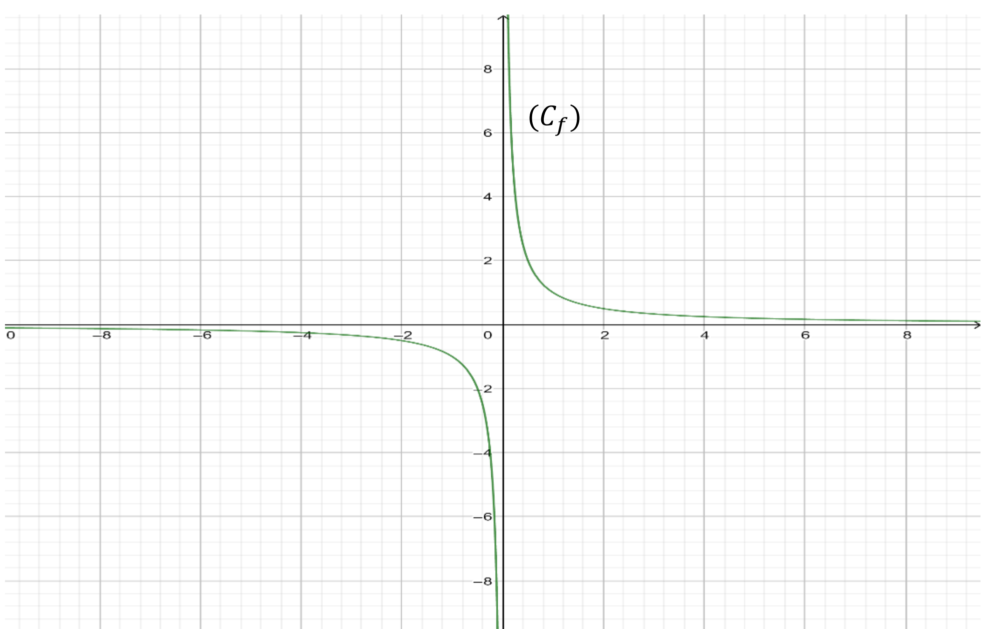
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur]-∞ ; 0[et décroissante sur]0 ; +∞[.

2.3- Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

2.4- Représentation graphique

La courbe représentative de f est donné dans le tableau ci-dessous.



C- SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une expérience dans le laboratoire de physique avec votre classe, un projectile lancé pendant 3 secondes sur un coussin d'air parcourt la trajectoire déterminée par la fonction $f(x) = x^2$ où x désigne le temps en seconde.
Le professeur demande aux élèves d'étudier le mouvement du projectile à la maison, pour une interrogation le lendemain.
En te servant de tes leçons de mathématiques vus en classe, prépare-toi pour l'interrogation du lendemain.

Réponse

Pour me préparer pour l'interrogation en sciences physiques du lendemain, je vais utiliser des notions d'étude de fonctions élémentaires.

Pour cela, je vais :

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
- Déterminer le sens de variations de f
- Dresser le tableau de variations de f
- Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$
    - Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f
      L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$
    - Déterminons le sens de variations de f
      f est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[.
    - Dressons le tableau de variations de f

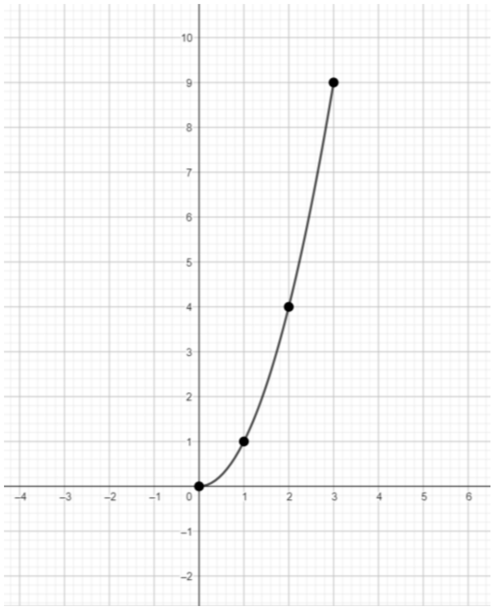
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$

- Tableau de valeurs

x	0	1	2	3
$f(x)$				

- Représentation graphique



D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule des réponses proposées est juste. Ecris la lettre correspondant à la bonne réponse.

Affirmations	Réponses		
	a	b	c
1-Parmi les trois fonctions proposées, la seule qui est une fonction linéaire est :	$g(x) = -4x + 1$	$g(x) = 5(-2 + x)$	$g(x) = \frac{-7}{9}x$
2-Parmi les trois fonctions proposées, la seule qui est une fonction affine est :	$p(x) = -\frac{11}{3}$	$p(x) = \sqrt{2x - 3}$	$p(x) = -1 + \frac{6}{x}$
3-la fonction définie par : $f(x) = -3 + 8x$ est	Une fonction linéaire	Une fonction affine	Une fonction ni linéaire, ni affine.

Corrigé

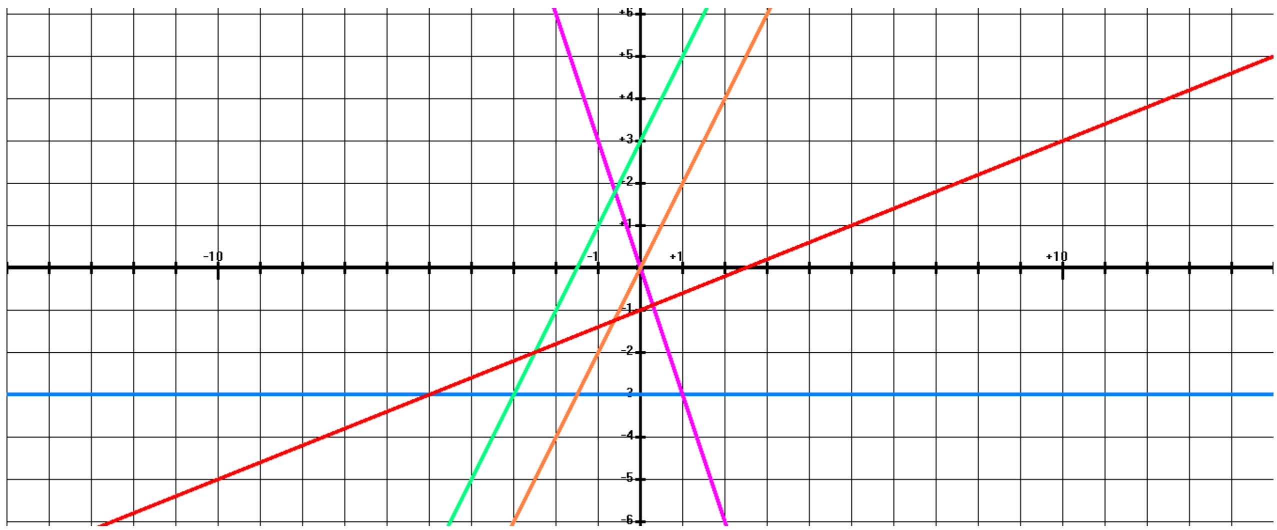
1-c

2-a

3-b

Exercice 2

Parmi les droites suivantes, nomme par leur couleur celles qui sont des représentations graphiques de fonctions linéaires :



Corrigé

-la droite orange et la droite violet passent par l'origine du repère, elles sont donc des représentations graphique de fonction linéaires

Exercice 3

On considère les fonctions h et g définies de IR vers IR respectivement par :

$h(x) = -5x + 4$ et $g(x) = \frac{2}{7}x$.

Réponds par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations du tableau suivant :

Affirmations	**Réponses**
1-La fonction h est croissante sur IR.	
2-La fonction h est croissante sur [-2 ;2].	
3-La fonction g est croissante sur IR.	

4-La fonction g est croissante sur [0 ;8].	

Corrigé

1- Faux
2- Faux
3- Vrai
4- vrai

Exercice 4

Détermine le sens de variation de chacune des fonctions affines ci-dessous:

$f(x) = x - 1$; $h(x) = -3x$; $p(x) = \frac{22}{3}$; $m(x) = -\frac{13}{2}x - 8$

Corrigé

- f est croissante sur $\mathbb{R}$
- h est décroissante sur $\mathbb{R}$
- p est constante sur $\mathbb{R}$
- m est décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 5

Parmi les fonctions suivantes, coche celle qui est une fonction affine par intervalles.

a) $\begin{cases} f(x) = -3x + 2 \; si \; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 7 \; si \; x < 1 \end{cases}$ ☐

b) $g(x) = -8(x + 11)$ ☐

c) $\begin{cases} h(x) = x - 1 \; si \; x \geq 2 \\ h(x) = -\frac{1}{3}x + 4 \; si \; x < 2 \end{cases}$ ☐

Corrigé

a) $\begin{cases} f(x) = -3x + 2 \; si \; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 7 \; si \; x < 1 \end{cases}$

b) $g(x) = -8(x + 11)$ ☐

c) $\begin{cases} h(x) = x - 1 \; si \; x \geq 2 \\ h(x) = -\frac{1}{3}x + 4 \; si \; x < 2 \end{cases}$ ☐

2-Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 6

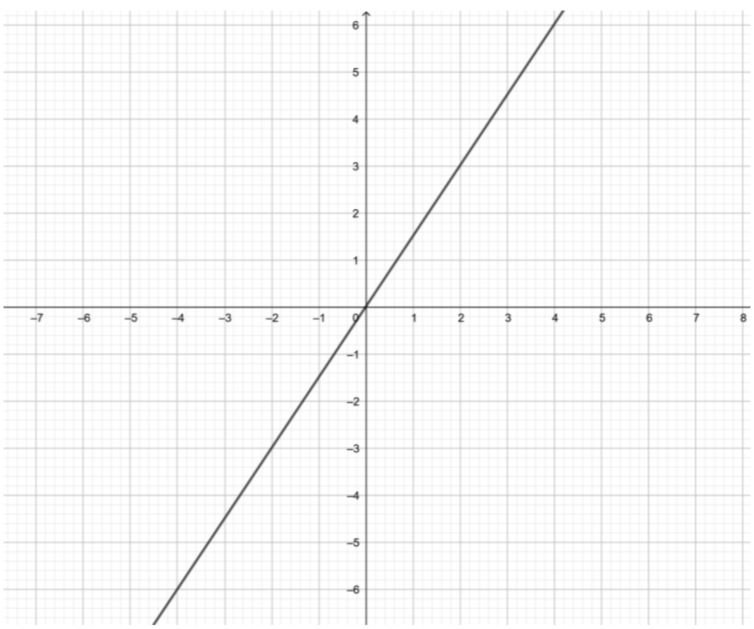
Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

On considère la fonction f définie de [-5 ;7] vers IR par : $f(x) = \frac{3}{2}x$

Construis la représentation graphique de f dans le repère précédent.

Corrigé

La représentation graphique de la fonction f est la droite passant par l'origine et le point de coordonné (2 ;3)



Exercice 7

On considère la fonction affine g définie par $g(x) = -x + 5$

a) Détermine le sens de variation de g
b) Dresse le tableau de variation de g
c) Complète le tableau de valeurs ci-contre :

x	-1	0	1	2
$g(x)$				

Corrigé

a) Sens de variation
La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$

b) Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

c)

x	-1	0	1	2
$g(x)$	6	5	4	3

Exercice 8

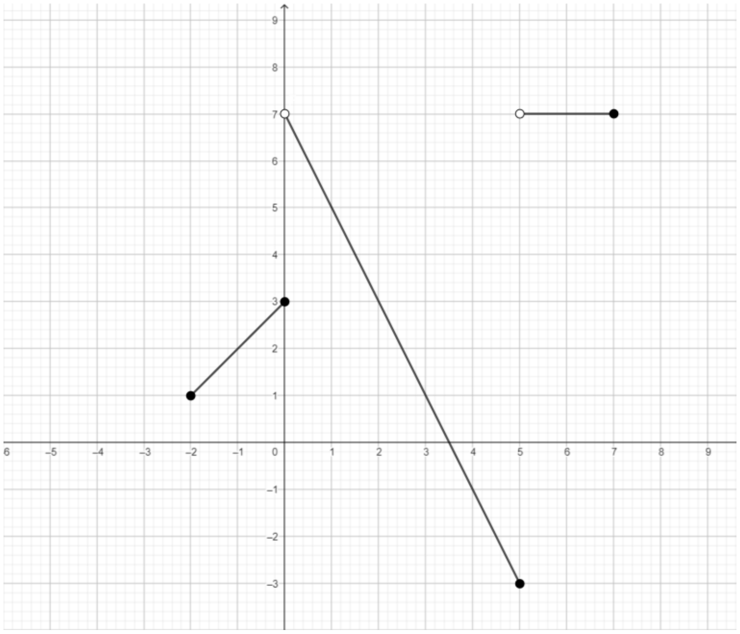
Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on considère la fonction f définie par :

- Pour $x \in$ [-2 ; 0], $f(x) = x + 3$
- Pour $x \in]0; 5]$, $f(x) = -2x + 7$
- Pour $x \in]5; 10]$, $f(x) = 7$

Dans le repère (O, I, J), construis, la représentation graphique de f sur l'intervalle

[-2 ;10].

Corrige



Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

On donne la fonction h définie de [-3 ; 2] vers IR par :$h(x) = x^2$.

1) Donne le sens de variation de h sur chacun des intervalles suivants : [-3 ;0] et [0 ;2].
2) Dresse le tableau de variation de h sur [-3 ; 2].
3) Trace dans le repère (O, I, J), la représentation graphique de h sur [-3 ;2]

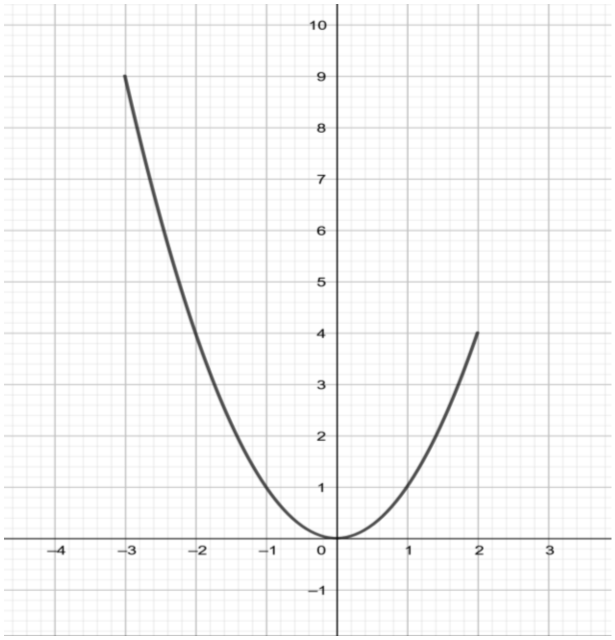
Corrigé

1) Sur [-3 ;0] la fonction h est décroissante et sur [0 ;2] la fonction h est croissante

2) Tableau de variation

x	-3		0		2
$h(x)$		↘	0	↗	

3) Représentation graphique



Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f la fonction définie de [0,5 ; 5] vers IR par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

1) Détermine le sens de variation de f sur [0,5 ;5] et dresse son tableau de variation.
2) Complète le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	4	5
$\boldsymbol{f(x)}$					

3) Trace la représentation graphique de $\boldsymbol{f}$ sur [0,5 ;5].

Corrigé

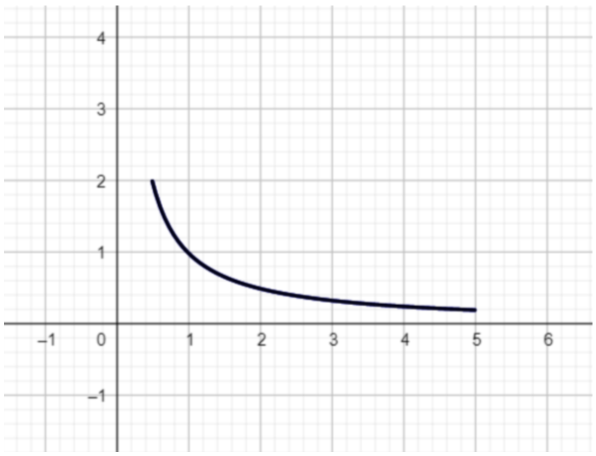
1) Sur [0,5 ; 5] f est décroissante

x	0,5	5
$f(x)$		

2) Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	4	5
$\boldsymbol{f(x)}$	2	1	0,5	0,25	0,2

3) Représentation graphique de $\boldsymbol{f}$ sur [0,5 ;5].



Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit p la fonction définie de [-4 ; -1] vers IR par :$\boldsymbol{p(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

1) Etudie le sens de variation de p sur [-4 ;-1] et dresse son tableau de variation.
2) Complète le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$p(x)$						

3) Trace la représentation graphique de p

Corrigé

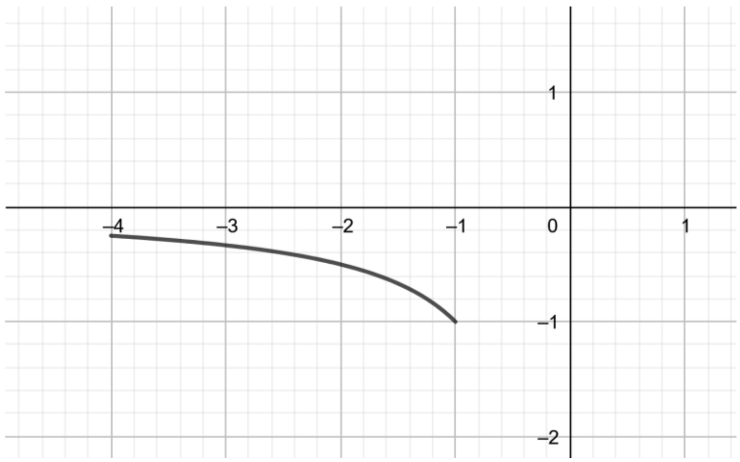
1) Sur $[-4\,;-1]$ f est décroissant

x	-4 $\qquad\qquad$ -1
$P(x)$	$\searrow$

2) Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$p(x)$	- 0 ,25	-0,33	-0,4	-0 ,5	-0,66	-1

3)



Exercice 12

Relie chaque fonction f de IR vers IR du diagramme de gauche à son ensemble de définition du diagramme de droite

$f(x) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ •

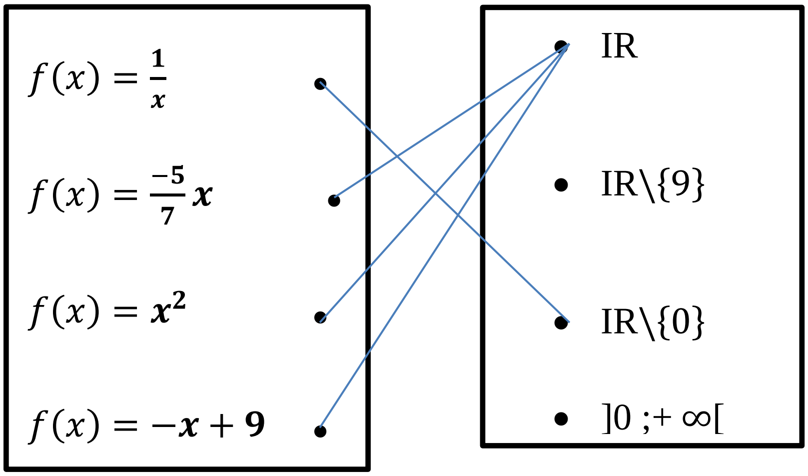
$f(x) = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{x}$ •

$f(x) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ •

$f(x) = -\boldsymbol{x} + \mathbf{9}$ •

- IR
- IR\{9}
- IR\{0}
-]0 ;+ ∞[

Corrigé



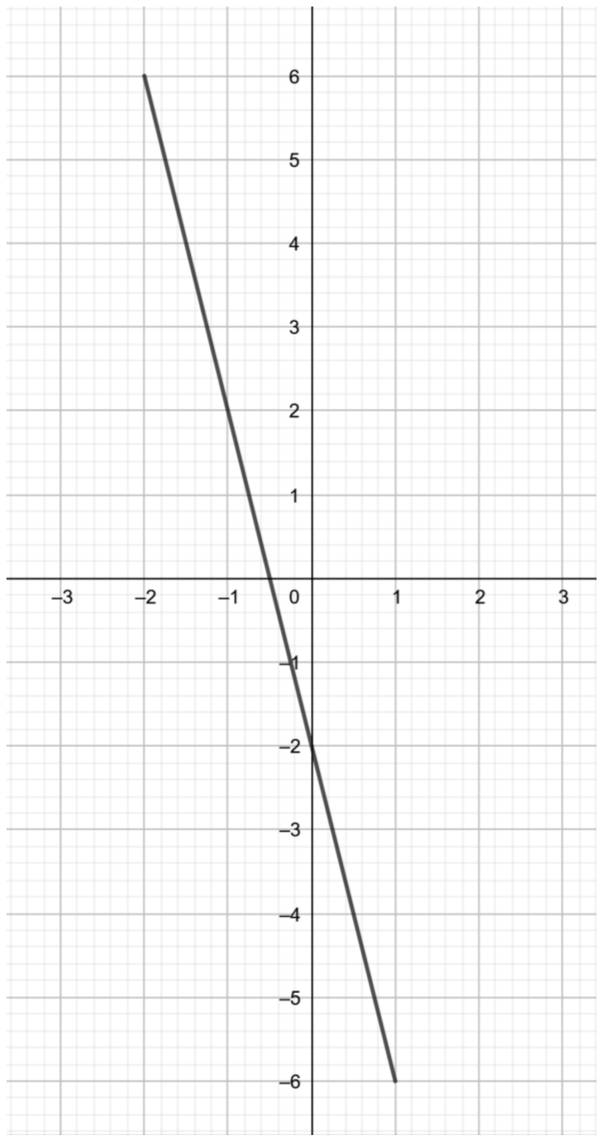
Exercice 13

On considère la fonction affine g de [-2 ;1] vers IR définie par : $g(x) = ax - 2$ où $a \in$ IR.

1) Détermine le nombre réel a pour que la représentation graphique de la fonction g passe par le point E (-1 ;2).
2) Pour la valeur de a trouvée :
   Construis la représentation graphique de g dans un repère orthogonal (O, I,J).

Corrige

1) Déterminons a
   On résout l'équation $-a - 2 = 2$ donc $a = -4$ alors $g(x) = -4x - 2$
2) a)



Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J), on donne les fonctions $h\ et\ p$ définies de [-3 ;3] vers IR par :

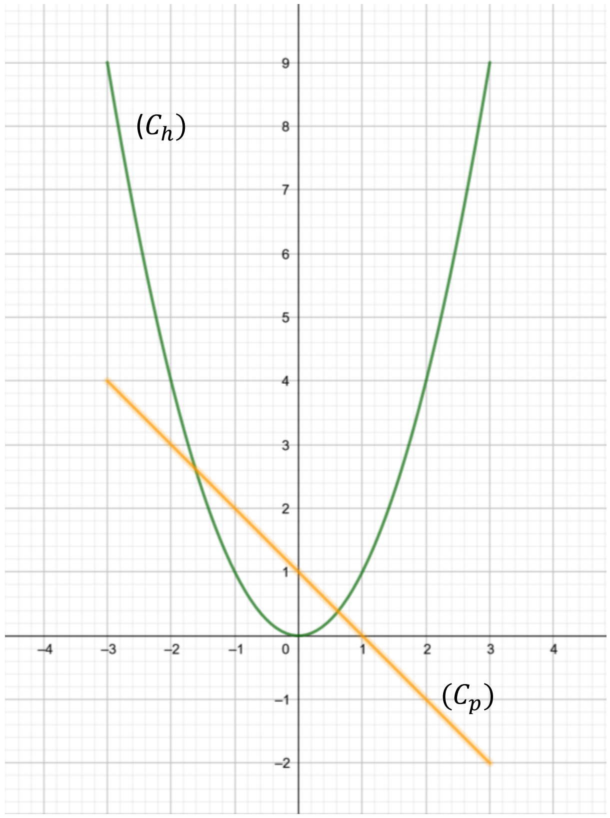
$h(x) = x^2$ et $p(x) = -x + 1$

1) Représente sur le même graphique les fonctions $h\ et\ p$.
2) Résous graphiquement sur [-3 ;3], l'équation $h(x) = p(x)$.

3) Résous graphiquement sur [-3 ;3], l'inéquation $h(x) \leq p(x)$.

Corrigé

1)



2) $S_{\mathbb{R}} = \{-1{,}6; 0{,}6\}$
3) $S_{\mathbb{R}} = [-1{,}6; 0{,}6]$