

# CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)  
 Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M  
 Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90

## ANGLES ORIENTES

### I- ANGLES ORIENTES DE DEMI-DROITES

#### 1) Définition

On appelle angle orienté de deux demi-droites, le couple formé par deux de demi-droite  $([OA], [OB])$  de même origine O, noté  $(\widehat{OA, OB})$ .

#### Notation :

On notera par :

- $(\widehat{OA, OB})$  : l'angle orienté formé par les demi-droites  $[OA]$  et  $[OB]$
  - $(\widehat{OA, OB})$  : la mesure de l'angle orienté formé par les demi-droites  $[OA]$  et  $[OB]$
- $\sin \widehat{OBC}$

#### 2) Propriétés

Soient  $[OA], [OB], [OC]$  et  $[OD]$  quatre demi-droites de même origine O, on a :

$$P_1) \overline{(\widehat{OA, OB})} = -\overline{(\widehat{OB, OA})} [2\pi]$$

$$P_2) \overline{(\widehat{OA, OB})} + \overline{(\widehat{OB, OC})} = \overline{(\widehat{OA, OC})} [2\pi]$$

$$P_3) \overline{(\widehat{OA, OA})} = 0 [2\pi]$$

$$P_4) \overline{(\widehat{OA, OB})} = \overline{(\widehat{OC, OD})} [2\pi] \text{ par permutation des moyens } \overline{(\widehat{OA, OC})} = \overline{(\widehat{OB, OD})} [2\pi]$$

### II- ANGLES ORIENTES DES DROITES

#### 1) Définition

Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites du plan de vecteur directeur respectif  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On appelle angle orienté de deux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  noté  $(\widehat{D_1, D_2})$ , l'angle de leur vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

#### Notation :

On notera par :

- $(\widehat{D_1, D_2})$  : l'angle orienté formé par les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$
- $(D_1, D_2)$  : la mesure de l'angle orienté formé par les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

#### 2) Propriétés

Pour toutes droites  $(D_1), (D_2)$  et  $(D_3)$  du plan orienté,

$$P_1. \overline{(D_1, D_2)} + \overline{(D_2, D_3)} = \overline{(D_1, D_3)} [\pi]$$

$$P_2. \overline{(D_1, D_2)} = -\overline{(D_2, D_1)} [\pi]$$

$$P_3. \overline{(D_1, D_1)} = 0 [\pi]$$

#### a) Angles égaux

Deux angles orientés  $(\widehat{D_1, D_2})$  et  $(\widehat{D_3, D_4})$  sont dits égaux, lorsqu'ils ont le même sens d'orientation et de même mesure. On écrit :  $\overline{(D_1, D_2)} = \overline{(D_3, D_4)} [\pi]$

### III- ANGLES ORIENTES DES VECTEURS

#### 1) Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan orienté.

On appelle angle orienté de vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  noté  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .

**Notation :**

Dans cette ressource, on notera  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$  l'angle orienté et  $(\vec{u}, \vec{v})$  sa mesure.

**2) Mesures principale d'un angle orienté**

On appelle mesure principale d'un angle orienté tout nombre réel  $\alpha$  tel que :  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$

**a) Mesures d'un angle orienté**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan orienté.

Si  $\alpha$  est une mesure en radians de l'angle orienté  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$  alors tout réel  $\beta$  de la forme  $\beta = \alpha + 2k\pi$  (où  $k$  est un entier relatif) est une mesure en radians de l'angle orienté  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ . On écrit  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha + 2k\pi$  avec  $k$  un entier relatif, ou  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha[2\pi]$ .

**Remarque :**

Toutes les mesures de l'angle nul sont de la forme  $2k\pi$  et celle de l'angle plat sont de la forme  $(2k+1)\pi$  où  $k$  est un entier relatif.

**Exemples :**

- ▶  $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$  sont des mesures de l'angle nul.
- ▶  $\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, 5\pi, \dots$  sont des mesures de l'angle plat.

**b) Propriétés :**

Soit  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{t}$  quatre vecteurs non nuls, on a :

$$P_1. \boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0[2\pi]} \text{ (l'angle formé par deux vecteurs colinéaires de même sens)}$$

$$P_2. \boxed{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \pi[2\pi]} \text{ (angle formé par deux vecteurs opposés)}$$

$$P_3. \boxed{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]} \text{ (Angles supplémentaires)}$$

$$P_4. \boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]} \text{ (Angles opposés)}$$

$$P_5. \boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})[2\pi]} \text{ (Angles égaux)}$$

$$P_6. \boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})[2\pi]} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$P_7. \text{ Si } \boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t})[2\pi]} \text{ alors par permutation des extrêmes et des moyens on a :}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{t})[2\pi]} \text{ et } \boxed{(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})[2\pi]}.$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{t}$  sont les extrêmes, et les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont les moyens.

$P_8.$

$$\begin{aligned} \bullet \boxed{(-\overrightarrow{BA}, -\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]} & \bullet \boxed{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]} \\ \bullet \boxed{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]} & \bullet \boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]} \end{aligned}$$

**Théorème**

Soit  $k$  et  $k'$  deux réels non nuls,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$$a) \text{ Si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe, alors } \boxed{(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})[\pi]}$$

$$b) \text{ Si } k \text{ et } k' \text{ sont de signe contraire, alors } \boxed{(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})[2\pi]}$$

**3) Angles particuliers****a) Angles alternes internes**

soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  trois droites du plan telles que :  $(D_1)$  parallèle à  $(D_2)$ , et  $(D_3)$  sécante à  $(D_1)$  et à  $(D_2)$ .

Les angles  $(\widehat{D_1, D_3})$  et  $(\widehat{D_2, D_3})$  sont deux angles alternes internes.

**Propriétés**

Deux angles alternes internes, sont de mesure égale.

**b) Angles alternes externes**

soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  trois droites du plan telles que :  $(D_1)$  parallèle à  $(D_2)$ , et  $(D_3)$  sécante à  $(D_1)$  et à  $(D_2)$ .

Les angles  $(\widehat{D_3, D_1})$  et  $(\widehat{D_3, D_2})$  sont deux angles alternes externes.

**Propriétés**

Deux angles alternes externes, sont de mesure égale.

**c) Angles correspondants**

soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  trois droites du plan telles que :  $(D_1)$  parallèle à  $(D_2)$ , et  $(D_3)$  sécante à  $(D_1)$  et à  $(D_2)$ .

Les angles  $(\widehat{D_3, D_2})$  et  $(\widehat{D_3, D_1})$  sont deux angles correspondants.

**Propriétés**

Deux angles correspondants, sont de mesure égale.

**d) Angles à cotés perpendiculaires**

Soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  et  $(D_4)$  quatre droites du plan telles que :  $(D_1)$  perpendiculaire à  $(D_2)$  et  $(D_3)$  perpendiculaire à  $(D_4)$ .

Les angles  $(\widehat{D_1, D_3})$  et  $(\widehat{D_2, D_4})$  sont deux angles à cotés perpendiculaires.

**Propriétés**

Deux angles à cotés perpendiculaire, sont de mesure égale.

**e) Angles à cotés parallèles**

Soient  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  et  $(D_4)$  quatre droites du plan telles que :  $(D_1)$  parallèle à  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  parallèle à  $(D_4)$ ;  $(D_1)$  sécante à  $(D_3)$  et à  $(D_4)$  et  $(D_2)$  sécante à  $(D_3)$  à et  $(D_4)$ .

Les angles  $(\widehat{D_1, D_3})$  et  $(\widehat{D_2, D_4})$  sont deux angles à cotés parallèles.

**Propriétés**

Deux angles à cotés parallèles, sont de mesure égale.

**4) Angles au centre-angle inscrit**

Angle inscrit :  $(\widehat{MA, MB})$  ;

Angle au centre :  $(\widehat{OA, OB})$  ;

**Théorème :**

Soient M, A et B trois points distincts d'un cercle de centre O.

Un angle au centre est égal au double de son angle inscrit interceptant le même arc, c'est-à-dire :

$$\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]$$

### 5) Angles tangentes-cordes

Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O, et (T) est tangente à ce cercle en A, alors on a :  $\overline{(MA, MB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$

#### **Théorème :**

Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O.

Si la droite (T) est tangente au cercle en A, alors on a :  $\overline{(MA, MB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$

### 6) Cercle capable

#### a) Construction du cercle capable

Pour construire le cercle capable, on trace :

- ▶ Le segment [AB] ;
  - ▶ La médiatrice du segment [AB] ;
  - ▶ Une droite (T) passant par A tel que  $\overline{(T, AB)} = \alpha[\pi]$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  où  $\alpha \in ]-\pi; \pi[$
  - ▶ La perpendiculaire à (T) en A de telle sorte qu'elle rencontre la médiatrice du segment [AB] en un point O.
  - ▶ Enfin, on trace le cercle de centre O de corde [AB].
- Ce cercle est appelé cercle capable.

#### b) Ensemble des points M du plan tel que : $\overline{(MA, MB)} = \alpha[\pi]$

- ▶ Si  $\alpha = 0$  :  $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = 0[\pi]$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privé des points A et B. On écrit  $(AB) \setminus \{A; B\}$

- ▶ Si  $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$  :  $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = \pm\frac{\pi}{2}[\pi]$

L'ensemble des points M est un demi-cercle de diamètre [AB].

- ▶ Si  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  où  $\alpha \in ]-\pi; \pi[$

L'ensemble des points M est le cercle capable des corde [AB] privé des points A et B.

#### c) Ensemble des points M du plan tel que : $\overline{(MA, MB)} = \alpha[2\pi]$

- ▶ Si  $\alpha = 0$  :  $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = 0[2\pi]$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privé du segment [AB].

- ▶ Si  $\alpha = \pi$  :  $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = \pi[2\pi]$

L'ensemble des points M est le segment [AB] privé des points A et B.

- ▶ Si  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \pi$

L'ensemble des points M est un arc de cercle capable de corde [AB] d'angle  $\alpha$  privé des points A et B.

## III- POINTS COCYCLIQUES

Des points situés sur un même cercle sont dits cocycliques.

- ▶ Pour deux points A et B distincts, il passe une infinité de cercles.
- ▶ Pour trois points A, B et C distincts et non alignés, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit au triangle ABC.

### 1) Définition

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. On dit que les points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si  $\overline{(AB, AC)} = \overline{(DB, DC)}[\pi]$  ou  $\overline{(BA, BC)} = \overline{(DA, DC)}[\pi]$

ou encore  $\boxed{\overline{(CA, CB)} = \overline{(DA, DB)}[\pi]}$  etc.

## 2) Propriété

Si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan qui forment deux triangles rectangles de même hypoténuse, alors les points A, B, C, D sont cocycliques.

## TRAVAUX DIRIGES

### EXERCICE 1 :

Soit ABC un triangle quelconque, et H sont orthocentre.

- 1- Faire la figure.
- 2- Démontrer que  $\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$

### EXERCICE 2 :

Soit ABC un triangle de sommet M inscrit dans un cercle de centre O, ( $\Delta$ ) et ( $\Delta'$ ) deux bissectrices respectives des angles  $(\widehat{OA, OM})$  et  $(\widehat{OM, OB})$ .

- 1- Faire la figure.
- 2- Montrer que  $\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]$

### EXERCICE 3 :

Soit ( $C$ ) un cercle de diamètre  $[IC]$  et de centre  $O$ . Du point  $I$ , portant les droites  $(IA)$  et  $(IB)$  qui rencontrent ( $C$ ) respectivement en  $A$  et  $B$  puis une droite ( $\Delta$ ) orthogonale à  $(IC)$  en  $D$  et en  $E$ .

- 1- Faire la figure.
- 2- Démontrer que les points  $A, B, E, D$  sont cocycliques.

### EXERCICE 4 :

Soient ( $C$ ) et ( $C'$ ) deux cercles sécantes en  $A$  et  $B$ , et ( $\Delta$ ) une droite passant par  $A$  coupe le cercle ( $C$ ) en  $M$  et le cercle ( $C'$ ) en  $N$ . Les tangentes à ( $C$ ) en  $M$  et à ( $C'$ ) en  $N$  se coupent en  $T$ .

- 1- Faire la figure.
- 2- Montrer que  $\overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]$ . Que peut-on déduire ?

### EXERCICE 5 :

Deux cercles ( $C$ ) et ( $C'$ ) se coupent en  $A$  et  $B$ . Soit  $E$  un point de ( $C$ ) et  $F$  celui de ( $C'$ ) tels que  $A, E, F$  non alignés. une droite passant par  $B$  coupe ( $C$ ) en  $G$  et ( $C'$ ) en  $H$ . Les droites  $(GE)$  et  $(HF)$  se coupent en  $I$ .

- 1- Faire la figure.
- 2- Démontrer que les points  $A, F, E$  et  $I$  sont cocycliques.

### EXERCICE 6 :

Deux cercles ( $C$ ) et ( $C'$ ) se coupent en  $A$  et  $B$ . Une droite ( $\Delta$ ) passant par  $A$  coupe ( $C$ ) en  $E$  et ( $C'$ ) en  $F$ . Une autre droite ( $\Delta'$ ) passant par  $B$  coupe ( $C$ ) en  $G$  et ( $C'$ ) en  $H$ .

- 1- Faire la figure.
- 2- Démontrer que les droites  $(GE)$  et  $(HF)$  sont parallèles.

### EXERCICE 7 :

On considère un triangle  $ABC$  quelconque et  $F$  le point diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Pour tout point  $M$  du plan, la droite passant par  $M$  et orthogonale

à la droite  $(MF)$  coupe  $(AB)$  en  $P$  et  $(AC)$  en  $Q$ .

1- Faire la figure.

2- Démontrer que  $\overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$ .

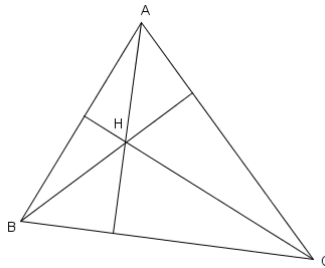
3- Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels les points  $F, P$  et  $Q$  sont alignés.

4- Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overline{(FP, FQ)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$ .

## Solutions des exercices d'applications

### Exercice 1 :

Démontrons que  $\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$



Par hypothèse, la droite  $(AB)$  est perpendiculaire à la droite  $(HC)$  d'une et la droite  $(AC)$  est perpendiculaire à la droite  $(HB)$  d'autre part. c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (AB) \perp (HC) \\ (AC) \perp (HB) \end{cases} \quad \text{D'après la propriété des angles à côtés perpendiculaires}$$

On a :

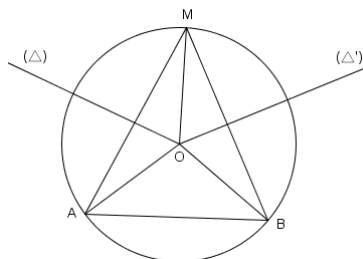
$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(HC, HB)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} - \overline{(HC, HB)} = 0[\pi]$$

$$\boxed{\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]}$$

### Exercice 2 :

Démontrons que  $\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]$



D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\overline{(OA, OB)} = \overline{(OA, OM)} + \overline{(OM, OB)}[\pi]$$

Or  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont les bissectrices respectives des angles  $\widehat{(OA, OM)}$  et  $\widehat{(OM, OB)}$

$$\text{on a : } \begin{cases} \overline{(OA, OM)} = 2\overline{(\Delta, OM)}[\pi] \\ \overline{(OM, OB)} = 2\overline{(OM, \Delta')}[\pi] \end{cases}$$

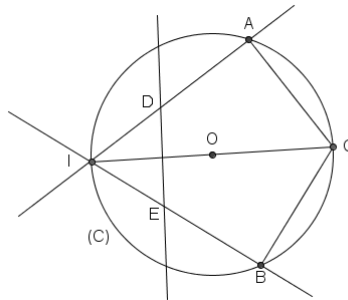
$$\Rightarrow \overline{(OA, OB)} = 2\overline{(\Delta, OM)} + 2\overline{(OM, \Delta')}[\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(OA, OB)} = 2\overline{(\Delta, \Delta')}[\pi]$$

$$\text{Or } \begin{cases} (\Delta) \perp (MA) \\ (\Delta') \perp (MB) \end{cases} \Rightarrow \overline{(\Delta, \Delta')} = \overline{(MA, MB)}[\pi]$$

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]}$$

### EXERCICE 3 :



#### **Démontrons que les points A, B, E et D sont cocycliques**

Par hypothèse les points A, B, I, C sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(AB, AI)} = \overline{(CB, CI)}[\pi]$$

or les points A, D, I sont alignés alors on peut remplacer la droite (AI) par la droite (AD)

$$\text{on a : } \overline{(AB, AD)} = \overline{(CB, CI)}[\pi] \quad (1)$$

or la droite (CB) est perpendiculaire à la droite (EB) d'une part et la droite (CI) est perpendiculaire à la droite (ED) d'autre part. c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (CB) \perp (EB) \\ (CI) \perp (ED) \end{cases} \quad \text{D'après la propriété des angles à côtés perpendiculaires}$$

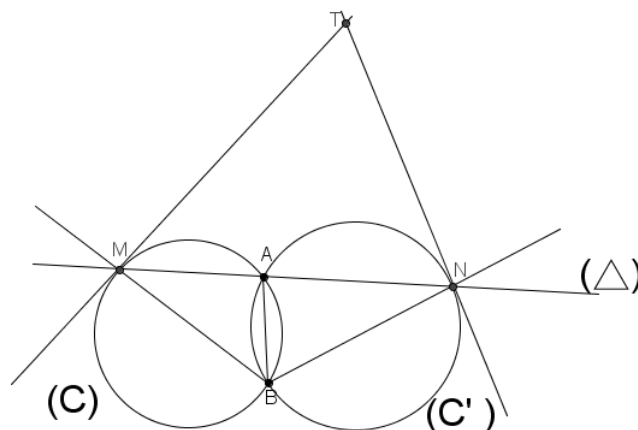
$$\text{on a : } \overline{(CB, CI)} = \overline{(EB, ED)}[\pi] \quad (2)$$

En remplaçant (2) dans (1)

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(AB, AD)} = \overline{(EB, ED)}[\pi]}$$

Donc les points A, B, D et E sont cocycliques.

### EXERCICE 4 :



**Démontrons que**  $\overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]$

Par hypothèse la droite (MT) est tangente à (C) en M d'une part et la droite (NT) est tangente à (C') en N d'autre part. Alors les angles  $\overline{(MT, MB)}$  et  $\overline{(AM, AB)}$  interceptent le même arc MB d'une part et les angles  $\overline{(NB, NT)}$  et  $\overline{(AB, AN)}$  interceptent le même arc BN. Alors d'après la propriété de la tangente-corde,

$$\text{on a : } \begin{cases} \overline{(MT, MB)} = \overline{(AM, AB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(NB, NT)} = \overline{(AB, AN)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1) + (2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} + \overline{(NB, NT)} = \overline{(AM, AB)} + \overline{(AB, AN)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles et la permutation des droites,

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} - \overline{(NT, NB)} = \overline{(AM, AN)}[\pi]$$

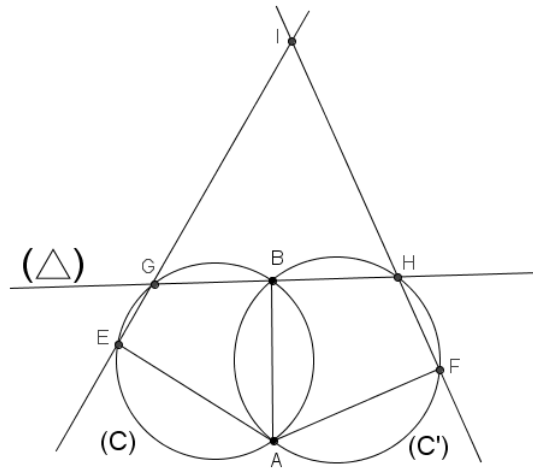
or les points M, A, N sont alignés  $\Rightarrow \overline{(AM, AN)} = 0[\pi]$

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} - \overline{(NT, NB)} = 0[\pi]$$

$$\text{D'où } \overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]$$

On déduit que les points M, T, N, B sont cocycliques.

### EXERCICE 5 :



**Démontrons que les points A, F, I et E sont cocycliques**

Par hypothèse les points A, B, G, E sont cocycliques d'une part et les points A, B, H, F le sont aussi d'autre part

$$\text{on a } \begin{cases} \overline{(AE, AB)} = \overline{(GE, GB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(AB, AF)} = \overline{(HB, HF)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1)+(2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(AE, AB)} + \overline{(AB, AF)} = \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\text{on a : } \overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

or les points G, B, H sont alignés, alors on peut remplacer la droite (GB) par la droite (HB)

$$\text{on a : } \overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, HB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

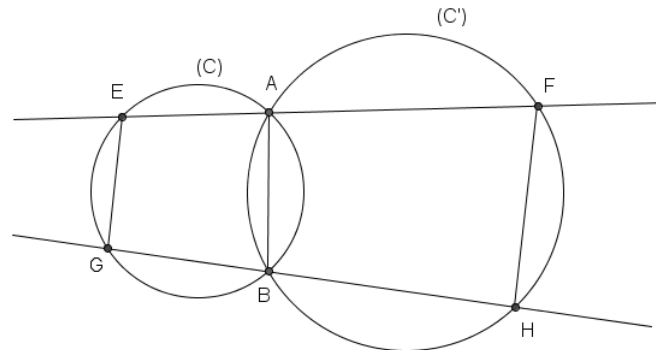
$$\overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, HF)}[\pi]$$

or les points E, G, I sont alignés d'une part et les points H, F, I le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer les droites (GE) par (IE) et (HF) par (IF)

$$\boxed{D'o\grave{u} \overline{(AE, AF)} = \overline{(IE, IF)}[\pi]}$$

$\boxed{\text{Donc les points A, F, I, E sont cocycliques.}}$

### EXERCICE 6 :



#### **Démontrons que les droites (GE) et (HF) sont parallèles**

Par hypothèse les points G, E, B, A sont cocycliques d'une part et les points F, A, B, H le sont aussi d'autre part

$$\text{on a } \begin{cases} \overline{(GE, GB)} = \overline{(AE, AB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(HB, HF)} = \overline{(AB, AF)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1)+(2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)} = \overline{(AE, AB)} + \overline{(AB, AF)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)} = \overline{(AE, AF)}[\pi]$$

or les points A, E, F sont alignés d'une part et les points B, G, H le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer le droite (HB) par (GB) et  $\overline{(AE, AF)} = 0[\pi]$

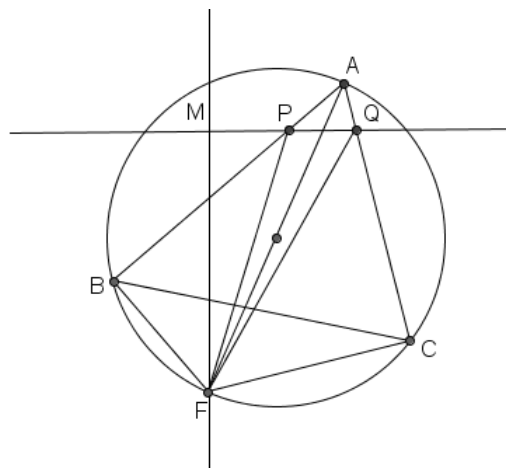
$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(GB, HF)} = 0[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\boxed{\overline{(GE, HF)} = 0[\pi]}$$

$\boxed{\text{Donc les droites (GE) et (HF) sont parallèles.}}$

### EXERCICE 7 :



$$\mathbf{1-Démontrons que } \overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, MB)} + \overline{(MB, AC)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, MB)} + \overline{(MB, MC)} + \overline{(MC, AC)}[\pi]$$

or les points A, P, B sont alignés d'une part et les points A, Q, C le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer les droites (AB) par (BP) et (AC) par (CQ)

$$\text{on a : } \overline{(AB, AC)} = \overline{(BP, MB)} + \overline{(MB, MC)} + \overline{(MC, CQ)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(BP, BM)} + \overline{(CM, CQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi] \quad (1)$$

or les triangles BPF et MPF sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [PF], alors les points B, P, F, M sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(BP, BM)} = \overline{(FP, FM)}[\pi] \quad (2)$$

De même les triangles MFQ et CQF sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [FQ], alors les points C, Q, F, M sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(CM, CQ)} = \overline{(FM, FQ)}[\pi] \quad (3)$$

En remplaçant (2) et (3) dans (1), on a :

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FM)} + \overline{(FM, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]}$$

## 2- Déterminons l'ensemble des points M du plan pour lesquels les points F, P, Q sont alignés

Les points F, P, Q sont alignés si et seulement si :  $\overline{(FP, FQ)} = 0[\pi]$

En considérant  $\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$  or  $\overline{(FP, FQ)} = 0[\pi]$

$$\text{on a : } \boxed{\overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]}$$

Alors les points M, A, B, C sont cocycliques.

$\boxed{\text{Donc l'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle ABC.}}$

## 3- Déterminons l'ensemble des points M tels que :

$$\overline{(FP, FQ)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$$

En considérant  $\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$

$$\text{on a : } \overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, AC)} + \overline{(MB, MC)}[\pi] \Rightarrow \overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)} - \overline{(AB, AC)}[\pi]$$

$$\boxed{\overline{(MB, MC)} = 0[\pi]}$$

Alors les points M, B, C sont alignés.

$\boxed{\text{Donc l'ensemble des points M est la droite (BC).}}$