COURS DE MATHEMATIQUES SECONDE C

BAGRE REMI GUILLAUME

OCTOBRE 2013

Table des matières

1

Les configurations de bases

Historique

Le mot géométrie est éthimologiquement définit par : Gê=terre en grec et de metron=mesure en grec.
La géométrie a été intoduite par Thalès es ses disciples de l'ecole pythagoricienne. Cependant les précurceurs de la géométrie fut :

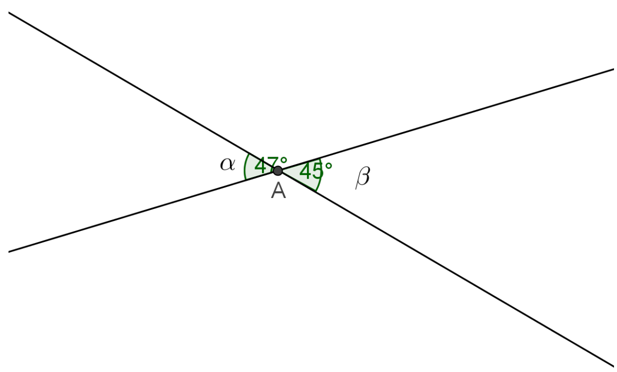
- En grèce antique : Archimède, Apollonios et Hipparque.
- En Europe dès le XVI^e siècle par Viète, Kepler, Descart.
- EN Orient par l'arabe Oumar AL Khayyâm.

1.1 Angles-Bissectrices

1.1.1 Angle de même mesure

1.1.1.1 Angle opposés par le sommet

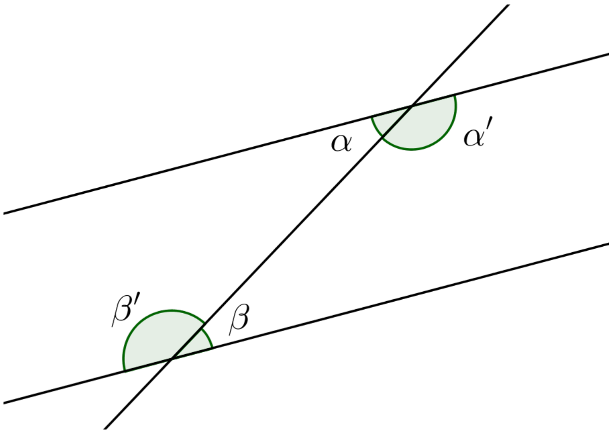
$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont deux droites sécantes en A comme le montre la figures ci-dessous.



Les angles α et β sont dits opposés par le sommet. Alors $\alpha = \beta$

1.1.1.2 Angles alternes-internes

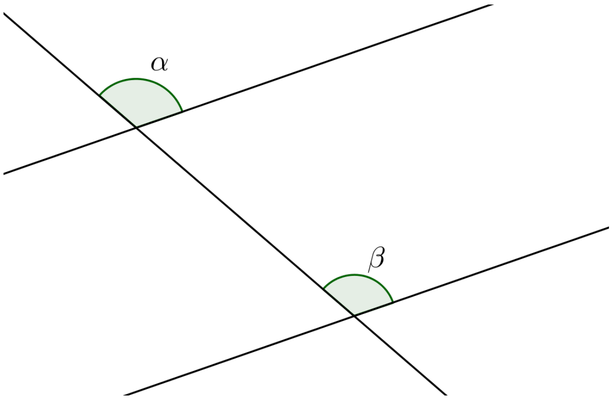
Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites parallèles, coupées par une sécante (Δ).



Les angles α et β sont des angles alternes-internes. Ils sont donc égaux. Les angles α' et β' sont aussi des angles alternes-internes.

1.1.1.3 Angles correspondants

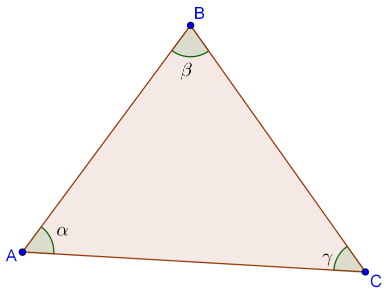
Considérons la figure suivante :



Les angles α et β sont des angles correspondants et α=β.

1.1.2 Angles d'un triangle

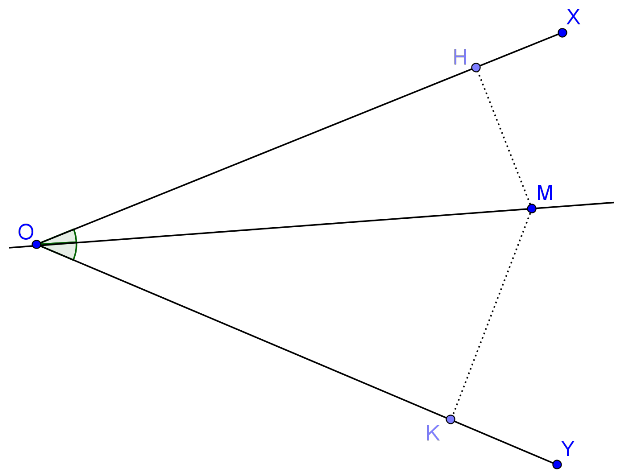
Considérons un triangle dont les trois angles sont α, β et γ.



Alors $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

1.1.3 Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle $X\widehat{O}Y$ est la demi-droite $[OZ)$ telle que $X\widehat{O}Z = Z\widehat{O}Y$



Soit $M \in [OZ)$, H son projété orthoganal sur la droite (OX) et K son projété orthogonal sur (OY). On a donc $M \in [OZ) \Leftrightarrow HM = KM$

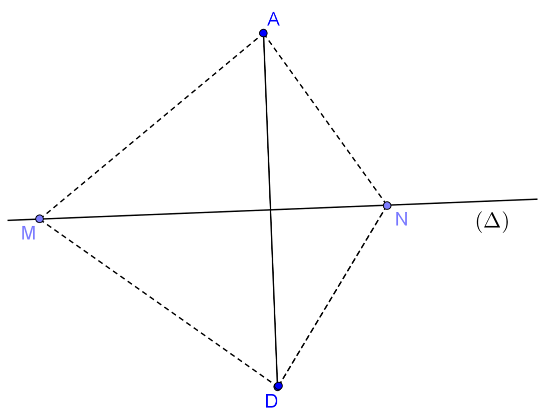
Exercice d'application 1.1.1
ABC est un triangle isocèle en A. La droite (MN) est la parallèle à (BC) passant par A. Soit $P \in (AB)$. Notons $\widehat{B}$ l'angle $A\widehat{B}C$ et $\widehat{C}$ l'angle $A\widehat{C}B$.

1. *Pourquoi a-t-on $\widehat{C} = C\widehat{A}N$ et $\widehat{B} = M\widehat{A}B$?*
2. *Pourquoi $[AN)$ est-elle la bissectrice de $P\widehat{A}C$?*

1.2 Médiatrice-Cercle

1.2.1 Médiatrice d'un segment

Soit $[AB]$ un segment. On dit qu'une droite Δ est médiatrice du segment $[AB]$ si elle est perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.
M est un point de la médiatrice de $[AB]$ équivaut à $MA = MB$.



1.2.2 Cercle-Corde

Soit O un point et r un réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon r, l'ensemble des points situés à lma même distance r de O. Une corde est un segment qui lie dux points distincts du cercle.

- Si $[AB]$ est une corde d'un cercle $(\mathcal{C})$ donné, alors la médiatrice de la corde passe par le centre de ce cercle.
- Considérons un point T du cercle et soit (Δ) une droite. (Δ) tangent à $(\mathcal{C})$ en T équivaut à :

$$\begin{cases} \text{T appartient à } (\Delta) \\ (\Delta) \text{ perpendiculaire à (OT)} \end{cases}$$

1.2.3 Cercle et angle droit

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$. Les assertions suivantes sont equivalentes :

1. M appartient à $(\mathcal{C})$
2. $A\widehat{M}B = 90°$

Remarque 1.2.1

$(\mathcal{C})$ étant un cercle de diamètre $[AB]$. $M \in (\mathcal{C})$, on a donc $OM = \frac{1}{2}AB$.

1.3 Triangles-Projections

1.3.1 Droites et points remarquables

Considérons ABC un triangle quelconque.

- Si O est le point de rencontre des médiatrices du triangle, alors O est le centre du cercle circonscrit au triangle et $OA = OB = OC$.
- Le point de rencontre des hauteurs du triangle s'appelle orthocentre
- Les médianes de ABC se rencontrent en un point G appelé centre de gravité du triangle. G est toujours à l'intérieur du triangle. De plus en considérant A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, les égalités suivantes sont vérifiées :
  $GA' = \frac{2}{3}GA \qquad GB' = \frac{2}{3}GB \qquad GC' = \frac{2}{3}GC$
- Le point de rencontre I des bissectrices des angles d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

1.3.2 Projections

Soit A, B et M dess points du plan ; A', B', M' leurs projetés respectifs sur une droite (d) parallèlement à (Δ). Si M est le milieu de $[AB]$, alors M' est aussi milieu de $[A'B']$

1.3.3 Théorème des milieux

Soit ABC un triangle. Les propriétés suivantes peuvent être établit :

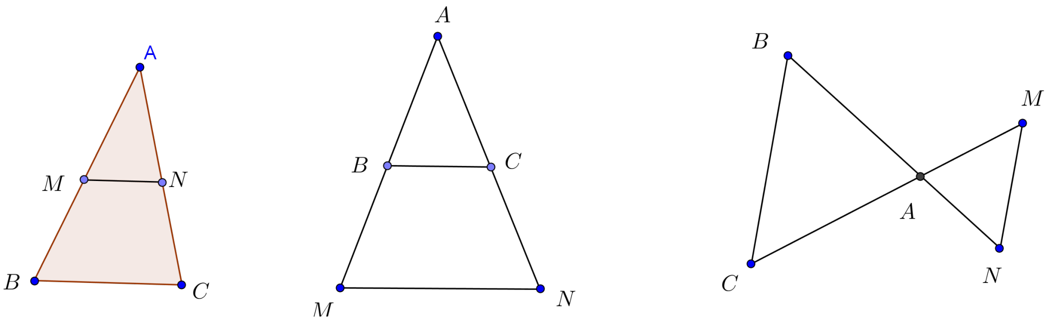
- Si I est le milieu de $[AB]$ et J milieu de [AC] alors $(IJ) \setminus\setminus (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$
- Si I est le milieu de $[AB]$ et $J \in (AC)$ tels que $(IJ) \setminus\setminus (BC)$, alors J est milieu de $[AC]$

1.4 Théorème de Thalès

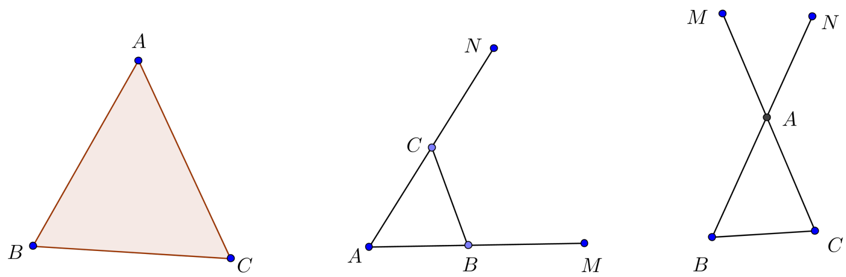
Théorème 1.4.1
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

$$\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \\ (MN) \setminus \setminus (AB) \end{cases}$$

Alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



Réciproque du Théorème de Thalès
ABC étant un triangle, soit $M \in (AB)$; $N \in (AC)$ comme le montre les figures suivantes :



Pour chacune de ces figures, si de plus on a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

1.5 Théorème de Pythagore-Trigonométrie

1.5.1 Théorème de Pythagore

Théorème 1.5.1
ABC étant un triangle rectangle en A, on a la relation suivante de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Réciproque du Théorème de Pythagore
Dns un triangle ABC, lorsque la longueur des côtés vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

1.5.2 Propriétés

Soit ABC un triangle quelconque. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
– Le triangle ABC est rectangle en A.
– La médiane AI est telle que $AI = \frac{1}{2}BC$.
– Le milieu I de $[BC]$ est le centre du cercle circonscrit à ABC.
– Le côté $[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC.

1.5.3 Relation trigonométrique dans un triangle rectangle

Considérons ABC un triangle rectangle et $\alpha = A\widehat{B}C$ comme le montre la figure suivante :

On définit donc les relations suivantes :

$$cos\alpha = \frac{AB}{BC}\,; \qquad sin\alpha = \frac{AC}{BC}\,; \qquad tan\alpha = \frac{AC}{AB}$$

On tire alors les conséquences suivantes :

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\,; \qquad cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$

1.5.4 Quelques valeurs remarquables des lignes trigonométriques

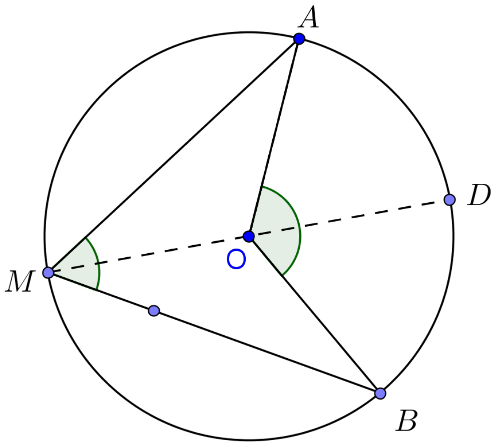
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

1.6 Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

1.6.1 Théorème de l'angle au centre

Théorème 1.6.1
Soit M un point d'un cercle(Γ) de centre O; A et B sont deux points du cercle distincts de M. Si les angles $A\widehat{M}B$ et $A\widehat{O}B$ interceptent le même arc AB, alors 2 $A\widehat{M}B$=$A\widehat{O}B$

Démonstration 1.6.1.1 *Considérons la figure suivante :*



1. *soit* $[MD]$ *un diamètre de* (Γ)
   $A\widehat{O}D = 180 - A\widehat{O}M$ *et OM isocèle en O alors* $180 - A\widehat{O}M = 2A\widehat{M}D$ *et donc* $A\widehat{O}D = 2A\widehat{M}D$ *et* $D\widehat{O}B = 2D\widehat{M}B$
2. *On remarque que* $A\widehat{M}B = A\widehat{M}D + D\widehat{M}B$ *et que* $A\widehat{O}B = A\widehat{O}D + D\widehat{O}B$
   D'ou le résultat.

1.6.2 Théorème de l'angle inscrit

Définition 1.6.1
Un angle est inscrit dans un cercle si son sommet appartient au cercle

Théorème 1.6.2
Deux angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle sont de même mesure.

Exercice 1.6.1
Démontrer le théorème ci-dessus.

2

CALCUL DANS $\mathbb{R}$

2.1 Les ensembles de nombres

Les différents type de nombre que nous connaissons sont :

- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. En exemple, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$
- L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$
- L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ qui s'écrivent de la façon suivante : $\mathbb{D} = \{\frac{p}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}\}$
- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et il s'écrit sous la forme suivante : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*\}$
- L'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

Par synthèse, on peut dire que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2.2 Règle de calcul dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Tranformation des écritures

1. **Règle de signes**
   Soit a et b deux nombres réels. On a :

   $a \times (-b) = (-a) \times b$
   $(-a) \times (-b) = a \times b = ab$
2. **Produit remarquables**
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
3. **Commutativité de l'addition et de la multiplication**
   $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \times b = b \times a$
4. **Associativité de l'addition et de la multiplication**
   $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\qquad$ $(ab) \times c = a \times (bc) = abc$
5. **Distributivité de la multiplication sur l'addition**
   $a(b+c) = ab + ac$
   $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

2.2.2 Opération sur les fractions

1. **Egalité de deux fractions**
   Soit b et d deux réels, tous non nuls. Alors les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux si et seulement si $ad = bc$.
   On écrit alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
   Conséquence : si $b \neq 0$ et $k \neq 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$
2. **Règle de signes**
   $\frac{a}{b}$ étant une fraction alors $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

2.2.3 Opération sur les puissances

1. **Définition**
   Soit a un réel quelconque et n un entiers naturel ($n \geq 1$). On a :
   $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$ (n facteurs)
   $a^1 = a$
   $a^0 = 1$
   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ avec $a \neq 0$
2. **Règle de calcul**
   Soit a et b deux réels non nuls et m, n deux entiers naturels. On a :
   $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$
   $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \times b^{-n}$ $b \neq 0$
3. **Puissance entière de 10-Notation scientifique**
   On appelle puissance entière de 10 du réel x, l'expression $a.10^p$ où $a \in \mathbb{Z}*$ et $p \in \mathbb{Z}$.
   La forme scientifique d'un réel est son écriture sous la forme $a.10^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq |a| < 10$.

Exercice d'application 2.2.1

Remarque 2.1 *La notation ingénieur d'un réel est son écriture sous la forme* $a.10^p$ *avec* p *un multiple de 3 et* $1 \leq |a| < 100$

2.2.4 Racine carré d'un réel positif

1. **Définition** Soit a un réel positif, la racine carré de a est l'unique réel positif x dont le carré est a. On le note $\sqrt{a}$. On a pour $a \geq 0$, $\sqrt{a} = x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 = a$.
2. **Propriétés**
   Soient a et b des réels positifs :
   - $(\sqrt{c})^2 = a$ $\quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$
     $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$
   - Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel, on a : $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
   - Soit x un réel quelconque. On a donc :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Soit a et b deux réels positifs. Les quantités $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont dites conjugués l'une de l'autre. Le produit $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.
   NB : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2.3 Ordre dans $\mathbb{R}$

2.3.1 Définition

On définit dans l'ensemble des réels des relations :
" $\leq$ " qui se lit " est inférieur ou égale à"
" $\geq$ " qui se lit " est supérieur ou égale à"
Ainsi donc :
Si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ ou $a - b \leq 0$
Si $a \leq b$ alors $a = b$ ou $a < b$
Dans la pratique, pour comparer deux réels, on étudie le plus souvent le signe de leur différence.

2.3.2 Opération sur les inégalités.

1. **Somme et inégalité**
   Soient x, y x', y' et z des réels.
   – Si $x \leq y$, alors pour tout réel z, on a $x + z \leq y + z$
   Si on retranche ou on ajoute un même nombre au deux membre de l'inégalité, alors l'inégalité ne change pas de sens.

   Démonstration 2.3.2.1
   $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow y - x + z - z \geq 0 \Leftrightarrow (y + z) - (x + z) \geq 0$ *d'où* $y + z \geq x + z$

   – Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$ alors $x + x' \leq y + y'$ Si on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient aussi une inégalité de même sens.

   Démonstration 2.3.2.2 *Exercice*

2. **Produit et inégalités**

   Théorème 2.3.1 – *Si* $x \leq y$ *et* $z \geq 0$ *alors* $xz \leq yz$
   – *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$

   Démonstration 2.3.2.3 *Exercice*

3. **Carré et inégalité**

   Théorème 2.3.2 *Soit s et y duex réels positifs. Si* $0 \leq x \leq y$ *alors* $x^2 \leq y^2$ *et* $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

   Les carrés et les racines carré de deux réels positifs sont de même ordre que ces deux réels.

4. **Inverse et inégalités**

   Théorème 2.3.3 *Si x et y sont deux réels tels que* $0 < x \leq y$ *alors* $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} > 0$

2.3.3 Les intervalles de $\mathbb{R}$

1. **Définition**
   Les intervalles sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$. Soient a et b des réels, on peut définir les intervalles comme suit :
   $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$
   $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a < x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x < b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ x \geq a\}$
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ x > a\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\ /x \leq b\}$
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}\ /x < b\}$
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

2. **Cas particulier d'intervalles**
   Les intervalles $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ sont parfois appelés des demi-droites

2.4 Valeur absolue et Distance

2.4.1 Définition

Soit x un réel quelconque. La valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ et définit par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple

2.4.2 Propriétés

Soit x un réel. On a les propriétés suivantes :
a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; b) $|xy| = |x||y|$; c) $\left|\frac{1}{x}\right|$ $(x \neq 0)$
d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$ e)$\sqrt{x^2} = |x|$
f) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)
g) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (petite inégalité triangulaire)
h) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ $(a \geq 0)$

2.4.3 Distance entre deux points

Soit M et N deux points d'abscisses respectifs x et y. La distance entre ces deux points est le réel positif noté $d(x, y)$ et définit par $d(x, y) = |y - x|$.
Si $x = y$ alors $d(x, y) = 0$

2.4.4 Valeur absolue et intervalle

Soient a et r deux réels tel que r soit positif. On a alors :
$|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$
$|x - a| < r \Leftrightarrow x \in]a - r; a + r[$
$|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r] \bigcup [a + r; +\infty[$
$|x - a| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r[\bigcup]a + r; +\infty[$
De ce qui précède, On déduit l'équivalence entre les énoncés suivants :

a) $d(x,a) \leq r$ (en terme de distance)
b) $|x-a| \leq r$ (en terme de valeur absolue)
c) $a-r \leq x \leq a+r$ (en terme d'encadrement ou d'inégalité)
d) $x \in [a-r; a+r]$ (en terme d'intervalle)

2.5 Calcul approché

2.5.1 Valeur approchée

1. **Activité**
   La distance d entre deux villes est estimée à 350km avec une marge de 5km. Proposer un intervalle dans lequel d pourrai être située.Que dire donc ?
2. **Définitions**
   Définition 1 : Soit x et a deux réels et ϵ un réel positif. On dit que a est une valeur approchée de x à ϵ près si l'on a : $a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon$. ϵ est l'incertitude de la grandeur $x=a$. L'amplitude de cet encadrement est donné par $2\epsilon = (a+\epsilon)-(a-\epsilon)$.
   Définition 2 :
   – Un réel a est une valeur approchée d'un réel x à ϵ près par défaut si et seulement si $a \leq x \leq a+\epsilon$
   – Un réel a est une valeur approchée d'un réel x à ϵ près par excès si et seulement si $a-\epsilon \leq x \leq a$
   Exemple :

   Exercice d'application 2.5.1
   1) Traduire l'expression $x = 7,82$ à 2.10^{-2} près.
   2) Traduire les expressions suivantes en terme d'encadrement :
   a) 8,4 est la valeur approchée de x à 3.10^{-1} près par défaut.
   b) 3,75 est la valeur approchée de y à 5.10^{-2} près par excès

2.5.2 Approximation décimale

Soit $x = 6,1402593$

– $6 < x < 7$. On dit que 6 est l'approximation décimale de x d'ordre 0 par défaut.
– $6,1 < x < 6,2$.On peut dire que 6,2 est l'approximation décimale de x d'ordre 1 par excès.
– $6,140 < x < 6,141$.On peut dire que $6,141$ est l'approximation décimale de x d'ordre 3 par excès.

Exercice d'application 2.5.2

2.5.3 Opération sur les approximations

Considérons les encadrements de x et y donnés par :
$a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$. Comment détreminer les encadrements de $x+y$; $x-y$; xy ?

1. **Somme de deux réels**
   Soit les encadrements $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$. Alors on a :
   $a+c \leq x+y \leq b+d$.
   L'amplitude de l'encadrement de $x+y$ est la somme des amplitudes des encadrements de x et de y.

2. **Différence de deux réels**
   Pour encadrer $x - y$,, on encadre d'abors $-y$. On obtient $-d \leq -y \leq -c$. Ensuite on fait la somme membre à membre des encadrements de x et de $-y$. D'ou $a - d \leq x - y \leq b - c$.
   L'amplitude de cet encadrement est la somme des amplitudes des encadrements de x et de y.
3. **Produit de deux réels**
   Il n'y a pas de règle générale pour déterminer un encadrement du produit xy à partir de ceux de x et de y. On applique suivant les cas les règles de calcul dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
   Exemple : Si $2 < x < 3$ et $-4 < y < -1$, on encadre d'abors $1 < -y < 4$, puis $2 \times 1 < x \times (-y) < 3 \times 4$. Enfin on encadre $-x \times (-y)$. On a donc $-12 < xy < -2$.

2.5.4 Arrondi d'ordre n d'un réel

Considérons $\sqrt{5} \simeq 2,2360679$
- 2,2 est l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{5}$.
- 2,24 est l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{5}$
- 2,2361 est l'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{5}$

L'arrondi d'ordre n d'un réel x est la meilleur approximation décimale d'ordre n la plus proche de x.

2.5.5 Ordre de grandeur d'un résultat

Considérons x un réel. Il peut donc s'écrire sous la forme scientifique $a.10^p$. Soit α l'arrondie d'ordre 0 de a.Alors le nombre $\alpha.10^p$ est un ordre de grandeur de x
NB : L'ordre de grandeur d'un résultat n'est pas unique. Il varie en fonction du besoin de l'utilisateur.

2.5.6 Majorant, Minorant, Maximum, Minimum.

Définition 2.5.1
a) Un réel a est dit majorant d'un ensemble E si pour tout $x \in E$, $a \geq x$.
b) le réel a est un élément maximal ou maximum de E si en plus d'être un majorant de E, il appartient à E.
c) Le réel a est dit minorant de E si pour tout $x \in E$, on a $a \leq x$.
d) Le réel a estun élément minimal ou minimum de E si en plus d'être un minorant de E, il appartient à E.
e) Si E admet un minorant m et un majorant M, on dit que E est borné. On peut écrire que pour $x \in E$ on a $m \leq x \leq M$.

Exemple
Soit $E = [-3; 2[$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
- les réels 2 ;3 ;4 ;5,1 ;... sont des majorant de E. Cependant, Aucun des majorants n'appartient à E. Donc E n'a pas de maximum.
- Les réels ...-7,4 ;-6 ;-5,-4,-3 sont des minorants de E. De plus l'un des minorants $-3 \in E$. Donc -3 est le minimum de E.
- Comme E admet des minorants et des majorants, E est alors borné.

Remarque 2.2
1) Si E admet un majorant, on dit que E est majoré.
2) Si E admet un minorant, on dit que E est minoré.
3) Le maximum d'un ensemble s'il existe est le plus petit des majorants.
4) Le minimum d'un ensemble s'il existe est le plus grand des minorants

2.5.7 Troncature d'ordre n d'un réel

Soit x un réel. La troncature d'ordre n de x est son écriture avec n chiffres après la virgule.
Exemple
Considérons $\sqrt{5} \simeq 2,2360679$

- 2,2 est la troncature d'ordre 1 de $\sqrt{5}$.
- 2,23 est la troncature d'ordre 2 de $\sqrt{5}$

2.6 Proportionnalité dans $\mathbb{R}$

2.6.1 Suite proportionnelle-Tableau de proportionnalité

1. **Définition**
   a) Deux suites $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sont proportionnelles s'il existe un réel k tel que $y_1 = kx_1$; $y_2 = kx_2$;... ;$y_n = kx_n$. Le réel k ainsi définit est appelé Coefficient de proportionnalité des deux suites.
   b) Considérons le tableau suivant :

a	c
b	d

   où a, b, c et d sont des réels non nuls.
   Ce tableau est dit tableaau de proportionnalité si et seulement si $ad = bc$.
   Dans un tableau de proportionnalité, on a la relation suivante : $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
2. **Propriétés**
   Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ deux suites proportionnelles.
   a) Dans un repère quelconque, les points de coordonnées (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ;... ; (x_n, y_n) sont sur la même droite passant par l'origine du repère.
   b) Si de plus $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ alors :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

2.6.2 Pourcentage

1. **Pourcentage d'une quantité**
   Pour déterminer le pourcentage k d'une quantité, on multiplie cette quantité par $k/100$.
2. **Pourcentage et fraction**
   Pour traduire une fraction $\frac{a}{b}$ en pourcentage, on détermine cet élément inconnu x à l'aide de la relation $x = \frac{a}{b} \times 100$

3

Equations et Inéquations dans $\mathbb{R}$

3.1 Polynôme

3.1.1 Définition

On appelle fonction polynôme, toute fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui à tout élément x, on associe $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Les réels $a_n; a_{n-1}; ...a_1; a_0$ sont appelés les coefficients du polynôme. L"entier naturel n est le degré du polynôme définit. On peut donc noter :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
. $\quad x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

Remarque 3.1

- *Les polynômes de la forme a_nx^n $(a_n \neq 0)$ sont appelés des monômes.*
- *Toute fonction constante nulle est par convention une fonction polynôme sans degré et dont tous les coefficients sont nuls. C'est la fonction $f : x \mapsto 0$*
- *Toute fonction constante non nulle est une fonction monôme de degré 0. Elle est notée : $f : x \mapsto a$ $a \in \mathbb{R}$*
- *Toute fonction linéaire de la forme $f : x \mapsto ax$ est une fonction monôme de degré 1 et de coefficient $a \neq 0$.*
- *Les polynômes de degré 2 sont appelés trinômes du seconde degré. Elle est définit par : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$*

3.1.2 Opérations sur les polynômes

1. **Somme et produit de polynômes**
   Considérons deux polynômes $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$
   et $Q(x) = b_Nx^N + ... + b_1x + b_0$
   - les coefficients de $P + Q$ sont la somme des coefficients des monômes du même degré. Le degré de $P + Q$ est celui du monôme du plus haut degré.
   - Le polynôme PQ est obtenu selon les règles de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Le degré de PQ est la somme des degrés des monôme du plus haut degré de chaque polynômes $(n + N)$.
2. **Développement-Factorisation**
   - Developper reduire et ordonner les polynômes suivants
     $P(x) = (2x + 7)(x^2 - 3x + 8)$
     $Q(x) = (-x^3 + x^2 + 1)(2 - x^2) + 3x - 2x^3$

– Factoriser les polynômes suivants :
$F(x) = 5x^3 - 20x^2 + 20x$
$E(x) = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$

3. **Identités remarquables**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3.1.3 Zéro ou racine d'un polynôme

1. **Racine d'un polynôme**

Théorème 3.1.1
Soit $P(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$ un polynôme de degré n. On dit que a est un zéro ou une racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple

2. **Factorisation par $x - a$**

Théorème 3.1.2
Soit $P(x)$ un polynôme de degré n et a un réel.
Si $P(a) = 0$, alors on peut trouver un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Méthodes de Factorisation

– **Méthode de la division euclidienne**
Factorisation de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
a) Trouver d'abord une racine a de $P(x)$
b) Effectuons ensuite la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$
c) Déduire donc une factorisation de $P(x)$. Que retenir ?

Exercice d'application 3.1.1 *Factoriser par la méthode de la division euclidienne chacun des polynômes suivants :*
$F(x) = x^2 + 7x + 12$; $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

– **Méthode des coefficients indéterminés**
Factorisons $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
a) Cherchons d'abord une racine d de $Q(x)$.
b) Trouver trois réel a ; b et c tels que $Q(x) = (x-d)(ax^2 + bx + c)$
c) Que retenir donc ?

3.2 Polynôme du second degré

3.2.1 Définition

On appelle polynôme du second degré ou trinôme, toute fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x, on associe $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

3.2.2 Forme canonique d'un trinôme du second degré

Considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut donc l'écrire sous la forme $a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Cette forme est appelée la forme canonique du trinôme. On appelle discriminant et on note Δ le réel $b^2 - 4ac$

Exercice 3.2.1
Montrez l'égalité $ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Exercice d'application 3.2.1
Mettre les polynômes suivants sous leurs formes canoniques :
$3x^2 - 4x + 3$; $-x^2 - 2x + 6$

3.2.3 Equation du second degré

On appelle équation du second degré à une inconnue, tout expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (E).
Pour resoudre cette équation, il suffit dans la mesure du possible de factoriser le premier membre de l'équation, puis d'appliquer la propriété suivante :

Propriété 3.2.1
Soit A et B deux réels. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Cependant, pour factoriser le trinôme, on peut, soit utiliser la methode des coefficients indéterminés, soit la méthode de la division euclidienne, soit le mettre sous sa forme canonique.

Résolvons (E) par la méthode du discriminant.
Considérons l'équation $ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$.
Pour la résolution de cette équation, trois cas peuvent se presentées :

1^{er} **Cas :** $\Delta < 0$
Si $\Delta < 0$ alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0$ et comme $a \neq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \neq 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$. D'où $S_{\mathbb{R}} = \{\}$
2^e **Cas :** $\Delta = 0$
Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[(x + \frac{b}{2a})^2\right] = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a}) = 0$ car $a \neq 0$. Par suite $x = -\frac{b}{2a}$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique $x = -\frac{b}{2a}$ appelée solution double.
D'où $S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{b}{2a}\}$
3^e **Cas :** $\Delta > 0$
$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right] = 0 \Leftrightarrow a\left[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right] = 0$ d'où $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$

NB :
– Si $\Delta < 0$, alors le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$, la factorisation de $ax^2 + bx + c$ est $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$
- Si $\Delta > 0$ et x_1, x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3.2.4 Inéquation du second degré

Les expressions $ax^2+bx+c < 0$ (ou $ax^2+bx+c \leq 0$) et $ax^2+bx+c > 0$ ou($ax^2+bx+c \geq 0$)sont appelées inéquations du second degré à une inconnue. Pour resoudre ces inéquations, il est important de factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$ puis d'étudier le signe de chaque facteur.Cela doit permettre de déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ en vu d'une solution de l'inéquation en question.Ainsi :

Signe de $ax^2 + bx + c$

Soit $ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c = \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a
- Si $\Delta = 0$, alors $(x + \frac{b}{2a})^2 > 0$ et donc le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a
- Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 et donc :
  1. Si $a > 0$ le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur des racines.
  2. Si $a < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur des racines.

  En conclusion on déduit que le trinôme est du signe de a à l'exterieur de racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

Tableau récapitulatif

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a) \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. On a :

	Factorisation de $P(x)$	Solution de $P(x) = 0$	Signe de $P(x)$
$\Delta < 0$	Non factorisable sur $\mathbb{R}$	$S_{\mathbb{R}} = \{\}$	signe de a sur $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$	$S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{b}{2a}\}$	Signe de a sur $\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$P(x) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times \left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$	$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$	Signe de a à l'extérieur des racin et signe de $-a$ à l'intérieur

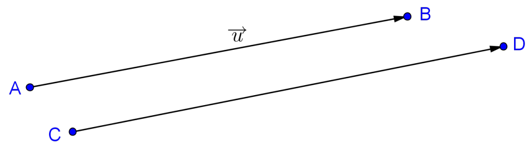
4

Vecteur du plan

4.1 Vecteurs : Notions-Définitions-Propriétés

4.1.1 Définitions et propriétés

1. **Définition**
   Soient A,B, C et D des points du plan. Considérons les couples de points ou bipoints (A,B) et (D,C). On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan de representant (A,B), l'ensemble des bipoints (D,C) tel que ABCD forme un parallélogramme.
   On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. les bipoints (A,B) et (D,C) sont des representants de $\overrightarrow{u}$.



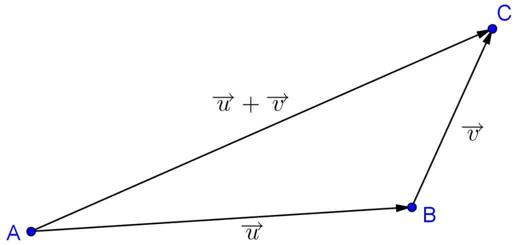
2. **Propriétés**

   Propriété 1 :
   Soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.

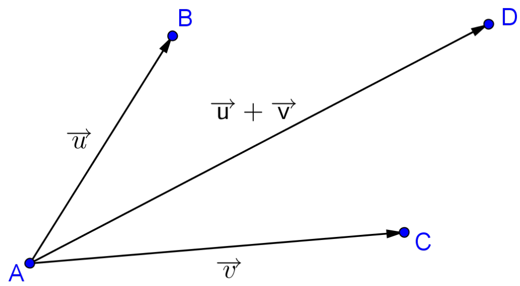
   Propriété 2 :
   Soient A, B, C et D des points du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   – $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   – $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
   AD et [BC] ont le même milieu.
3. **Egalité vectorielle**
   – $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.
   – $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si la translation qui transforme A en B est la même qui transforme D en C.
4. **Normes d'un vecteur**
   Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de representant (A,B). On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ le réel noté $\|\overrightarrow{u}\|$ et définit par $\|\overrightarrow{u}\| = AB$
   On appelle vecteur unitaire, tout vecteur dont la norme vaut 1.

4.1.2 Calculs vectoriels

1. **Addition vectorielle a) Relation de Chasles :**
   Soient A, B, et C trois points du plan. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = AC$



   b) Méthode du parrallélogramme
   Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de même origine A tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Il existe donc un ponit D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



   c) Propriétés
   Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs du plan, on a :
   - Commutativité : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
   - Associativité : $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$
   - Element neutre pour l'addition : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$. $\overrightarrow{0}$ est donc l'élément neutre pour l'addition vectorielle.
   - Elément opposé : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{(-u)} = \overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{-u}$ est alors l'opposé de $\overrightarrow{u}$
   - Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ (inégalité triangulaire)

2. **Produit d'un vecteur par un réel**

   a) Définition
   Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul ; k un réel non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le produit de $\overrightarrow{u}$ par le réel k. Il est :
   - Pour direction celle de $\overrightarrow{u}$.
   - Pour sens :
     a) Celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$
     b) Celui de $-\overrightarrow{u}$ si $k < 0$
   - Pour norme $\|ku\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$

   Par ailleurs si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

   b) Propriétés
   Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs et a, b des réels. On a :
   - $1 \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
   - $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
   - $(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$

- $a \times (b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

4.1.3 Vecteurs et configuration

1. **Combinaison linéaire**

   Définition 4.1.1
   Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs et λ, β des réels. Le vecteurs de la forme $\lambda\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coefficients respectifs λ et β.

2. **Colinéarité de vecteurs**

   Définition 4.1.2 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si l'un des deux est nul ou si les deux vecteurs étant non nuls, ont la même direction.*

   Propriété 4.1.1
   Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel non nul tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}$.

   - Si $k > 0$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont le même sens.
   - Si $k < 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires.

   Propriété 4.1.2
   Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et λ, β deux réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   - *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont Colinéaires.*
   - $\lambda\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (\lambda, \beta) \neq (0, 0)$

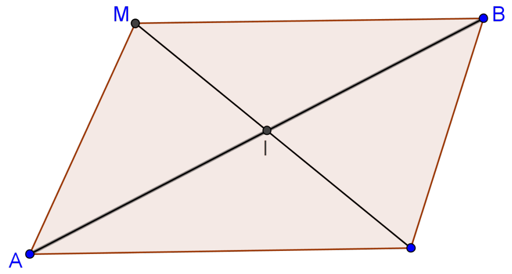
   Remarque 4.1
   Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe k un réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
   - *Si $k = -1$ alors B et C sont symétriques par rapport à A*
   - *Si $k = 2$ alors B est le milieu du segment $[AC]$.*

3. **Alignement de trois points**
   - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si A, B et C sont alignés
   - Deux points A et B étant donnés, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires est la droite (AB).

4. **Milieu d'un segment**

   a) Soient A, B et I tois points du plan. Les propositions suivantes sont équivalentes.
   - I est milieu de [AB]
   - $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
   - $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

   b) I est milieu de [AB] si et seulement si pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$



c) Théorème des Milieux
ABC est un triangle. M est le milieu de [AB] et N celui de [AC]. Alors $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

5. **Vecteur et centre de gravité d'un triangle**
Activité
Soit ABC un triangle, I, J, et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC]. Construire les médianes issus des sommets A, B et C du triangle. Soit G le point de rencontre de ces médianes.
Vérifier que $AG = \frac{2}{3}AK$; $BG = \frac{2}{3}BJ$ et $CG = \frac{2}{3}CI$.
Que vaut $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$?

Propriété 4.1.3
Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

4.2 Mésure algébrique d'un vecteur

4.2.1 Définition

1. **Vecteur directeur d'une droite**
On appelle vecteur directeur d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ ayant la même direction que $(\mathcal{D})$.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul et colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est un autre vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. **Mésure algébrique d'un vecteur.**
Considérons deux points A et B d'une droite $(\mathcal{D})$ d'abscisses respectifs x_A et x_B dont $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires. Il existe alors un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{u}$.
Ce réel k est la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ relativement à $\overrightarrow{u}$. On la note $\overline{AB}$. Elle est définie par $\overline{AB} = x_B - x_A$. Ainsi on a $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\overrightarrow{u}$.
Exemple :

4.2.2 Propriétés

Soient A, B et C trois points et λ un réel, on a :
- $|\overline{AB}| = AB$
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

NB : $AB = |x_B - x_A| \neq \overline{AB} = x_B - x_A$

4.3 Bases et repères du plan

Dans cette partie, on notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

4.3.1 Bases de $\mathcal{V}$

1. **Définitions**
   On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple de vecteurs non colinéaires.
   Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $\mathcal{V}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique couple de réel (x, y) tel que dans cette base, $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$
2. **Coordonnées de vecteurs**

   Définition 4.3.1
   On appelle coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ l'unique couple (x, y) tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On note $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$

   Propriété 4.3.1
   Soient $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$, $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs et λ un réel. Alors :
   – $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x', \\ y = y', \end{cases}$
   – $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\binom{x+x'}{y+y'}$
   – $(\lambda\overrightarrow{u})\binom{kx}{ky}$
   – $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *colinéaire équivaut à* $xy' = x'y$

4.3.2 Repère du plan

1. **Définitions**
   Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et O un point du plan. On appelle repère du plan le triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   Le point O est appelé origine du repère. De plus :
   – Lorsque $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux, le repère est dit orthogonal.
   – Lorsque $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\|$, le repère est dit normé.
   – Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux et ont pour norme la même unité, alors le repère est dit orthonormé.
2. **Propriétés**
   Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B), y_B$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors :
   – $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$
   – K milieu de [AB] équivaut à $K\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
   – $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ et si $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   – Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$
3. **Déterminant de vecteurs**

   Définition 4.3.2
   Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On appelle déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ relativement à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le nombre noté dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et définit par dét$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Théorème 4.3.1
Deux vecteurs de $\mathcal{V}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Propriété 4.3.2
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs dauns une base de $\mathcal{V}$. On a donc :
- *dét*$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ =-*dét*$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
- *dét*$[(a\overrightarrow{u}, b\overrightarrow{v})] = ab$ *dét*$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
- *dét*$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ =*dét*$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$+*dét*$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$

5

Fonction Numériques : Génération et Description

5.1 Généralité et Description des fonctions

5.1.1 Notion et Définition de la fonction

En mathématiques tout comme dans les sciences physiques, l'outils qui permet d'évaluer la variation d'une grandeur par rapport à une autre est la notion de fonction. Ainsi il existe plusieurs procédés permettant de définir cette relation de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs :

– La formule explicite : Elle exprime clairement une relation de dépendance entre deux variables.
Exemple :
Le volume V d'une sphère de rayon R est donné par la formule $V = \frac{4}{4}\pi R^3$
R et V sont deux quantités variables dont l'un dépend de l'autre.

– Le tableau de données
Exemple :
En physique la tension U d'un dipole est obtenue en faisant passer du courant I dans un circuit.
On considère donc le tableau :

I(mA)	0	50	120	200	300
U (V)	0	4	7	12	15

Pour chaque variation de I, correspond une valeur de U. Soit f la relation qui permet d'avoir une valeur de U lorsqu'une valeur de I nous ait donnée. On a $U = f(I)$

– Le graphiques
Considérons la figure :

Complétons le tableau :

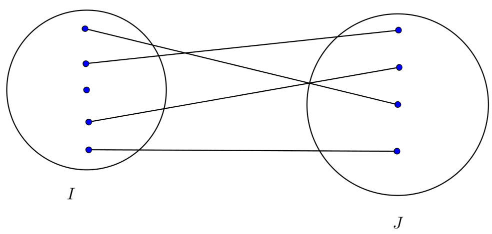
x					
f(x)					

Il permet donc de définir une fonction f

– Touche d'une Calculatrice.
Considérons les touches suivantes d'une calculatrice : $\sqrt{x}$, e^x, tan, cos, sin...
Ces touches permettent de definir des fonctions.

Exemple
Considérons la réalisation des touches suivantes :
1) Choisir un réel x
2) Elever au carré
3) Diviser par 3
4) Prendre l'opposé
5) Ajouter 2
6) faire l'inverse
7) Prendre la racine carrée
Quelle fonction de x peut-on définir avec ce programme ?

Définition 5.1.1
Soient I et J deux ensembles non vides. On dit qu'une relation entre I et J est une fonction lorsque à tout élément de I, elle associe au plus un élément de J. On schématise cette relation par :



Vocabulaire et Notation
Si f est une fonction de I vers J à qui associe $f(x)$, on note
$f : I \to J$ ou $f : I \to J\, ;\, x \mapsto f(x) = y$
. $x \to f(x) = y$
I est donc l'ensemble de départ et J est l'ensemble d'arrivée de la fonction f. le réel x est l'antécédent par f de y. Aussi y est l'image par f de x

Définition 5.1.2
Soit $f : I \to J$ une fonction.
- *Si J est un ensemble de réels, on dit que f est une fonction numérique.*
- *Si I est un ensemble de réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle*

Définition 5.1.3
L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe. On le note $\mathcal{D}_f$ et il est définit par $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash\ f(x)\ existe\}$

Exercice d'application 5.1.1
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{-x+5} \qquad g(x) = \frac{3x}{2-|x|} \qquad h(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{2x}$$

Définition 5.1.4
Le plan étant muni d'un repère, considérons f une fonction numérique d'une variable réelle. On appelle representation graphique ou courbe representative de f, l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où x prend successivement toutes les valeurs de $\mathcal{D}_f$

Notation et vocabulaire
On note $\mathcal{C}_f$. Aussi $M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

5.1.2 Egalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g définie sur un ensemble E sont égales ou coincident sur cet ensemble si et seulement si pour tout $a \in E$ on a $f(a) = g(a)$.

5.2 Etude graphique d'une fonction

5.2.1 Parité d'une fonction

Définition 5.2.1

– *On dit qu'un ensemble $I \in \mathbb{R}$ est centré en 0 si et seulement si pour tout $x \in I$, on vérifie que $-x \in I$.*

– *Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas centré en 0, alors l'étude de la parité de f n'est pas possible. si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, alors :*
a) Si de plus $f(-x) = f(x)$ on dit que f est une fonction paire.
b) Si de plus $f(-x) = -f(x)$, on dit que f est une fonction impaire.
c) Si De plus $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, on dit que la fonction f n'est ni paire, ni impaire

Propriété 5.2.1
Le plan étant munit d'un repère orthogonal, considérons f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
– *Si f est paire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.*
– *Si f est impaire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.*
– *Si f n'est ni paire, ni impaire alors $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune conséquence immédiate.*

Exercice d'application 5.2.1

5.2.2 Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite periodique si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, il existe un réel T non nul tel que $x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$. Le réel T ainsi définie est appélé période de la fonction f.

5.2.3 Extrémums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.
– On dit que f admet un minimum sur I en x_0 si $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur I. C'est-à-dire pour $x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$.
– On dit que f admet un maximum sur I en x_0 si $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur I. C'est-à-dire que pour tout $x \in I$ on a $f(x_0) \geq f(x)$

Définition 5.2.2
On appelle extrémum de f sur I, tout maximum ou minimum de f sur I.
On dit que f admet un extrémum relatif sur I s'il existe un intervalle $J \in I$ tel que $x_0 \in J$, $f(x_0)$ est un extémum de f.

Exercice d'application 5.2.2
La fonction f representée par la courbe ci-dessous admet-elle des extremums sur $\mathcal{D}_f$? Si oui précisez les.

5.2.4 Images d'une fonction

1. **Image et antécédents d'un réel**
   Soit $f : E \to F$ une fonction, $a \in E$ et $b \in F$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe representative de f.

   Définition 5.2.3
   On appelle image de a par f, si elle existe, l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $x = a$.

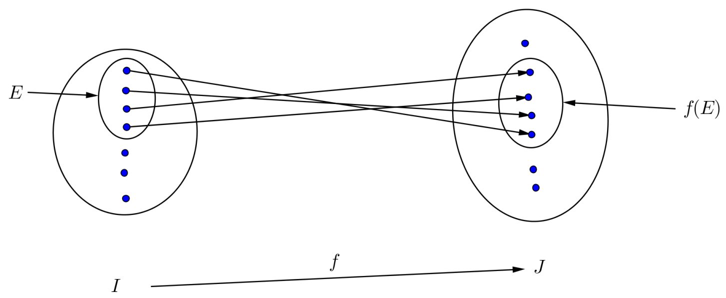
   L'image de a par f est notée $f(a)$.
   Le schémas suivant est donc illustratif.

   Définition 5.2.4
   On appelle antécédents de b par f, les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = b$

2. **Image directe d'un ensemble**
   Soit $f : I \to J$ une fonction et $E \subset I$.

   Définition 5.2.5
   On appelle image direct de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E.

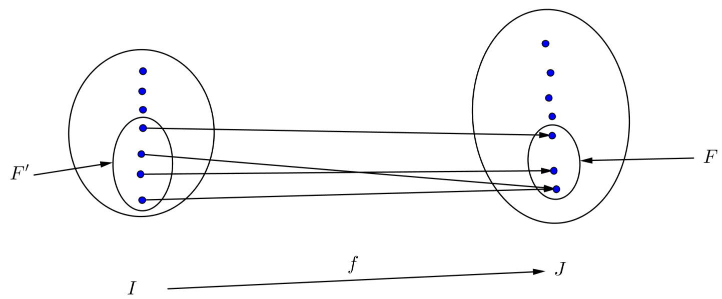
   On le note $f(E)$. Une illustration peut être donnée par le schémas :



3. **Image réciproque d'un ensemble**
   Soit $f : I \to J$ une fonction et $F \subset J$.

   Définition 5.2.6
   On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de F

   Ainsi donc on peut avoir un schéma comme suit :



Exercice d'application 5.2.3

5.3 Variations d'une fonction

5.3.1 Sens de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

– f est constante sur I si et seulement si pour tout $u,\ v \in I$ tels que $u \leq v$, on a $f(u) = f(v)$
– f est croissante (resp strictement croissante) sur I si et seulement si pour tout $u,\ v \in I$ tels que $u \leq v$, on a $f(u) \leq f(v)$ (resp $f(u) < f(v)$)
– f est décroissante (resp strictement décroissante) sur I si et seulement si pour tout $u,\ v \in I$ tels que $u \leq v$, on a $f(u) \geq f(v)$ (resp $f(u) > f(v)$)

5.3.2 Monotonie

Une fonction f est monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est soit constante, soit croissante, soit décroissante sur I.

5.3.3 Tableau de variations

Etudier les variations d'une fonction f c'est preciser les intervalles sur lesquels elle est monotone. Les résultats de cette étude sont pour une meilleure exploitation, consignés dans un tableau appelé tableau de variations de la fonction f.

Exemple 1 :
Soit $f : [a; b] \to J$ une fonction numérique à variables réelles. Soit $x_0 \in [a; b]$. Supposons que f est croissante sur $[a; x_0]$ et décroissante sur $[x_0; b]$, on a le tableau suivant :

x	a		x_0		b
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

$f(x_0)$ est dans ce cas un maximum de f sur $[a; b]$

Exemple 2 :
Soit $f : [a; b] \to J$ une fonction numérique à variables réelles. Soit $x_0 \in [a; b]$. Supposons maintenant que f est decroissante sur $[a; x_0]$ et croissante sur $[x_0; b]$, on a le tableau suivant :

x	a		x_0		b
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

f admet ici un minimum sur $[a; b]$ en x_0

Exercice d'application 5.3.1

5.3.4 Taux de variation ou d'accrossement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et soient x_1, $x_2 \in I$ $(x_1 \neq x_2)$. Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 noté $T_{(x_1,x_2)}f$ est le réel

$$T_{(x_1,x_2)}f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Remarque 5.1

- *Si* $T_{(x_1,x_2)}f \geq 0$ *sur* I*, alors* f *est croissante sur* I
- *Si* $T_{(x_1,x_2)}f \leq 0$ *sur* I*, alors* f *est décroissante sur* I
- *Si* $T_{(x_1,x_2)}f = 0$ *sur* I*, alors* f *est constante sur* I

6

Fonctions de reférence

6.1 Fonction linéaire et affine

6.1.1 Définitions et notations

On appelle fonction affine tout fonction numérique f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.
On note $f : \mathbb{R} \to R$
. $\quad x \mapsto ax + b$ Aussi on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
Le réel a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.
Si $b = 0$ alors f est appélé fonction linéaire.

6.1.2 Parité de $f : \mathbb{R} \to R$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in \mathcal{D}_f$

1. **f est une fonction affine**
   $f(-x) = -ax + b = -(ax - b) \Leftrightarrow f(-x) \neq -f(x)$ et $f(-x) \neq f(x)$. D'ou f n'est ni paire ni impaire.
2. **f est une fonction linéaire**
   $f(-x) = -ax = -f(x)$. D'ou f est impaire.

6.1.3 Variations de $f : \mathbb{R} \to R$

1. **Sens de variations de f**
   - $a \geq 0$
     Soit u, v deux réels tels que $u \leq v$, on
     $f(u) - f(v) = au + b - av - b = a(u - v) \leq 0$.donc $f(u) - f(v) \leq 0 \Leftrightarrow f(u) \leq f(v)$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$
   - $a \leq 0$
     Soit u, v deux réels tels que $u \leq v$, on
     $f(u) - f(v) = au + b - av - b = a(u - v) \leq 0$.donc $f(u) - f(v) \geq 0 \Leftrightarrow f(u) \geq f(v)$ d'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$
2. **Tableau de variation**

   - $a \geq 0$
     * Soit x un réel prenant des valeurs de plus en grande (on dit que x tend vers $+\infty$ et on note $x \to +\infty$). Alors $ax \to +\infty$ et donc $ax + b \to +\infty$. d'où $f(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$

* Si x devient de plus en plus petit par valeurs négative ($x \to -\infty$) alors $ax \to -\infty$ et donc $ax + b \to -\infty$. d'où $f(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$
Par suite on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
		$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	
	$-\infty$	

– $a \leq 0$ * Si $x \to +\infty$), alors $ax \to -\infty$ et donc $ax + b \to -\infty$. d'où $f(x) \to -\infty$ si $x \to +\infty$
*Si $x \to -\infty$ alors $ax \to +\infty$ et donc $ax + b \to +\infty$. d'où $f(x) \to +\infty$ si $x \to -\infty$
Par suite on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	
$f(x)$	$\searrow$	
		$-\infty$

3. **Representation graphique**
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + b$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe representative dans un repère orthogonal. $\mathcal{C}_f$ est une droite d'équation $y = ax + b$. Si $b = 0$, $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère.
4. **Exemples de fonction affine**

– **La fonction identitée** définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Sa corbe representative est appelée " la première bissectrice".
– **La fonction opposée** définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$. Sa courbe representative est appelée "la deuxième bissectrice".
– **La fonction affine par intervalles**

Définition 6.1.1
Une fonction affine par intervalle (ou par morceau) est toute fonction numérique à variables réelles dont l'ensemble de définition est la réunion d'intervalles sur chacun desquels elle est une fonction affine.

Exemples 1
Soit f, la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -2x + 5, & \text{si } x \in [-14; 1[\\ f(x) = x + 2, & \text{si } x \in [1; 3[\\ f(x) = -x + 8, & \text{si } x \in [3; +\infty[\end{cases}$

Sur chacun des intervalles $[-14; 1[$; $[1; 3[$; $[3; +\infty[$, f coincide avec une fonction affine.
f est donc une fonction affine par intervalle et $\mathcal{D}_f = [-14; 1[\bigcup[1; 3[\bigcup[3; +\infty[= [-14; +\infty[$

Définition 6.1.2
Si sur chaque intervalle f coincide avec une fonction constante, alors f est appelée fonction en escalier.

Exemple 2

La fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -3, & \text{si } x \in [-7; 0[\\ f(x) = 2, & \text{si } x \in [1; 5[\\ f(x) = 8, & \text{si } x \in [5; +\infty[\end{cases}$

est une fonction en escalier.

– **La fonction partie entière** : Elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x)$ est aussi une fonction en escalier.

Définition 6.1.3

Soit k un entier relatif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $k \leq X < k + 1$, alors la partie entier de x est $E(x) = k$.

C'est le plus petit entier immédiatement plus petit ou égal à x.

6.2 Fonctions Usuelles ou de reférence

L'étude des fonction nécessite son analyse sur : Son ensemble de définition ; Sa parité (eventuellement sa périodicité) ; Ses variations et sa representation graphique.

6.2.1 La fonction valeur absolue

Elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \to |x|$

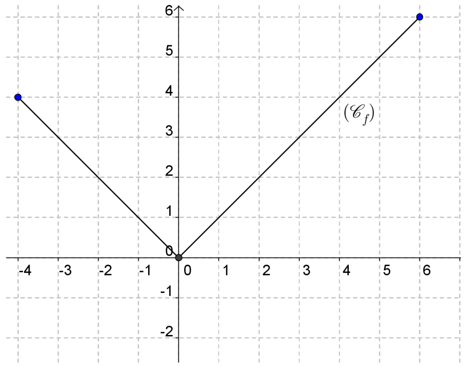
1. **Ensemble de définition**
   La fonction f est une fonction affine par intervalle et on a :
   $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
   Ainsi donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. **Parité**
   Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors on a $-x \in \mathcal{D}_f$. Aussi
   $f(-x) = |-x| = |-1| \times |x| = |x| = f(x)$. f est donc une fonction paire.
3. **Variations de la fonction**

   – **Sens de variations**
   Soit $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
   Considérons u, v deux réels tel que $u \leq v$
   * Si $u, v \in [0; +\infty[$, $f(u) - f(v) = u - v \leq 0 \Leftrightarrow f(u) \leq f(v)$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$
   * Si $u, v \in]-\infty; 0]$, $f(u) - f(v) = -u + v = -(u - v) \geq 0 \Leftrightarrow f(u) \geq f(v)$ donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$

   – **Tableau de variations**
   * Si $x \to -\infty$, on a $|x| = -x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
   * Si $x \to +\infty$, on a $|x| = x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
   On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$+\infty$	0	$+\infty$

4. **Representation graphique** La fonction f étant paire alors sa courbe est symétrique par rapport a l'axe des ordonnées du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Elle est constituée de deux demie-droite d'origine O(0,0). Ainsi on a la figure :



6.2.2 La fonction Carré

Elle est définie par de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \to x^2$

1. **Ensemble de définition**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ a un sens. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. **Parité**
Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in \mathcal{D}_f$ et
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. f est donc une fonction paire.

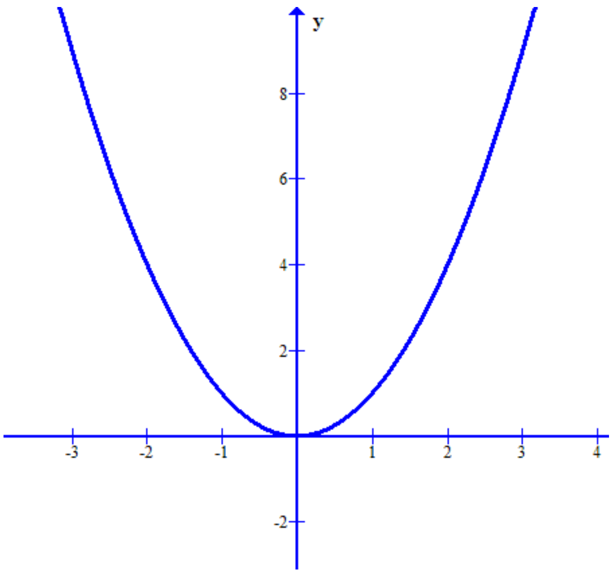
3. **Variations de la fonction**
Soient u, $v \in \mathbb{R}$ deux réels .

   – **Sens de variations**
   *Si u, $v \in]-\infty; 0]$ tel que $u \leq v \Rightarrow u^2 \geq v^2 \Rightarrow f(u) \geq f(v)$. f est donc décroissante sur $]-\infty; 0]$
   *Si u, $v \in [0; +\infty[$ tel que $u \leq v \Rightarrow u^2 \leq v^2 \Rightarrow f(u) \leq f(v)$. f est donc croissante sur $[0; +\infty[$

   – **Tableau de variations**
   * Si $x \to -\infty$, on a $x^2 \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
   * Si $x \to +\infty$, on a $x^2 \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
   On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4. **Representation graphique**
   $f : x \to x^2$ étant paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $\mathcal{C}_f$ est une parabole d'axe verticale de sommet O(0,0).



6.2.3 La fonction Cube

Elle est définie par de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \to x^3$

1. **Ensemble de définition**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ a un sens. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. **Parité**
   Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in \mathcal{D}_f$ et
   $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. f est donc une fonction impaire.
3. **Variations de la fonction**
   Soient u, $v \in \mathbb{R}$ deux réels .

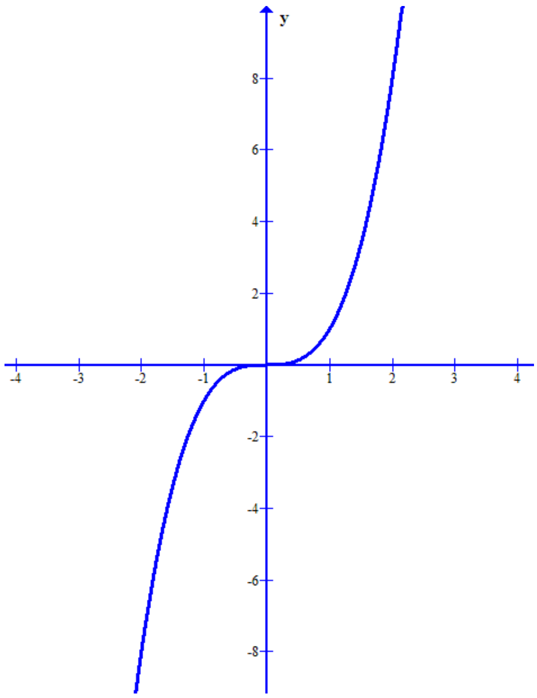
   – **Sens de variations**
   *Si u, $v \in]-\infty; 0]$ tel que $u \leq v \Rightarrow u^3 \leq v^3 \Rightarrow f(u) \leq f(v)$. f est donc croissante sur $]-\infty; 0]$
   *Si u, $v \in [0; +\infty[$ tel que $u \leq v \Rightarrow u^3 \leq v^3 \Rightarrow f(u) \leq f(v)$. f est donc croissante sur $[0; +\infty[$

   – **Tableau de variations**
   * Si $x \to -\infty$, on a $x^3 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
   * Si $x \to +\infty$, on a $x^2 \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^3	$-\infty$	-8	0	8	$+\infty$

4. **Representation graphique**
f est impaire. $\mathcal{C}_f$ est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. Elle est donc centrée en l'origine.



6.2.4 La fonction racine carrée

Elle est définie par de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \to \sqrt{x}$

1. **Ensemble de définition**
Soit $f : x \to \sqrt{x}$. Le réel $f(x)$ n 'a de sens que si $x \geq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$

2. **Parité**
Soit $f : x \to \sqrt{x}$, on a aussi $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$.
Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in]-\infty; 0] \neq \mathcal{D}_f$. L'étude de la parité de f n'est pas possible.

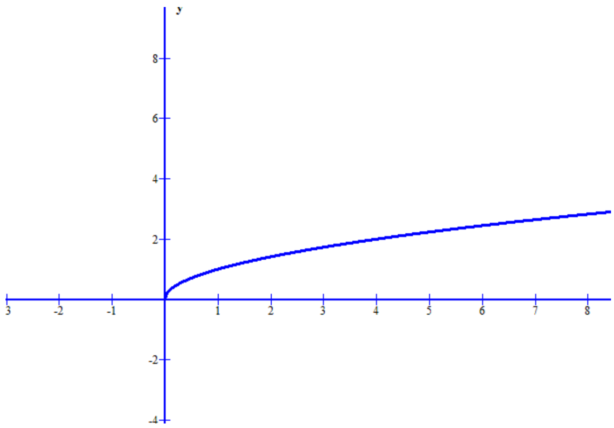
3. **Variations de la fonction**
Soient u, $v \in \mathbb{R}$ deux réels positifs

– **Sens de variations**
Si $u \leq v$, alors $\sqrt{u} \leq \sqrt{v} \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

– **Tableau de variations**
* Si $x \to 0 \Rightarrow \sqrt{x} \to 0$ donc $f(x) \to 0$
* Si $x \to +\infty$, on a $\sqrt{x} \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

x	0		16		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	4	↗	$+\infty$

4. **Representation graphique**
Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe de f est une demie-parabole d'axe (OI) et d'origine le sommet O(0,0) Comme le montre la figure ci-dessous.



6.2.5 La fonction inverse

Elle est définie par de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : x \to \dfrac{1}{x}$

1. **Ensemble de définition**
Soit $f : x \to \dfrac{1}{x}$. Le réel $f(x)$ n 'a de sens que si $x \neq 0$. Donc
$\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\bigcup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$

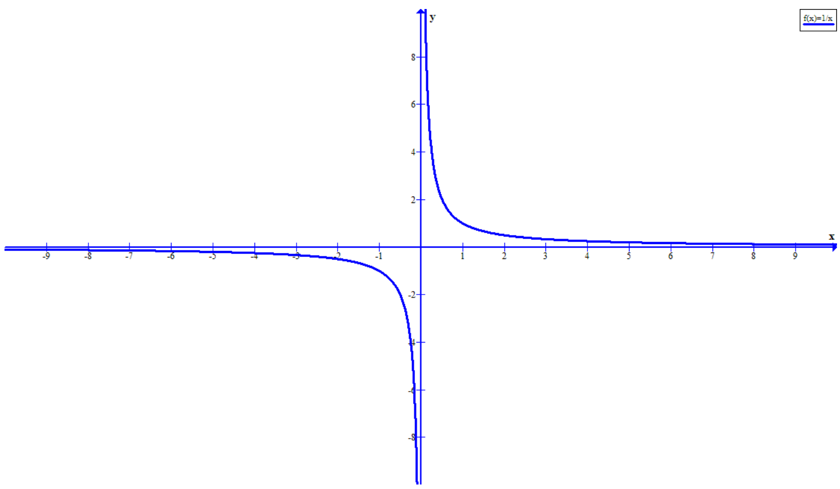
2. **Parité**
Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $x \in]-\infty; 0[\bigcup]0; +\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty; 0[\bigcup]0; +\infty[$ et
$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. f est donc impair.

3. **Variations de la fonction**
Soient u, $v \in \mathbb{R}$ deux réels non nuls tel que $u \leq v$

- **Sens de variations**
  * Si $u,\ v \in]-\infty; 0[$, on a $-u \geq -v > 0 \Rightarrow \frac{1}{-u} \leq \frac{1}{-v} \Rightarrow \frac{1}{u} \geq \frac{1}{v}$. f est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$.
  * Si $u,\ v \in]0; +\infty[$, on a $0 < u \leq v \Rightarrow \frac{1}{u} \geq \frac{1}{v} \Rightarrow f(u) \geq f(v)$. D'où f est décroissante sur $]0; +\infty[$
- **Tableau de variations**
  * Si $x \to -\infty$, alors $\frac{1}{x} \to 0$
  * Si $x \to +\infty$, alors $\frac{1}{x} \to 0$
  * Si $x \to 0$, alors $\frac{1}{x} \to -\infty$ ou $+\infty$ suivant le signe de x
  On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

4. **Representation graphique**
   La fonction f étant impaire, la courbe de $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre O(0,0) et se represente comme suit :



6.3 Utilisation des fonctions de reférence

Pour de nombreuses fonctions composées, les études se font en reférence à celles faites sur les fonctions usuelles. Leurs propriétés correspondent à celles des fonctions de reférence dans une nouvelle définition. Ainsi des étapes nous permettent de resoudre ce probleme de Redéfinition.

1. Relation de chasles, passage aux coordonnées. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère et $\Omega(a, b)$ un point du plan. Considérons M(x,y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et M(X,Y) dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.Ainsi :
   Expression vectorielle

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{O\Omega} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{\Omega M} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}$

Relation de Chasles
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} &= (a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}) + (X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}) \\ &= (X+a)\overrightarrow{i} + (Y+b)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

D'après l'égalité vectorielle on a : $\begin{cases} x = X + a, \\ y = Y + b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - a, \\ Y = y - b, \end{cases}$

2. Détermination d'une nouvelle équation de la courbe de la fonction dans un nouveau repère.
3. Tracé de la courbe : allure similaire à celles des fonctions de reférence.
4. Usage de la representation graphique pour obtenir les propriétés de la fonction.

Exercice d'application 6.3.1
Considérons la fonction f définie par $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe representative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $\Omega(2; -1)$ un point du repère. Montrez que $\mathcal{C}_f$ coïcide avec celle de la fonction $f : X \mapsto X^2$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. En déduire une construction de $\mathcal{C}_f$.

Exercice d'application 6.3.2
Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ une fonction rationnelle.

1. *Déterminer $\mathcal{D}_f$.*
2. *Ecrire la forme canonique de f (ecrire sous forme $a + \frac{b}{x-1}$).*
3. *Montrez que la courbe de f coïncide avec celle d'une fonction de reférence dans un nouveau repère dont on précisera les coordonnées.*
4. *Construire la courbe de f.*

7

Equation de droite-Système d'équations et d'inéquations linéaires

7.1 Equations de droites

7.1.1 Equation cartésienne d'une droite

1. **Equation d'une droite passant par un point**
   Dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons les ponit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Soit M(x,y) un point du plan appartenant à (AB). On a donc $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AM}$. C'est-à-dire dét$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$
   Par developpement et réduction on a :
   $$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A y_B + x_B y_A = 0 \tag{7.1}$$
   Posons $a = (y_B - y_A)$; $b = -(x_B - x_A)$; $c = -x_A y_B + x_B y_A$
   De (1) on a $ax + by + c = 0$ $(a, b) \neq (0, 0)$. Cette équation ainsi définie est appelé équation cartésienne de la droite (AB)

   Remarque 7.1

   – *Si c=0 alors la droite passe par l'origine du repère*
   – *Si b=0 alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.*
   – *Si a=0 alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses.*
   – *L'axe (Oy) à pour équation $x = 0$ et l'axe (Ox) à pour équation $y = 0$*

   Exercice d'application 7.1.1

2. **Equation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné**
   Considérons dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une droite passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{\alpha}{\beta}$. Une telle droite est notée $d(A, \overrightarrow{u})$.
   Soit $M(x, y) \in d(A, \overrightarrow{u})$, alors $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$
   $\Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$
   En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$, l'équation ci-dessus devient $ax + by + c = 0$
   Remarque : Soit $ax + by + c = 0$ l'équation d'une droite $\mathcal{D}$. Elle a
   * Pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$
   * Pour coefficient directeur le réel $m = -\frac{a}{b}$
   * Pour ordonnée à l'origine le réel c

Exercice d'application 7.1.2

7.1.2 Equation réduite d'une droite

1. **Définition**
Toute droite (Δ) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$, $m, p \in \mathbb{R}$.
Le réel m est appelé coefficient directeur ou pente de la droite et p est l'ordonnée à l'origine.
De plus :
– Le vecteur $\overrightarrow{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de (Δ).
– Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de (Δ) alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

2. **Droite passant par un point et de coefficient directeur donné**
La droite passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de coefficient directeur m à pour équation $y - y_A = m(x - x_A)$.

3. **Parallélisme et orthogonalité**
Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons les droites (Δ) et (Δ') de coefficients directeurs respectifs m et m'. On a les résultats suivants :
– $(\Delta) \parallel (\Delta') \Leftrightarrow m = m'$
– $(\Delta) \perp (\Delta') \Leftrightarrow m \times m' = -1$

7.1.3 Representation paramétrique d'une droite

1. **Exemple d'étude**
Considérons la droite (D) passant par $A(2; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-1}{-2}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $M(x, y)$ un point du plan tel que $M \in (D)$.
$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que
$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t(-1), \\ y - 1 = t(-2), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t + 2, \\ y = -2t + 1, \end{cases}$
Le système $\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = -2t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ est la representation paramétrique de la droite (D) au point A et de paramètre t

2. **Définitions**
Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons une droite (Δ) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{\alpha}{\beta}$. On appelle representation paramétrique de la droite (Δ) le système
$\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = -2t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. **Passage d'une representation paramétrique à une droite cartésienne**
Activité :
Donner une équation cartésienne de la droite définie par la representation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 1 + 2t, \quad t \end{cases}$
– **1ère Méthode**
Soit (D) la droite définie par $d(A; \overrightarrow{u})$. avec $A(3; 1)$ et $\overrightarrow{u}\binom{-1}{2}$. On détermine une équation cartésienne de (D) en de la sorte.
Pour tout point $M \in (D)$, $\overrightarrow{AM}$ colnéaire à $\overrightarrow{u}$, on a :

dét$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) - (-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 + y - 1 = 0$
d'où (D) : $2x + y - 7 = 0$

– **2ème Méthode :** On élimine t entre x et y
Soit $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - x, \\ t = \dfrac{y-1}{2}, \end{cases}$
En identifiant t, on a $3 - x = \dfrac{y-1}{2} \Leftrightarrow 6 - 2x = y - 1 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$
d'où (D) : $2x + y - 7 = 0$

4. **Passage d'une équation cartésienne à une representation paramétrique**
   Activité
   Considérons la droite (D) d'équation $-x + 2y + 4 = 0$ passant par $A(2; -1)$.
   Déterminer la representation paramétrique de (D)

   Soit (D) : $-x + 2y + 4 = 0$. Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-2}{-1}$. Soit $M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t(-2), \\ y + 1 = t(-1), \end{cases}$
   d'où$\begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

7.2 Système d'Equations linéaire

7.2.1 Equation linéaire à deux inconnus

1. **Définition**
   On appelle équation linéaire avec pour inconnu le couple de réels (x, y), toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels appelé des coefficients.
   Résoudre une telle équation dans $\mathbb{R}^2$, c'est trouver tous les couples (x_0, y_0) de réels vérifiant cette équation. C'est-à-dire $ax_0 + by_0 + c = 0$
2. **Interpretation géométrique**
   Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax + by + c = 0$, [avec $(a, b) \neq (0, 0)$] est une droite (D) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$ et passant par le point $N(x_N, y_N)$.

7.2.2 Système de deux équations linéaires à deux inconnus

1. **Définition**
   Un système de deux équations linéaires d'inconnus $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est tout système de la forme
   $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$
   Où a, b, c, a', b' et c' sont des réels
   Résoudre ce système dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est trouver l'ensemble S des couples de réels (x_0, y_0) tel que
   $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ a'x_0 + b'y_0 + c' = 0, \end{cases}$

2. **Interpretation géométrique**
   Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons le système (S) : $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ a'x_0 + b'y_0 + c' = 0, \end{cases}$
   Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Associons au système (S) les droites (D) :

$ax+by+c=0$ et (D') : $a'x+b'y+c'=0$. Résoudre ce système revient à étudier la position relative des deux droites. Un couple (x_0,y_0) est solution du système (S) si et seulement si me point $M_0(x_0,y_0)\in(D)\bigcap(D')$. Ainsi plusieurs situations peuvent se presentées :
- Si (D) et (D') sont sécantes (le déterminant du système $\Delta=ab'-a'b\neq 0$), alors le système (S) admet une unique solution.
- Si les droites (D) et (D') sont parallèles (c'est-à-dire ab'-a'b=0) et :
  * distinctes alors le système n'admet pas de solution.
  * confondues alors le système admet une infinité de solutions.

Théorème 7.2.1
Considérons le système $\begin{cases} ax_0+by_0+c=0, \\ a'x_0+b'y_0+c'=0, \end{cases}$
Il admet une unique solution si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$.
Si $ab'-a'b=0$ *alors le système n'admet pas de solution ou admet une infinitté de solution.*

7.2.3 Exemple de méthodes de résolution des système d'équations

A) Méthodes de résolution numériques

1. **Méthode du déterminant**

Considérons le système $\begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$

on a $\Delta=\begin{vmatrix} aa' \\ bb' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.
- Si $\Delta=0$ alors le système n'admet pas ou admet une infinité de solution.. Ainsi :
  a) Si de plus a, b sont non nuls puis $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ et $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$. On dira que le système admet une infinité de solution.

  b) Si de plus a, b sont non nuls puis au moins une des relations $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$; $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ n'est pas vérifiée, alors le système n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta\neq 0$, alors le système admet une unique solution qui se calcul de la façon suivante :
  Soit $\Delta=ab'-a'b$. Notons $\Delta_x=\begin{vmatrix} cc' \\ bb' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} aa' \\ cc' \end{vmatrix}$. On obtient x et y par les formules
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

  Exercice d'application 7.2.1

2. **Méthode de combinaison linéaire**

Exemple

Résoudre par la méthode de combinaison linéaire, le système $\begin{cases} 2x+y=5, & (1) \\ x-2y=0, & (2) \end{cases}$

Eliminons y. En faisant $2\times(1)+(2)$, on obtient $5x=10\Leftrightarrow x=2$.
De même éliminons x. En faisant $(1)-2\times(2)$, on obtient $5y=5\Leftrightarrow y=1$

D'où $S_{\mathbb{R}} = \{(2;1)\}$

3. **Méthode de substitution**

Pour cette méthode, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations. On remplace ensuite cette expression dans l'autre équation. Nous calculons par la suite la valeur de l'autre inconnue.

Exemple

Résolvons par substitution le système $\begin{cases} 2x + y = 5, & (1) \\ x - 2y = 0, & (2) \end{cases}$

de (1), on a : $y = 5 - 2x$. En remplaçant y par sa valeur dans (2), on a
$x - 2(5 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
de (2), on a : $x = 2y$. En remplaçant x par sa valeur dans (1), on a
$2(2y) + y = 5 \Leftrightarrow 5y = 5 \Leftrightarrow y = 1$

Par suite $S_{\mathbb{R}} = \{(2;1)\}$

4. **Méthode par identification**

Exemple

Considérons le système $\begin{cases} 2x + y = 5, & (1) \\ x - 2y = 0, & (2) \end{cases}$

Exprimons x en fonction de y.
De (1) on a $x = \dfrac{5 - y}{2}$ et de (2) on a $x = 2y$
En identifiant x, on a : $2y = \dfrac{5 - y}{2} \Leftrightarrow y = 5 - y \Leftrightarrow 5y = 5$ d'où $y = 1$.

Exprimons y en fonction de x.
De (1) on a $y = 5 - 2x$ et de (2) on a $y = \dfrac{1}{2}x$
En identifiant y, on a $5 - 2x = \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow 10 - 4x = x \Leftrightarrow 5x = 10$ d'où $x = 2$.

Par suite $S_{\mathbb{R}} = \{(2;1)\}$

B) Méthode de résolution graphique

On donne le système $\begin{cases} 2x + y = 5, & (1) \\ x - 2y = 0, & (2) \end{cases}$
Notons $(D_1) : 2x + y = 5$ et $(D_2) : x - 2y = 0$.
Dans un repère orthogonal, construisons ces deux droites.

$D_1 \bigcap D_2 = M_0(2;1)$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{(2;1)\}$

7.3 Système de deux inéquations linéaires à deux inconnus

7.3.1 Propriétés d'inéquations linéaires

Considérons la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$. Cette droite partage le plan en deux demi-plan ouverts :

- Un demi-plan (P_1) qui est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels $ax + by + c > 0$
- Un demi-plan (P_2) qui est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels $ax + by + c < 0$

  Résoudre donc l'inéquation $ax+by+c > 0$ $(ax+by+c \geq 0)$ ou $ax+by+c < 0$ $(ax+by+c \leq 0)$, c'est retrouver le demi-plan qui est l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que $ax + by + c > 0$ $(ax + by + c \geq 0)$ ou $ax + by + c < 0$ $(ax + by + c \leq 0)$

7.3.2 Interpretation géométrique

Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons (D) : $ax + by + c = 0$
Soient (P_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $ax + by + c > 0$ et (P_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $ax + by + c < 0$. (P_1) et (P_2) sont les deux demi-plans ouverts de frontière (D)

7.3.3 Résolution de système d'inéquations linéaires

La résolution d'un système d'inéquations se fait graphiquement. Pour résoudre un système d'inéquation :

- On construit d'abord dans un repère, la droite (D_1) : $ax + by + c = 0$
- On choisit ensuite un point $A(u, v)$ n'appartenant pas à (D_1) puis déterminons le signe de $au + bv + c$
- Pour tous points $M(x, y)$ situé dans le demi-plan ouvert délimité par (D_1) et contenant A, le réel $ax + by + c$ est du même signe que $au + bv + c$
- On peut hachurer le demi-plan qui ne correspond pas au signe demandé
- On repète le même travail avec la deuxième équation.
- L'ensemble Solution est la région du plan non hachurée.

Exemple :Résolvons graphiquement les systèmes suivant

$$\begin{cases} x - y + 2 \leq 0 \\ x + 2y - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 4 \leq 0 \\ 3x + 2y < 0 \end{cases}$$

7.4 Résolution de problèmes concrêts

La méthode classique peut donc être basée sur les étapes suivantes :

- Le Choix des inconnues
- La mise en équation ou en inéquation du problème et la constitution du système
- La résolution numérique ou graphique du système posé
- L'interpretation des résultats après vérification

Exercice d'application 7.4.1

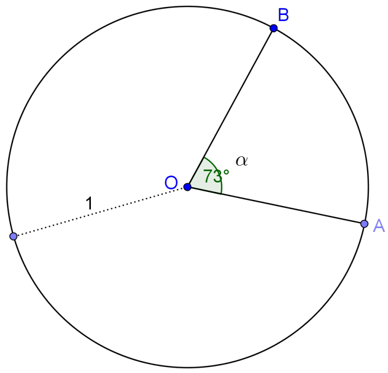
8

Fonctions circulaires

8.1 Mésure des angles et angle orienté

8.1.1 Mésure des angles

1. **Mésure d'un angle en radian**
   Considérons un cercle de centre O et de rayon 1.



   La mésure d'un angle $A\widehat{O}B$ en radian (rad) est la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On le note $mesA\widehat{O}B$
   Ainsi donc 1 rad $=\frac{180}{\pi}$ degré.

   De façon générale, l'arc intercepté par un angle au centre de α radian sur un cercle de rayon r, a pour longueur $L = \alpha \times r$

2. **Angle géométrique saillant**
   Un angle géométrique saillant est un angle dont la mésure en degré se situe entre 0 et 180.
3. **Mésure en radian et méqure en degré**
   La mésure d'un angle en radian est proportionnelle à sa mésure en degré. Ainsi, on peut avoir le tableau de proportionnalité suivant :

Mésure en degré	360	180	90	60	45	30	0	x
Mésure en radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y

   Ainsi la relation entre des mésures en radian y et des mésures en degré x est donnée par :

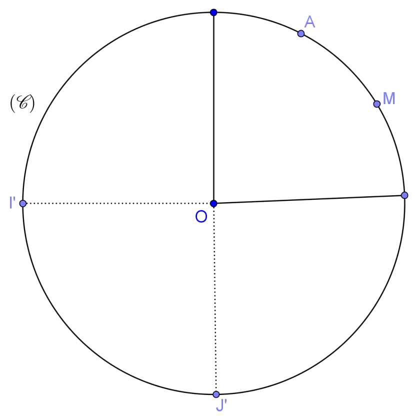
$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi}$$

Il existe aussi une autre mésure en grade z donnée par $\dfrac{z}{200} = \dfrac{x}{180}$

8.1.2 Arc et angle orienté

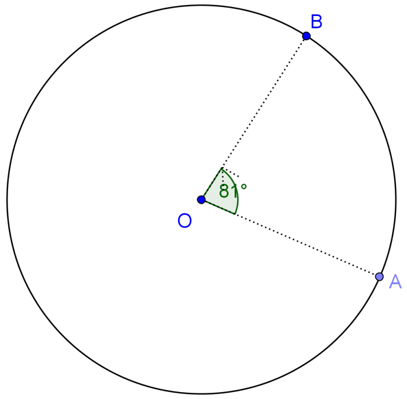
1. **Cercle trigonométrique**
   Un cercle trigonométrique est un cercle de centre O de rayon 1, orienté dans le sens direct (appélé aussi sens trigonométrique) et admettant un point appélé " point origine"
   Le sens direct d'un cercle est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

   Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de bipoint (o, I) et (O, J). On construit le cercle trigonométrique de la sorte :



   I' et J' sont les symétries de centre O respectivement des points I et J.

2. **Arc orienté**
   Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique, A et M deux points de $(\mathcal{C})$. Le couple (A,M) définit un rac de cercle orienté AM dont A est l'origine et M est l'extrémité.
3. **Angle orienté de deux vecteurs et mésure principale**
   Soit $(\mathcal{C})$ un cercle orienté de centre O, A et B deux points de ce cercle.
   On appelle angle orienté, l'angle formé par le couple $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. Une mésure en radian de cet angle orienté est une mésure en radian de l'arc AB.



   NB : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$

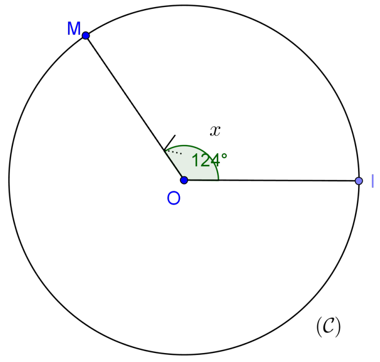
Définition 8.1.1
On appelle mésure principale d'un angle orienté, la mésure de cet angle comprise entre $-\pi$ *et* π.

Remarque 8.1

- *Tout angle* α *s'écrit sous la forme* $\alpha = \beta + 2k\pi$ *où* $\beta \in]-\pi;\pi]$ *est la mesure principale de* α.
- *Deux angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.*

Exemple :

4. **Repérage d'un point**
Soit x un réel quelconque. Il existe un unique point M de $(\mathcal{C})$ tel que x soit une mésure de $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$. Ce point M est appelé point de $(\mathcal{C})$ associé à x.

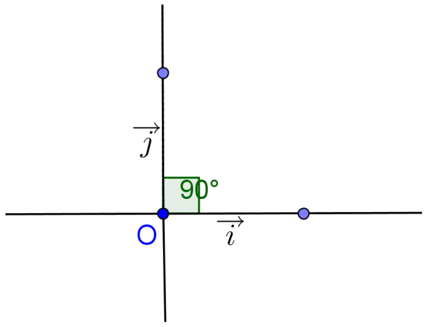


Réciproquement, tout point M de $(\mathcal{C})$ est associé à n'importe laquelle des mésures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$. On peut donc dire que c'est la mésure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ qui repère la position d'un point M sur le cercle trigonométrique.

8.2 Ligne trigonométrique

8.2.1 Définition

1. **Repère orthonormal direct**
On appelle repère orthonormal direct, tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaires tels que $(\widehat{\vec{i};\vec{j}}) = \frac{\pi}{2}$.

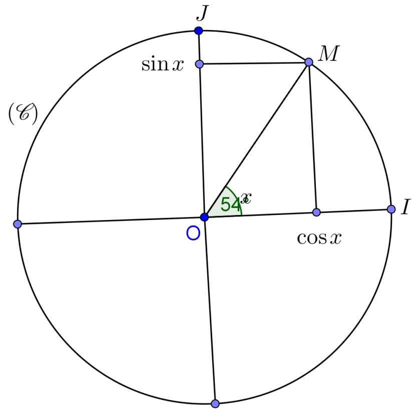


2. **Cosinus et sinus**
   Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ associé à x. Soient P et Q les projétés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et sur (OJ).

   Définition 8.2.1

   – *On appelle cosinus de x et on note $cosx$ l'abscisse du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Ainsi $cosx = OP$*
   – *On appelle sinus de x et on note $sinx$ l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Ainsi $sinx = OQ$*

   Les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ s'écrit alors
   $\overrightarrow{OM} = (cosx)\overrightarrow{OI} + (sinx)\overrightarrow{OJ}$ comme le montre la figure :

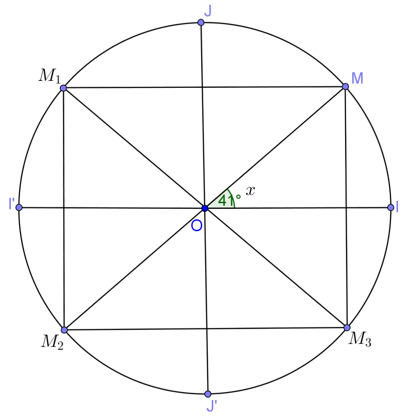


8.2.2 Relation trigonométrique

1. **Propriétés**
   Pour tout réel x, on écrit par convention $(cosx)^2 = cos^2x$ et $(sinx)^2 = sin^2x$. Ainsi quelque soit $x \in]-\pi; \pi[$ on a :
   – $cos^2x + sin^2x = 1$
   – $-1 \leq cosx \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$
   – pour $k \in \mathbb{Z}$, $cos(x + 2k\pi) = cosx$ et $sin(x + 2k\pi) = sinx$
2. **Cosinus et sinus d'angles remarquables**
   Soit α correspondant a une mésure principale d'un angle orienté on a :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3. **Angles associés**
   Il s'agit des angles obtenus à travers une lecture éfficace du cercle trigonométrique. Il y a deux configurations permettants une bonne lecture : celle du rectangle et celle des angles complémentaires :



- $cos(-x) = cosx$ et $sin(-x) = -sinx$
- $cox(\pi - x) = -cosx$ et $sin(\pi - x) = sinx$
- $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$ et $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$
- $cos(\pi + x) = -cosx$ et $sin(\pi + x) = -sinx$
- $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sinx$ et $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cosx$

8.3 Fonctions sinus et cosinus

Les fonctions cosinus et sinus sont définies par :
$cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $x \mapsto cosx$
$sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $x \mapsto sinx$

8.3.1 Périodicité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel non nul.
On dit que f est périodique de période T si et seulement si pour tout réel x, $x + T \in \mathbb{R}$ on a $f(x + T) = f(x)$

Exemple :
$cos(x + 2\pi) = cosx$
$sin(x + 2\pi) = sinx$

On dit donc que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π

Remarque 8.2
Si T est une période de f, alors tout multiple de T en est une autre. La courbe d'une fonction périodique est globalement invariante par translation du vecteur $T\overrightarrow{i}$

8.3.2 Parité

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et
$cos(-x) = cosx$, $sin(-x) = -sinx$.
On dit que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

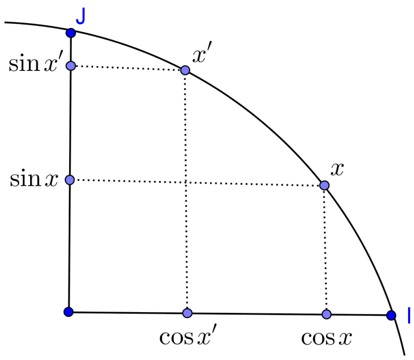
Remarque 8.3

- *la fonction cosinus étant paire et de période* 2π*, alors on peut restreindre le domaine d'étude de cette fonction sur l'intervalle* $[0;\pi]$
- *la fonction sinus étant impaire et de période* 2π*, alors on peut restreindre le domaine d'étude de cette fonction sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

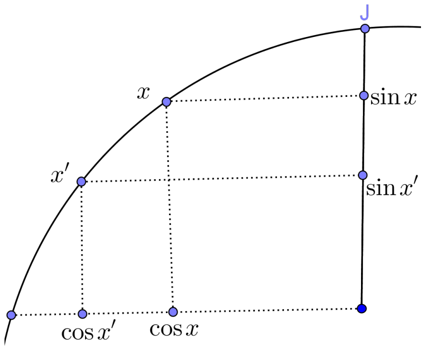
De façon générale, on étudie les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$

8.3.3 Etude de variation sur $[0;\pi]$

1. **Sens de variations**
   Soit $[0;\pi]=[0;\frac{\pi}{2}]\bigcup[\frac{\pi}{2};\pi]$
   - Soient x, $y\in[0;\frac{\pi}{2}]$ tels que $x\leq y$, d'après le cercle trigonométrique,
     $sinx\leq siny$ et $cosx\geq cosy$.
     Alors la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et la fonction sinus est coissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$



   - Soient x, $y\in[\frac{\pi}{2};\pi]$ tels que $x\leq y$.
     On a $sinx\geq siny$ et $cosx\geq cosy$.
     Alors la fonction cosinus est décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$ et la fonction sinus est décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$.



2. **Tableau de variations**

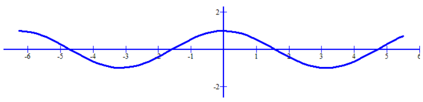
   - Comme sin est impaire, coissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$ alors elle est décroissante sur $[-\pi;-\frac{\pi}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{\pi}{2};0]$
   - la fonction cos est paire, décroissante sur et $[0;\pi]$. Elle est donc croissante sur $[-\pi;0]$

   Ainsi on obtient le tableau suivant sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

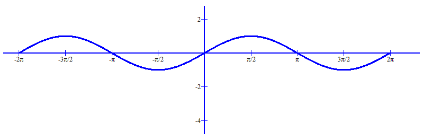
x	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0
$\cos x$	-1	0	1	0	-1

3. **Courbe representative**
   La representation graphique des fonction *cos* et *sin* tient compte des variations et de quelques valeurs remarquables déja citées plus haut.

   Cosinus



   Cette representation est appelée un sinusoïdes
   Sinus



   Cette representation graphique est aussi appelée sinusoïde.

9

Produire scalaire dans le plan

9.1 Produit scalaire dans un repère orthonormal

9.1.1 Définitions analytique

Dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
C'est la somme des composantes vectorielles de même rang : on additionne en effet les composantes horizontale et verticale de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Théorème 9.1.1 *(Vecteurs orthogonaux)*
*Dans un repère orthonormal, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si **xx'+yy'=0**.*
Ainsi deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul

On peut d'ailleurs remarquer, au passage, que le vecteur nul est alors orthogonal à tout autre vecteur.

Exercice d'application 9.1.1

9.1.2 Propriétés algébriques – Vecteurs colinéaires

1. **Propriétés fondamentales**

   Le produit scalaire est une opération possédant plusieurs propriétés importantes

   – **Symétrie** : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
   – **Linéarité** : $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
   – **Distributivité** : $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

   Régle :
   Pour deux vecteurs colinéaires tels que $\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}$:
   – Si $k > 0$ (vecteurs colinéaires de même sens) alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$
   – Si $k < 0$ (vecteurs colinéaires de sens contraires), $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

2. **Identités remarquables**
   Pour les vecteurs des identités remarquables comparables à celles qui s'appliquent aux nombres réels.
   - **Carré scalaire** : le carré scalaire d'un vecteur est le produit de ce vecteur par lui-même. Il égal au carré de la norme de vecteur : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$
   - **Carré de la somme de deux vecteurs :**
     $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
   - **Carré de la différence de deux vecteurs :**
     $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
   - **Différence des carrés de deux vecteurs :**
     $\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
   - **Applications de ces identités aux normes**
     $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$

3. **Expression du produit scalaire par les normes**
   L'identité remarquable $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ nous permet d'écrire :

   $2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$. d'ou

   $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$$

   Par ailleurs, on peut avoir :

   $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2\right]$$

9.1.3 Définition géométrique du produit scalaire

a) Définition

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls du plan tel que θ soit une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$. On définit le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| cos\theta$$

Remarque 9.1
Le produit scalaire peut être défini dans un plan non orienté car l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$ *n'intervient que par son cosinus dont la valeur ne depend pas du plan.*

b) Propriété fondamentale : produit scalaire et projection

Théorème 9.1.2
soient trois points A,B et C. H est le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

De ce qui précède, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$

9.2 Application au relations métriques dans un triangle

9.2.1 Le théorème d'Al-Kashi

Le théorème d'Al-Kashi (mathématicien du XIVème siècle) est une généralisation du théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Il permet de calculer les angles d'un triangle en connaissant la longueur des côtés, ou bien de calculer un côté en connaissant les deux autres côtés et l'angle qu'ils forment entre eux.

Théorème 9.2.1
soit un triangle ABC. On note : AB = c ; AC = b ; BC = a. On a donc les égalités suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos\widehat{C}$$

9.2.2 Formule des sinus

Théorème 9.2.2 *(Aire d'un triangle)*
Soit ABC un triangle d'aire S. Notons AB = c, AC = b et BC = a. On a donc

$$S = \frac{1}{2}BC \times sin\widehat{A}$$

Conséquence : On a aussi $S = \frac{1}{2}AC \times sin\widehat{B} = \frac{1}{2}AB \times sin\widehat{C}$

Théorème 9.2.3 *(Formule des sinus)*
Dans un triangle ABC d'aire S. Soient toujours la notation AB = c ; AC = b ; et BC = a. On a alors

$$\frac{2S}{abc} = \frac{sin\widehat{A}}{a} = \frac{sin\widehat{B}}{b} = \frac{sin\widehat{C}}{c}$$