

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

2^{ème} Année de l'Enseignement Secondaire

Sections : – Sciences
– Technologie de l'Informatique

Tome 2

Auteurs

Ali Rahmouni

Inspecteur principal

Salah Marzougui

Inspecteur

Ahmed Hnaïen

Professeur principal

Abdelaziz Oukhai

Professeur principal

Evaluateurs

Hikma Smida

Professeur universitaire

Mohamed Iahbib Kefi

Inspecteur principal

Najiba M'hamdi

Inspectrice

Centre National Pédagogique

Il y a 3 types de mathématiciens
– Ceux qui savent compter
– Ceux qui ne savent pas.

Remerciement

Nous remercions,

- *Les évaluateurs pour leurs remarques pertinentes, pour leur critique constructive et pour leur grande disponibilité.*
- *Les inspecteurs de mathématiques dont les remarques et les conseils ont été utiles à la réalisation de ce manuel.*

Présentation du manuel

Ce livre est conforme aux nouveaux programmes fixés par la loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement du 23 juillet 2002.

Exception faite des chapitres “ Droites et plan de l'espace ”, “Parallélisme dans l'espace” et “Orthogonalité dans l'espace” chacun des autres chapitres comporte huit rubriques :

Pour démarrer

Cette rubrique aborde certains pré requis utiles à l'enseignement - apprentissage des nouvelles notions

Explorer

Les activités figurant dans cette rubrique ont pour objet un apprentissage progressif et graduel des nouvelles notions. Certaines de ces activités ont pour but de favoriser l'apprentissage de la modélisation et de l'application des mathématiques au monde réel.

Assimiler

Cette rubrique comporte des exercices d'applications directes. Leur but étant de favoriser un apprentissage autonome de l'élève et de lui fournir l'opportunité de se familiariser avec les nouvelles notions ainsi que de contrôler ses acquis de base.

Synthèse

Cette rubrique contient les résultats exigibles du programme pour une meilleure mémorisation des connaissances et des savoir faire essentiels.

Développer ses compétences

Cette rubrique comporte des situations dont le but est de permettre à l'élève

- D'approfondir les concepts
- De développer des raisonnements

tout en lui laissant une grande part d'autonomie et d'initiative.

Utiliser les T.I.C.

Cette rubrique est destinée à permettre aux élèves de chercher, expérimenter, conjecturer en utilisant la calculatrice ou un logiciel numérique ou géométrique

Exercices et problèmes

Les exercices sont variés et sont classés en deux catégories

Appliquer : Cette partie renferme des applications directes ou indirectes du cours et qui permettent aux élèves de s'entraîner et de se familiariser avec les différentes notions étudiées. Ces exercices qui présentent peu de difficultés devraient être faits par tous.

Maîtriser : Cette partie renferme des exercices et des problèmes qui permettent aux élèves la mobilisation de leurs compétences, le perfectionnement du raisonnement, la maîtrise du calcul, l'initiation à la recherche ...

Math et culture

C'est une rubrique de culture mathématique générale et qui n'est pas toujours en relation avec le chapitre étudié.

Projet de Répartition du programme de 2^{ème} sciences

Premier trimestre	◆ Calcul dans IR ◆ Problèmes du premier et du second degré ◆ Notion de polynômes ◆ Arithmétique	◆ Calcul vectoriel ◆ Barycentre ◆ Translations ◆ Homothéties	
Deuxième trimestre	<i>2 heures par semaine</i>	<i>2 heures par semaine</i>	<i>1 heure par semaine</i>
	◆ Arithmétique (suite et fin) ◆ Suites arithmétiques ◆ Suites géométriques	◆ Rotations ◆ Trigonométrie ◆ Droites et plans de l'espace.	◆ Géométrie analytique ◆ Statistiques
Troisième trimestre	<i>2 heures par semaine</i>	<i>2 heures par semaine</i>	<i>1 heure par semaine</i>
	◆ Généralités sur les fonctions ◆ Fonctions de référence	◆ Parallélisme dans l'espace ◆ Orthogonalité dans l'espace	◆ Statistiques (suite et fin)

Cette répartition est proposée par les auteurs, à titre indicatif.

Sommaire

Chapitre 1 : Suites arithmétiques	7
Chapitre 2 : Suites géométriques	21
Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions	32
Chapitre 4 : Fonctions de références	48
Chapitre 5 : Trigonométrie et mesure des grandeurs	72
Chapitre 6 : Géométrie analytique.....	92
Chapitre 7 : Droites et plans de l'espace	113
Chapitre 8 : Parallélisme dans l'espace.....	127
Chapitre 9 : Orthogonalité dans l'espace	146
Chapitre 10 : Statistiques	167

Le savoir que l'on ne complète pas chaque jour diminue tous les jours.

(Proverbe chinois)

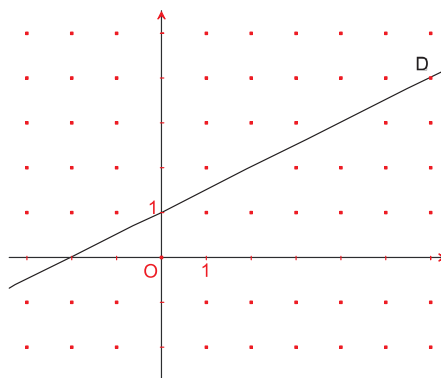
Pour démarrer

1 Chacune des listes suivantes de nombres obéit à une loi. Découvrir cette loi et donner les deux termes suivants.

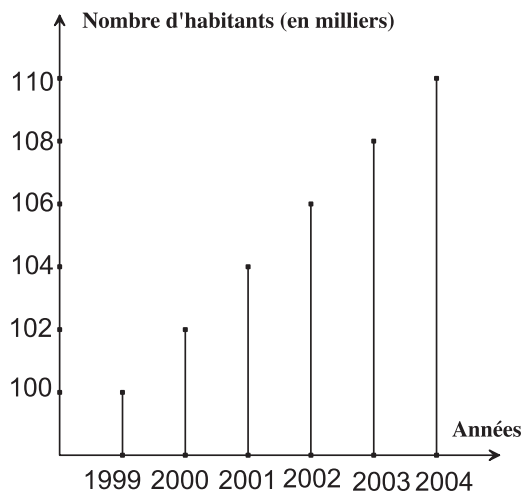
- a) $5 ; 3 ; 1 ; -1 ; -3 ; \dots$ b) $\frac{1}{4} ; 1 ; \frac{7}{4} ; \frac{5}{2} ; \frac{13}{4} ; \dots$ c) $1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; \dots$
 d) $1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \dots$ e) $-2 ; -3 ; -5 ; -9 ; -17 ; \dots$

2 La figure ci-contre est la représentation graphique d'une droite D.

Déterminer les ordonnées des points de D d'abscisses respectives 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 100 ; 101 ; 102 et n, où n est un entier naturel.



3 Le diagramme en bâtons ci-dessous représente l'évolution de la population d'une ville de 1999 à 2004.



a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Population (en milliers)						

- b) Quelle sera la population de cette ville en 2010, si on suppose qu'elle continue à évoluer de la même façon ?
 c) En quelle année cette population atteindra-t-elle 150.000 habitants ?

Notion de suites

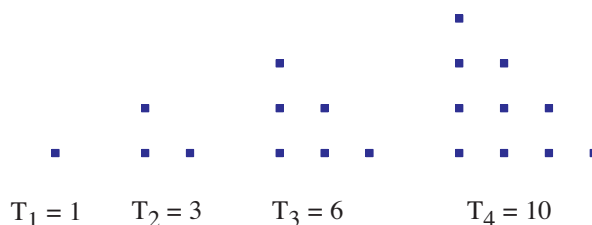
Activité 1 Les nombres triangulaires

Les figures suivantes représentent les quatre premiers nombres triangulaires 1, 3, 6 et 10, notés respectivement T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .

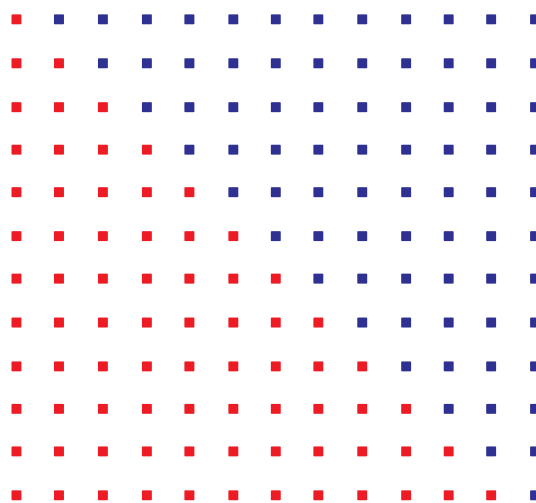
T_1 se lit T indice 1 ou T, 1.

T_2 se lit T indice 2 ou T, 2.

Et plus généralement T_n se lit T indice n ou T, n.



- 1) a) Représenter le 5^{ème} nombre triangulaire noté T_5 et donner sa valeur.
b) Même question pour T_6 .
- 2) Les Pythagoriciens utilisaient des diagrammes rectangulaires pour calculer les nombres triangulaires.
 - a) Le diagramme rectangulaire ci-dessous permet de calculer T_{12} . Expliquer comment.
 - b) Donner les valeurs de T_{20} , T_{125} et T_{2006} .
 - c) Donner l'expression du n^{ème} nombre triangulaire T_n en fonction de n.



Activité 2 : Une spirale quadratique

Dans la figure ci-contre on a :

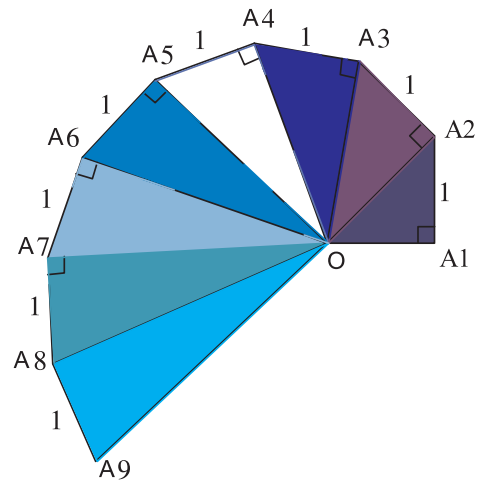
- Le triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 et tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$;
- Le triangle OA_2A_3 rectangle en A_2 et tel que $A_2A_3 = 1$;
- Etc...

On pose :

$$a_1 = \text{aire}(OA_1A_2), a_2 = \text{aire}(OA_2A_3), \dots,$$

$$a_n = \text{aire}(OA_nA_{n+1}).$$

- Calculer a_2 , a_3 , a_4 et a_5 .
- Conjecturer l'expression de a_n en fonction de n .



Définition d'une suite

Soit n_0 un entier naturel.

Lorsqu'à tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 on associe un réel unique $U(n)$ on dit que l'on a défini une suite de nombres réels.

Le réel $U(n)$ s'appelle le terme général de la suite et se note U_n .

La suite se note $(U_n)_{n \geq n_0}$ ou (U_n) .

Activité 3

Pour chacune des suites suivantes, déterminer les cinq premiers termes et le terme général.

- La suite des entiers naturels pairs.
- La suite des multiples de 3.
- La suite qui à tout entier naturel non nul associe son inverse.
- La suite qui à tout entier naturel associe sa racine carrée.

Activité 4

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \frac{3n+1}{4}$.

- Calculer U_0 , U_1 , U_5 et U_{100} .
- Déterminer le premier terme, le 5^{ème} terme et le 100^{ème} terme de cette suite.
- Déterminer l'expression de U_{p+1} , U_{2n} et U_{3k+2} .



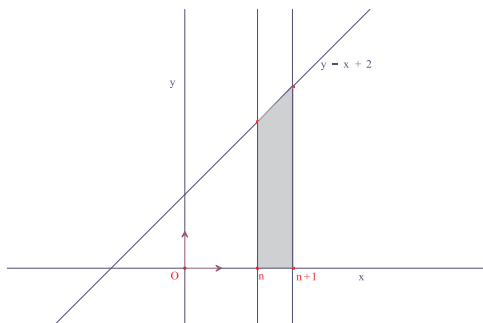
Assimiler : 1-2-3-4

Suites arithmétiques

Activité 5

On désigne par a_n l'aire du domaine représenté dans la figure ci-contre.

- Calculer a_0 .
- Donner l'expression de a_n en fonction de n .
- Calculer $a_{n+1} - a_n$.



Activité 6

On considère la suite (U_n) des entiers naturels dont le reste de la division euclidienne par 5 est 3, rangés par ordre croissant.

- Déterminer U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 .
- Exprimer le terme général U_n en fonction de n .
- Calculer $U_{n+1} - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

On dit qu'une suite (U_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n on a

$$U_{n+1} = U_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé raison de cette suite.

Remarque

Si $a, b, c, d, \dots$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on dit qu'ils sont en progression arithmétique.

Assimiler : 5-6

Terme général d'une suite arithmétique

Activité 7

- Soit (U_n) la suite arithmétique définie par

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{5}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 - Calculer U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5 .
 - Calculer U_{1000} .

- Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

- Exprimer U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5 en fonction de U_0 et r .
- Conjecturer l'expression de U_n en fonction de U_0 et r .

- Soit n un entier naturel. En additionnant

membre à membre les égalités suivantes, justifier votre conjecture.

$$\begin{cases} U_1 = U_0 + r \\ U_2 = U_1 + r \\ U_3 = U_2 + r \\ \dots\dots\dots \\ U_{n-1} = U_{n-2} + r \\ U_n = U_{n-1} + r \end{cases}$$

3) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = an + b$, où a et b sont deux réels donnés. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.

Activité 8

a) On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -4$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Calculer U_1, U_2, U_3 et donner le terme général U_n .

b) Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = V_n + \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Calculer V_1, V_2, V_3 et donner le terme général V_n .

Activité 9 Représentation graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

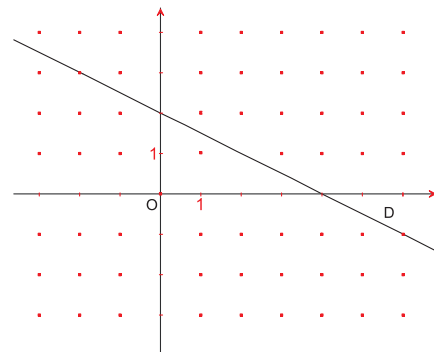
a) Placer les points $A_0(0, V_0), A_1(1, V_1), A_2(2, V_2)$ et $A_3(3, V_3)$.

b) Vérifier que les points A_0, A_1, A_2 et A_3 sont sur une même droite D , que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout entier n , le point $A_n(n, V_n)$ appartient à D .

Activité 10

Dans le graphique ci-contre, D est la droite qui contient les points $A_n(n, U_n)$, où (U_n) est une suite. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme U_0 et la raison r .



Activité 11

1) Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{4}$ et telle que $U_{100} = 74$. Déterminer U_{248} .

2) U_0 et r étant deux réels donnés, soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r . Soient n et p deux entiers naturels.

a) Exprimer U_n et U_p en fonction de U_0 .

b) Exprimer U_n en fonction de U_p .



Assimiler : 7-8-9-10-11-12-13

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Activité 12

Un cycliste a parcouru 180 km en huit heures et il a parcouru chaque heure 3 km de moins que l'heure précédente. Combien de kilomètres a-t-il parcouru chaque heure ?

Activité 13

On veut creuser un puits. Le premier mètre coûte 50 dinars, le deuxième mètre coûte 60 dinars, le troisième mètre coûte 70 dinars et ainsi de suite, en augmentant de 10 dinars à chaque mètre.

- Combien coûtera le puits si l'on creuse 15 mètres ?
- Quelle profondeur (en nombre entier de mètres) pourrait-on atteindre si l'on disposait d'un budget de 1000 dinars ?

Activité 14

Déterminer le nombre de termes de chacune des sommes suivantes :

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \quad ; \quad D = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n.$$

$$B = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{121} + \frac{1}{122} \quad ; \quad E = U_0 + U_1 + \dots + U_n.$$

$$C = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 73 + 75 \quad ; \quad F = U_{45} + U_{46} + \dots + U_{381}.$$

Activité 15

- 1) a) Soit $S = 1 + 2 + \dots + 99 + 100$.

En écrivant $S = 100 + 99 + \dots + 2 + 1$, calculer $2S$ et en déduire S .

- Calculer $500 + 501 + \dots + 1999 + 2000$.

- 2) Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r .

Soit a le premier terme et b le dernier terme, de cette somme.

En rangeant les termes de cette somme de deux manières :

- du premier au dernier on aura, $S = a + (a + r) + (a + 2r) + \dots + [a + (n - 1)r]$
- du dernier au premier on aura, $S = b + (b - r) + (b - 2r) + \dots + [b - (n - 1)r]$.

En ajoutant membre à membre, déterminer $2S$ puis S en fonction de a , b et n .

Activité 16

La figure ci-contre représente des cercles $C_0, C_1, C_2, \dots$ tangents en O . Les diamètres de ces cercles sont respectivement égaux à 1 cm, 2 cm, 3 cm, ... On désigne par :

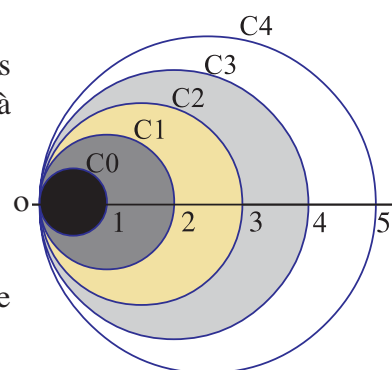
- a_0 l'aire du disque de frontière C_0 ,
- a_1 l'aire de la portion du plan comprise entre C_0 et C_1 ,
- a_2 l'aire de la portion du plan comprise entre C_1 et C_2 ,
- et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, a_n désigne l'aire de la portion du plan comprise entre C_{n-1} et C_n .

- 1) a) Calculer a_n en fonction de n .

- Montrer que (a_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

- Déterminer n pour l'on ait $a_n \geq 10^7$.

- 2) Soit $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Calculer S de deux manières différentes.



Généralités sur les suites

1 Soit (U_n) , la suite définie par : $U_n = 2^n + n$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculer U_1 , U_5 et U_{10} .

2 Soit (V_n) , la suite définie par : $V_n = \frac{n+21}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer V_0 , V_8 et V_{1000} .

b) Déterminer n pour que $V_n = 2$.

3 On considère la suite (t_n) définie par : $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n - 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculer t_1 , t_2 , t_3 , t_4 et t_5 .

4 Soit (W_n) la suite définie par : $W_0 = 0$ et $W_{n+1} = \sqrt{1 + W_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculer W_1 , W_2 , W_3 et W_4 .

Utiliser votre calculatrice pour déterminer l'arrondi au millième de W_2 , W_3 et W_4 .

Suites arithmétiques

5 Montrer que chacune des suites suivantes est arithmétique, et préciser dans chacun des cas le premier terme et la raison.

a) La suite (U_n) définie par $U_n = \frac{-2n+1}{8}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) La suite (U_n) définie par $U_n = \frac{n}{5} - 4$, $n \in \mathbb{N}$.

6 Indiquer parmi les suites définies ci-après celles qui sont des suites arithmétiques.

a) La suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n + n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) La suite (V_n) définie par
$$\begin{cases} V_0 = -1 \\ -V_{n+1} + V_n + 3 = 0, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

c) La suite (a_n) définie par $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n+1}$

d) La suite (b_n) définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n + 7$, $n \in \mathbb{N}$

Terme général

7 (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

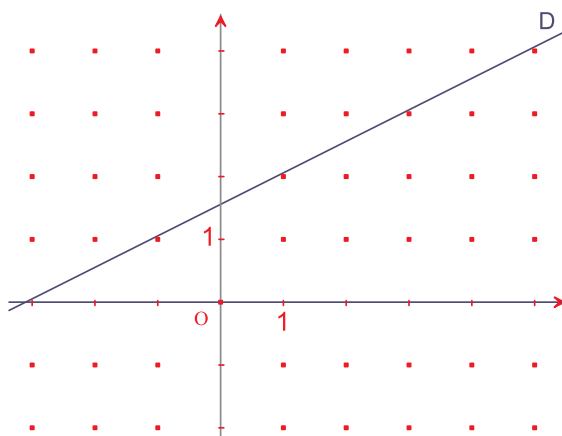
Déterminer, dans chacun des cas suivants U_n .

a) $U_0 = -1$, $r = -3$ et $n = 23$.

b) $U_0 = \pi$, $r = \frac{1}{2}$ et $n = 100$.

c) $U_0 = -\frac{1}{6}$, $r = 2\sqrt{3}$ et $n = 23$.

- 8** Déterminer la raison r d'une suite arithmétique sachant que $U_0 = 8$ et $U_7 = -13$.
- 9** (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -2$ et de raison $r = \frac{1}{4}$.
Déterminer n sachant que $U_n = 24$.
- 10** Calculer la raison d'une suite arithmétique sachant que $U_{15} = -12$ et $U_{24} = 15$.
- 11** (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,5$ et telle que $U_{30} = \frac{11}{2}$.
Déterminer U_{20} et U_{50} .
- 12** Représenter graphiquement la suite arithmétique de premier terme $U_0 = -2$ et de raison 3.
- 13** Dans le graphique ci-dessous, D est la droite qui contient les points $A_n(n, U_n)$, où (U_n) est une suite arithmétique. Utiliser ce graphique pour déterminer le premier terme U_0 et la raison r de cette suite.



Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

- 14** Calculer chacune des sommes suivantes:
 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
 $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$
 $S = 1 + 2,01 + 3,02 + 4,03 + \dots + 24,23 + 25,24$.
- 15** Soit (U_n) la suite arithmétique définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Calculer $S = U_5 + U_6 + \dots + U_{50}$.
- 16** Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .
On donne $U_5 = 6$ et $S = 48$, où $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{11}$.
Déterminer le premier terme U_0 et la raison r de la suite (U_n) .

Modes de présentation d'une suite

Une suite peut être définie par :

- **son terme général.**

ou

• **son premier terme** et une relation permettant de calculer un terme à l'aide du terme précédent. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Suites arithmétiques

Terme général

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

On a : • $U_n = U_0 + n r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $U_n = U_p + (n - p) r$, où n et p sont deux entiers naturels.

En particulier $U_n = U_1 + (n - 1) r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Représentation graphique

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

Les points A_n de coordonnées (n, U_n) , sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine le premier terme U_0 .

Somme de n termes consécutifs

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est $S = n \times \frac{a + b}{2}$, où a est le premier terme de cette somme et b est le dernier terme.

$$S = \text{nombre de termes} \times \left(\frac{\text{Le premier terme de la somme} + \text{le dernier terme}}{2} \right)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

1 L'arroseur des peupliers

La saison est sèche et le fermier décide de verser un seau d'eau au pied de chacun des jeunes peupliers qui bordent son champ. Il y a cent peupliers, en ligne droite, espacées de deux mètres, et le puits d'eau est au pied du premier. Le fermier ne porte qu'un seau à la fois. Il a commencé le travail. Son voisin l'instituteur le regarde, accoudé au mur mitoyen.

" – Sacré travail !

– Oh, dit le fermier, j'en ai pour une heure !

– Une heure ! J'aurais le temps d'aller à pied en ville et d'en revenir avant que tu n'aies fini. "

Le fermier lève ses yeux au ciel ! la ville est à 9 Km, l'instituteur a de l'instruction, d'accord, mais il y a des fois où...je vous jure... !

Pour trancher le débat, calculez le chemin que le fermier aura à parcourir pour arroser tous ses peupliers.

(D'après Jeux Mathématiques)

Indication

Penser à la somme des termes d'une suite arithmétique.

2 Pair ou impair ?

a) Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. A chaque fois on tire deux jetons du sac et on les remplace par un seul ayant pour numéro la somme des numéros des deux jetons tirés.

Quel est le numéro inscrit sur le dernier jeton qui reste dans le sac ?

b) Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. A chaque fois on tire deux jetons du sac et on les remplace par un seul ayant pour numéro la différence positive, des numéros des deux jetons tirés.

Montrer que le nombre inscrit sur le dernier jeton qui reste dans le sac, est pair.

(D'après Championnat des jeux Mathématiques et logiques)

Indications

a) Penser à la somme des termes d'une suite arithmétique.

b) Remarquer que, si x et y sont deux entiers naturels, alors $x + y$ et $x - y$ sont de même parité.

3 (U_n) est une suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 11.

(V_n) est une suite arithmétique de premier terme (-8) et de raison 13.

(W_n) est une suite arithmétique de premier terme (29) et de raison 17.

Quel est le plus petit entier naturel qui est à la fois un terme de (U_n) de (V_n) et de (W_n) .

Indication

Vérifier que $U_n + 5$ est un multiple de 11.

Avec un tableur

Soit n un entier naturel non nul.

On désigne par U_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls, $U_n = 1 + 2 + \dots + n$.

Soit $V_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

1) Reproduire sur Excel cette feuille de calcul :

	A	B	C
1	n	U_n	V_n
2	$= 1$	$= 1$	$= 1$
3	$= A2 + 1$	$= B2 + A3$	$= C2 + A3^3$

La colonne A affiche les valeurs prises par l'entier n : 1, 2, 3, ...

La colonne B affiche les valeurs prises par U_n .

La colonne C affiche les valeurs prises par V_n .

Cliquer sur la cellule A3, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule.

Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n .

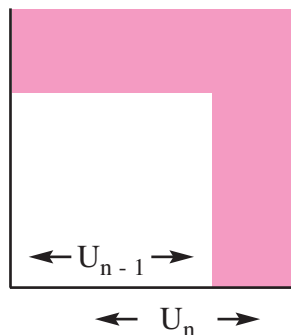
Procéder de la même façon avec B3 et C3.

Conjecturer pour tout n , le lien entre U_n et V_n .

2) Le but de cette question est de justifier la conjecture.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, l'aire de la bande délimitée par les carrés de côtés U_{n-1} et U_n est égale à n^3 (voir figure ci-dessous).

b) Conclure.



Appliquer

1 Soit (U_n) la suite définie par son terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $U_0, U_1, U_2, U_9, U_{20}$ et U_{2005} .

2 Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes :

a) (U_n) définie par $U_n = 3^n - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) (t_n) définie par $t_n = \sqrt{n-3}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

c) (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

d) (b_n) définie par $\begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = 1 + b_n^2 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

3 Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_n = n^2 - 3n, n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculer U_0, U_{10} et U_{100} .

b) Exprimer en fonction de n , U_{n-1} , U_{n+1} et U_{2n} .

4 Indiquer parmi les suites définies ci-après celles qui sont des suites arithmétiques.

a) $U_n = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 1 - U_n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $U_0 = 5$ et $U_{n+1} - U_n = 3$, $n \in \mathbb{N}$.

5 Les nombres 3529461 ; 4539562 et 5549663 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

6 (U_n) est une suite arithmétique de raison -4 et telle que $U_8 = -31$. Calculer U_{57} .

7 (U_n) est une suite arithmétique telle que $U_{20} = 1926$ et $U_{57} = 1606$.

Déterminer la raison de cette suite ainsi que son premier terme U_0 .

8 (U_n) est une suite arithmétique telle que $U_3 = 2$ et $U_{11} = 26$.

On pose $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{15}$.

Calculer S .

9 (V_n) est une suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $r = -1$.

a) Donner le terme général de la suite (V_n) .

b) Calculer V_{23} , V_{76} et V_{100} .

c) Calculer chacune des sommes suivantes :

$$S = V_0 + V_1 + \dots + V_{15}$$

$$S' = V_9 + V_{10} + \dots + V_{15}.$$

Maîtriser

10 Une mère de famille a économisé 10 dinars au premiers mois, puis 15 dinars le mois suivant et ainsi de suites en économisant 5 dinars de plus que le mois précédent

a) combien a-t-elle économisé au bout de huit mois ?

b) A la fin de quel mois ses économies suffiront pour acheter un aspirateur qui coûte 205 dinars.

11 La somme des 20 premiers termes d'une suite arithmétique est 610.

a) Déterminer le premier terme de cette suite sachant que sa raison est 3.

b) Calculer la somme des 100 premiers termes de cette suite.

- 12** Calculer chacune des sommes :
 $A = 3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 103 + 108$
 $B = 2,9 + 3,8 + 4,7 + 5,6 + \dots + 92,9.$

- 13** Lequel des deux nombres suivants est le plus grand : $2005 \times (1 + 2 + \dots + 2006)$
 ou $2006 \times (1 + 2 + \dots + 2005)$?

14 Moyenne arithmétique

- a) Montrer que si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$. (On dit que b est la moyenne arithmétique de a et c).
 b) Soient a, b et c trois réels tels que $b = \frac{a+c}{2}$.
 a, b et c sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

- 15** a) Combien y a-t-il de multiples de 7 entre 100 et 1000 ?
 b) Calculer la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 1000.

16 Repérage particulier

						1					
						2	3	4			
					5	6	7	8	9		
		10	11	12	13	14	15	16			
17	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- a) Dans quelle ligne se trouve le nombre 2005 ?
 b) On considère le repérage suivant :
 • Une ligne est désignée par le nombre situé à son extrémité gauche.
 • Une colonne est désignée par le nombre situé le plus haut dans la colonne.
 • Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve.
 Par exemple : 11 est repéré par (10, 5) et 7 est repéré par (5, 1).
 Par quel couple est repéré 2005 ?

- 17** Rencontrant un mendiant, un homme lui donne une pièce ; il en rencontre un deuxième

et lui donne deux pièces. Il rencontre d'autres mendiants encore, à qui il donne une pièce de plus que précédemment, à chaque fois... jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche. Il réfléchit alors et se dit : " Si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux, cela aurait été plus équitable et chaque mendiant aurait reçu 8 pièces ".

Combien a-t-il rencontré de mendiants ?

(D'après *Jeux et Stratégies* n° 15)

19 La table de Pythagore

Calculer la somme des termes du tableau ci-dessous. (Ce tableau rassemble toutes les tables de multiplication de 1 à n)

Déterminer n pour que la somme soit égale à :

- a) 100 ; b) 2025

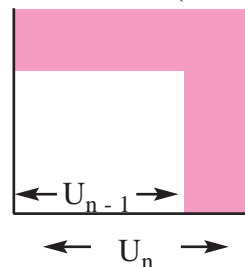
1	2	3	4	...	$n-1$	n
2	4	6	8	...		$2n$
3	6	9	12	...		$3n$
4	8	12	16	...		$4n$
.	.	.	.	...		.
$n-1$	.	.	.	...		.
n	$2n$	$3n$	$4n$	...		n^2

- 20** On désigne par U_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls :

$$U_n = 1 + 2 + \dots + n.$$

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, l'aire de la bande délimitée par les carrés de côtés U_{n-1} et U_n est égale à n^3 (voir figure).
 2) En déduire l'égalité :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$



(Cette démonstration a été proposée par Al Karagi).

La suite de Syracuse

(Du nom de l'université de Syracuse aux Etats-Unis)

On définit une suite de Syracuse de la manière suivante :

On choisit un entier N (c'est le premier terme de la suite) ;

- si N est pair le terme suivant est $\frac{N}{2}$;

- si N est impair le terme suivant est $3N + 1$.

On continue de la même façon avec le nouveau terme. On s'arrête lorsqu'on obtient 1.

Exemples :

Pour $N = 5$: 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Pour $N = 24$: 24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Le problème posé par les mathématiciens est

" Quel que soit l'entier N choisit au départ, la suite obtenue est elle finie ? "

Les mathématiciens pensent " oui ", mais ne l'ont pas démontré, le problème résiste depuis plus que 50 ans.

Déterminer les termes de la suite de Syracuse pour $N = 28$ et pour $N = 30$.

Suite de Robinson

```

      1
    1 1
  2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
.....
Ecrire la ligne qui suit.
```

Al Karagi (fin du X^{ème} siècle – début du XI^{ème} siècle)

Originaire de la ville de Karaj, située entre Téhéran et Kaswin, est l'auteur de plusieurs ouvrages très importants, notamment le livre *EL KAFI* sur la science de l'arithmétique, *Al Fakhri*, vaste traité d'algèbre et *Al Badi*, livre d'analyse.

Al Karagi procède à l'addition de plusieurs séries arithmétiques finis, comme

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$, dont il fournit une jolie démonstration à la fois algébrique et géométrique (voir exercices et problèmes).

Une histoire des mathématiques, routes et dédales

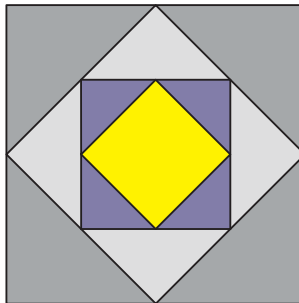
A.Dahan – Dalmedico / J. Peiffer

Seuil

Pour démarrer

Pour démarrer

- 1** Une maison a été louée, au 1^{er} Janvier 2005, à 200 dinars par mois. Un article du contrat de location stipule une augmentation annuelle de 5% du loyer.
- a) Déterminer le loyer mensuel de cette maison en 2006, 2007 et 2008.
 - b) En quelle année le loyer dépassera-t-il 240 dinars ?
- 2** On construit un carré de côté 1, puis on en construit un second en reliant les milieux des côtés du premier. En répétant ce procédé, on trace à chaque fois un nouveau carré.
- a) Déterminer l'aire du deuxième carré, du troisième carré, du quatrième carré et du cinquième carré.
 - b) Quelle est l'aire du 12^{ème} carré ?
 - c) Parmi ces carrés, y a-t-il un dont l'aire est le dixième de l'aire du carré initial ?

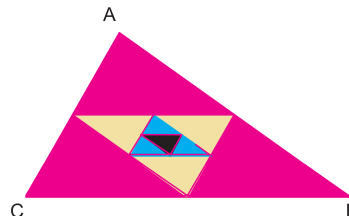


- 3** Une série télévisée voit son audience diminuer de 10 % par semaine. Si cette audience diminue de moitié, la série sera retirée des programmes. Déterminer avec la calculatrice, le nombre de semaines au bout desquelles elle risque d'être retirée.

Suites géométriques

Activité 1

Soit ABC un triangle. On désigne par P_0 son périmètre et par t_1 le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle ABC . On dit que t_1 est le triangle complémentaire de ABC .



a) P_1 étant le périmètre du triangle t_1 .

Exprimer P_1 en fonction de P_0 .

b) Soient t_2 le triangle complémentaire du triangle t_1 et t_3 le triangle complémentaire du triangle t_2 . On désigne par P_2 et P_3 leurs périmètres respectifs.

Exprimer P_2 en fonction de P_1 et P_3 en fonction de P_2 .

c) n étant un entier naturel non nul, on désigne par t_n le triangle complémentaire du triangle t_{n-1} et par P_n et P_{n-1} leurs périmètres respectifs.

d) Exprimer P_n en fonction de P_{n-1} .

e) On donne $P_0 = 384$, calculer P_1 , P_2 et P_5 .

Activité 2

Au 1^{er} Janvier 2004, on a placé un capital de 10.000 dinars, dans une banque, au taux d'intérêts composés de 4% (chaque année les intérêts se calculent sur le dernier capital).

On note C_0 le capital initial ($C_0 = 10.000$ dinars)

C_1 le capital après une année

C_2 le capital après deux années

C_3 le capital après 3 années.

a) Calculer C_1 , C_2 et C_3 .

b) On désigne par C_n le capital après n années.

Trouver une relation entre C_{n+1} et C_n .

Définition

On dit qu'une suite (U_n) est géométrique, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = q U_n$.

Le nombre réel q est appelé raison de cette suite.

Remarque

Si $a, b, c, d, \dots$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique, on dit qu'ils sont en progression géométrique.

Terme général d'une suite géométrique

Activité 3 Pression atmosphérique

La pression atmosphérique diminue, approximativement, de 1% à chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.

On note p_0 la pression, en millibars, au niveau de la mer (niveau zéro) .

p_1 la pression, en millibars à l'altitude 100 mètres

p_2 la pression ,en millibars à l'altitude 200 mètres

p_3 la pression ,en millibars à l'altitude 300 mètres

- 1) a) Exprimer p_1 , p_2 et p_3 en fonction de p_0 .
 b) p_n étant la pression en millibars à l'altitude $(n \times 100)$ mètres
 Conjecturer l'expression de p_n en fonction de p_0 .
- 2) Un jour, la pression atmosphérique au niveau de la mer était 1000 millibars.
 a) Calculer la pression à 400 mètres au dessus du niveau de la mer.
 b) Le même jour le baromètre d'un observateur indique 950 millibars.
 A quelle altitude était cet observateur ?

Activité 4

On considère la suite (C_n) définie par $C_0 = 10000$ et $C_{n+1} = (1,04) C_n$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Exprimer C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en fonction de C_0 .
- b) Conjecturer l'expression de C_n en fonction de C_0 et n .

Activité 5

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q .

- 1) Déterminer U_n dans chacun des cas suivants :
 a) $q = 1$ b) $U_0 = 0$ c) $q = 0$
- 2) On suppose que $U_0 \neq 0$, $q \neq 1$ et $q \neq 0$.
 a) Calculer U_1 , U_2 , U_3 et U_4 en fonction de U_0 et de q .
 b) Conjecturer pour U_n .



Assimiler : 3-4-5

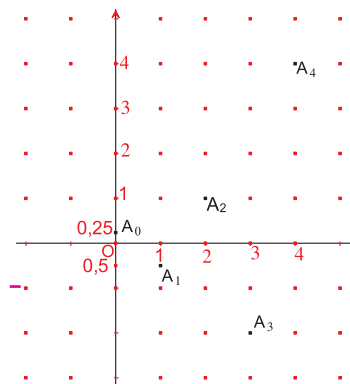
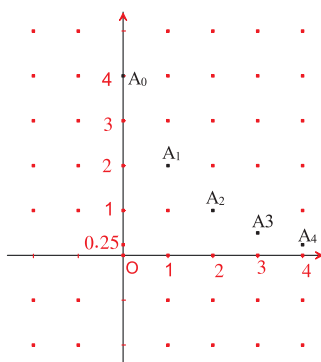
Activité 6

- 1) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et telle que $V_9 = 16\sqrt{2}$.Déterminer V_{43} .
- 2) Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison q , et soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.
 Exprimer V_n en fonction de V_p .

Activité 7 Représentation graphique

Dans chacune des figures suivantes, les ordonnées des points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont les cinq premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (U_n) .

Déterminer dans chacun des cas, le premier terme et la raison de la suite.



► Assimiler : 6-7

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Activité 8 Quitte ou double !

Dans un jeu entre deux personnes A et B, A propose à B de lui donner 100 dinars par jour et pendant 10 jours. En contre partie B donne à A, 1dinar le premier jour, deux dinars le deuxième jour, quatre dinars le troisième jour et ainsi de suite jusqu'au dixième, en doublant chaque jour le montant du jour qui précède.

La personne B a-t-elle intérêt à accepter cette proposition ?

Activité 9

Dans cette activité, on se propose de déterminer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q .

1) On considère la somme $S_1 = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}$.

a) Déterminer $q S_1$ puis $S_1 - q S_1$.

b) Dédire une écriture plus simple de S_1 , dans le cas où $q \neq 1$.

c) Calculer S_1 si $q = 1$.

2) Calculer alors, la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , sachant que le premier terme de cette somme est a .

► Assimiler : 8-9

Activité 10

Calculer les sommes suivantes :

$$A = 27 + 81 + 243 + \dots + 19683.$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}}.$$

$$C = \sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + 9\sqrt{3} - \dots - 81 + 81\sqrt{3}$$

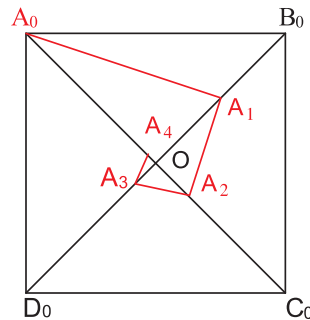
Activité 11

Soit $A_0B_0C_0D_0$ un carré de centre O et de 6 cm de côté. On définit la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ de la figure ci-dessous de la façon suivante :

Les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont respectivement sur les segments $[OB_0], [OC_0], [OD_0], [OA_0]$ et tels que : $OA_1 = \frac{1}{2} OB_0$, $OA_2 = \frac{1}{2^2} OC_0$, $OA_3 = \frac{1}{2^3} OD_0$ et $OA_4 = \frac{1}{2^4} OA_0$.

On reconduit le même procédé de sorte que les points $A_5, A_6, \dots$ soient respectivement sur les segments $[OB_0], [OC_0], \dots$ et tels que $OA_5 = \frac{1}{2^5} OB_0$, $OA_6 = \frac{1}{2^6} OC_0 \dots$

- 1) a) Sur quel segment parmi $[OA_0], [OB_0], [OC_0], [OD_0]$ se trouvent les points A_{17}, A_{23}, A_{2006} et A_{4000} ?
 b) Soit p un multiple de 4. Où se trouve le point A_p ?
 c) Pour n inférieur ou égal à 1000, quel est le nombre de points A_n sur le segment $[OA_0]$?
 d) Préciser suivant les valeurs de n , sur quel segment, parmi les quatre précédents, se trouve le point A_n .
- 2) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = OA_n$.
 a) Calculer U_0, U_1 et U_2 .
 b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Exprimer U_n en fonction de n .
 c) A partir de quelle valeur de n , a-t-on $U_n < 10^{-2}$?
- 3) Soit (L_n) la suite définie par $L_n = A_n A_{n+1}$.
 a) Calculer L_0, L_1 et L_2 .
 b) Montrer que $L_n = \frac{3\sqrt{10}}{2^{n+1}}$.
- 4) Soit p_n la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3 \dots A_n$. Exprimer p_n en fonction de n .
- 5) Montrer qu'il existe une homothétie qui transforme la ligne $A_0A_1A_2A_3A_4$ en $A_4A_5A_6A_7A_8$ et préciser le centre et le rapport de cette homothétie.



Suites géométriques

1 Parmi les suites (U_n) définies ci-dessous préciser celles qui sont géométriques et déterminer dans ce cas, le premier terme et la raison.

a) $U_n = 2 \times 3^n, n \in \mathbb{N}$.

b)
$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{2}}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = n U_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ 3U_{n+1} - 2U_n = 0, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2 Montrer que la suite (U_n) , définie par $U_n = \sqrt{7^n}, n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Terme général

3 Soit (U_n) une suite de nombres réels non nuls, telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}. \text{ Donner le terme général de la suite } (U_n).$$

4 Déterminer la raison q d'une suite géométrique (V_n) sachant que $V_0 = -6$ et $V_8 = -1536$.

5 (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

Déterminer n sachant que $U_n = \frac{5}{59049}$.

6 (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$, et telle que $U_9 = \frac{-1}{32768}$. Calculer U_{17} .

7 Déterminer la raison q d'une suite géométrique (U_n) sachant que $U_4 = 25$ et $U_{11} = 1953125$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

8 Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_0 = 5$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$.

On pose $S = V_0 + V_1 + \dots + V_6$ et $S' = V_{11} + V_{12} + \dots + V_{20}$.

Calculer S et S' .

9 Calculer les deux sommes suivantes :

$$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots - \frac{1}{2187}.$$

$$B = 32 + 64 + 128 + \dots + 2048.$$

Terme général

Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison $q \neq 0$.

On a : $V_n = V_0 q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$V_n = V_p q^{n-p}$, pour tout entiers n et p .

En particulier $V_n = V_1 q^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Somme de termes consécutifs

♦ La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est

$S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$, où a est le premier terme de cette somme

$S = \text{le premier terme de la somme} \times \frac{1 - (\text{la raison})^{\text{Le nombre de termes}}}{1 - \text{la raison}}$.

Si $q = 1$ alors $S = n a$.

♦ $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, où q est un réel différent de 1 et n est un entier naturel.

Si $q = 1$, on a $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = n + 1$.

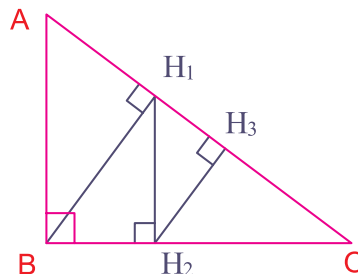
1 Dans la figure ci-contre on a :

OAB un triangle rectangle en B tel que $OA = 5$; $OB = 4$ et $AB = 3$.

H_1 le projeté orthogonal de B sur (OA)

H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur (OB)

H_3 le projeté orthogonal de H_2 sur (OA)



1) a) Calculer $\frac{OH_1}{OB}$ et en déduire OH_1 .

b) Montrer que $\frac{OH_1}{OB} = \frac{OH_2}{OH_1} = \frac{OH_3}{OH_2} = \frac{4}{5}$.

c) En déduire OH_2 et OH_3

2) Soit H_4 le projeté orthogonal de H_3 sur (OB). H_5 est le projeté orthogonal de H_4 sur (OA) et ainsi de suite.

a) Sur quel côté du triangle OAB se trouvent chacun des points H_6, H_7, H_{15} et H_{38} ?

b) Soit n un entier naturel non nul. Sur quel côté du triangle OAB se trouve le point H_n ?

c) Calculer OH_{n+1} en fonction de OH_n . En déduire l'expression de OH_n en fonction de n .

3) a) Vérifier que $BH_1 = \frac{3}{5} OB$, $H_1H_2 = \frac{3}{5} OH_1$ et $H_2H_3 = \frac{3}{5} OH_2$.

b) Soit $S = BH_1 + H_1H_2 + H_2H_3 + \dots + H_nH_{n+1}$. Donner l'expression de S en fonction de n .

Indication

Penser aux rapports trigonométriques dans un triangle rectangle.

2 Les nombres parfaits

Un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (autres que lui même).

Exemples : $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

6 et 28 sont deux nombres parfaits.

1) Vérifier que 496 est un nombre parfait.

2) Soit p un nombre premier différent de 2, et soit $N = p \times 2^n$, où n est un entier naturel.

On désigne par S la somme des diviseurs propres de N .

a) Donner la forme des diviseurs de N .

b) Exprimer S en fonction de p et n .

3) a) Montrer que N est un nombre parfait si et seulement si $p = 2^{n+1} - 1$.

b) Déterminer N pour $p = 3$; $p = 7$ et $p = 31$.

c) Vérifier que 8128 est un nombre parfait.

Indication

Pour calculer S , on pourra faire la somme des diviseurs de N qui sont de la forme 2^k , puis la somme des diviseurs de N qui sont de la forme $p \times 2^k$.

Avec un tableur

On considère les suites géométriques (U_n) , (V_n) et (W_n) de raisons respectives $0,5$, $\frac{3}{2}$ et -2 et telles que $U_0 = V_0 = W_0 = 1$.

a) Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante,

	A	B	C	D
1	n	U_n	V_n	W_n
2	= 0	= 1	= 1	= 1
3	= A2 + 1	= B2 * 0,5	= C2 * 1,5	= D2 * - 2

La colonne A, affiche les valeurs prises par l'entier n : 0, 1, 2, 3, ...

La colonne B, affiche les valeurs prises par U_n .

La colonne C, affiche les valeurs prises par V_n .

La colonne D, affiche les valeurs prises par W_n .

Cliquer sur la cellule A3, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule.

Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n .

Procéder de la même façon avec B 3, C 3 et D 3.

b) Quelles remarques peut-on faire pour les valeurs des termes de chacune des trois suites, lorsque n devient de plus en plus grand ?

Appliquer

1 Indiquer parmi les suites définies ci-après celles qui sont des suites géométriques.

a) $U_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$.

b) $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = (U_n)^2, n \in \mathbb{N}$.

c)
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = 3 U_{n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d) $U_n = -4$ si n est pair et $U_n = 4$ si n est impair, $n \in \mathbb{N}$.

e) $U_n = n^n, n \in \mathbb{N}^*$.

f)
$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 3 U_n + 5, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2 Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = -7$ et telle que $U_4 = 2401$. Calculer U_{10} .

3 Soit (V_n) une suite géométrique telle que $V_3 = 12$ et $V_5 = 36$. Quelles sont les valeurs possibles de la raison ?

Calculer V_9 pour chaque cas.

4 Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_1 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

a) Calculer U_8 et U_{10} .

b) Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + \dots + U_8$.

5 Soit (V_n) une suite géométrique de raison 2.

a) Sachant que $V_0 + V_1 + \dots + V_{14} = 98301$, exprimer V_n en fonction de n .

b) On prend dans cette question $V_0 = 3$.

Déterminer n , pour que la somme des n premiers termes de cette suite soit 3145725.

6 Les nombres 428442, 4242 et 42 sont-ils les termes consécutifs d'une suite géométriques ?

7 Calculer chacune des sommes :

$A = 3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 103 + 108$

$B = 2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \dots + 33554432$.

Maîtriser

8 Moyenne géométrique

a) Soient a, b et c trois réels positifs.

Montrer que si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors

$b = \sqrt{ac}$.

(On dit que b est la moyenne géométrique de a et c).

b) Soient a, b et c trois réels positifs tels que $b = \sqrt{ac}$. a, b et c sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

9 Soient ABC un triangle rectangle en A , O le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A .

a) Montrer que BH, AH et HC sont, dans cet ordre, en progression géométrique, et que pour tout point M de $[BC]$ les réels MB, OA et MC sont, dans cet ordre, en progression arithmétique.

b) x et z sont les longueurs de deux segments donnés.

Construire un segment de longueur y tel que x, y et z soient, dans cet ordre, en progression géométrique.

10 Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

Montrer que la suite (V_n) définie par

$V_n = 2^{U_n}, n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q en fonction de U_0 et r .

11 Un épargnant doit choisir entre deux formules pour placer un capital de 8000 dinars pendant six ans, à intérêts composés.

Formule 1 : taux annuel de 4%

Formule 2 : taux semestriel de 2%

Quelle formule lui conseiller ?

Le roi et l'inventeur du jeu d'échecs

Un auteur arabe, Al-Sephadi, raconte que l'inventeur du jeu d'échecs, fut présenté à son maître roi de Perse. Pour le récompenser, celui-ci promit de lui accorder ce qu'il désirerait. L'inventeur, qui devait être un mathématicien de talent, demanda un grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, 8 pour la quatrième et ainsi de suite, jusqu'à la dernière case (un échiquier comporte 64 cases).

Le roi pensa que c'était une bien faible récompense, mais ces conseillers firent le calcul. Et ils trouvèrent que le nombre de grain de blé est de $2^{64} - 1$. Un nombre qui dépasse de beaucoup de fois la récolte de nos jours, chaque année, dans le monde entier !

Un grain de blé pèse en moyenne 0,05 g. Combien faut-il de bateaux de 10000 tonnes pour transporter ce blé ?

Devinette

Sur un lac pousse un nénuphar (une plante aquatique), qui double de taille chaque jour.

Au bout de dix jours, il recouvre exactement la surface du lac tout entier.

Combien a-t-il fallu au nénuphar pour recouvrir la moitié du lac ?

Ce qui est simple est faux, ce qui est compliqué est inutilisable.

Paul VALÉRY

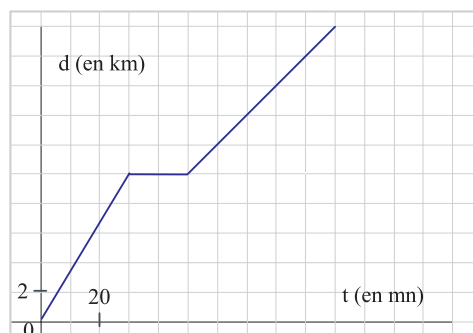
Pour démarrer

1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

- 1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2 + 2x$; 2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$; 3) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x - 4}$
- 4) $k : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{x}{x - 3}$; 5) $l : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

2 Un cycliste part d'une ville A et se dirige vers une ville B.

Le graphique ci-contre, donne à chaque instant t (en mn), la distance parcourue d (en km).



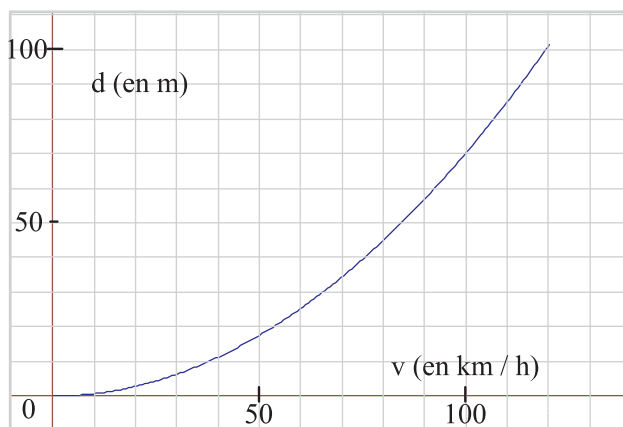
1) Déterminer :

- La distance qui sépare les deux villes.
- La durée totale du trajet.
- La distance parcourue après 60 mn.

2) Décrire le trajet de ce cycliste.

3 Sur une route sèche, on a testé la distance de freinage d'une voiture en fonction de sa vitesse.

Le résultat du test est illustré par le graphique ci-contre.



1) Déterminer graphiquement :

- La distance de freinage à 80 km/h, à 100 km/h.
- La vitesse à partir de laquelle la distance de freinage dépasse 10 m, 50 m.

2) La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse ?

Représentation graphique d'une fonction

Activité 1

Soit ABCD un rectangle de périmètre 10 et de côté variable $AB = x$.

1) Exprimer AD en fonction de x .

2) Soit f la fonction telle que $f(x)$ soit égale à l'aire du rectangle ABCD.

Donner l'ensemble de définition de f et déterminer l'expression de $f(x)$.

3) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

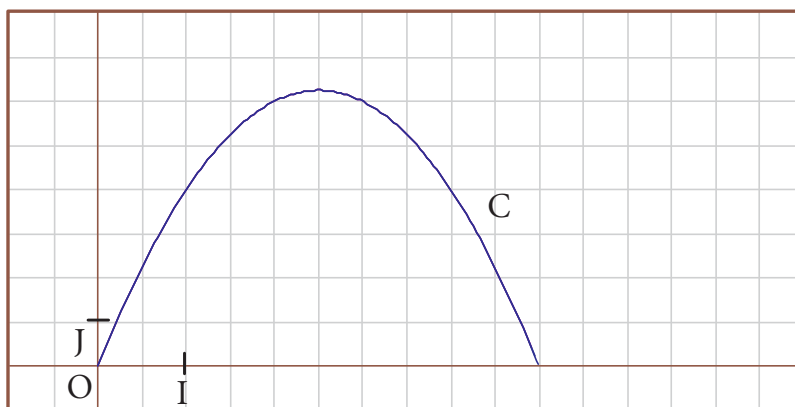
Dans le graphique ci-dessous, est représentée la courbe C, ensemble de points $M(x, f(x))$, avec $x \in]0, 5[$.

Placer sur la courbe C, les points M de coordonnées $(x, f(x))$, du tableau suivant.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
f(x)									

4) Par une lecture graphique déterminer la valeur maximale de $f(x)$.

5) Déterminer les dimensions des rectangles dont l'aire est égale à 4.



Définition

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$

Soit f une fonction définie sur un ensemble E .

On appelle représentation graphique de f , ou courbe représentative de f , l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$, où x appartient à E .

Vocabulaire

Si une fonction f , définie sur un ensemble E , a pour représentation graphique la courbe C , on dit que C a pour équation $y = f(x)$, avec $x \in E$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

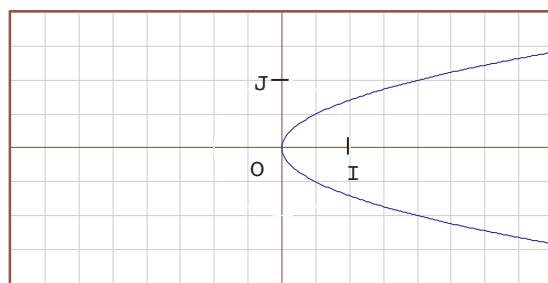
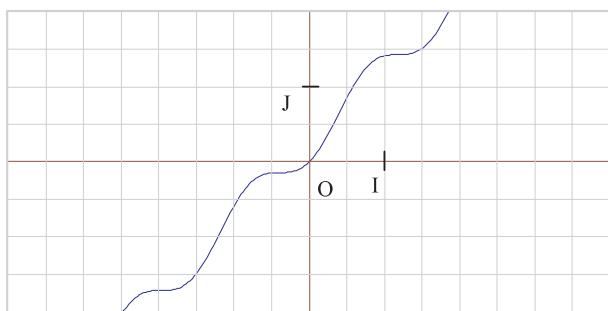
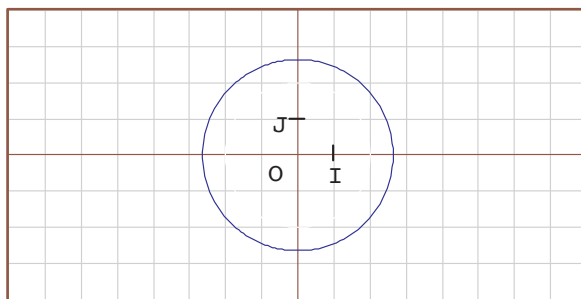
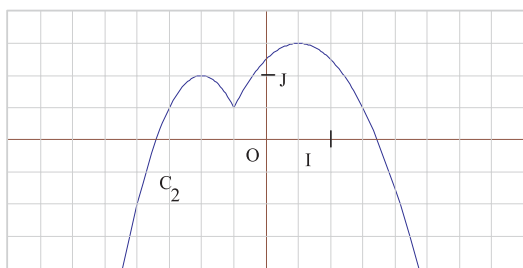
1) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à C :

$A(1, -1)$; $B(\frac{3}{2}, 0)$; $D(-2, 2)$; $E(\sqrt{2}, -0,23)$; $F(-6, 90)$?

2) Quels sont les points de la courbe C , ayant pour ordonnée 5 ?

Activité 3

Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celles qui représentent une fonction.

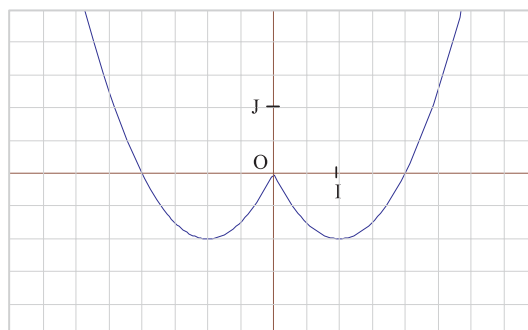


Activité 4

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f .

Lire sur ce graphique :

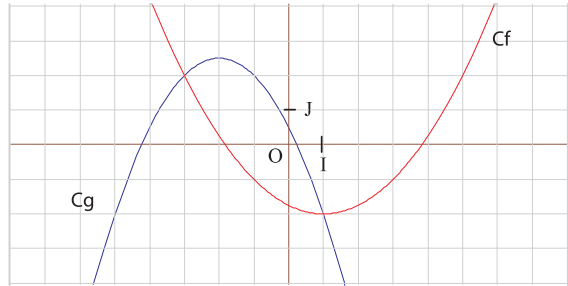
- 1) Les images de 1, 2 et $\frac{5}{2}$ par f .
- 2) Les antécédents de 0.
- 3) La valeur minimale de $f(x)$.
- 4) Le nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
- 5) L'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.



Activité 5

Dans la figure ci-contre, on a représenté deux fonctions f et g .

- 1) Lire l'image de -1 par f et g respectivement.
- 2) Résoudre graphiquement
 - a) $f(x) = 2$; b) $g(x) = 3$;
 - c) $f(x) = g(x)$; d) $f(x) < -1$.
- 3) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x est un réel de l'intervalle $[-3, 1]$.

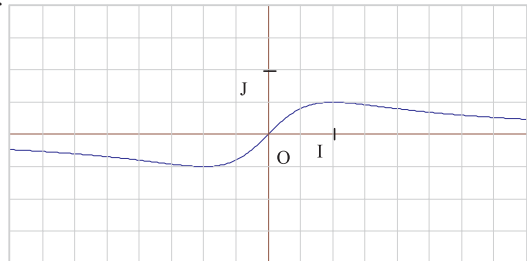


Maximum et minimum

Activité 6

Ci-contre, la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4, 4]$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- 1) Déterminer graphiquement la valeur minimale de $f(x)$
Pour quelle valeur de x cette valeur minimale est-elle atteinte ?
- 2) Vérifier ce résultat par le calcul.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

- La fonction f admet un minimum en a sur l'intervalle I , lorsque :
Pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le minimum de f sur I .
- La fonction f admet un maximum en a sur l'intervalle I , lorsque :
Pour tout réel x de I , $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le maximum de f sur I .

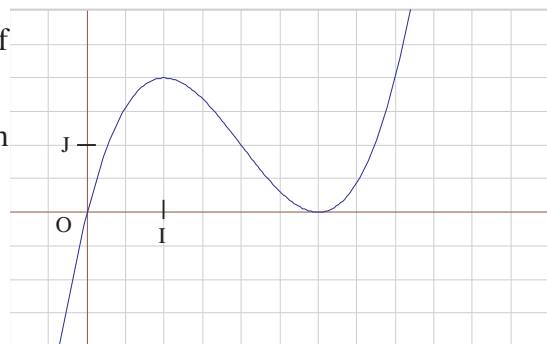
Activité 7

Ci-contre, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Par une lecture graphique, déterminer le maximum M et le minimum m de f sur l'intervalle $[0, \frac{7}{2}]$.

A-t-on $f(x) \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$?

A-t-on $f(x) \geq m$, pour tout $x \in \mathbb{R}$?



Activité 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

- Calculer $f(-1)$, puis $f(x) - f(-1)$.
- En déduire que f admet un minimum que l'on précisera.



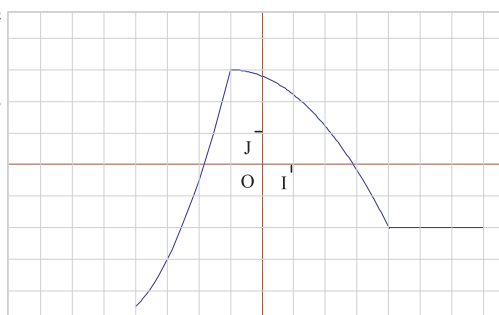
Assimiler : 1-2

Sens de variations d'une fonction

Activité 9

La courbe ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4, 7]$.

- Soient a et b deux réels de l'intervalle $[-4, -1]$ tels que $a \leq b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
- Reprendre la même question lorsque :
 - a et b appartiennent à $[-1, 4]$ et $a \leq b$.
 - a et b appartiennent à $[4, 7]$ et $a \leq b$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et I un intervalle inclus dans E .

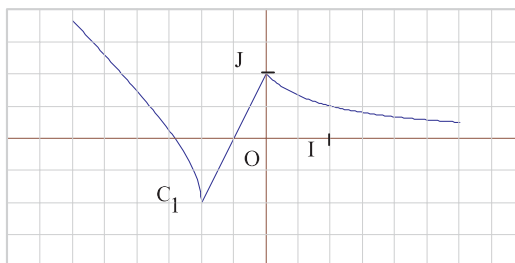
- La fonction f est croissante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est constante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I , $f(a) = f(b)$.

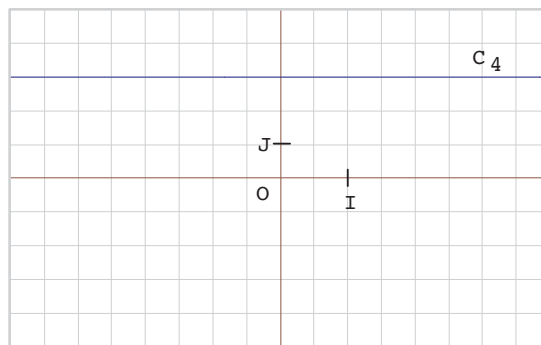
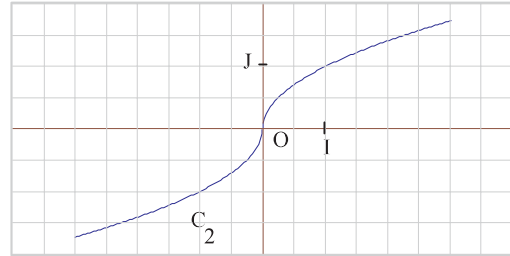
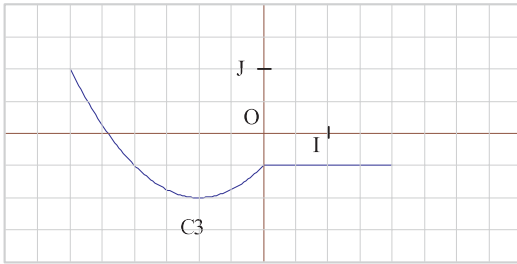
Vocabulaire

Une fonction est dite monotone sur un intervalle I , si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

Activité 10

Décrire les variations de f dans chacun des cas suivants :





Activité 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty, 2]$, tels que $a \leq b$.

Comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 2]$.

2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[2, +\infty[$.



Assimiler : 3-4-5

Activité 12

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle, de sommet principal A tel que $AB = 5$ et $BC = 6$. Le point M se déplace sur le segment $[AB]$, privé des deux points A et B . N et Q sont deux points respectivement de $[AC]$ et de $[BC]$, tels que $MNQB$ soit un parallélogramme. On pose $AM = x$.

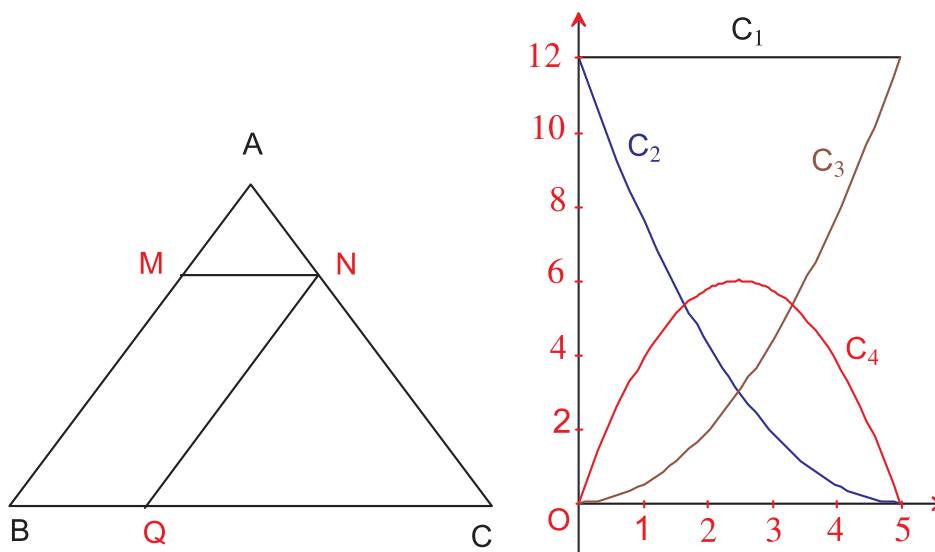
1) Sur le graphique ci-dessous, les courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 représentent, les aires, en fonction de x , des triangles AMN , NCQ , ABC et celle du parallélogramme $MNQB$, lorsque M se déplace de A vers B .

a) Comment varie l'aire du triangle AMN ? Quelle est la courbe associée à cette aire ?

b) Reprendre les deux questions précédentes pour chacun des triangles NCQ et ABC .

2)a) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du parallélogramme est maximale.

b) Dans ce cas, que peut-on dire des aires des triangles AMN et NCQ ?
Comparer alors l'aire du parallélogramme MNQB à celle du triangle ABC.



Parité et symétrie

Activité 13

Soit f la fonction définie sur $[-4, 4]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

1) a) Vérifier que si $x \in [-4, 4]$ alors $-x \in [-4, 4]$.

b) Comparer $f(-x)$ et $f(x)$.

2) On muni le plan d'un repère orthogonal $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

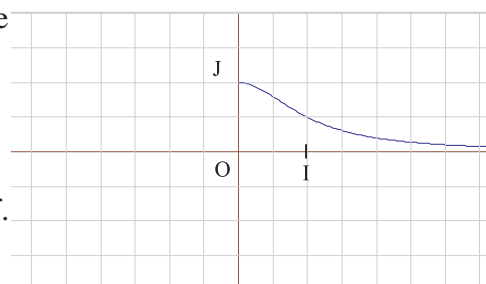
et on désigne par C la courbe représentative de f dans ce repère.

a) Soit M un point de C d'abscisse x et N le point de C d'abscisse $-x$.

b) Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3) On a représenté ci-contre une partie de la courbe C de f .

Copier et compléter la courbe C .



Définition

Soit f une fonction définie sur E .

On dit que f est paire si, pour tout réel x de E , on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$.

Conséquence

Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Activité 15

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3$.

1) a) Vérifier que si $x \in [-1, 1]$ alors $-x \in [-1, 1]$.

b) Comparer $f(-x)$ et $f(x)$.

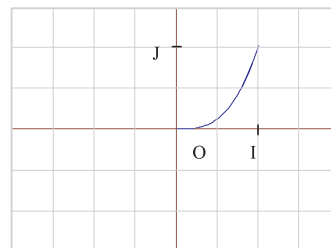
2) On muni le plan d'un repère orthogonal $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

et on désigne par C la courbe représentative de f dans ce repère.

a) Soit M un point de C d'abscisse x et N le point de C d'abscisse $-x$.

Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à l'origine O .

b) On a représenté ci-contre une partie de la courbe C de f . Copier et compléter cette courbe.



Définition

Soit f une fonction définie sur E .

On dit que f est impaire si, pour tout réel x de E , on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Activité 16

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble de définition de f puis dire si la fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$; b) $f(x) = \frac{x}{|x|-2}$; c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

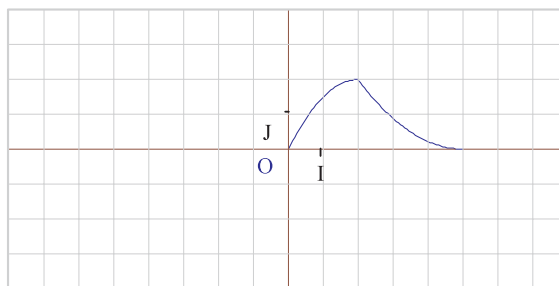
d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; e) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Activité 17

La courbe ci-contre, est une partie de la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5, 5]$.

Recopier et compléter cette représentation graphique dans chacun des cas suivants :

a) f est paire. b) f est impaire.



Assimiler : 6-7

1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

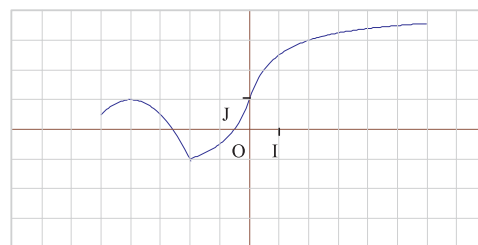
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Calculer les images de -2 , 0 et $\sqrt{3}$ par f .
- Déterminer les antécédents du réel 2 par f .

2 Dans la figure ci-contre, la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5, 6]$.

1) Lire sur ce graphique

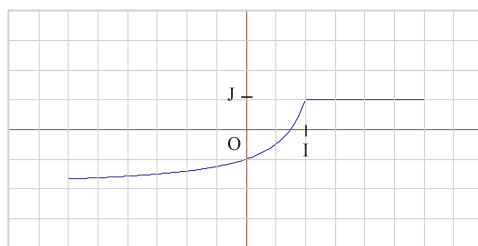
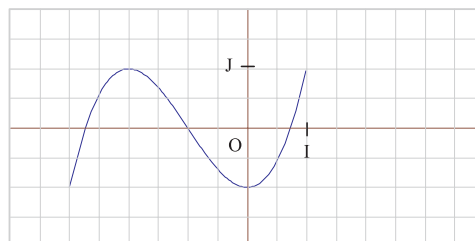
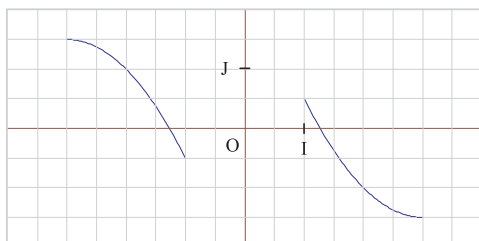
- Les images des réels -2 , 0 et 2 par f .
- Les antécédents du réel 1 par f .
- La valeur minimale de $f(x)$.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.



3 Dans les graphiques ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f , g et h définies respectivement sur $[-3, -1] \cup [1, 4]$, $[-3, 1]$ et $[-3, 3]$.

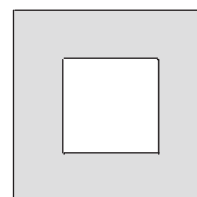
Décrire les variations de chaque fonction.



4 Dans la figure ci-contre, deux carrés de même centre et de côtés respectifs 4 et x ; où x est un réel de l'intervalle $]0, 4[$.

On désigne par $A(x)$ l'aire de la région grisée et par $P(x)$ le périmètre du carré en blanc.

Sans effectuer de calcul, déterminer le sens de variation des fonctions A et P , sur l'intervalle $]0, 4[$.

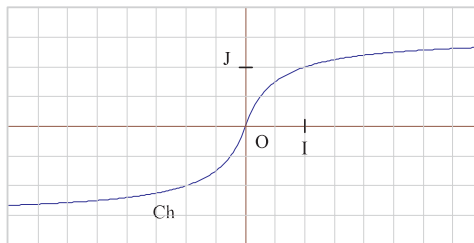
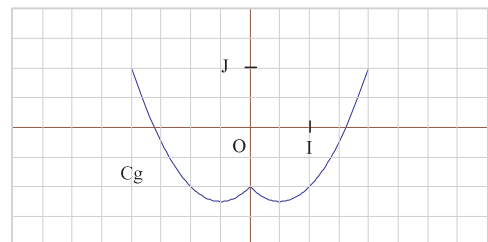
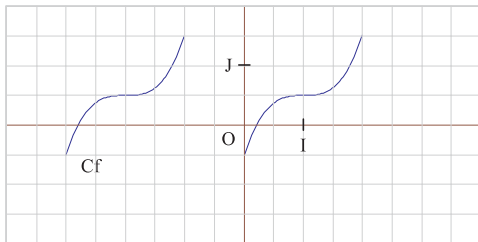


5 Soit f la fonction définie sur $[-5, 5]$ par $f(x) = |x| - 2$.

a) Montrer que f est décroissante sur $[-5, 0]$ et croissante sur $[0, 5]$.

b) Représenter graphiquement f .

6 Dire, pour chacune des fonctions f , g et h représentées ci-dessous, si elle est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

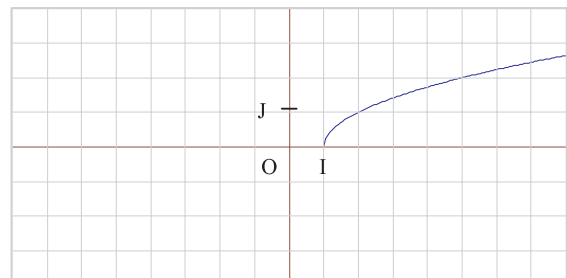


7 Soit f la fonction définie $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que f est paire.

c) Copier et compléter la courbe de f dont une partie est donnée ci-contre.



Représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On désigne par C sa courbe représentative dans un repère du plan.

- ◆ C est l'ensemble de points de coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in E$.
- ◆ Soit $M(x, y)$ un point du plan.
 $M(x, y) \in C$ si et seulement si $(x \in E \text{ et } y = f(x))$.

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- ◆ $f(a)$ est un minimum de f sur l'intervalle I si et seulement si $f(x) \geq f(a)$, pour tout x de I .
- ◆ $f(a)$ est un maximum de f sur l'intervalle I si et seulement si $f(x) \leq f(a)$, pour tout x de I .

Parité et symétrie

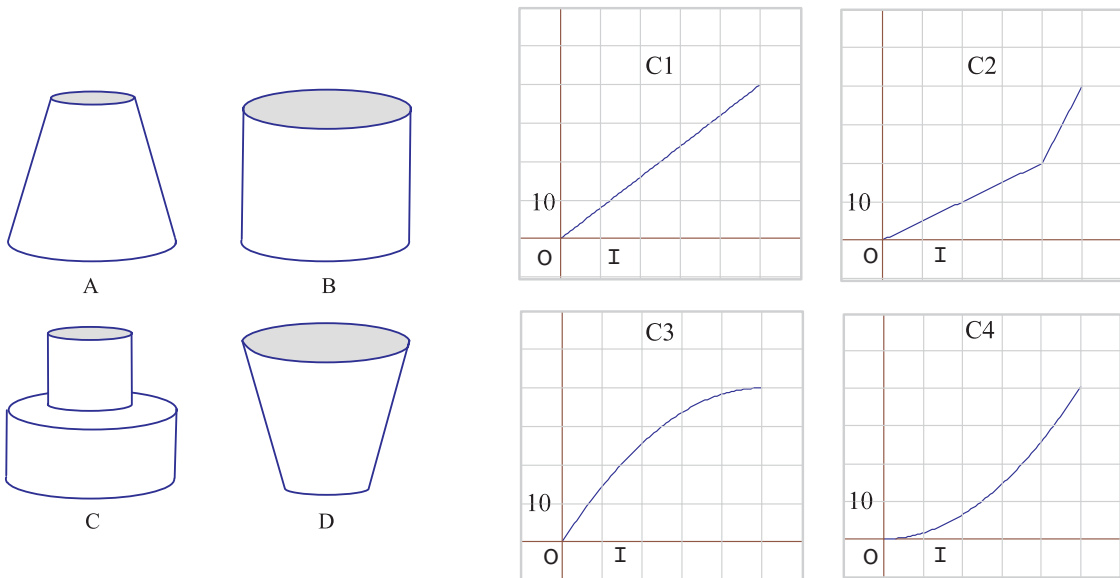
Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- ◆ f est une fonction paire si et seulement si (Pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$).
 La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ◆ f est une fonction impaire si et seulement si (Pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$).
 La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1 Problème de récipients

Les quatre récipients ci-dessous, ont la même hauteur et la même capacité de 20 litres. On les remplit un à un à l'aide d'un robinet à débit constant.

On a représenté, pour chaque récipient, la hauteur de l'eau (en centimètres) dans le récipient en fonction du temps de remplissage écoulé (en minutes).



- Déterminer la hauteur de ces récipients.
- Quel est le débit du robinet (en litres par minute)
- Associer chaque récipient à la courbe qui lui correspond.

Recherche d'un maximum et d'un minimum

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

On se propose de déterminer, si elles existent, la valeur maximale et la valeur minimale de f .

- Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
 - Montrer que $f(b) - f(a)$ a le même signe que $1 - ab$.
 - En déduire le sens de variation de f sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
 - Déterminer alors la valeur maximale de f sur $[0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$.

Indications

- Factoriser $f(b) - f(a)$.
 - Déterminer, pour chaque intervalle, le signe de $f(b) - f(a)$.
- Remarquer que si $x \in]-\infty, 0]$ alors $f(x) < 0$.
- Exploiter la parité de f .

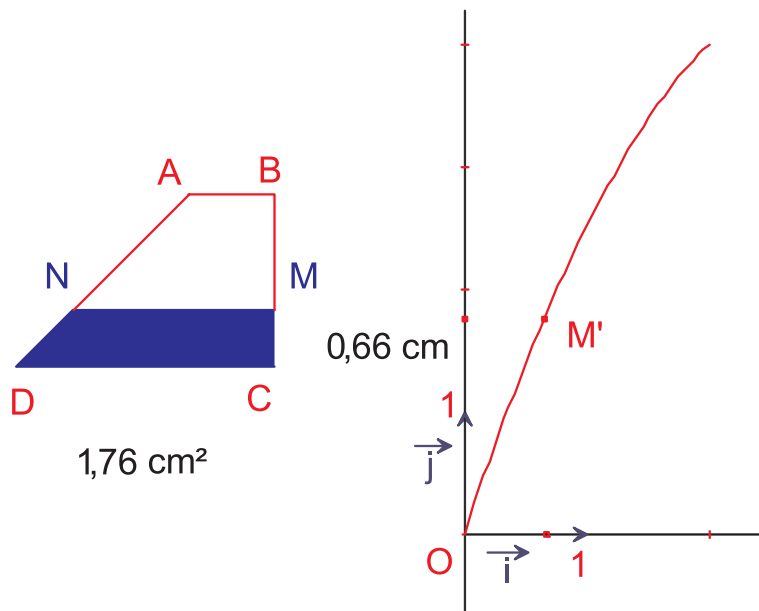
Expérimenter à l'aide d'un logiciel de géométrie

ABCD est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, tel que $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 3$.

M un point du segment $[BC]$. La parallèle à $[CD]$ passant par M, coupe $[AD]$ en N.

On se propose d'étudier la variation de l'aire du polygone MNDC, lorsque le point M varie sur le segment $[BC]$.

- Construire un trapèze ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$, tel que $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 3$.
- Marquer un point M sur le segment $[BC]$ (point sur objet) et construire le point N, intersection de $[AD]$ et la parallèle à (CD) passant par M.
- Construire le polygone MNDC.
- Mesurer la longueur du segment $[CM]$ et l'aire du polygone MNDC.
- Faire apparaître les axes du repère du logiciel.
- Reporter la longueur du segment $[CM]$ sur l'axe des abscisses et l'aire du polygone sur l'axe des ordonnées (report de mesure).
- Marquer dans le repère, le point M' dont les coordonnées sont les valeurs des mesures reportées sur les axes (intersection des perpendiculaires aux axes).
- Déplacer le point M sur le segment $[BC]$ et observer où varie le point M'.
- Utiliser le menu du logiciel, pour déterminer le lieu du point M' lorsque le point M varie.
- déterminer une équation du lieu du point M' (*coordonnées ou équation*).



Appliquer

1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Déterminer les antécédents éventuels de chacun des réels 0, 1 et -2.

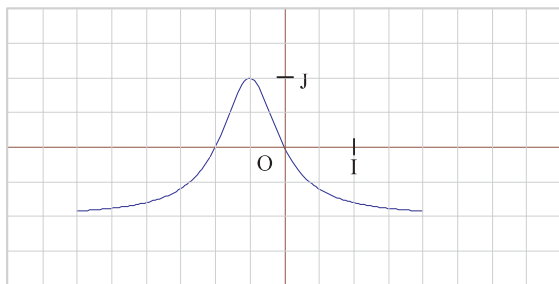
3 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}.$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
b) Parmi les points suivants, indiquer ceux qui sont situés sur la courbe de f .

$A(2,0)$, $B(3,1)$, $C(0, -\frac{1}{3})$, $D(4, \sqrt{2})$.

4 Dans le graphique ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3, 2]$.



1) Lire sur cette courbe :

a) $f(-1)$, $f(0)$ et $f(-\frac{1}{2})$.

b) La valeur maximale de $f(x)$.

c) Le nombre d'antécédents de $-\frac{1}{2}$.

2) Résoudre graphiquement :

a) Les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 0$.

b) L'inéquation $f(x) < 0$.

5 Soit f la fonction définie sur $[0, 5[$ par $f(x) = |x - 2|$.

Montrer que f est décroissante sur $[0, 2]$ et croissante sur $[2, 5]$.

6 Répondre par vraie ou faus :

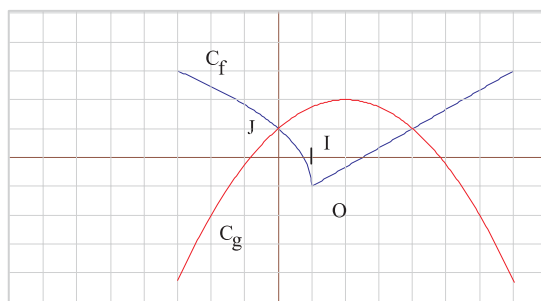
a) La fonction f définie sur $[-2, 3]$ par $f(x) = x^2$ est paire.

b) La fonction f définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

c) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$ n'est ni paire ni impaire.

Maîtriser

7 Dans le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-3, 7]$.



Résoudre graphiquement.

a) $f(x) = 1$; b) $g(x) = -2$

c) $f(x) = g(x)$; d) $f(x) < 1$

e) $-2 < g(x) < 1$; f) $f(x) \geq g(x)$.

8 Soit f la fonction définie par

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) a) Donner l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que f est paire.

2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 3]$.

3) a) Montrer que si M est un point de C, alors $OM = 3$.

b) Construire alors la courbe de f.

9 Soit f une fonction croissante sur $[3, 7]$ et décroissante sur $[7, 10]$.

a) Comparer $f(4)$ et $f(5)$.

b) Sachant que $f(3) = 1$ et que $f(8) = 0$, comparer $f(4)$ et $f(10)$.

10 Soit f une fonction croissante sur $[-1, 5]$.

a) Soit g la fonction définie sur $[-1, 5]$ par $g(x) = f(x) + 1$.

Montrer que g est croissante sur $[-1, 5]$

b) Soit h la fonction définie sur $[-1, 5]$ par $h(x) = -f(x)$.

Déterminer le sens de variations de h.

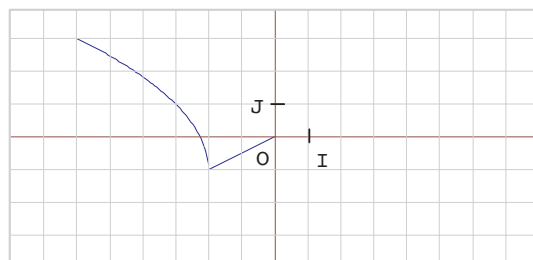
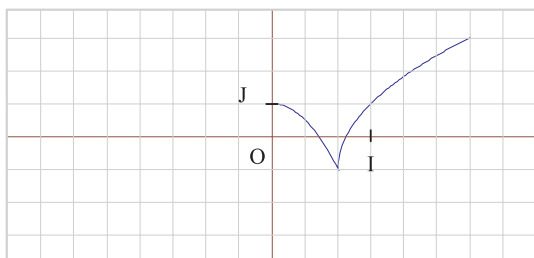
11 Etudier la parité de chacune des fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = \frac{x}{|x| - 2}$$

et $\sqrt{x-1}$

12 Soient f et g deux fonctions définies sur $[-2, 2]$ et $[-6, 6]$ respectivement.

Copier et compléter la courbe de chaque fonction sachant que f est paire et que g est impaire.



13 On se propose de déterminer parmi les rectangles d'aire 4 cm^2 celui qui a le plus petit périmètre.

On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle et on note f la fonction qui à x associe le périmètre du rectangle.

1)a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.

2) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]0, +\infty[$ tels que $a < b$.

a) Montrer que

$$f(b) - f(a) = \frac{2(b-a)(ab-4)}{ab}$$

b) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$.

3) Conclure.

Fractions égyptiennes

On partage bien les chevaux

Aujourd'hui, l'étude des fractions égyptiennes est un domaine restreint de la théorie des nombres où plusieurs problèmes fondamentaux ne sont pas encore résolus. Certains d'entre eux sont à la portée de l'amateur averti. Prenons le casse-tête arabe de l'homme qui voulait qu'à sa mort on partage ses 11 chevaux entre ses héritiers de sorte que l'aîné en ait la moitié, son deuxième fils un quart et le cadet un sixième. Lorsqu'il mourut, le notaire fut bien embarrassé pour exécuter les volontés du défunt :

Un cheval a bien peu de valeur une fois en morceaux ! Un parent informé du problème le résolut en prêtant un de ses chevaux. Les 12 destriers furent alors répartis selon les vœux du testament, les trois fils recevant six, trois et deux chevaux. L'altruiste récupéra le cheval, le sien, qui restait : un altruisme bien calculé !

Ce casse-tête fut exposé de façons diverses et peut être généralisé à un plus grand nombre d'héritiers et un plus grand nombre de chevaux, prêtés, puis restitués. En respectant la forme traditionnelle de l'histoire, avec trois héritiers et un cheval prêté, combien existe-t-il de variantes dans le nombre des chevaux à diviser et les proportions souhaitées dans le testament du père ? Une infinité ? Que nenni,

Il n'y en a que sept ! Ce sont les sept solutions de l'équation diophantienne (parce qu'à coefficients et solutions entières) $n/n+1 = 1/a + 1/b + 1/c$, où a, b etc sont des entiers positifs distincts respectant la condition ($a < b < c$) et $(n+1)$ le plus petit commun multiple de a, b et c (pour l'intégrité des chevaux !).

D'abord, on remarque que a doit être égal à deux. En effet, si a est supérieur à deux, la valeur minimale de $(n+1)$ est 12 obtenue pour $a=3, b=4$ et $c=6$. En conséquence, $n/n+1$ doit valoir au moins $11/12$. Cependant, la somme $1/3 + 1/4 + 1/5$ est égale à $47/60$ qui est inférieur à $11/12$, et si l'on augmente les dénominateurs, la somme sera encore plus petite. $(3, 4, 6)$ n'étant pas solution de l'équation, a n'est pas plus grand que 2. Un argument semblable montre que b doit être égal à 3 ou à 4. Avec ce renseignement, on détermine toutes les valeurs possibles de c (voir figure ci-dessous).

n	a	b	c
7	2	4	8
11	2	4	6
11	2	3	12
17	2	3	9
19	2	4	5
23	2	3	8
41	2	3	7



LE PARTAGE de n chevaux
entre trois héritiers de façon à ce que leurs parts respectent les proportions suivantes $1/a, 1/b$ et $1/c$, n'admet que sept solutions. Dans chaque cas, un cheval est prêté par un tiers, qui le récupère après le partage.

D'après le magazine « Dossier pour la Science » N° 47

Avril / Juin 2005

1 f étant une fonction et C sa courbe représentative.

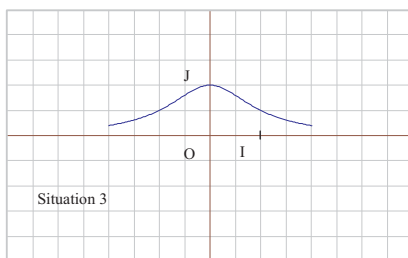
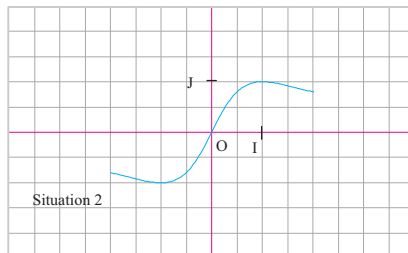
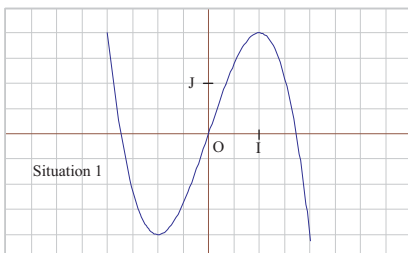
1) Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité.

- 2 a pour image -5 par f .
- Le point $A(-1, 3)$ appartient à la courbe C .
- 6 est l'image de 0 par f .
- -4 est un antécédent de 1 par f .
- L'ordonnée du point de C d'abscisse 0,5 est 2,3.

2) Traduire les phrases suivantes par des inégalités.

- f admet un maximum égal à 4 sur l'intervalle $[-1, 3]$.
- f est décroissante sur l'intervalle $[2, 5]$.
- Si x est compris entre -3 et -2 , alors $f(x)$ est compris entre 0 et 3,4.

2 Dans chacune des situations ci-dessous, on a représenté une fonction f définie sur $[-2, 2]$.



Copier et compléter le tableau suivant :

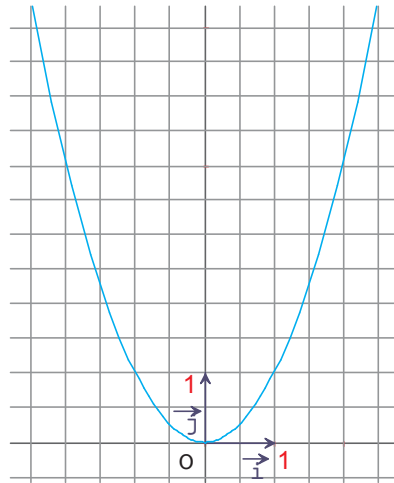
Propriété	Situation 1	Situation 2	Situation 3
f est croissante sur $[-2, 0]$	Faux		
f est croissante sur $[-1, 1]$			
Pour tout $x \in [-2, 2]$, $-1 \leq f(x) \leq 1$		Vrai	
Pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) \geq 0$			
f est une fonction paire			
f est une fonction impaire			

Fonctions du type $f(x) = a x^2 + b x + c ; a \neq 0$

Activité 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On admet que la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est la courbe ci-contre.

- 1) A l'aide du graphique
 - a) Emettre une conjecture sur la parité de f .
 - b) Décrire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Montrer que la fonction f est paire.
b) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
- 3) a) Copier et compléter le tableau suivant :



x	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{15}
f(x)					

- b) Comment peut-on choisir x positif, pour que $f(x)$ soit strictement supérieur à 10^{30} ?
- c) Soit A un réel strictement positif.

Comment peut-on choisir x positif, pour que $f(x)$ soit strictement supérieur à A ?

Vocabulaire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- La courbe P de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, est appelée parabole. Le point O est appelé le sommet de la parabole P et la droite d'équation $x = 0$ est appelée l'axe de la parabole P .
- L'équation $y = x^2$, est appelée l'équation de la parabole P .

Remarques

- Pour tout réel A strictement positif, on peut trouver des valeurs positives de x tels que $f(x)$ soit supérieur à A .

Autrement dit, $f(x)$ est supérieur à n'importe quel réel A positif aussi grand que l'on veut, en choisissant des valeurs positives de x .

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- On a aussi, $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Fonctions du type $f(x) = a x^2$; $a \neq 0$

Activité 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Construire la parabole P d'équation $y = x^2$.
- 2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ et M(x, y) un point de la parabole P. On désigne par M'(x', y') l'image du point M par l'homothétie h.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

- 3) a) Montrer que le point M' est sur la courbe représentative C de la fonction $g: x \mapsto 2x^2$.

b) Montrer que tout point N de C est l'image par l'homothétie h d'un point M de P.

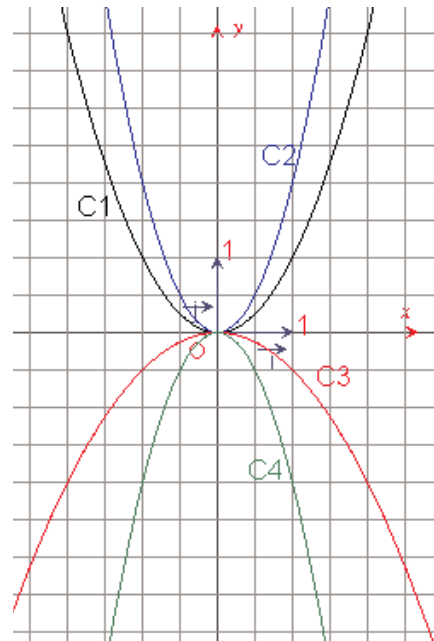
Quelle est alors l'image de la parabole P par h ?

- c) Construire la courbe C à partir de la parabole P.

Activité 3

Chaque parabole du graphique ci-contre, représente une fonction du type $f(x) = m x^2$, où m est une constante réelle.

Déterminer pour chaque parabole, la valeur de m correspondante.



Activité 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer les paraboles d'équations respectives.

$$y = 3x^2, \quad y = -\frac{3}{2}x^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{4}x^2.$$

Activité 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2$. On désigne par P la représentation graphique de f .

- Construire P .
- Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Soit A un réel strictement positif.

Montrer que si $x > \sqrt{\frac{A}{3}}$ alors $f(x) < -A$.

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Fonctions du type $f(x) = a(x - \alpha)^2$; $a \neq 0$

Activité 6

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2$. On désigne par C la courbe représentative de f et par P la parabole d'équation $y = x^2$.

- Soit $M(x, y)$ un point du plan.

Montrer que $M(x, y)$ appartient à C équivaut à $N(x - 2, y)$ appartient à P .

- En déduire que C est l'image de P par une translation dont on précisera le vecteur.

- Tracer P puis C .

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - \alpha)^2$, où α est un réel donné.

On note P' la courbe représentative de g .

- Montrer que P' est l'image de la parabole P par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}$.

- On admet que P' est une parabole. Déterminer son sommet et son axe.

Activité 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la parabole $P_1 : y = (x - 1)^2$.

Déterminer le sommet et l'axe de P_1 , puis construire P_1 .

2) Dans le même repère, construire les paraboles :

$$P_2 : y = 3(x - 1)^2 \quad ; \quad P_3 : y = -2(x - 1)^2 \quad ; \quad P_4 : y = \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$



Assimiler : 1

Fonctions du type $f(x) = x^2 + \beta$

Activité 8

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}$.

On désigne par C la courbe représentative de f et par P la parabole d'équation $y = x^2$.

a) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

Montrer que $M(x, y)$ appartient à C équivaut à $N\left(x, y - \frac{3}{2}\right)$ appartient à P .

b) En déduire que C est l'image de P par une translation dont on précisera le vecteur.

c) Tracer P puis C .

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + \beta$, où β est un réel donné.

On note P' la courbe représentative de g .

a) Montrer que P' est l'image de la parabole P par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.

b) On admet que P' est une parabole. Déterminer son sommet et son axe.

Activité 9

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de la parabole P , puis la construire.

a) $P : y = x^2 + 3$; b) $P : y = x^2 - 2$; c) $P : y = x^2 - \frac{9}{4}$.

Fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

Activité 10

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$. On désigne par C sa courbe représentative.

a) Vérifier que, pour tout réel x , $2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3$.

b) Construire la parabole P d'équation $y = 2(x+1)^2$, puis la courbe C .

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c des réels avec $a \neq 0$.

a) Ecrire $f(x)$ sous la forme, $f(x) = a(x-p)^2 + q$, où p et q sont deux réels que l'on déterminera en fonction de a, b et c .

b) On admet que la courbe représentative de f est une parabole. Déterminer son sommet et son axe.

c) Construire la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$.



Assimiler : 2-3

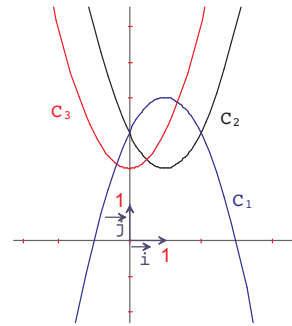
Activité 11

Dans le graphique ci-contre, trois paraboles, courbes représentatives de trois fonctions

trinômes f , g et h telles que $f(x) = (x - 1)^2 + 2$;

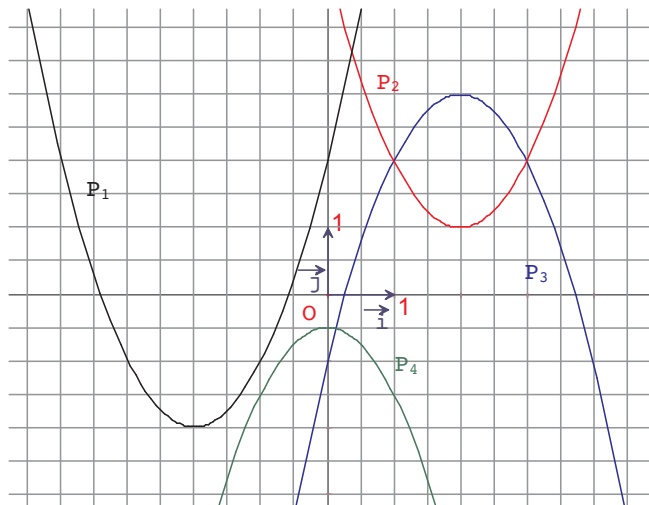
$g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



Activité 12

Dans le graphique ci-dessous, P_1 , P_2 , P_3 et P_4 sont quatre paraboles.



Pour chacune d'elles, préciser le sommet, l'axe et l'équation.

Activité 13

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit P la parabole de sommet S , d'axe D et passant par le point A .

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la parabole P et tracer P .

- $S(0, 2)$; $D : x = 0$ et $A(1, 3)$.
- $S(3, 0)$; $D : x = 3$ et $A(4, 1)$.
- $S(-1, 1)$; $D : x = -1$ et $A(-3, 9)$.
- $S(2, -3)$; $D : x = 2$ et $A(0, -1)$.

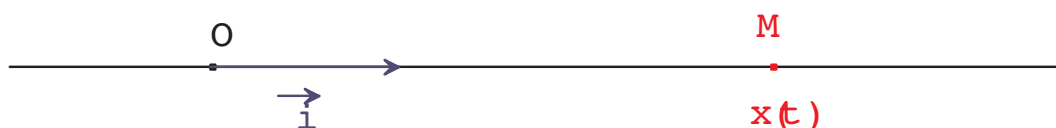
Activité 14

Une balle est propulsée verticalement du sol. Elle est alors animée d'un mouvement rectiligne dont la loi horaire est donnée approximativement par $d(t) = -4,9t^2 + 14,7t$; jusqu'à ce qu'elle touche à nouveau le sol en retombant.

- Montrer qu'au bout de 1,5 secondes après son lancement, la balle atteint une hauteur maximale. Quelle est cette hauteur ?
- Combien de temps dure la descente ?

Activité 15

Deux mobiles A et B se déplacent durant trois heures sur un axe d'origine O (unité 1 Km).



Les positions des deux mobiles sont données par les abscisses x_A et x_B des points M_A et M_B .

Les lois horaires des mouvements de A et de B sont donnés respectivement par :

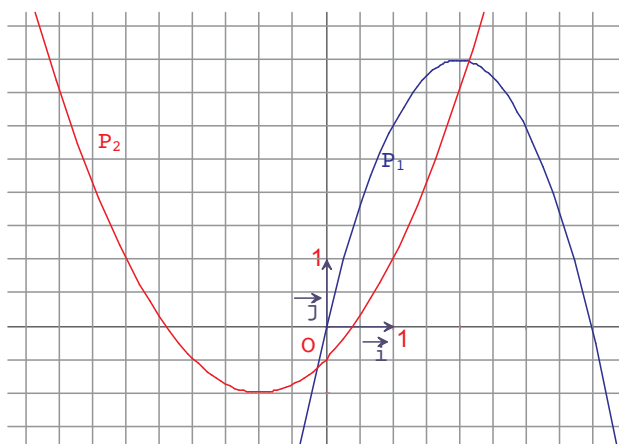
$x_A(t) = 8t^2 - 12t - 3,5$ et $x_B(t) = 4t^2 - 4t - 6,5$; où t est exprimé en heures et $t \in [0, 3]$.

- Où se trouve le mobile A à l'instant $t = 0$?
 - Pour quelles valeurs de t le mobile A se trouve-t-il en O ? A gauche du point O ? A droite du point O ?
- A quel instant les mobiles A et B sont-ils au même endroit ?
 - A quel instant le mobile B se trouve-t-il en O ? Où se trouve alors le mobile A ?

Activité 16

Dans le graphique ci-contre, les paraboles P_1 et P_2 sont les courbes représentatives de deux fonctions trinômes f et g .

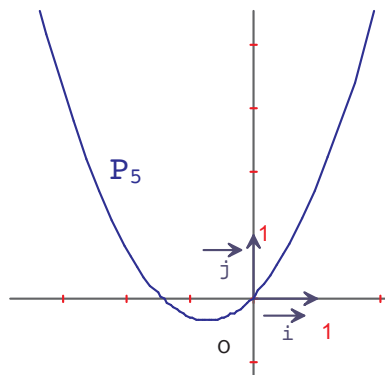
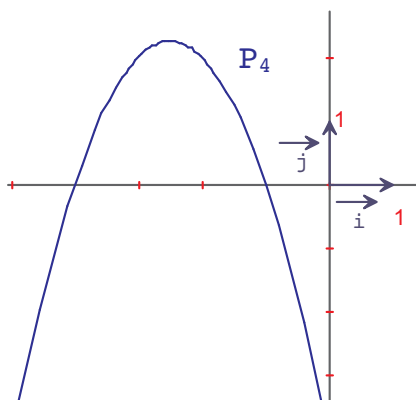
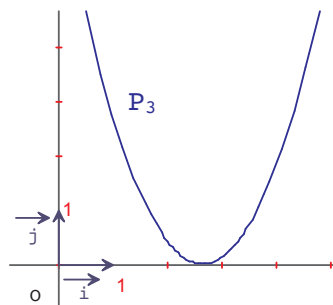
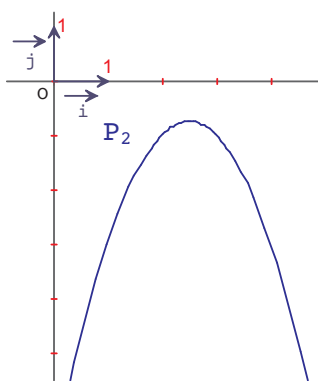
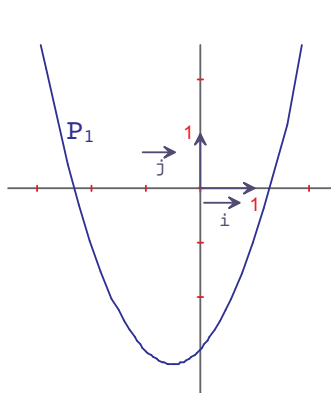
- A l'aide du graphique, donner l'expression de f et de g en fonction de x .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles.
- Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.



Activité 17

Les paraboles ci-dessous sont les courbes représentatives de fonctions trinômes définies par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans chacun des cas, indiquer le signe de a , le nombre de racines du trinôme, le signe de b et le signe de c .



Fonctions du type $f(x) = \sqrt{x+b}$

Activité 18

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

2) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10^4	10^6	10^{10}	10^{16}
f(x)				

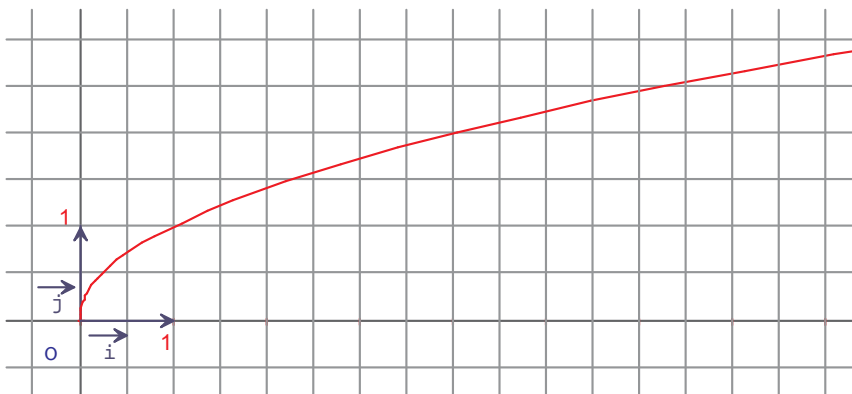
b) Soit A un réel strictement positif.

Comment choisir x de $[0, +\infty[$, pour que $f(x) > A$?

Que peut-on dire de f(x) quand x tend vers $+\infty$?

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

La courbe C de la fonction f est donnée par la figure ci-dessous.



A l'aide du graphique déterminer un encadrement d'amplitude 0,25 de $f(2,5)$; $f(4,5)$; $f(6)$ et $f(7)$.

4) Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

a) Reproduire la courbe C et tracer la droite D dans le même repère que C.

b) Résoudre graphiquement

• L'équation $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$; • L'inéquation $\sqrt{x} < \frac{1}{4}x + 1$.

c) Retrouver, par le calcul, les résultats de la question précédente.

Activité 19

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction g.

b) Etudier les variations de g sur D.

2) On désigne par C et C' les courbes représentatives de f et g.

On considère la translation T de vecteur $-2\vec{i}$. Soit M(x, y) un point du plan et M'(x', y') son image par T.

a) Montrer que

$M(x, y)$ appartient à C équivaut à $M'(x', y')$ appartient à C' .

b) Tracer la courbe C puis la courbe C' dans le même repère.

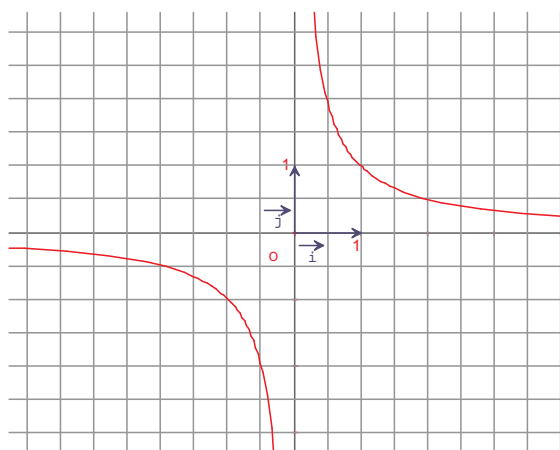
Assimiler : 4

Fonctions du type $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $c \neq 0$

Activité 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On admet que la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est la courbe ci-dessous.



1) A l'aide du graphique

a) Emettre une conjecture sur la parité de f .

b) Décrire les variations de f .

2) a) Copier et compléter le tableau suivant :

x	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{15}
$f(x)$					

b) On suppose que $x > 10^{15}$. Que peut-on dire de $f(x)$?

c) Comment peut-on choisir x positif, pour que $f(x)$ soit strictement inférieur à 10^{-25} ?

d) Soit a un réel strictement positif.

Comment peut-on choisir x positif, pour que $0 < f(x) < a$?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

3) a) Copier et compléter le tableau suivant :

x	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-17}
$f(x)$					

b) On suppose que $0 < x < 10^{-17}$. Que peut-on dire de $f(x)$?

c) Comment peut-on choisir x positif, pour que $f(x)$ soit strictement supérieur à 10^{40} ?

d) Soit A un réel strictement positif.

Comment peut-on choisir x positif, pour que $f(x)$ soit strictement supérieur à A ?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers 0 et x plus grand que 0 ?

Vocabulaire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• La courbe H de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, est appelée hyperbole. Le point O est appelé le centre de l'hyperbole et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont appelées les asymptotes de l'hyperbole.

• L'équation $y = \frac{1}{x}$ est une équation de l'hyperbole H .

Remarque

Une hyperbole est formée de deux branches, appelées branches de l'hyperbole.

Activité 21

Dans le graphique ci-contre, sont représentées la parabole P d'équation

$y = x^2$, l'hyperbole H

d'équation $y = \frac{1}{x}$, la courbe C d'équation

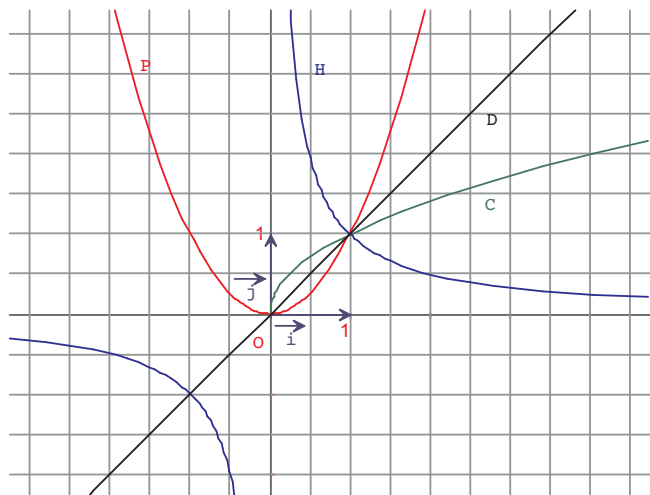
$y = \sqrt{x}$ et la droite D d'équation $y = x$.

Par une lecture graphique:

a) Ranger dans l'ordre croissant

x , x^2 , $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$ pour $x > 0$.

b) Comparer x et $\frac{1}{x}$, pour $x < 0$.



Fonctions du type $f(x) = \frac{a}{x}$; $a \neq 0$

Activité 22

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{-1}{x}$. On désigne par C la courbe de f et par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

- 1) a) Montrer que $M(x, y)$ appartient à C équivaut à $M'(x, -y)$ appartient à H .
b) En déduire que C et H sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- 2) Tracer H puis C .

Activité 23

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{2}{x}$. On désigne par C sa courbe représentative.

a) Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

b) On admet que la courbe C est une hyperbole.

Déterminer son centre et ses asymptotes.

c) Tracer C .



Fonctions du type $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$

Activité 24

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ et on note C sa courbe représentative.

a) Montrer que C est l'image de H par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

b) On admet que la courbe C est une hyperbole.

Préciser le centre et les asymptotes de C .

c) Tracer H et C dans le même repère.

Activité 25

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x} + 1$.

- 1) a) Préciser le centre et les asymptotes de l'hyperbole H.
b) Tracer H.
- 2) Soit D la droite d'équation $y = x$.
a) Tracer D dans le même repère que H.
b) Déterminer les points d'intersection de l'hyperbole H et la droite D.



Assimiler : 6

Fonctions du type $f(x) = \frac{a}{x + \alpha}$; $a \neq 0$

Activité 26

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x-3}$. On désigne par C sa courbe représentative et par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2) Soit T la translation de vecteur $3\vec{i}$.
a) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par T.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
b) Montrer que
 $M(x, y) \in H$ équivaut à $M'(x', y') \in C$.
c) Tracer H puis C.
On précisera les asymptotes de C.

Activité 27

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{3}{x-1}$.

- 1) a) Déterminer le centre et les asymptotes de H.
b) Tracer H.
- 2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x-1}$.
D'après le graphique,

a) Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$?

b) Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers 1 et x est supérieur à 1 ?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers 1 et x est inférieur à 1 ?



Fonctions du type $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $c \neq 0$

Activité 28

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$. On note C sa courbe représentative.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Vérifier que $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$, pour tout $x \in D$.

c) Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$?

2) Soit $\Omega(-2, 1)$. On considère le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan. On note (x, y) les coordonnées du point M dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Exprimer x et y en fonction de X et Y .

b) Montrer que $M(x, y) \in C$ si et seulement si $Y = \frac{1}{X}$

c) En déduire la nature de la courbe C .

3) a) Tracer la courbe C .

b) Donner le centre et les asymptotes de C , dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 29

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{4x-7}{2x-5}$. On note C sa courbe représentative.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de g .

b) Vérifier que $g(x) = 2 + \frac{3}{2x-5}$, pour tout $x \in D$.

c) Que peut-on dire de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

- 2) a) Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles où elle est définie.
- b) On admet que C est une hyperbole.

Déterminer son centre et ses asymptotes. Tracer C .

- 2) a) Résoudre graphiquement les équations $g(x) = 3$ puis $g(x) = 2$.
- b) Retrouver les résultats précédents par le calcul.



Activité 30

Dans le graphique ci-contre, sont représentées la parabole $P : y = x^2 - 4$, l'hyperbole $H :$

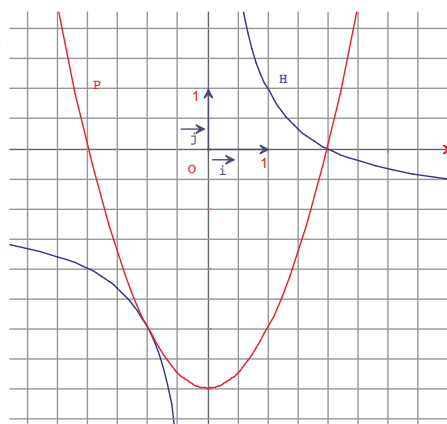
$y = \frac{-x + 2}{x}$, courbes représentatives, respectivement, des fonctions f et g .

- 1) Résoudre graphiquement :

- a) $f(x) = g(x)$.
- b) $x^3 - 4x = 2 - x$.
- c) $f(x) \geq g(x)$.

- 2) a) Factoriser $x^3 - 4x$.

- b) Retrouver les résultats de la première question par le calcul.



Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de la parabole, puis la construire.

$$P_1 : y = (x + 2)^2 \quad ; \quad P_2 : y = \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 ;$$

$$P_3 : y = (x - 3)^2 \quad ; \quad P_4 : y = x^2 + 6x + 9.$$

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de symétrie de la parabole P, puis la construire.

$$a) P : y = x^2 - 4 \quad ; \quad b) P : y = (x - 3)^2 + 1 \quad ; \quad c) P : y = -x^2 + 4x - 2 \quad ;$$

$$d) P : y = -3x^2 + 5x + 2 \quad e) P : y = x^2 + x.$$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$. On désigne par C sa courbe représentative.

a) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Déterminer le sommet et l'axe de C, puis la tracer.

4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 4}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est croissante sur son ensemble de définition.

c) Tracer la courbe de f.

5 Construire les hyperboles:

$$H_1 : y = \frac{4}{x} \quad ; \quad H_2 : y = \frac{-2}{x} \quad \text{et} \quad H_3 : y = \frac{3}{2x}.$$

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et les asymptotes de l'hyperbole H puis la construire.

$$a) H : y = -1 + \frac{1}{x} \quad ; \quad b) H : y = 3 + \frac{1}{x} \quad ; \quad c) H : y = \frac{3}{x} + 2.$$

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et les asymptotes de l'hyperbole H puis la construire.

$$a) H : y = \frac{1}{x + 2} \quad ; \quad b) H : y = \frac{-2}{x + 3} \quad ; \quad c) H : y = \frac{3}{x - 1}.$$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et les asymptotes de l'hyperbole H puis la construire.

$$a) H : y = \frac{x - 1}{x + 3} \quad ; \quad b) H : y = \frac{-2x + 1}{x - 2} \quad ; \quad c) H : y = \frac{3x + 1}{2x - 4}.$$

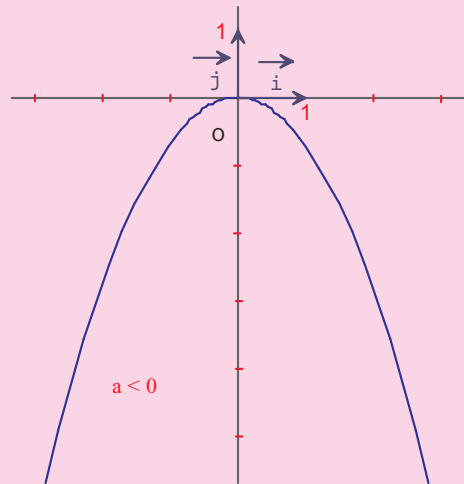
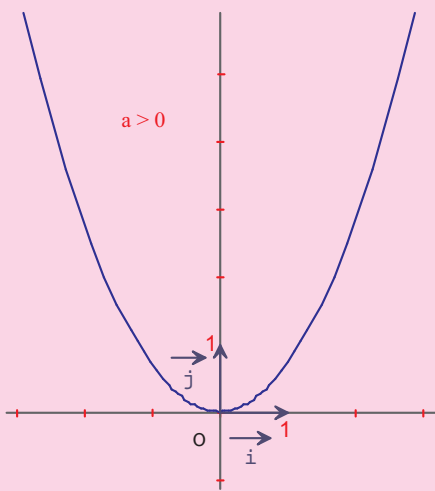
Fonctions du type $f(x) = a x^2 + b x + c ; a \neq 0$

Fonctions du type $f(x) = a x^2 ; a \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a x^2$, est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.



Fonctions du type $f(x) = a (x - \alpha)^2 ; a \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel non nul et α un réel.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a (x - \alpha)^2$, est une parabole de sommet $S(\alpha, 0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Fonctions du type $f(x) = x^2 + \beta$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit β un réel.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \beta$, est une parabole de sommet $S(0, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.

Fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$

Soit a , b et c trois réels, avec $a \neq 0$.

♦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a x^2 + b x + c$.

$f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux réels.

♦ Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

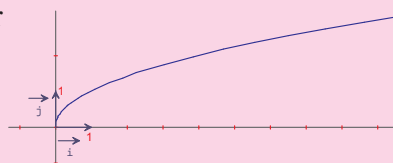
La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, est une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Fonctions du type $f(x) = \sqrt{x + b}$

♦ Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ci-contre, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

♦ La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + b}$ est l'image par la translation de vecteur $-b\vec{i}$ de la courbe de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.



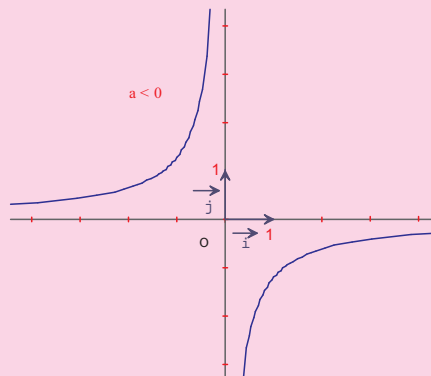
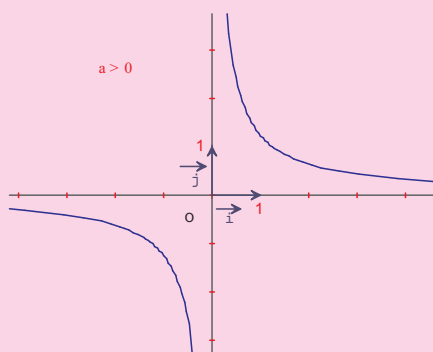
Fonctions du type $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $c \neq 0$

Fonctions du type $f(x) = \frac{a}{x}$; $a \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.



Fonctions du type $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit β un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$, est une hyperbole de centre $I(0, \beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$.

Fonctions du type $f(x) = \frac{a}{x + \alpha}$; $a \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel non nul et α un réel.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $-\alpha$ par $f(x) = \frac{a}{x + \alpha}$ est une hyperbole de centre $I(-\alpha, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = 0$.

Fonctions du type $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $c \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

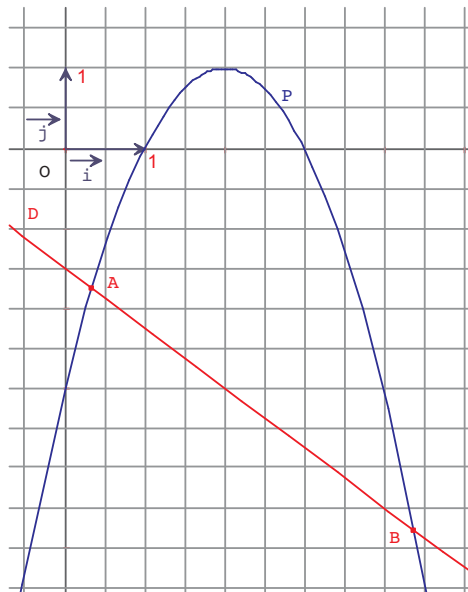
Soit a, b, c et d quatre réels, avec c non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $-\frac{d}{c}$ par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ est une hyperbole de centre $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

1 Dans le graphique ci-contre, P est une parabole et D est une droite. Déterminer les coordonnées des points A et B, intersection de P et D.

Indications

- Utiliser des points de coordonnées entières, pour déterminer une équation de P et de D.
- Calculer les coordonnées des points A et B.



2 Cordes parallèles d'une hyperbole

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$.

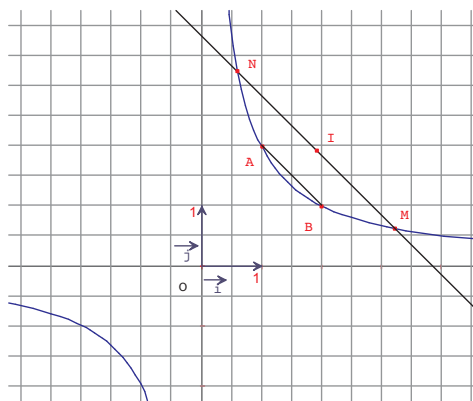
Soit A, B, C et D quatre points distincts de H, d'abscisses respectives a, b, c et d.

1) Montrer les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $ab = cd$.

2) On prend $a = 1$ et $b = 2$.

Soit M un point de H d'abscisse x. La parallèle à (AB) passant par M recoupe l'hyperbole H en un point N. On note I le milieu du segment [MN].

Montrer que le point I varie sur une droite, lorsque le point M varie sur l'hyperbole H.



Indications

- 1) Calculer le coefficient directeur de chacune des deux droites.
- 2) Déterminer les coordonnées de N, puis celles de I et conclure.

Problème de lieu

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $y = -2$ et M un point variable de D .

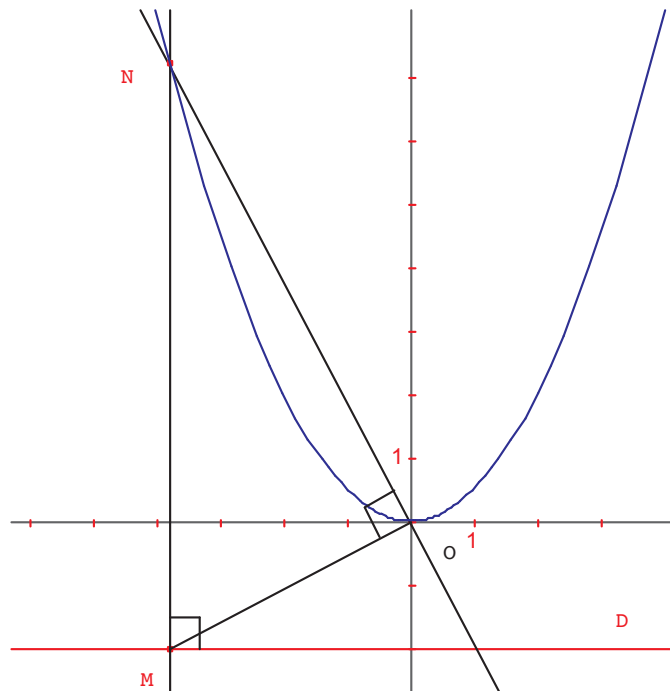
La perpendiculaire à D en M et la perpendiculaire à la droite (OM) en O , se coupent en un point N .

On se propose de déterminer, à l'aide d'un logiciel de géométrie, le lieu du point N lorsque le point M varie sur la droite D .

A l'aide d'un logiciel de géométrie.

- Tracer les axes du repère.
- Tracer la droite d'équation $y = -2$.
- Marquer un point M sur la droite D (**point sur objet**).
- Tracer la perpendiculaire à D en M et la perpendiculaire à (OM) en O .
- Marquer le point d'intersection N .
- Utiliser (lieu) pour déterminer le lieu du point N , lorsque M varie sur la droite D .

Justifier le résultat obtenu à l'aide du logiciel.



Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Appliquer

1 Soit P la parabole d'équation $y = x^2$.

- 1) Tracer P.
- 2) Résoudre graphiquement les inéquations:
 - a) $x^2 < 4$; b) $x^2 \geq 1$; c) $x^2 \leq -1$
 - d) $1 \leq x^2 \leq 4$.

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de symétrie de la parabole P puis la construire.

- a) $P : y = x^2 - 2x$; b) $P : y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$
- c) $P : y = -x^2 + x + 1$.

3 Soit f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ et } g(x) = \sqrt{|x|+1}.$$

- a) Tracer la courbe de f
- b) Montrer que f et g ont la même courbe représentative sur $[0, +\infty[$.
- c) Montrer que g est une fonction paire.
- d) Tracer alors la courbe de g.

4 Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

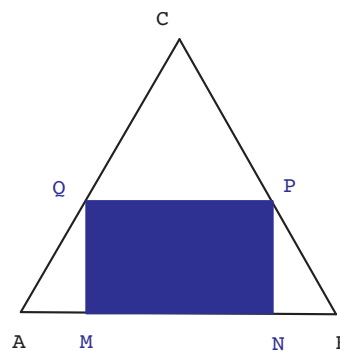
- 1) Tracer H.
- 2) Résoudre graphiquement les inéquations
 - a) $\frac{1}{x} > 2$; b) $\frac{1}{x} \leq -3$; c) $\frac{1}{x} < 1$
 - d) $1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$; e) $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$.

5 Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et les asymptotes de l'hyperbole H puis la construire.

- a) $H : y = \frac{x+4}{x}$; b) $H : y = \frac{x}{x-1}$;
- b) $H : y = \frac{x-1}{2x+2}$; d) $H : y = \frac{-3x}{2x-1}$.

Maîtriser

6 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de côté 6, M et N deux points de [AB] avec $AM = NB = x$, P un point de [BC] et Q un point de [AC] tels que MNPQ soit un rectangle.



- 1) Calculer MN et MQ en fonction de x.
- 2) On désigne par g la fonction qui, à toute valeur de x, associe l'aire $g(x)$ du rectangle MNPQ.

a) Montrer que $g(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 6\sqrt{3}x$.

b) Construire dans un repère orthonormé du plan la courbe C de la fonction g.

- 3) a) Pour quelle valeur de x, l'aire du rectangle MNPQ est-elle maximale ?

b) Pour quelle valeur de x, MNPQ est-il un carré ? Calculer dans ce cas, son aire.

7 On considère la parabole $P : y = -x^2 + 2x + 1$ et la droite $D : y = -x + 3$.

- a) Tracer P et D.
- b) Par une lecture graphique, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.
- c) Retrouver par le calcul, les résultats de la question précédente.

8 on suppose que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonomé.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$

- 1) Tracer la courbe C de f .
- 2) Soit D la droite d'équation $y = x$.
 - a) Tracer D dans le même repère que C .
 - b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de D et C .
 - c) Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $x < \sqrt{x+2}$.

3) Soit a un réel de l'intervalle $[0,2]$.

La droite d'équation $y = a$, coupe C en M et coupe D en N .

- a) Montrer que l'abscisse de M est $a^2 - 2$.
- b) Déterminer a pour que $MN = 1$.

9 On suppose que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonomé.

On considère les points $A(1, 2)$ et $M(x, 0)$; où x est un réel distinct de 1.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N .

Soit f la fonction qui à l'abscisse x de M associe l'ordonnée y de N .

1) Montrer que $f(x) = \frac{2}{x-1} + 2$.

2)a) Tracer la courbe C de f .

b) Déterminer graphiquement les valeurs de x telles que $ON < 4$.

10 On se propose de résoudre graphiquement l'équation (E) $x^3 = (x+1)^2$.

- 1) a) Montrer que si x est une solution de (E) alors x est strictement positif.
- b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

2) a) Tracer les courbes représentatives des fonctions, f et g définies respectivement sur $[0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

b) Par une lecture graphique

- Vérifier que l'équation (E) admet une unique solution.
- Donner un encadrement d'amplitude 0,25 de cette solution.

11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-4x+1}{2x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Soit H la courbe de f . Déterminer le centre de H et ses asymptotes. Tracer H

c) Déterminer l'intersection de H et la droite D d'équation $y = -x$.

Parabole – paraboloïde et applications

La trajectoire d'un projectile, tel qu'une balle ou un ballon, est une parabole si l'on néglige la résistance de l'air. Les miroirs paraboliques sont des réflecteurs dont la forme (paraboloïde de révolution) est engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie. Ces miroirs réfléchissent, sous la forme de rayons parallèles, les rayons émis par une source lumineuse située au foyer de la parabole. On utilise ce genre de réflecteurs pour les phares automobiles et pour les autres types de projecteurs. Les miroirs paraboliques présentent aussi la propriété de concentrer des rayons lumineux parallèles jusqu'au foyer, sans aucune aberration sphérique. Ils sont par conséquent très utiles dans la fabrication de télescopes astronomiques.

Si on fait tomber sur un miroir parabolique un faisceau de rayons parallèles à son axe de symétrie, ils vont tous, en se reflétant, converger en un même point, le foyer de la parabole. C'est le principe des antennes satellites : tous les rayonnements captés sur toute la surface de la parabole sont concentrés au foyer, on y place le récepteur (tête).

Les réflecteurs paraboliques servent également d'antennes pour les radars.

Une autre application : le principe du four solaire. Des miroirs renvoient la lumière sur un miroir parabolique, qui concentre toute l'énergie, permettant d'atteindre des températures d'ordre de 3500°C , sans dégager aucune impureté, comme ce serait le cas avec d'autres formes d'énergie. Le procédé a été utilisé par Archimède qui a enflammé les voiles de la flotte romaine au siège de Syracuse grâce à de tels miroirs.



Photo d'une antenne parabolique

Le désordre est bien puissant quand il s'organise.

André SUARES

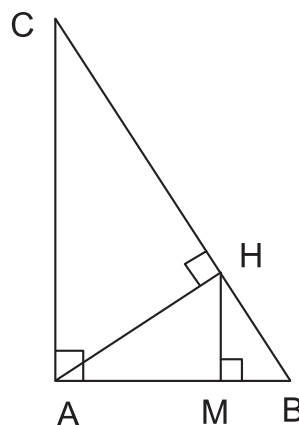
Pour démarrer

1 Recopier et compléter le tableau suivant

angle α (en radians)	$\frac{\pi}{6}$		
angle α (en degrés)		45°	60°
$\cos \alpha$			$\frac{1}{2}$
$\sin \alpha$			
$\tan \alpha$			

2 Sur la figure ci contre

- Citer tous les triangles rectangles
- Citer tous les angles égaux à $\widehat{ACB}$
- Donner cinq expressions différentes de $\cos(\widehat{ACB})$
- Donner cinq expressions différentes de $\sin(\widehat{ACB})$



3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Placer les points $A(2, 3)$, $B(-2, 3)$, $C(2, -3)$ et $D(-2, -3)$

2) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan. Construire

- le point M' symétrique du point M par rapport à $(O, \vec{i})$
- le point M'' symétrique du point M par rapport à $(O, \vec{j})$
- le point N symétrique du point M par rapport à O .

b) Déterminer en fonction de x et y les coordonnées des points M' , M'' et N .

Activité 1

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan et soit A' le symétrique de A par rapport à O . On désigne par $\mathcal{C}$ le demi-cercle de diamètre $[AA']$ et contenant le point B .

Ce demi-cercle est appelé demi-cercle trigonométrique.

- 1) Faire une figure et préciser les coordonnées des points A , B et A' .
- 2) Soit I le point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{6}$.
Construire le point I et préciser ses coordonnées.
- 3) Soit I' le symétrique de I par rapport à (OB) . Construire le point I' et déterminer ses coordonnées.
- 4) On désigne par J et K les points de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{JOA} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{KOA} = \frac{\pi}{3}$
 - a) Construire J et K et préciser leurs coordonnées.
 - b) Construire les points J' et K' symétriques respectifs de J et K par rapport à (OB) et déterminer leurs coordonnées.

Activité 2

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan et soit A' le symétrique de A par rapport à O . On désigne par $\mathcal{C}$ le demi-cercle trigonométrique. soit α un réel de $[0, \pi]$.

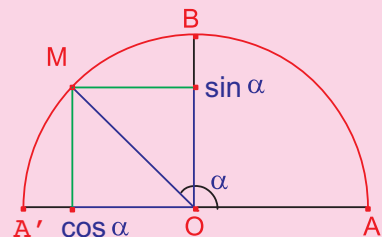
- 1) a) Combien y a-t-il de points M du plan tels que $\widehat{AOM} = \alpha$?
b) Combien y a-t-il de point M sur le demi-cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$?
- 2) a) Combien y a-t-il de point M sur le demi-cercle $\mathcal{C}$ d'abscisse 0,8 ?
b) Combien y a-t-il de point M sur le demi-cercle $\mathcal{C}$ d'ordonnée 0,5 ?

Définition cosinus et sinus

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan.

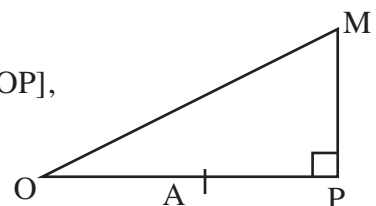
Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et soit M l'unique point du demi-cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$.

- On appelle cosinus du réel α , l'abscisse du point M et on le note $\cos \alpha$.
- On appelle sinus du réel α , l'ordonnée du point M et on le note $\sin \alpha$.



Activité 3

Soit OPM un triangle rectangle en P et A un point du segment $[OP]$, distinct de O et de P , (voir figure).



On muni le plan du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tel que B soit du même côté que M par rapport à la droite (OP).

Soit A' le symétrique de A par rapport à O et $\mathcal{C}$ le demi-cercle trigonométrique de diamètre [AA'] et contenant B.

Le demi-cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite (OM) en un point N.

a) Recopier et compléter la figure.

b) Vérifier que l'abscisse du point N est égale à $\frac{OP}{OM}$ et que l'ordonnée du point N est égale à $\frac{MP}{OM}$.

Activité 4

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan.

1) a) Placer le point M du demi-cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOM} = 0,5$.

b) Placer les points P du demi-cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) a) Quelles sont les coordonnées du point B ?

b) Déduire $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3) Déterminer $\cos 0$ et $\sin 0$; $\cos \pi$ et $\sin \pi$.

4) Soit α un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.

Vérifier que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ et que $0 \leq \sin \alpha \leq 1$.

Activité 5

Assimiler : 1

Dans la figure ci-contre

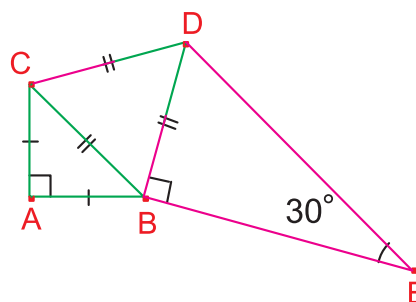
ABC est un triangle isocèle rectangle en A ,

BCD est un triangle équilatéral ,

BDE est un triangle rectangle en B ,

$DE = 4$ et $\widehat{E} = 30^\circ$

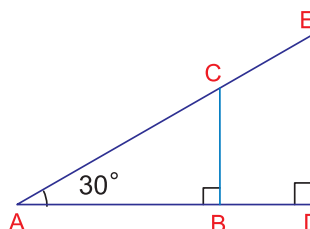
Calculer le périmètre du polygone ABEDC.



Activité 6

Dans la figure ci contre $CE = 12$ et $\widehat{CAB} = 30^\circ$

Calculer BD.



Activité 7 Angles supplémentaires

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ et soit M le point du demi-cercle

trigonométrique tel que $\widehat{AOM} = \alpha$. On désigne par M' le symétrique de M par rapport à (OB).

- 1) a) Exprimer $\widehat{AOM'}$ en fonction de α .
 b) Quelles sont les coordonnées des points M et M' ?
 c) Comparer $\cos(\pi - \alpha)$ et $\cos \alpha$; $\sin(\pi - \alpha)$ et $\sin \alpha$.
- 2) a) Représenter sur le demi-cercle trigonométrique les points P et Q tels que
 $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{AOQ} = \frac{5\pi}{6}$ puis donner les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$.
 b) Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{2\pi}{3}$, $\cos \frac{3\pi}{4}$ et $\sin \frac{3\pi}{4}$.

Activité 8

Calculer sans utiliser la calculatrice

- a) $\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8}$.
- b) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{9\pi}{10}$.

Assimiler : 2

Activité 9 Angles complémentaires

Soient α un réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et M et N les points de l'arc $[\widehat{AB}]$ du demi-cercle trigonométrique tels que $\widehat{AOM} = \alpha$ et $\widehat{BON} = \alpha$

- 1) Exprimer $\widehat{AON}$ en fonction de α .
- 2) Soient M' le projeté orthogonal de M sur (OA) et N' le projeté orthogonal de N sur (OB).
 a) Comparer les triangles OMM' et ONN' .
 b) En déduire que $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ et $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.
- 3) Sans utiliser la calculatrice calculer
 a) $\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}$.
 b) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}$.

Assimiler : 3

Activité 10 Distance entre les planètes : Terre, Soleil, Venus et Mercure

Depuis la terre T on peut observer le soleil S, venus V et Mercure M.

D'après les astronomes la mesure de l'angle $\widehat{STV}$ est égale à 48° lorsque la droite (TV) est tangente à la trajectoire de Venus, trajectoire qu'on suppose circulaire (figA)

- 1) Calculer les distances terre-venus TV et soleil-venus SV sachant que la distance terre-soleil TS est estimée à 15×10^7 km

2) Observer la figure (Fig B) et calculer les distances Terre-Mercure TM et Mercure-Soleil MS.

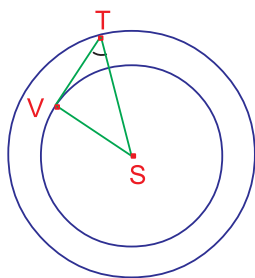


fig A

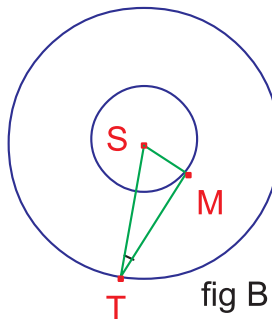


fig B

Définition Tangente et cotangente

- Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ et tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.
On appelle tangente du réel α le réel noté $\tan \alpha$ et défini par $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$
On appelle cotangente du réel α le réel noté $\cot \alpha$ et défini par $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Assimiler : 4

Activité 11

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 13$ et $BC = 12$

- 1) Quelle est la nature de ce triangle ?
- 2) Déterminer $\tan(\widehat{A})$, $\tan(\widehat{C})$, $\cot(\widehat{A})$ et $\cot(\widehat{C})$.
- 3) Utiliser votre calculatrice pour donner une valeur approchée à 1° près des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.

Activité 12

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan.

On désigne par $\mathcal{C}$ le demi-cercle trigonométrique et par D et D' les tangentes respectives à $\mathcal{C}$, en A et en B , et par I leur point d'intersection.

On considère le repère $(A, \vec{AI})$ de la droite D et le repère $(B, \vec{BI})$ de la droite D'.

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

- 1) Soient M le point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$ et P et Q les projetés orthogonaux respectifs du point M sur (OA) et sur (OB).

Exprimer $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ et $\cot \alpha$ en fonction de $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$.

- 2) Soit T le point d'intersection des droites D et (OM).

En appliquant le théorème de Thalès au triangle OAT, Montrer que $\tan \alpha = \overline{AT}$.

- 3) Soit T' le point d'intersection des droites D' et (OM). Montrer que $\cot \alpha = \overline{BT'}$

Activité 13 Relations fondamentales

Soit x un réel appartenant à $[0, \pi]$

1) Montrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

Par convention on écrit

$\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\tan^2 x$ et $\cot^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$, $(\tan x)^2$ et $(\cot x)^2$.

2) Montrer que pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ on a $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

3) Montrer que pour $x \neq 0$ et $x \neq \pi$ on a $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Activité 14

1) Soit x un réel appartenant à $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$.

Calculer $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$.

2) Calculer $\sin a$ et $\cos a$ sachant que $\cot a = -2$.

3) Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sachant que $\tan \alpha = 10$.

Activité 15

1) Soit α un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Prouver que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ et $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$.

2) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.

Prouver que pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$;

et que pour α appartenant à $]0, \pi[$, $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

3) a) Donner les valeurs exactes de $\tan \frac{2\pi}{3}$, $\tan \frac{3\pi}{4}$ et $\tan \frac{5\pi}{6}$.

b) Calculer sans utiliser la calculatrice

$$\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{2\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{7} + \tan \frac{4\pi}{7} + \tan \frac{5\pi}{7} + \tan \frac{6\pi}{7}.$$



Assimiler : 5-6-7-8

Activité 16

1) Construire un triangle ABC rectangle en A et tel que $BC = 8$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{8}$.

2) Soit H le pied de la hauteur issue de A et soit O le milieu de [BC].

a) Calculer les mesures des angles du triangle AOH.

b) Calculer OH puis AH et AB.

c) Déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

3) En déduire les valeurs de

$$\text{a) } \cos \frac{3\pi}{8}, \sin \frac{3\pi}{8} \text{ et } \tan \frac{3\pi}{8}. \quad \text{b) } \cos \frac{7\pi}{8}, \sin \frac{7\pi}{8} \text{ et } \tan \frac{7\pi}{8}.$$

Activité 17

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A.

- 1) Montrer que $\widehat{B} = \widehat{CAH}$
- 2) a) En considérant le triangle AHB exprimer $\tan \widehat{B}$ en fonction de AH.
 b) En considérant le triangle AHC exprimer $\tan(\widehat{CAH})$ en fonction de AH.
- 3) a) En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.
 b) Calculer AH sachant que $HB = 3$ et $HC = 12$.

Activité 18

A partir de 1000 m d'altitude un avion vole à 900 km/h, en faisant un angle de 10° avec l'horizontale. A quelle altitude sera-t-il au bout de 5 minutes d'ascension ?

Activité 19 Construction d'un angle connaissant l'un de ses rapports trigonométriques

- 1) a) Construire un triangle rectangle en A et tel $AB = 6$ et $BC = 10$.
 b) Calculer $\cos \widehat{B}$, $\sin \widehat{B}$ et $\tan \widehat{B}$.
- 2) a) Construire un angle $\widehat{xOy}$ sachant que $\cos(\widehat{xOy}) = \frac{4}{5}$.
 b) Construire un angle obtus $\widehat{MON}$ tel que $\sin(\widehat{MON}) = 0,35$
- 3) Construire un angle α dans chacun des cas suivants
 a) $\tan \alpha = \frac{4}{3}$; b) $\cos \alpha = 0,25$; c) α est aigu et $\sin \alpha = 0,6$; d) $\cos \alpha = -0,8$.

 **Assimiler : 9**

Activité 20 La loi du sinus

- 1) Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C .
 On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

- a) Exprimer CH en fonction de b et de $\sin \widehat{A}$.
- b) Exprimer CH en fonction de a et de $\sin \widehat{B}$.
- c) En déduire que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$.

- 2) Prouver que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$.

Activité 21

- 1) Soit ABC un triangle rectangle en A.

Montrer que $\sin^2(\widehat{A}) = \sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C})$.

2) Soit ABC un triangle tel que $\sin^2(\widehat{A}) = \sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C})$.
Montrer que ce triangle est rectangle.

Activité 22

1) Soit MNP un triangle tel que $MN = 8$, $NP = 6$ et $MP = 10$.

Montrer que $\sin \widehat{M}$, $\sin \widehat{P}$ et $\sin \widehat{N}$ sont en progression arithmétique.

2) Soit ABC un triangle tel que BC, AC et AB sont en progression arithmétique.

Montrer que $\sin \widehat{A}$, $\sin \widehat{B}$ et $\sin \widehat{C}$ sont en progression arithmétique.

Activité 23 Théorème des bissectrices

Soit ABC un triangle et soit I le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et $[BC]$.

1) En appliquant la loi du sinus aux triangles AIB et AIC, montrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

2) On suppose que le triangle ABC n'est pas isocèle et on désigne par J le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ et (BC) . Montrer que $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.

Activité 24

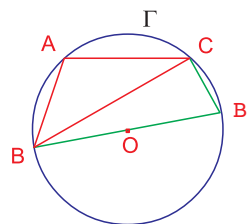
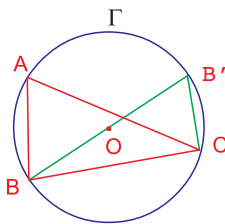
Soit ABC un triangle.

Γ est le cercle circonscrit à ABC et O est son centre.

B' est le point diamétralement opposé à B.

On désigne par R le rayon du cercle Γ et on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1) Pour chaque cas de figure répondre aux questions ci-dessous



a) Comparer $\sin(\widehat{BAC})$ et $\sin(\widehat{BB'C})$.

b) Montrer que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$.

3) Déterminer $\frac{a}{\sin \widehat{A}}$ en fonction de R lorsque le triangle ABC est rectangle en A.

4) Montrer que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$.

Activité 25

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Les bissectrices intérieures de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ se coupent en I et coupent Γ respectivement en A' , B' et C'

1) Montrer que $\widehat{A'IB'}$ et $\widehat{A'CB'}$ sont supplémentaires.

2) On désigne par Γ' le cercle circonscrit à $IA'B'$.

En appliquant la loi du sinus dans le triangle $A'B'C'$ puis dans le triangle $IA'B'$, montrer que les cercles Γ et Γ' sont isométriques.

3) Montrer que les cercles circonscrits respectivement aux triangles ABC, $IA'B'$, $IB'C'$ et $IA'C'$ sont tous isométriques.

Mesure de grandeurs

Activité 26 Aire d'un triangle

1) Construire un triangle MNP tel que $MN = 10$, $MP = 7$ et $\widehat{M} = 100^\circ$

Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de l'aire de ce triangle.

2) Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de C.

On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$ et on désigne par S l'aire de ce triangle

a) Montrer que $S = \frac{1}{2} b c \sin \widehat{A}$.

b) Donner les expressions de S en fonction de a , b et $\sin \widehat{C}$ puis en fonction de a , c et $\sin \widehat{B}$.

c) Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que $S = \frac{abc}{4R}$.



Assimiler : 10

Activité 27

1) Soit ABC un triangle ayant pour aire 6 et tel que $AB = 6$ et $BC = 4$. Calculer $\widehat{B}$.

2) Soit IJKL un parallélogramme tel que $LK = 5$, $LI = 8$ et $\widehat{J} = \frac{\pi}{8}$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de IJKL.

3) Soit ABCD un rectangle de centre O tel que $AC = 12$ et $\widehat{AOB} = 150^\circ$. Calculer la longueur et la largeur de ce rectangle.

Activité 28 Théorème d'El-Kashi

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de C.

On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$

1) On suppose que l'angle $\widehat{A}$ est aigu.

a) Faire une figure.

b) Exprimer AH et CH en fonction de b et $\widehat{A}$.

c) Exprimer BH en fonction de b , c et $\widehat{A}$.

d) En appliquant le théorème de Pythagore au triangle BHC montrer que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

2) On suppose que l'angle $\widehat{A}$ est obtus.

a) Faire une figure.

b) Exprimer AH, CH et BH en fonction de b, c et $\widehat{A}$.

c) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.

4) Exprimer de même

b^2 en fonction de a, c et $\cos \widehat{B}$.

c^2 en fonction de a, b et $\cos \widehat{C}$.



Assimiler : 11-12

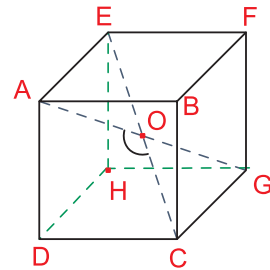
Activité 29 Un problème Babylonien

Trouver le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés mesurent 50 ; 50 et 60.

Activité 30

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arête a et O est le point d'intersection des diagonales [AG] et [EC].

Montrer que l'angle $\widehat{AOC}$ est indépendant de a et donner une valeur approchée à 1° près de cet angle.



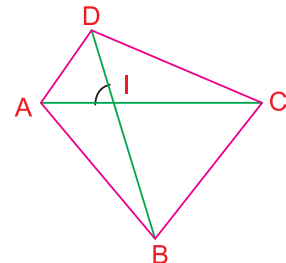
Activité 31

Dans la figure ci-contre, ABCD est un quadrilatère et I le point d'intersection des diagonales.

On pose $\alpha = \widehat{AID}$.

Montrer que l'aire du quadrilatère ABCD est égale à

$$\frac{1}{2} AC \times BD \sin \alpha.$$



Activité 32

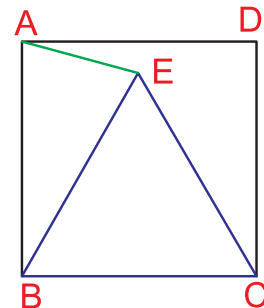
Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté a et EBC est un triangle équilatéral.

1) Calculer $\widehat{ABE}$ puis $\widehat{BAE}$.

2) a) Montrer que $AE^2 = a^2 (2 - \sqrt{3})$.

En déduire $\cos \widehat{BAE}$.

b) Calculer $\sin \widehat{BAE}$.



Activité 33 Triangles isométriques

Définition :

On dit que deux triangles sont isométriques si leurs côtés sont deux à deux égaux.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles,

en utilisant la loi du sinus et le théorème d'El- Kashi, démontrer les deux énoncés suivants.

Enoncé 1 (1er cas d'isométrie des triangles)

si $(\widehat{B} = \widehat{B}', \widehat{C} = \widehat{C}' \text{ et } BC = B'C')$ alors (les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques).

Enoncé 2 (2ème cas d'isométrie des triangles)

si $(AB = A'B', AC = A'C' \text{ et } \widehat{A} = \widehat{A}')$ alors (les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques).

Activité 34

Soit ABC un triangle isocèle en A . La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D . On note E le point de la droite (AD) tel que $EA = BD$ avec E et D de part et d'autre de A .

- 1) Montrer que le triangle CAD est isocèle.
- 2) Montrer que les triangles ABD et CAE sont isométriques.
- 3) Quelle est la nature du triangle CDE ?

Activité 35 Triangles semblables

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles on pose $BC = a, AC = b, AB = c, B'C' = a', A'C' = b', A'B' = c'$.

On dit qu'ils sont semblables si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B}' \text{ et } \widehat{C} = \widehat{C}'$.

- 1) Montrer que si ABC et $A'B'C'$ sont semblables alors $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (ce rapport est appelé rapport de similitude des deux triangles).
- 2) Montrer que si $\widehat{A} = \widehat{A}'$ et $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ alors ABC et $A'B'C'$ sont semblables.
- 3) Montrer que si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Activité 36 Relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et $[AH]$ la hauteur issue de A .

- 1) Exprimer de deux façons différentes l'aire du triangle ABC .
En déduire que $AB \times AC = AH \times BC$.
- 2) a) Montrer que les triangles ABH et ACH sont semblables.
b) En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.
- 3) a) Montrer que les triangles ABC et ABH sont semblables.
b) En déduire que $AB^2 = BH \times BC$.
- 4) a) Montrer que $AC^2 = CH \times CB$.
b) Utiliser les égalités établies en 3)b) et 4)a) pour retrouver le théorème de Pythagore.



Assimiler : 13-14

Assimiler

1 Soit x un réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$ déterminer x dans chacun des cas ci-dessous

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

2 Calculer sans utiliser la calculatrice.

a) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}$.

b) $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{12}$.

3 Sans utiliser la calculatrice calculer.

$\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$.

4 Résoudre dans $[0 ; \pi]$ les équations ci-dessous.

a) $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$; b) $1 - \cot^2 x = 0$.

5 Montrer les égalités suivantes

a) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \cos x \cdot \sin x$; b) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

6 Sans utiliser la calculatrice calculer

a) $\tan \frac{\pi}{12} + \tan \frac{5\pi}{12} + \tan \frac{7\pi}{12} + \tan \frac{11\pi}{12}$.

b) $\tan \frac{\pi}{10} \times \tan \frac{2\pi}{5}$.

7 a) Soit x un réel appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \frac{5}{13}$. Calculer $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$.

b) Calculer $\cos a$ et $\sin a$ sachant que $\tan a = -\sqrt{5}$.

c) Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sachant que $\cot \alpha = \frac{3}{4}$.

8 1) Construire un triangle ABC rectangle en A et tel que $BC = 8$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{12}$.

2) Soit H le pied de la hauteur issue de A et soit O le milieu de [BC].

a) Calculer les mesures des angles du triangle AOH.

b) Calculer OH, puis AH et AB.

Déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$, de $\sin \frac{\pi}{12}$ et de $\tan \frac{\pi}{12}$.

3) En déduire les valeurs exactes de

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$.

b) $\cos \frac{11\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$ et $\tan \frac{11\pi}{12}$.

9 Construire un angle $\widehat{A}$ dans chacun des cas suivants

a) $\sin \widehat{A} = \frac{5}{13}$; b) $\tan \widehat{A} = -5$; c) $\cos \widehat{A} = \frac{1}{3}$.

10 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 9$ et $\widehat{A} = 60^\circ$.
Calculer l'aire de ce triangle.

11 Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 7$ et $\widehat{A} = 120^\circ$
a) Calculer BC .
b) Calculer l'aire de ce triangle.

12 ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 9$.
Donner une valeur approchée de $\widehat{A}$ à 1° degré près.

13 Dans un triangle rectangle en A , on a $AB = 3$ et $AC = 4$.
Calculer BC , AH , BH et CH où H est le pied de la hauteur issue de A .

14 Dans un triangle ABC rectangle en A , on trace la hauteur $[AH]$.
Sachant que $AH = 2$ et $BH = 2,5$. Calculer les côtés du triangle.

Lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Relations fondamentales

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$ on a $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$ on a $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Angles complémentaires

Pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Pour tout x appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

Pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$.

Angles supplémentaires

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ on a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$ on a $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$ on a $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

Loi du sinus - Aire d'un triangle

◆ Loi du sinus

Soit ABC un triangle on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$

$$\text{On a } \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$
 S désigne l'aire de ABC et R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC.

$$\text{On a } S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B}.$$

$$\diamond \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Théorème D'El- Kashi

Soit ABC un triangle on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$; on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \widehat{C}$$

Triangles isométriques

♦ 1^{er} cas d'isométrie

Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux alors ils sont isométriques.

♦ 2^{ème} cas d'isométrie

Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques.

♦ 3^{ème} cas d'isométrie

Si deux triangles ont trois côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques.

Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A.

$$\text{On a } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot CB$$

1 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$.

Quelle est la nature de ce triangle ?

2) a) Construire à l'extérieur de ce triangle les carrés ACPN, BCQR et ABSM.

b) Calculer le périmètre de l'hexagone MNPQRS.

c) Calculer l'aire de l'hexagone MNPQRS.

Indication

Utiliser le théorème d'El Kashi.

2 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et M un point intérieur à ce triangle tel que

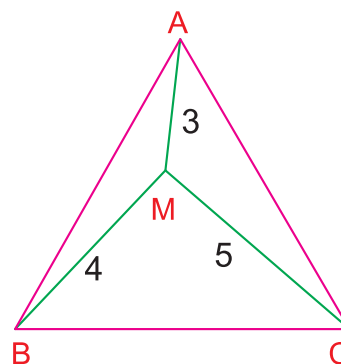
$$MA = 3, MB = 4 \text{ et } MC = 5.$$

On se propose de calculer le côté du triangle ABC.

1) Reproduire la figure et construire le point N image du point M par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2) Quelle est la nature du triangle MNC ?

3) Dédurre de ce qui précède le côté du triangle équilatéral ABC.



Indication

- Déterminer l'image du segment [BM] par la rotation r ?
- Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ANC}$ et conclure.

3 Formule de Héron d'Alexandrie

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$ et on désigne p le demi-périmètre de ce triangle ($2p = a + b + c$) et par S son aire.

1) En utilisant le théorème d'El-Kashi, montrer que

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = (4a^2 b^2) \sin^2 (\widehat{C}).$$

2) a) Exprimer chacun des nombres $p - a$, $p - b$ et $p - c$ en fonction de a, b et c

b) Prouver que $a^2 b^2 \sin^2 (\widehat{C}) = 4p(p - a)(p - b)(p - c)$.

3) Montrer que l'aire du triangle ABC est $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

4) Calculer l'aire d'un triangle dont les côtes mesurent 5, 7 et 8.

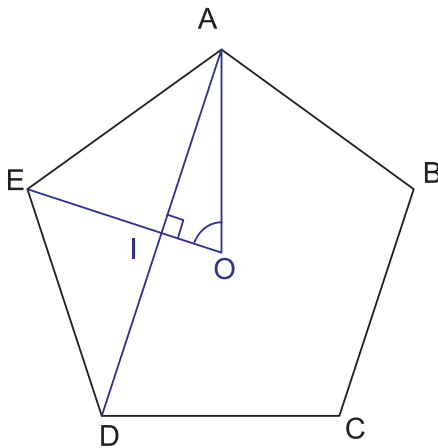
Indication

Penser aux identités remarquables et utiliser la formule $S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$.

Déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de $\frac{2\pi}{5}$

A l'aide d'un logiciel de géométrie

- Construire un pentagone régulier (polygone régulier).
- Nommer A, B, C, D, E ses sommets et O son centre.
- Construire les segments [OA] et [OE].
- Mesurer l'angle $\widehat{AOE}$.
- Construire la diagonale [AD].
- Nommer I le point d'intersection de [OE] et [AD].
- Vérifier à l'aide des outils du logiciel que le triangle AIO est rectangle en I.
- Déterminer les longueurs AI, IO et AO.
- Utiliser la calculatrice du logiciel, pour déterminer $\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$ et $\tan 72^\circ$.



Appliquer

1 Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ les équations ci-dessous.

- $(1 + \cos x)(4 \sin^2 x - 1) = 0$.
- $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} = 0$.
- $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

2 Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ les équations ci-dessous.

- $(4 + 5 \sin x)(3 - \cot^2 x) = 0$.
- $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$.

3 Montrer les égalités suivantes.

- $\cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = 1$.
- $4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = (2 - \cos x)(2 + \cos x)$.
- $4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3 + \cos^2 x$.
- $\frac{\cos^8 x - \sin^8 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)\left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) = 1$.

4 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

$AC = 6$ et $BC = 9$.

a) Calculer AB, puis $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{C}$ et $\cos \hat{C}$.

b) Donner une valeur approchée des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ en radians, à 0,01 près.

5 ABC est un triangle tel que $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ et la hauteur AH est égale à 3.

a) Calculer AB et AC puis BH et CH. En déduire BC.

b) Calculer les hauteurs BP et CQ du triangle.

6 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$ et $\hat{A} = 105^\circ$.

- Exprimer, en radians, les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$.
- Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]

a) Faire une figure

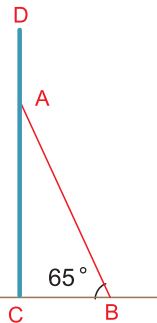
b) Calculer AH, AC et BC

3) Soit K le projeté orthogonal de B sur [AC]. Calculer BK.

7 La figure ci-contre modélise une échelle [AB] de 6m de long appuyée contre un mur vertical [CD] de 7m de haut. L'angle que fait l'échelle avec le sol est 65° .

1) Calculer, à un centimètre près, la distance BC entre le pied de l'échelle et le mur.

2) A quelle distance du sommet D du mur se trouve le haut de l'échelle ?



8 Soit MNP un triangle et soit H le projeté orthogonal de M sur [NP].

On suppose que $MN = \sqrt{12}$, $MH = 3$ et

$HP = \sqrt{3}$.

a) Calculer $\sin \hat{N}$, $\cos \hat{N}$ et $\tan \hat{N}$.

b) Calculer $\cos \hat{P}$, $\sin \hat{P}$ et $\tan \hat{P}$.

c) Quelle est la nature du triangle MNP ?

9 Un triangle ABC est tel que $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ et $\hat{B} = \hat{C} + \frac{\pi}{2}$.

1) Calculer $\hat{C}$.

Indiquer la nature du triangle ABC.

2) Exprimer AB et AC en fonction de BC et calculer l'aire de ABC.

3) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrer que O et B sont symétriques par rapport à (AC).

10 Les angles d'un triangle sont proportionnels aux nombres 2, 3 et 4.

Calculer ces angles en radians puis en degrés.

Maîtriser

11 Soit ABC un triangle.

On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1) Montrer que

$$a(\sin \widehat{B} - \sin \widehat{C}) + b(\sin \widehat{C} - \sin \widehat{A}) + c(\sin \widehat{A} - \sin \widehat{B}) = 0$$

2) Soit H le pied de la hauteur issue de A.

a) Exprimer BC en fonction de BH et de HC

b) Montrer que $a = b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B}$

c) En déduire que

$$\sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{B}$$

12 On considère un triangle IJK rectangle en I et tel que IJ, IK et JK sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r où r est un réel positif.

1) Calculer IK puis IJ et JK en fonction de r.

2) Montrer que $\sin \widehat{K}$, $\sin \widehat{J}$ et $\sin \widehat{I}$

sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison a où a est un réel positif qu'on précisera.

3) Déterminer les valeurs approchées à 10^{-1} près des mesures en degrés des angles $\widehat{J}$ et $\widehat{K}$.

13 Soit ABC un triangle rectangle en A, ayant pour aire 15,36 et tel que

$$\sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = 1,4. \text{ Calculer BC.}$$

14 Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 15$, $CD = 9$ et $BC = 10$.

a) Calculer $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

b) Calculer à un degré près $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ADB}$ puis à l'unité près AC et BD.

15 Soit ABC un triangle isocèle en A. [BH] et [CK] désignent respectivement les hauteurs issues de B et C.

a) Montrer que $BH = CK$.

b) Enoncer la propriété ainsi montrée.

c) Montrer de deux façons que $CH = BK$.

16 Distance Terre – lune

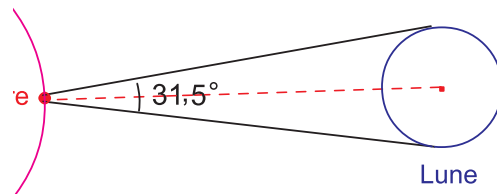
1) Ci-dessous une photo d'une éclipse de la lune.



Exploiter cette photo pour déterminer une valeur approchée du rayon de la lune sachant que celui de la terre est 6366 km.

2) La lune est vue de la terre sous un angle de $31,5^\circ$ environ (voir figure)

Déterminer la distance Terre-Lune.



17 Soit ABC un triangle équilatéral. On considère les points M, N et P appartenant respectivement aux segments [AB], [BC] et [AC] et tels que $AM = BN = CP$.

Montrer que le triangle MNP est équilatéral.

18 Soit a un réel tel que $a > 1$ et ABC un triangle tel que $BC = a^2 + a + 1$, $AC = 2a + 1$ et $AB = a^2 - 1$.

$$\text{Montrer que } \widehat{A} = \frac{2\pi}{3}.$$

19 Soit MNP un triangle.

1)a) Construire le cercle C passant par M et tangent en P à la droite (NP). Soit r son rayon

b) Construire le cercle C' passant par M et tangent en N à la droite (NP). Soit r' son rayon.

2) On désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP.

$$\text{a) Montrer que } MN = 2r \sin \widehat{N} = \frac{r}{R} MP.$$

$$\text{b) Montrer que } MP = 2r' \sin \widehat{P} = \frac{r'}{R} MN.$$

$$\text{c) En déduire que } r \cdot r' = R^2$$

Le nombre π

Depuis l'antiquité, les mathématiciens ont remarqués que tous les cercles avaient quelque chose en commun : le rapport entre périmètre et diamètre est fixe. Ce rapport est donné par le réel π .

π n'est pas un rationnel. La recherche de ses décimales a toujours été un enjeu pour la science :

- Une décimale exacte pour les Babyloniens et les Egyptiens (2000 ans avant J-C).
- 3 décimales exactes pour Archimède (250 ans avant J-C).
- 16 décimales exactes pour AL Kashi (mort vers 1430).
- 100 décimales pour Machin en 1706.
- 1000 décimales en 1949.
- Un million de décimales en 1973.

Aujourd'hui à l'aide des ordinateurs, de plus en plus puissants, on peut déterminer des milliards de décimales de π .

Utiliser un logiciel de calcul formel, taper p (ou Pi) et sélectionner **Simplifier / Approximation** et préciser le nombre de chiffres (ici 101) pour afficher les 100 premières décimales de π .

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062
862089986280348253421170679.



Au palais de la découverte, à Paris, les 627 premières décimales de π ont été inscrites autour d'une coupole.

Al Kashi Jamsheddine (mort vers 1430 à Samarcande)

L'un des grands savants arabes, astronome et mathématicien. Il a dirigé pendant de longues années l'observatoire de Samarcande et il a établi des tables astronomiques d'une extraordinaire précision. Son ouvrage le plus célèbre est Mifteh El hissab (La clef de l'arithmétique).

La géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul.
René Descartes (1596-1650)

Pour démarrer

1 a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et E de la figure ci-contre.

b) Recopier la figure et placer les points F (-1, 3),

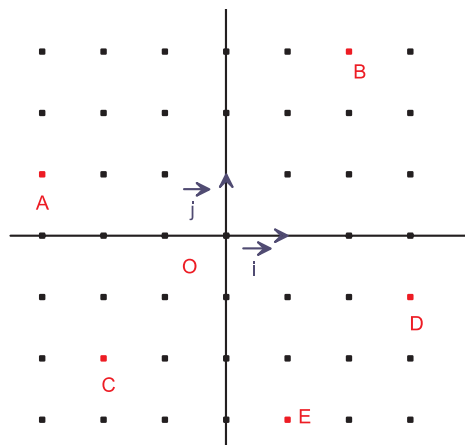
K (0, 2) et L (4, 0).

c) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FK}$.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont-ils colinéaires ?

e) Les points F, K et D sont-ils alignés ?

f) Les droites (ED) et (FK) sont-elles perpendiculaires ?



2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points A (-1, 2), B (-1, 0) et C $(2, -\frac{3}{2})$.

a) Déterminer les coordonnées des points P, Q et R milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC].

b) Calculer les distances AB, BC, AC et PQ.

c) Comparer PQ et AC.

3 Indiquer parmi les affirmations suivantes celles qui sont correctes.

	1	2	3
La représentation graphique de la fonction affine f, définie par $f(x) = 3x + 1$, est la droite (AB) telle que	A (0, 1) ; B (-1, 2)	A (0, 1) ; B (1, 4)	A (3, 1) ; B (-2, -5)
Soit g la fonction affine telle que $g(0) = 5$ et $g(-1) = 7$. Soit D la représentation graphique de g. Le coefficient directeur de la droite D est	-2	5	7
Soit h la fonction affine telle que $h(0) = -2$ et $h(6) = 1$. On a	$h(x) = -2x + 1$	$h(x) = x - 2$	$h(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Activités dans un repère cartésien du plan

Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le milieu du côté [BC] et M est le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$.

La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en P et la parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en Q.

On se propose de montrer que I est le milieu de [PQ].

On choisit $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme repère du plan.

1) a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et I dans ce repère ?

b) Calculer les coordonnées du point M.

2) a) Vérifier que l'ordonnée du point P est égale à $\frac{1}{5}$.

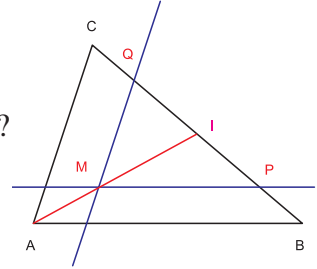
b) Soit x l'abscisse du point P.

Déterminer, en fonction de x, les composantes du vecteur $\overrightarrow{BP}$.

Calculer x.

3) Déterminer les coordonnées du point Q.

4) Montrer que I est le milieu de [PQ].



Assimiler : 1

Activité 2 Coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soient les points $P(2, -4)$, $Q(1, 5)$ et I le barycentre des points $(P, -1)$ et $(Q, 3)$.

Déterminer les coordonnées du point I.

2) Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ deux points du plan et α, β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On désigne par G le barycentre des points (A, α) et (B, β) .

Déterminer les coordonnées du point G.

Assimiler : 2-3-4

Equation cartésienne d'une droite

Activité 3

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Placer les points $A(2, 1)$ et $B(-2, 3)$, puis tracer la droite (AB).

b) Les points C $(4, 0)$ et D $(-1, 2)$ sont-ils sur la droite (AB) ?

2) Soit $M(x, y)$ un point du plan. Montrer que

(Le point M appartient à la droite (AB)) si et seulement si (les coordonnées x et y du point M vérifient l'équation $x + 2y - 4 = 0$).

Activité 4

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan.

Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.

- Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
- Traduire l'appartenance du point M à la droite (AB) par une relation entre x et y .

Activité 5

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit E l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $3x - 2y + 1 = 0$.

- Vérifier si les points $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $B(-1, -1)$ et $C(4, 2)$ appartiennent à E.
- Soit M un point de E.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

En déduire que $E = (AB)$.

2) Soient a , b et c trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On désigne par D l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$.

a) On suppose que $b \neq 0$.

Vérifier que les points $I\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ et $J\left(1, -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}\right)$ appartiennent à l'ensemble D.

Montrer que $D = (IJ)$.

b) On suppose que $b = 0$.

Vérifier que les points $K\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ et $L\left(-\frac{c}{a}, 1\right)$ appartiennent à l'ensemble D.

Montrer que $D = (KL)$.

Vocabulaire

L'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est appelée équation cartésienne de la droite D. On écrit $D : ax + by + c = 0$.



Assimiler : 5

Activité 6

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit D la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$.

- Vérifier que les points $A(0, 3)$ et $B(1, 1)$ appartiennent à la droite D.
- Le point $C(-1, 4)$ appartient-il à la droite D ?

c) Tracer la droite D.

2) Tracer dans le même repère les droites

$$D_1 : x - y + 1 = 0 \quad , \quad D_2 : 3x + 4y = 0 \quad \text{et} \quad D_3 : y - 3 = 0.$$

► Assimiler : 6

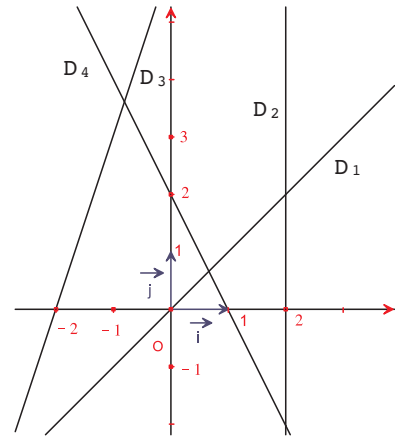
Activité 7

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Associer chaque droite de la figure ci-contre, à son équation cartésienne

$$2x + y - 2 = 0 ; \quad x - y = 0 ; \quad x - 2 = 0 ;$$

$$-3x + y - 6 = 0.$$



Activité 8

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme et E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

On se propose de montrer que la droite (DE) passe par le milieu du segment [AB].

1) Méthode analytique

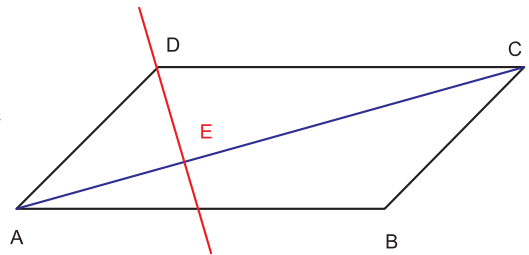
On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et E dans ce repère.

b) Ecrire une équation cartésienne de la droite (DE).

c) Conclure.

2) Retrouver le résultat géométriquement.



Vecteur directeur - Droites parallèles

Activité 9 Vecteur directeur

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

On désigne par E l'ensemble des points M du plan, tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

1) Déterminer l'ensemble E.

2) Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$.

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

Définition

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite appelée la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarque

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.

Activité 10

Soit D une droite et A, B deux points distincts de cette droite.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D.

Activité 11

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) On considère la droite D d'équation $x + 3y + 2 = 0$.

a) Déterminer un vecteur directeur de D.

b) Vérifier que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

2) Soit Δ la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Montrer que le vecteur $\vec{U} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .



Assimiler : 7-8

Activité 12

Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Montrer que (D et D' sont parallèles) si et seulement si ($\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires).

Activité 13 Condition analytique de parallélisme de deux droites

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Tracer les droites

$$D_1 : 2x - y + 5 = 0 \quad ; \quad D_2 : 6x - 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad D_3 : -x + y - 1 = 0.$$

b) Déterminer un vecteur directeur de chacune des trois droites.

c) Montrer que les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

d) Les droites D_1 et D_3 sont-elles parallèles ?

2) Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

Montrer que (D et D' sont parallèles) si et seulement si $(ab' - a'b = 0)$.

Activité 14

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les droites D et D' d'équations respectives $3x - y + 5 = 0$ et $2x + 2y - 1 = 0$.

a) Montrer que les droites D et D' sont sécantes.

b) Déterminer leur point d'intersection.



Assimiler : 9-10

Activité 15

Une entreprise fabrique des objets A et B. le coût de fabrication d'un objet A est de 3 dinars de matière première et 12,500 dinars de main d'œuvre et d'un objet B est de 7 dinars de matière première et 7,500 dinars de main d'œuvre.

On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B, fabriqués en une journée.

1) On suppose que les dépenses journalières en matière première et en main d'œuvre sont respectivement 56 dinars et 125 dinars.

a) Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées satisfont aux données.

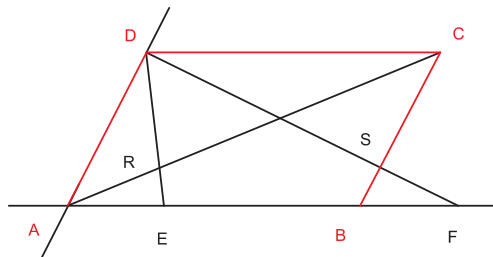
b) Retrouver cet ensemble par le calcul.

2) Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 56 dinars et 125 dinars.

Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

Activité 16

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme, les points E et F sont tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, le point R est l'intersection des droites (AC) et (DE) et le point S est l'intersection des droites (BC) et (DF).



On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- 1) a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AC) et (DE).
b) Préciser les coordonnées du point R.
- 2) a) Quelle est l'abscisse du point S ?
b) Calculer l'ordonnée de S.
- 3) Montrer que les droites (RS) et (AB) sont parallèles.

Activité 17

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Placer les points A (1 , 0) , B (5 , 0) , C (4 , 3) et D (2 , 3).
b) Montrer que ABCD est un trapèze.
- 2) a) Déterminer les coordonnées du point E intersection des droites (AD) et (BC).
b) Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Montrer que les points E, I et J sont alignés.
- 3) Soit h l'homothétie qui envoie A en C et B en D.
a) Déterminer le rapport k et les coordonnées du centre Ω de l'homothétie h.
b) Soit M(x , y) un point du plan et M'(x' , y') son image par h.
Calculer x' et y' en fonction de x et y.

Vecteur normal à une droite – Droites perpendiculaires

Activité 18 Vecteur normal

Soit A un point du plan, $\vec{n}$ un vecteur non nul et C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$.

On désigne par E l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

- 1) Déterminer l'ensemble E.
- 2) Soit $\vec{N}$ un vecteur non nul colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{N}$ soient orthogonaux ?

Définition

On appelle vecteur normal à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Activité 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit Δ la droite d'équation $3x - 2y + 5 = 0$.

Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite Δ .

2) Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Montrer que le vecteur $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite Δ .

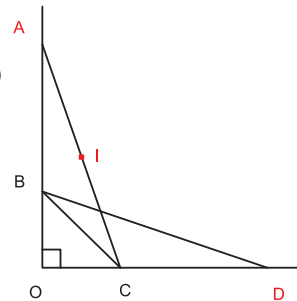
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par $A(2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

► Assimiler : 11-12

Activité 20

Dans la figure ci-contre, OBC est un triangle rectangle isocèle en O et tel que $OB = OC = 1$, A un point de $[OB]$ et D un point de $[OC]$ tels que $OA = OD$, et I est le milieu du segment $[AC]$.

A l'aide d'un repère orthonormé bien choisi, Montrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.



Activité 21 Condition analytique d'orthogonalité de deux droites

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère les points $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(0, -1)$ et $E(2, 2)$.

a) Tracer les droites (AB) et (CE) .

b) Montrer que les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires.

2) Soit Δ et Δ' deux droites du plan.

a) On désigne par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs directeurs respectifs de Δ et Δ' .

Montrer que $\Delta \perp \Delta'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{u}'$.

b) On considère les équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ respectivement de Δ et Δ' .

Montrer que $\Delta \perp \Delta'$ si et seulement si $a a' + b b' = 0$.

► Assimiler : 13-14

Activité 22 Droite d'Euler

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A (0 , 5) , B (3 , 4) et C (4 , -3).

On désigne respectivement par H, I et G, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité du triangle ABC.

- Faire une figure.
- Déterminer les coordonnées des points H, I et G.
- Montrer que $\vec{IH} = 3 \vec{IG}$.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite (IG).

La droite contenant les points H, I et G est appelée la droite d'Euler du triangle ABC.

Activité 23 Equation réduite – Coefficient directeur

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la droite D d'équation $3x + 4y - 2 = 0$.

- Soit M(x , y) un point de la droite D. Exprimer y en fonction de x.
- Déterminer deux points distincts A et B de la droite D et calculer $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2) Soit Δ une droite d'équation $ax + by + c = 0$. On suppose que $b \neq 0$.

- Vérifier que l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
- Soient M et N deux points distincts de la droite Δ . Calculer $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$.

Remarque

Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$ telle que $b \neq 0$. L'équation de cette droite est équivalente à une équation de la forme $y = mx + p$.

Vocabulaire

- L'équation $y = mx + p$ est appelée l'équation réduite de la droite D.
- m est appelé le coefficient directeur de la droite D ou la pente de la droite D.
- p est l'ordonnée à l'origine.

Activité 24

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite et le coefficient directeur de la droite donnée.

a) La droite D d'équation $5x + 4y - 12 = 0$.

b) La droite (AB), où A (2, -3) et B (0, 5).

c) La droite D passant par C (-1, 2) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.



Assimiler : 15

Remarque

Soit D la droite d'équation réduite $y = mx + p$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Activité 25

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit D une droite. Montrer que

(D est parallèle à l'axe des ordonnées) si et seulement si (D a une équation cartésienne de la forme $x = k$, où k est un réel).

b) Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Montrer que $D \parallel D'$ si et seulement si $m = m'$.

Activité 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $y = 3x + 2$.

1) Tracer D et déterminer les coordonnées du point I intersection de la droite D avec l'axe des abscisses.

2) Soit M un point de D distinct de I, d'abscisse x.

a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

b) Calculer $\tan(\widehat{MIH})$.

3) Soit Δ la droite d'équation $y = mx + p$ ($m \neq 0$) et I le point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses.

Soit M un point de Δ et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

Montrer que $\tan(\widehat{MIH}) = |m|$.

Activité 27

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Montrer que $D \perp D'$ équivaut à $mm' = -1$.



Assimiler : 16

Fonction $x \mapsto |ax + b|$

Activité 28

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

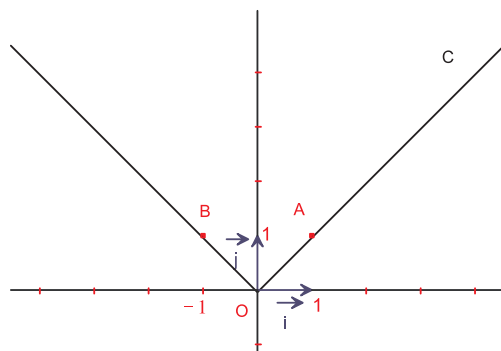
La courbe C ci-contre, est formée de deux demi-droites [OA) et [OB), c'est la courbe représentative d'une fonction g.

- a) g est elle une fonction affine ?
- b) Soit M un point de C, d'abscisse x.

Déterminer l'ordonnée de M dans chacun des cas :

- $M \in [OA)$;
- $M \in [OB)$.

- c) Déterminer g(x) en fonction de x.



Activité 29

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
 - a) Construire la droite D représentation graphique de f.
 - b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ et en déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
Colorer l'ensemble des points de D dont l'ordonnée est positive.
- 2) a) Construire la droite D' représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x - 3$.
 - b) Montrer que D et D' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
 - c) Colorer l'ensemble des points de D' dont l'ordonnée est positive.
- 3) Soit h la fonction qui à tout réel x associe f(x) si $x \geq -\frac{3}{2}$ et g(x) si $x < -\frac{3}{2}$.
Déterminer l'expression de h à l'aide d'une valeur absolue.
- 4) Représenter la fonction h.

▶ Assimiler : 17

Distance d'un point à une droite

Activité 30

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère, la droite D d'équation $y = -2x + 1$ et le point A(2, 1).

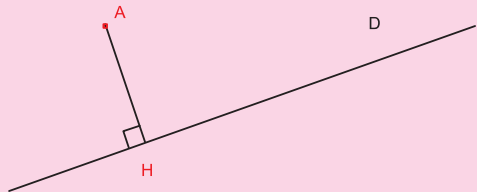
Soit M un point de la droite D, d'abscisse x.

- 1) a) Exprimer AM^2 en fonction de x.
- b) Déterminer x pour que la distance AM soit minimale.

2) Soit M_0 le point de D pour lequel la distance est minimale.
Montrer que la droite (AM_0) est perpendiculaire à la droite D .
Que représente le point M_0 pour le point A ?

Définition

Soit D une droite et A un point du plan.
On appelle distance du point A à la droite D , et on note $d(A, D)$, la distance du point A au point H , projeté orthogonal de A sur la droite D .



Activité 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $H(x_H, y_H)$ son projeté orthogonal sur la droite D .

- 1) a) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k \vec{n}$.
b) Vérifier que $AH = |k| \sqrt{a^2 + b^2}$.
- 2) a) Prouver que $a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = -(ax_A + by_A + c)$.
b) En déduire que $|k| (a^2 + b^2) = |ax_A + by_A + c|$.
c) Déterminer alors, la distance AH .



Assimiler : 18

Activité 32

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit C le cercle de centre $I(3, -2)$ et de rayon 5.

- a) Montrer que la droite D d'équation $4x - 3y + 7 = 0$, est tangente au cercle C .
- b) Soit Δ une droite qui passe par le point O .

Montrer que Δ coupe C en deux points.

Activité 33

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le triangle ABC de sommets $A(-2, -1)$; $B(2, 2)$ et $C(-1, 4)$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

- 2) a) Calculer la distance du point C à la droite (AB).
b) En déduire l'aire du triangle ABC.

Equation d'un cercle

Activité 34

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On considère le cercle Γ de centre $I(3, -1)$ et de rayon 2.

a) Parmi les points suivants, déterminer ceux qui sont sur le cercle Γ .

$A(1, 2)$; $B(1, -1)$; $D(0, 4)$ et $E(3, 1)$.

b) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

Montrer que M appartient au cercle Γ si et seulement si $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

c) Déterminer tous les points du cercle Γ d'abscisse 3.

Existe-t-il des points du cercle Γ d'abscisse 0 ?

- 2) Soit $\Omega(a, b)$ un point du plan et R un réel strictement positif.

On considère le cercle C de centre Ω et de rayon R . Soit $M(x, y)$ un point du plan.

Montrer que $M(x, y)$ appartient au cercle C si et seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Définition

Soit $\Omega(a, b)$ un point du plan et R un réel strictement positif.

L'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est appelée équation cartésienne du cercle C de centre Ω et de rayon R .

Assimiler : 19-20

Activité 35

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) On désigne par C_1 l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et par C_2 l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 34 = 0$.

a) Ecrire chacune des équations sous la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$.

b) Déterminer alors chacun des ensembles C_1 et C_2 .

- 2) Soient a, b et c trois réels et E l'ensemble de points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

a) Transformer l'équation en utilisant la forme canonique d'un trinôme.

b) Discuter et déterminer l'ensemble E .

Assimiler : 21

Activité 36

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ensemble C des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$.

- Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B du cercle C avec l'axe des abscisses.
- Déterminer une équation de la tangente à C en chacun des points A et B.
- Construire le cercle C et les tangentes à C en A et B.

Activité 37

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la droite D d'équation $y = 2x - 1$ et l'ensemble C d'équation $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$.

- Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.
- Calculer la distance du point I à la droite D.
 - En déduire que la droite D, coupe le cercle C en deux points A et B.
 - Déterminer les coordonnées des points A et B.

Activité 38

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que les points A(0, 4), B(-1, 1), C(-1, 2) et D(-3, 5) sont sur un même cercle.

Vocabulaire

Des points du plan sont dits cocycliques lorsqu'ils sont sur un même cercle.

Activité 39

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit C le cercle de centre I(-1, 3) et de rayon 2.

- Déterminer une équation cartésienne du cercle C.
 - Tracer C.
- Placer les points A(2, 4), B(-2, 3) et C(-1, 1).
 - Calculer les distances IA, IB et IC.
- Soit $M(x, y)$ un point du plan.
 - Calculer IM^2 .
 - Montrer que
M est à l'extérieur du cercle C équivaut à $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 > 4$.
 - Déterminer l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 < 4$.

Coordonnées du milieu – coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

a) $A(4, -2), B(-\sqrt{3}, \frac{2}{3})$; b) $A(-2, 9), B(2, 0)$; c) $A(-3\sqrt{2}, 2), B(\sqrt{2}, -1)$.

2 On donne les points $A(2, 3)$ et $B(1, -6)$. Soit G le barycentre des points (A, α) et (B, β) , où α et β sont deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Calculer les coordonnées du point G, dans chacun des cas ci-dessous.

a) $\alpha = -1$ et $\beta = 4$; b) $\alpha = 3$ et $\beta = -2$; c) $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.

3 On donne les points $A(-7, -\frac{1}{4})$, $B(0, 5)$ et $C(6, 2)$.

Calculer les coordonnées du barycentre G des points $(A, 3)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$.

4 Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, où $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ et $C(-3, -1)$.

Equation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 On considère le triangle ABC, où $A(-2, 1)$, $B(0, 3)$ et $C(4, 2)$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC].

Donner une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC), (BC), (AI) et (BJ).

6 Tracer chacune des droites suivantes.

$$D_1 : 2x + y + 3 = 0 \quad ; \quad D_2 : x + y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad D_3 : 3x + 6 = 0.$$

Vecteur directeur - Droites parallèles

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7 Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur directeur de la droite D.

a) $D : 3x - y = 0$; b) $D : (1 + \sqrt{2})x - 2y + 1 = 0$; c) $D : \frac{5}{2}x + 4y - 3 = 0$.

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a) $A(1, 0)$ et $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; b) $A(4, -5)$ et $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; c) $A(0, 0)$ et $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

9 Déterminer dans chacun des cas suivants, la position relative des droites D et D'.

Dans le cas où les droites sont sécantes déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $D : 6x - 2y + 4 = 0$; $D' : -9x + 3y - 2 = 0$.

b) $D: y = \sqrt{2}x + 1$; $D': y = -5x + 6$.

c) $D: x - y + 1 = 0$; $D': y = 2x - 5$.

d) $D: y = 3x + 2$; $D': y = 3x$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite D' passant par le point A et parallèle à la droite D .

a) $A(5, -3)$; $D: 2x - 4y = 0$.

b) $A(1, 0)$; $D: 3y - 1 = 0$.

c) $A\left(\frac{2}{3}, -1\right)$; $D: y = 4x + 2$.

d) $A(0, -1)$; $D: x + 3 = 0$.

Vecteur normal à une droite - Droites perpendiculaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur normal à la droite D .

a) $D: 5x + 4y = 0$; b) $D: -x + \frac{3}{4}y - 2 = 0$; c) $x = 0$.

d) $D: \sqrt{2}y + 1 = 0$; e) $D: y = x - 1$; f) $y = 5$.

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(3, -2), \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $A(-1, 1), \vec{n}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -3 \end{pmatrix}$; c) $A(7, 0), \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13 Dans chacun des cas suivants, les droites D et D' sont elles perpendiculaires ?

a) $D: 6x - 5y + 3\sqrt{2} = 0$; $D': 5x + 6y - 2 = 0$.

b) $D: x - 2y + \frac{5}{4} = 0$; $D': -8x + 4y - 1 = 0$.

14 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par le point A et perpendiculaire à la droite D .

a) $A(0, 2)$ et $D: y = 4x + 3$.

b) $A(1, -2)$ et $D: 3x + y - 5 = 0$.

c) $A(-1, 5)$ et $D: y = 2$.

Equation réduite – Coefficient directeur

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

15 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite D passant par A et de coefficient directeur m .

a) $A(0, 0)$ et $m = \sqrt{3}$; b) $A\left(-5, -\frac{4}{7}\right)$ et $m = 2$; c) $A(1, -3)$ et $m = -6$.

16 Dans chacun des cas suivants, les droites D et D' sont elles perpendiculaires ?

a) $D: y = 4x + \sqrt{2}$; $D': y = -\frac{1}{4}x + 1$.

b) $D: y = 7x - 2$; $D': y = -\sqrt{3}x$.

c) $D: y = x$; $D': y = -x - 5$.

Fonction $x \mapsto |ax + b|$

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Construire la courbe de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = |x + 2|$; b) $f(x) = |4x + 2|$; c) $f(x) = |-3x + 1|$.

Distance d'un point à une droite

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, calculer la distance du point A à la droite D.

a) $A(6, -2)$ et $D: 3x + y - 1 = 0$.

b) $A(1, -4)$ et $D: -x + \sqrt{3}y + 2 = 0$.

c) $A(0, 1)$ et $D: y = -x + 5$.

Equation d'un cercle

19 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du cercle C de centre I et de rayon R.

a) $I(0, 6)$ et $R = \frac{1}{2}$; b) $I(3, -\sqrt{5})$ et $R = 2$; c) $I(0, 0)$ et $R = 1$.

20 Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et le rayon du cercle C.

a) $C: x^2 + y^2 = 12$; b) $C: (x - 7)^2 + (y - 8)^2 = \frac{3}{4}$; c) $C: (x + 4)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$.

21 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble E des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation donnée.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 5 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + 3y - 4x = 0$.

c) $x^2 + y^2 + x + y = 0$.

d) $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + y + 2 = 0$.

Coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ◆ Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

$$\text{On a } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

- ◆ Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ deux points du plan et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre G des points (A, α) et (B, β) a pour coordonnées

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$$

- ◆ Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trois points du plan et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Le barycentre G des points (A, α) ; (B, β) et (C, γ) a pour coordonnées

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$$

Equation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ◆ Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- ◆ Soient a, b et c trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

L'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite.

Vecteur directeur - Droites parallèles

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ◆ Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite passant par A.

$\vec{u}$ est appelé vecteur directeur de cette droite.

- ◆ Soit D une droite et A, B deux points distincts de cette droite.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D.

- ◆ Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

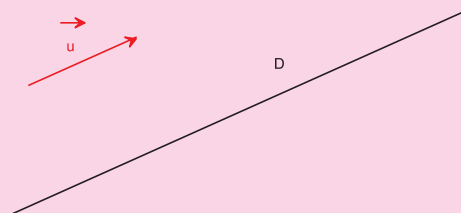
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

- ◆ Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

(D et D' sont parallèles) si et seulement si $(\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires).

- ◆ Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

$D \parallel D'$ si et seulement si $a'b - a'b' = 0$.



Vecteur normal à une droite - Droites perpendiculaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

♦ Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux est une droite passant par A.

$\vec{n}$ est appelé vecteur normal à cette droite.

♦ Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

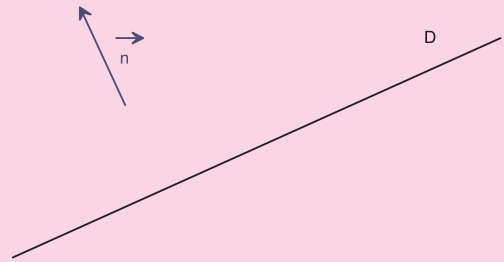
Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

♦ Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$

$D \perp D'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{u}'$

♦ Soient D et D' deux droites d'équations respectives, $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

$D \perp D'$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$.



Equation réduite – Coefficient directeur

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

♦ Toute droite D non parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$

admet une équation du type $y = mx + p$,

appelée l'équation réduite de la droite D.

m est appelé le coefficient directeur de la droite D,

p est l'ordonnée à l'origine.

On a $\tan(\alpha) = |m|$.

♦ Soit D la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

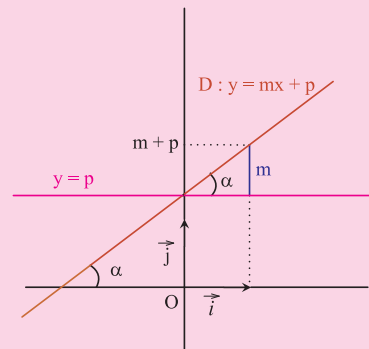
Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

♦ Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

$D \parallel D'$ si et seulement si $m = m'$.

$D \perp D'$ si et seulement si $mm' = -1$.



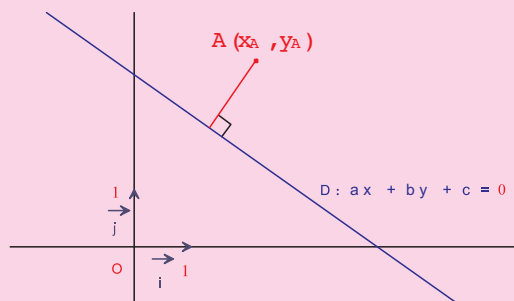
Distance d'un point à une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

La distance d'un point $A(x_A, y_A)$ à la droite D est

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



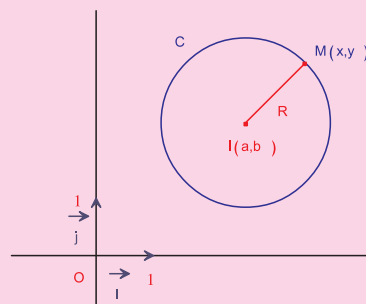
Equation d'un cercle

♦ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $I(a, b)$ un point du plan et R un réel strictement positif.

Une équation cartésienne du cercle C de centre I et de rayon

R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

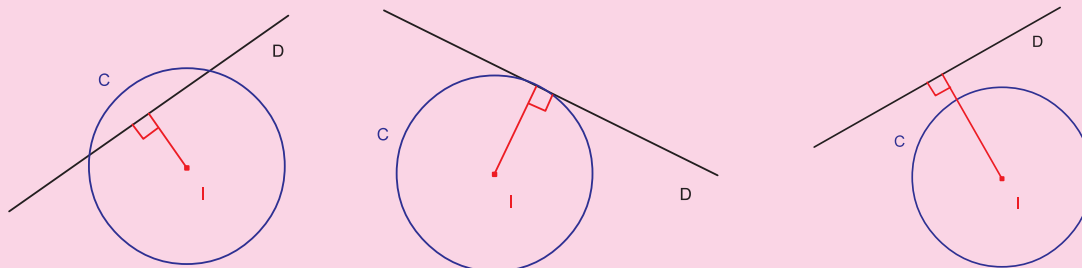


♦ Soit C un cercle de centre I et de rayon R et D une droite. On a :

$d(I, D) < R$ si et seulement si D et C sont sécants.

$d(I, D) = R$ si et seulement si D est tangente à C.

$d(I, D) > R$ si et seulement si D et C sont extérieurs.



♦ Soit C un cercle d'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ et $M(x, y)$ un point du plan.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ si et seulement si M est sur le cercle C.

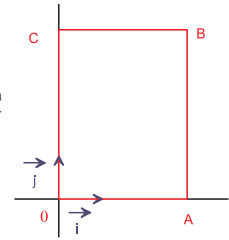
$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ si et seulement si M est à l'intérieur du cercle C.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ si et seulement si M est à l'extérieur du cercle C.

1 La chasse aux entiers

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Combien y a-t-il de points à coordonnées entières dans le rectangle OABC (bords compris), avec $A(100, 0)$; $B(100, 30)$ et $C(0, 30)$?

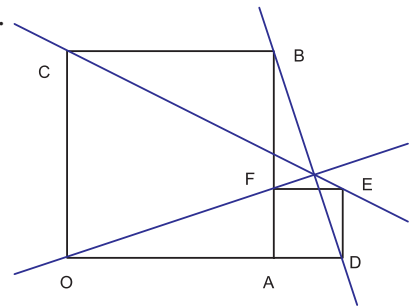


2 Dans la figure ci-contre, OABC et ADEF sont deux carrés tels que $OA = 3$ et $AD = 1$.

Montrer que les droites (OF), (BD) et (CE) sont concourantes.

Indications

- Considérer le repère cartésien $(O, \vec{OA}, \vec{OC})$.
- Déterminer une équation cartésienne pour chacune des trois droites.
- Déterminer le point d'intersection de deux de ces droites et vérifier qu'il appartient à la troisième.



3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit D et D' les droites d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = 3x - 1$.

On considère le point $A(2, 1)$.

Montrer qu'il existe un point M de D et un point M' de D' tels que le milieu du segment [MM'] soit A.

Indications

1ère méthode : analytique

Montrer l'existence des deux points M et M' en calculant leurs coordonnées.

2ème méthode : géométrique

Considérer l'image de la droite D par la symétrie de centre A.

4 Ensemble de points

Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$.

Indications

- Considérer le repère $(A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AC})$.
- Déterminer une équation de l'ensemble E.

5 A la recherche d'un repère disparu

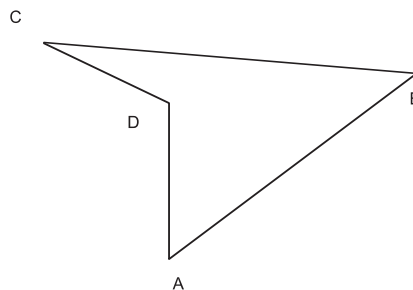
Le quadrilatère ABCD ci-contre a été dessiné dans un repère orthonormé qui a disparu.

Retrouver ce repère sachant que les coordonnées des points A, B, C et D sont :

$A(-4, 2)$, $B(2, -6)$, $C(3, 6)$ et $D(1, 2)$.

Indication

- Remarquer que la droite (AD) est parallèle à l'axe des abscisses.



6 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit m un réel.

On désigne par C_m l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, vérifiant :

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2(1-m)y - 4 = 0.$$

- Montrer que, pour tout réel m , C_m est un cercle.
- Déterminer les points d'intersection des cercles C_0 et C_1 .
- Montrer que tous les cercles passent par deux points fixes A et B.
- En déduire que les centres de tous ces cercles sont alignés.

Indication

- Remarquer que si A et B sont deux points distincts d'un cercle C, alors la médiatrice du segment [AB] passe par le centre du cercle.

7 Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} \geq 4\sqrt{2}.$$

Indications

- Considérer dans un repère orthonormé les points $A(-1, -1)$; $B(-1, 1)$; $C(1, 1)$; $D(1, -1)$ et $M(a, b)$.
- Calculer $MA + MB + MC + MD$.
- Utiliser l'inégalité triangulaire.

La droite d'Euler d'un triangle

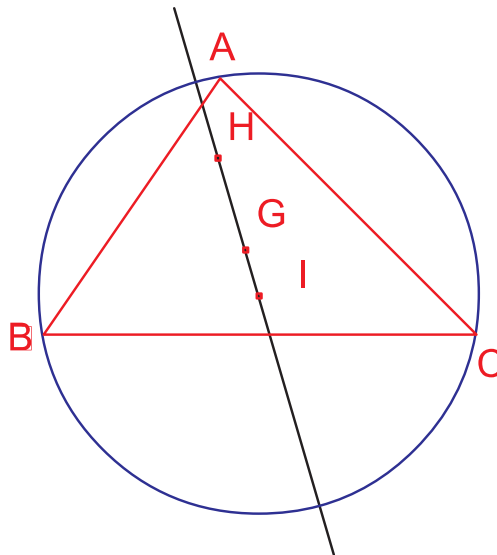
A l'aide d'un logiciel de géométrie

- Construire un triangle quelconque ABC.
- Construire le centre de gravité G de ce triangle.
- Construire le cercle circonscrit au triangle ABC et nommer I son centre.
- Construire l'orthocentre H du triangle ABC.
- Déplacer l'un des sommets du triangle ABC.

Dans quel cas les points H, G et I sont-ils alignés avec l'un des sommets du triangle ?

Dans quel cas les points H, G et I sont-ils confondus ?

- Tracer la droite (IG).
- Quelle remarque peut-on faire ?



Appliquer

1 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points $A(-1, 3)$; $B(1, 0)$; $C(4, 1)$ et $D(2, 4)$.

1) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

2) Soient E et F les points définis par

$$\vec{CE} = \frac{1}{3} \vec{CD} \text{ et } \vec{AF} = \frac{1}{3} \vec{AB}.$$

a) Calculer les coordonnées des points E et F, puis les coordonnées du milieu de [EF].

b) Vérifier que [EF] et [AC] ont le même milieu.

2 Soient $A(-1, 3)$; $B(2, 1)$ et $C(-2, -2)$. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC.

a) Déterminer les coordonnées du point G.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médianes du triangle ABC.

3 Soient $A(3, 5)$ et $B(-2, 1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB].

4 On considère les points $A(3, 0)$, $B(-4, 5)$ et $C(-2, -1)$.

a) Calculer le coefficient directeur de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

b) Donner l'équation réduite de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

c) Déterminer une équation de chacune des hauteurs du triangle ABC.

5 On considère les droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations respectives $x + y - 1 = 0$,

$$y = 2x - 3 \text{ et } y = 4.$$

a) Tracer dans un même repère les droites D_1 , D_2 et D_3 .

b) Déterminer les points d'intersection de D_1 et D_2 ; D_1 et D_3 ; D_2 et D_3 .

6 On considère les points $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$ et $C(-4, -2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

2) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Maîtriser

7 Les droites d'équations $y = ax$ et

$y = -x + b$ se coupent en un unique point dont les coordonnées sont strictement négatives. On en conclut que :

- $a > 0$ et $b > 0$; • $a > 0$ et $b < 0$;
- $a < 0$ et $b < 0$; • $a < -1$ et $b < 0$;
- $a < -1$ et $b > 0$.

Concours Kangourou

8 Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$4x^2 - 9y^2 = 0.$$

9 Les équations $3x + by + c = 0$ et

$cx - 2y + 12 = 0$, conduisent à la même représentation graphique.

Combien y a-t-il de couple (b, c) satisfaisant à cette condition :

- 0 ; • 1 ; • 2 ;
- un nombre supérieur à 2 ; • une infinité ?

Concours Kangourou

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D et D' les droites d'équations respectives $x + y - 1 = 0$ et $2x + y - 4 = 0$.

D coupe (xx') en A et (yy') en B , D' coupe (xx') en D et (yy') en C .

Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ et $A(-1, 2)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A et tangent à D .

12 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ On considère la droite D d'équation

$y = x + 3$ et le cercle C d'équation

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

a) Représenter D et C .

b) Déterminer les équations des droites D_1 et D_2 parallèles à D et tangentes à C .

c) Tracer, dans le même repère, les droites D_1 et D_2 .

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les deux ensembles C et C' d'équations respectives

$$x^2 + y^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\text{et } x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

a) Montrer que C et C' sont deux cercles dont on précisera leurs centres et leurs rayons.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C et C' .

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé

Déterminer une équation cartésienne du cercle C qui passe par les points $A(3, 2)$ et $B(-1, 4)$ et dont le centre est sur la droite d'équation $y = -x$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé

On considère la droite D d'équation $y = \frac{1}{3}x + 2$ et le cercle C d'équation

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$. Déterminer une équation des tangentes à C qui sont perpendiculaires à la droite D .

16 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ On considère le cercle C de centre

$I(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et le point $A(-2, 3)$.

a) Montrer que le point A est extérieur à C .

b) Déterminer les équations des tangentes à C issues de A .

Autres types de repérage

Dès l'antiquité, les problèmes de repérage se sont posés dans les domaines de l'astronomie et de la navigation. Eratosthène (-276, -195) a confectionné une carte du monde qui contenait déjà un réseau de coordonnées géographiques.

1 Les coordonnées polaires – Le radar

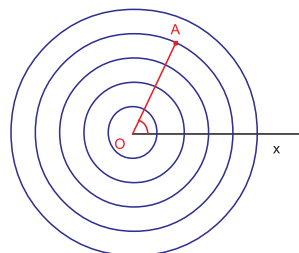
• Une demi droite $[Ox)$ étant fixée dans le plan, un point M peut être repéré par un couple de deux nombres :

- la distance OM
- l'angle $\widehat{MOx}$ (en radians ou en degrés)

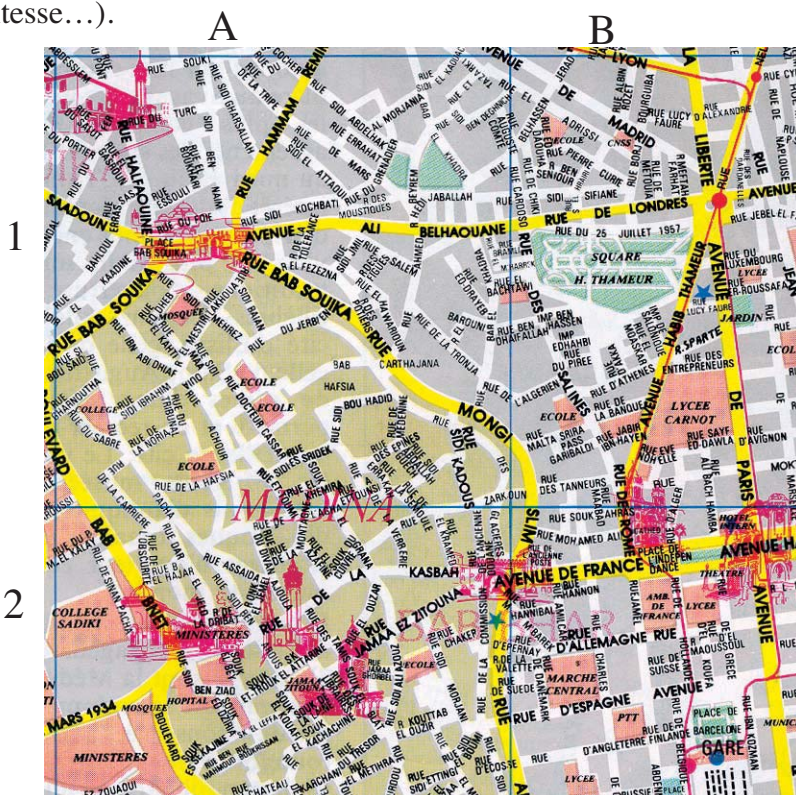
(avec la convention d'effectuer les mesures en tournant toujours dans le sens direct). Ce couple est appelé, couple de coordonnées polaires du point M .

$A(4, 65^\circ)$ signifie que $OA = 4$ et $\widehat{AOx} = 65^\circ$.

• Le radar est un instrument de détection et de repérage, qui utilise les coordonnées polaires. Le radar tourne autour de lui-même (balayage radar) et il envoie un rayon d'ondes, si ce rayon rencontre un obstacle, il est réfléchi vers sa source et signale ainsi l'existence d'un objet et donne sa position exacte. Le temps mis par le rayon pour faire l'aller - retour renseigne sur la distance du radar à l'objet. Le radar peut donner d'autres informations sur l'objet (la vitesse...).



2 Le plan de la ville de Tunis



1 Les figures ci-dessous représentent des solide de l'espace.

A	B	C
D	E	F

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nom du solide	Figures	Nombres de faces	Nombre de sommets
Cube			
Parallélépipède rectangle	A et F		
Tétraèdre			
Prisme droit			
Prisme droit à base triangulaire			
Pyramide			

2 ABCDEFGH est un prisme droit.

1) Pour chacun des cas suivants nommer toutes les faces contenant :

- le sommet A.
- les sommets A et B.
- les sommets A, B et C.

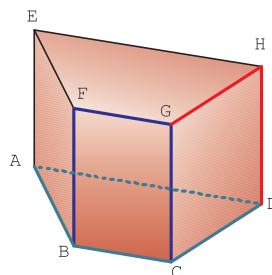
2) Nommer toutes les faces contenant les arêtes [BC] et [CG].

3) Nommer toutes les faces contenant l'arête [CG] et le sommet D.

4) Y a t il un point du segment [AC] qui n'appartient pas à la face ABCD?

5) Trouver les points communs au segment [AE] et à la face ABCD.

6) Trouver les points communs aux faces ABCD et CGHD.



Activité 1 Mesure de grandeurs

- 1) On considère un cube d'arête a , où a est un réel strictement positif. Calculer en fonction de a
 - a) la longueur d'une petite diagonale.
 - b) la longueur d'une grande diagonale.
 - c) l'aire latérale de ce cube.
 - d) le volume de ce cube
- 2) On considère un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c . Calculer en fonction de a, b et c
 - a) l'aire latérale.
 - b) le volume .
 - c) la longueur d'une diagonale.

Activité 2

La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm^2 . La somme des longueurs des arêtes est 24 cm . Quelle est la longueur d'une diagonale ?

Les axiomes de base

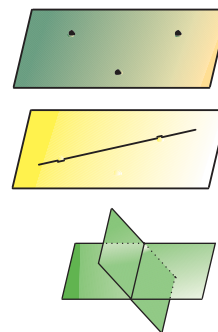
En géométrie dans l'espace on admet les 4 axiomes suivants

Axiome 1 : Par trois points non alignés passe un plan et un seul .

Axiome 2 : Si un plan contient deux points distincts alors il contient toute la droite passant par ces deux points .

Axiome 3 : Si deux plans distincts ont un point commun alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point .

Axiome 4 : Tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace .



Activité 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre et soit I, J et K trois points appartenant respectivement à $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$ tels que :

Les droites (JK) et (BC) se coupent en un point L .

Les droites (KI) et (CA) se coupent en un point M .

Les droites (IJ) et (AB) se coupent en un point N .

- 1) a) Faire une figure .

- b) Justifier que les points L,M et N appartiennent aux plans (ABC) et (IJK).
- 2) a) Justifier que les points L,M et N sont alignés.
- b) En déduire que les droites (BC) ,(KJ) et (MN) sont concourantes.

Détermination d'un plan

Activité 4

Soit Δ une droite et A un point n'appartenant pas à cette droite .

Montrer qu'il existe un plan et un seul contenant la droite Δ et le point A.

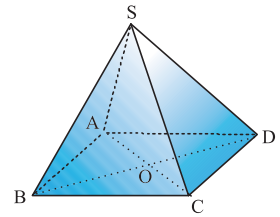


Points coplanaires- Droites coplanaires

Activité 5

Dans la pyramide SABCD de la figure ci-contre,

- 1) a) les points A ,O ,C et S sont-ils dans un même plan ?
- b) les points A ,O ,D et S sont-ils dans un même plan ?
- c) le point A appartient-il au plan (SBO) ? au plan (SOC) ?
- 2) a) les droites (OB) et (AD) sont-elles contenues dans un même plan ?
- b) les droites (CS) et (AD) sont-elles contenues dans un même plan ?
- c) les droites (AB) et (SD) sont-elles contenues dans un même plan ?



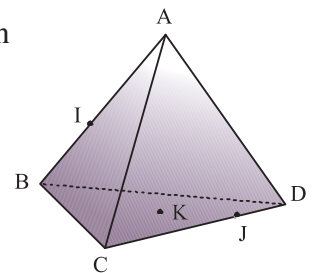
Définition

- On dit que des points de l'espace sont coplanaires lorsqu'ils sont contenus dans un même plan.
- On dit que des droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan .

Activité 6

Soient ABCD un tétraèdre, I un point de l'arête [AB] distinct de A et de B, J un point de l'arête [CD] distinct de C et de D et K un point du plan (BCD).

- a) Les droites (IJ) et (BC) sont-elles coplanaires ?
- Même question pour les droites (IJ) et (CD) ?
- b) Les points I, J, A et C sont-ils coplanaires ? Même question pour les points I, A, B et D ?

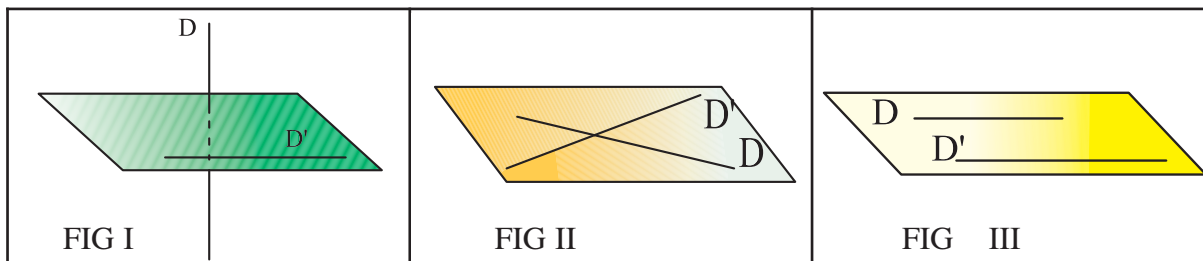


Positions relatives de droites et de plans

Activité 7 Positions relatives de deux droites dans l'espace

Pour chacune des figures I, II et III dire si les droites D et D' sont coplanaires ou non ?

Déterminer, dans chaque cas, $D \cap D'$.



Définition

On dit que deux droites coplanaires D et D' sont sécantes lorsque leur intersection est un point.

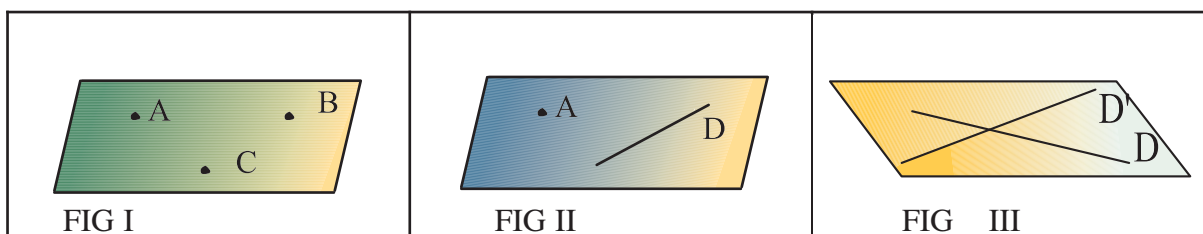
Activité 8

1) Soient D et D' deux droites sécantes .

Montrer qu'il existe un plan et un seul contenant les droites D et D' .

2) Chacune des 3 figures suivantes illustre une façon de déterminer un plan .

Enoncer ces 3 façons.

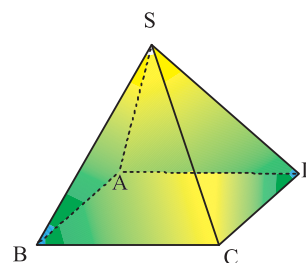


Activité 9

Dans la figure ci-contre, $SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre O .

1) Déterminer le plan de la face $ABCD$

- à l'aide de trois points non alignés.
- à l'aide d'une droite et d'un point n'appartenant pas à cette droite .
- à l'aide de deux droites sécantes .

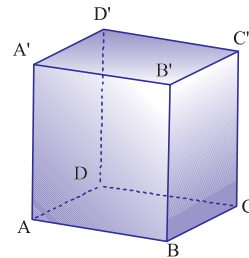


- 2) Déterminer le plan (SAD) de la face SAD
 - a) Par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite .
 - b) Par deux droites sécantes.

Activité 10

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube

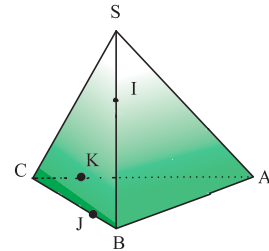
- 1) Déterminer les positions relatives des droites
 - a) (AB) et (A'B')
 - b) (CD) et (CD')
- 2) Citer deux droites non coplanaires.



Activité 11

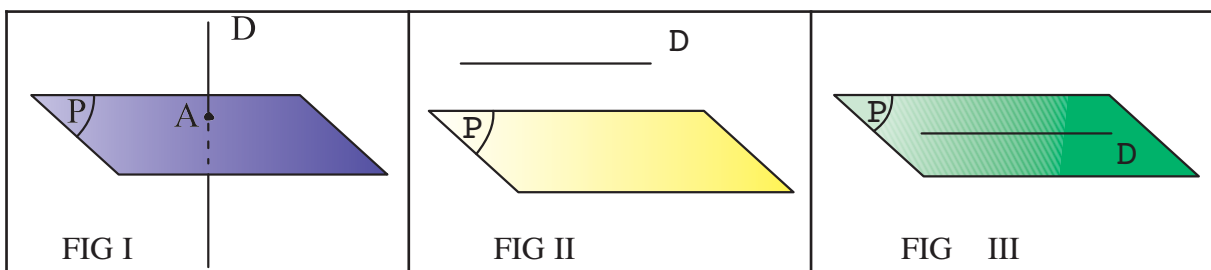
Soient SABC un tétraèdre, I un point de [SB] distinct de S et de B et J un point de [BC] distinct de B et de C

- 1) Les droites (SA) et (BC) sont elles sécantes ?
- 2) Les droites (IJ) et (SB) sont elles sécantes ?
- 3) Soit K un point de [AC] distinct de A et de C
 - a) Les droites (IK) et (SC) sont elles sécantes ?
 - b) Les droites (JK) et (AB) sont elles sécantes ?



Activité 12- Positions relatives d'une droite et d'un plan

Pour chacune des figures I, II et III déterminer $D \cap P$



Définition

On dit qu'une droite et un plan sont sécants si leur intersection est un point.

Vocabulaire

Lorsqu'une droite et un plan sont sécants on dit que la droite perce le plan ou que le plan coupe la droite.

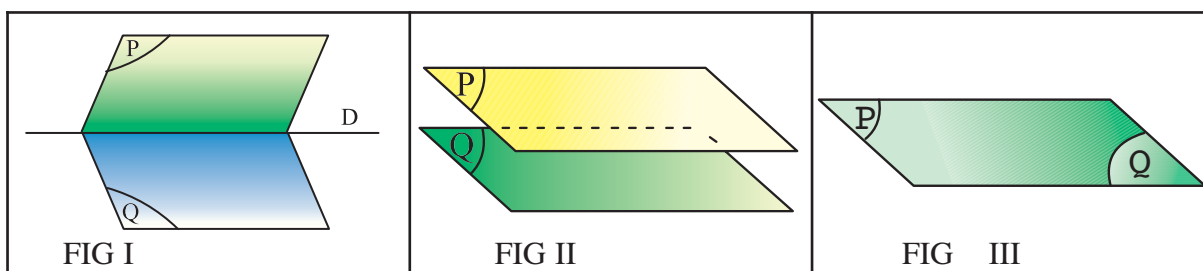
Activité 13

Soient ABCD un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et G le centre de gravité du triangle ACD.

- 1) Faire une figure .
- 2) a) Montrer que les droites (IG) et (BJ) sont sécantes.
b) En déduire que la droite (IG) perce le plan (BCD) en un point E que l'on construira.

Activité 14 : Positions relatives de deux plans

Pour chacune des figures I, II et III déterminer l'intersection des plans P et Q.



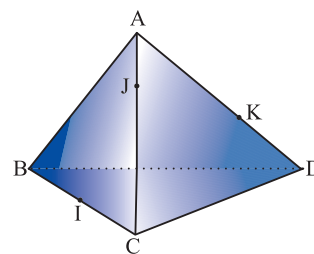
Définition

On dit que deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite.

Activité 15

Soit ABCD un tétraèdre I, J et K des points sur les arêtes $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$ comme il est indiqué sur la figure

- a) Déterminer l'intersection des plans (ACI) et (BDJ).
- b) Déterminer l'intersection des plans (ABK) et (CDJ).
- c) Déterminer l'intersection des plans (BCK) et (ADI).



Activité 16

Soient ABCD un tétraèdre et I et J deux points appartenant respectivement aux arêtes $[AD]$ et $[BD]$ tels que les droites (IJ) et (AB) ne soient pas parallèles.

- 1) Construire le point K intersection des droites (IJ) et (AB).
- 2) Déterminer et construire la droite d'intersection des plans (ABC) et (CIJ).

Activité 17 : D'après olympiades académiques 2001 APMEP.

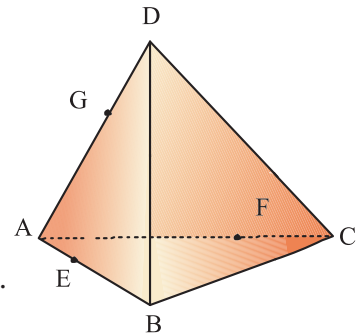
Les faces d'un tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le tétraèdre est posé sur la table, la face « 1 » contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le tétraèdre autour de l'une

quelconque des arêtes de sa base. A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2006 étapes, en comptant le « 1 » initial. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour la somme S .

Activité 18

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I un point de l'arête $[BC]$ et J un point de l'arête $[CD]$. On désigne par M le point d'intersection des droites (BJ) et (DI) .

Déterminer l'intersection des plans (AID) et (JAB) .



Activité 19

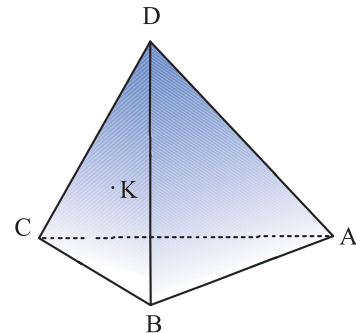
Dans le tétraèdre $ABCD$, les points E , F et G appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AC]$, et $[AD]$.

Déterminer et représenter l'intersection des plans (BCD) et (EFG) .

Activité 20

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un tétraèdre et le point K est le centre de gravité du triangle BCD .

- 1) Reproduire la figure
- 2) En quel point la droite (CK) perce-t-elle le plan (ABD) ?
- 3) En quel point la droite (BD) perce-t-elle le plan (ACK) ?
- 4) Déterminer et représenter l'intersection des plans (ABK) et (ACD) .
- 5) Déterminer et représenter l'intersection des plans (AKD) et (BCD) .

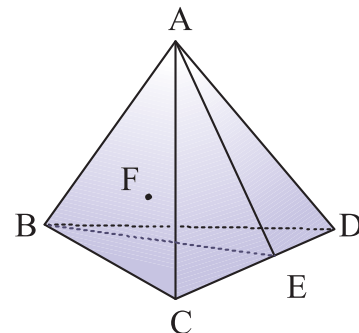


Activité 21

Dans le tétraèdre $ABCD$, le point E appartient à l'arête $[DC]$ et le point F appartient au plan (ABE) .

On se propose de construire le point d'intersection de la droite (CF) et du plan (ABD) .

- 1) Reproduire la figure.
- 2) Dans le plan (ABE) , représenter le point d'intersection des droites (BF) et (AE) . On notera M ce point.



3) Dans le plan(ACD), représenter le point d'intersection des droites (CM) et (AD).

On notera N ce point.

4) Justifier que la droite (CF) perce le plan (ABD) en un point de la droite (BN) .

Activité 22

2050 mouches sont enfermées dans une boîte cubique d'arête 8.

Montrer qu'à tout moment il y a un cube d'arête 1 où se trouvent au moins 5 mouches .

Activité 23

On peint les faces d'un cube en bois ,puis on découpe ce cube en 1000 cubes identiques à l'aide de traits de scie parallèles aux faces.

Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face peinte ?

Activité 24

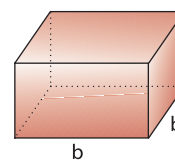
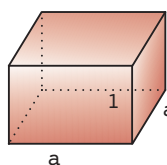
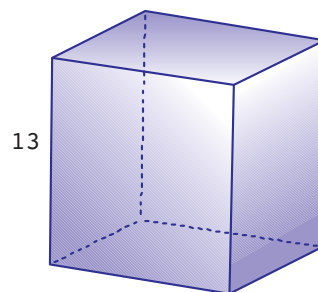
1) Trouver deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 5^3$

2) Ecrire 8^3 comme différence de carrés de deux entiers naturels.

3) Dans la figure ci-contre on considère un cube d'arête 13 et deux parallélépipèdes rectangles de dimensions respectives (a, a,1) et (b, b,1) où a et b sont deux entiers naturels .

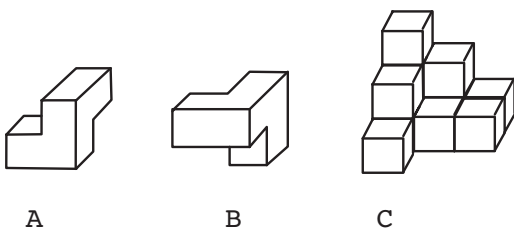
Déterminer a et b pour que le volume du cube soit égal à la différence des volumes des deux parallélépipèdes.

4) Peut-on dire que le cube de deux entiers est toujours égal à la différence de deux carrés.



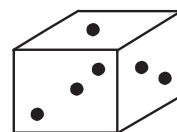
Activité 25

Donner la vue de face , la vue de droite et la vue de gauche des solides A, B et C.

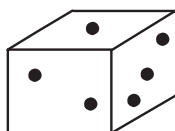


Activité 26

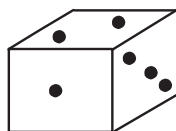
Les faces cachées du cube A sont entièrement blanches.
En positionnant ce cube d'autres façons peut-on obtenir
les représentations 1, 2, 3 ou 4?



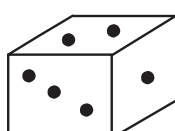
A



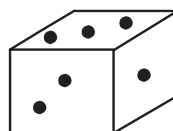
1



2



3



4

« Vous êtes libres, choisissez c'est à dire inventez »

J.P Sartre

Explorer

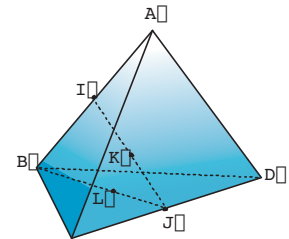
Droites parallèles

Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre.

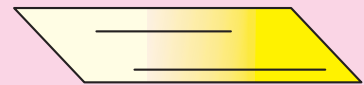
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB],[CD] ,[IJ] et [BJ].

- 1) Les droites (KL) et (IB) sont-elles parallèles ? Justifier.
- 2) Les droites (AJ) et (I L) sont-elles parallèles ? Justifier.
- 3) Les droites (IJ) et (AD) sont-elles parallèles ? Justifier.



Définition

Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan.



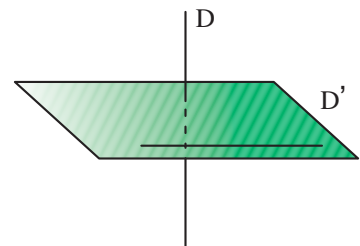
Vocabulaire

Deux droites parallèles sont soit confondues soit distinctes.

Lorsqu'elles sont distinctes on dit qu'elles sont strictement parallèles.

Remarque

Deux droites D et D' de l'espace telles que $D \cap D' = \emptyset$ ne sont pas forcément parallèles.



Activité 2

- 1) Soit Δ une droite de l'espace et A un point n'appartenant pas à Δ .
Montrer qu'il existe une droite et une seule passant par A et parallèle à la droite Δ .

(On pourra considérer le plan P défini par la droite Δ et le point A)

- 2) Soient D et D' deux droites strictement parallèles .
Montrer qu'il existe un unique plan contenant D et D'.

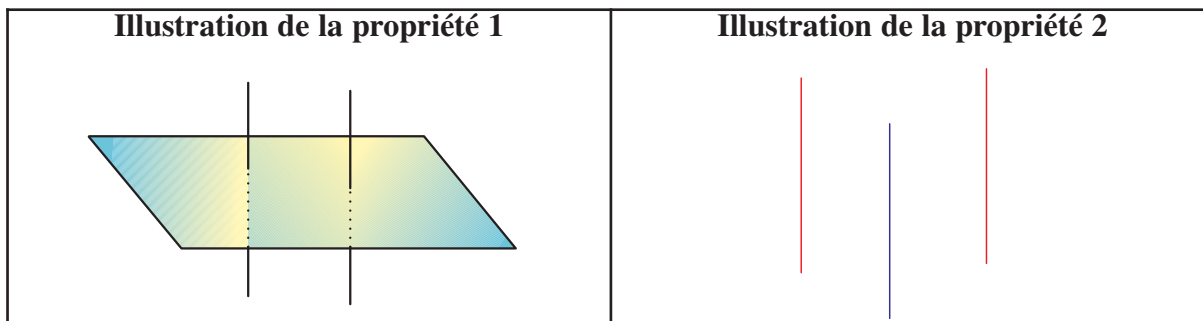


Remarque

On admet les deux propriétés suivantes

Propriété1 : si deux droites sont parallèles tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

Propriété2 : si deux droites sont parallèles à une même troisième elle sont parallèles entre elles .



Activité 3

On considère un tétraèdre ABCD et on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD] et [DA].

- 1) Montrer que IJKL est un parallélogramme.
- 2) Soit M et N les milieux respectifs de [AC] et [BD]

Montrer que IMKN est un parallélogramme

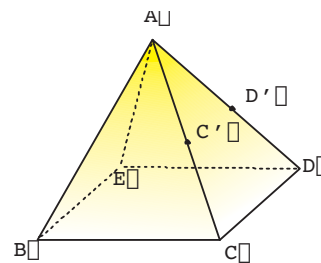
- 3) Dédurre de ce qui précède que dans un tétraèdre, les trois droites joignant les milieux des arêtes opposés sont concourantes.

Activité 4

Dans la figure ci-contre ABCDE est une pyramide dont la base BCDE est un parallélogramme , C' et D' sont les milieux respectifs des arêtes[AC] et [AD] .

- 1) Montrer que les droites (C'D') et (EB) sont parallèles
- 2) Dans le plan (ACD) on désigne par I le symétrique de C' par rapport à D'.

Montrer que les droites (BC') et (EI) sont parallèles

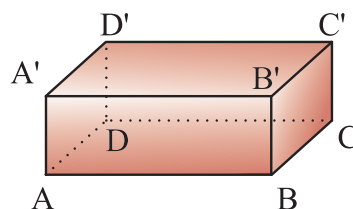


Activité 5 Droites et plans parallèles

Dans la figure ci-contre, ABCDA'B'C'D' est un parallélépipède.

- 1) a) La droite (AB) est elle sécante au plan (ABC) ?
b) La droite (A'C') est elle sécante au plan (ABC) ?
c) La droite (DD') est elle sécante au plan (ABC) ?

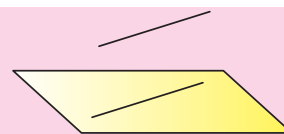
- 2) Nommer des droites parallèles au plan (BCC')



3) Nommer des droites parallèles au plan (A A'C)

Définition

On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan



Vocabulaire

Si une droite D est parallèle à un plan P

On dit aussi que le plan P est parallèle à la droite D ou que le plan P et la droite D sont parallèles et on écrit $D // P$ ou $P // D$.

Si de plus $D \cap P = \emptyset$, on dit que D et P sont strictement parallèles.

Activité 6

On se propose dans cette activité de démontrer la propriété suivante.

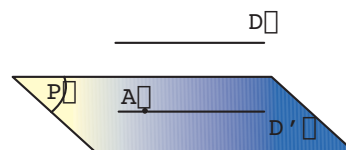
Propriété 3 : Si une droite D et un plan P sont parallèles alors toute droite parallèle à D et passant par un point de P est incluse dans le plan P .

Soit D une droite parallèle à un plan P et soit A un point de P .

On désigne par D' la droite passant par A et parallèle à la droite D .

a) Montrer, par l'absurde, que D' est incluse dans le plan P .

b) Conclure.



Activité 7

Démontrer les propriétés suivantes

Propriété 4 : Si deux droites sont parallèles tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la propriété 1.

Propriété 5 : Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

Indication : soit A un point de l'intersection des deux plans la parallèle en A à la droite est contenue dans chacun des deux plans.

Propriété 6 (théorème du toit) : Soit D et D' deux droites parallèles et P et P' deux plans contenant respectivement D et D' .

Si P et P' sont sécants, alors leur droite d'intersection Δ est parallèle à D et à D'

Indication : P et P' sont parallèles à la droite D donc d'après la propriété 5 les droites D et Δ sont parallèles.

Activité 8

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S et de base $ABCD$ tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

- 1) Construire l'intersection des plans (SAD) et (SBC)
- 2) Construire l'intersection des plans (SAB) et (SCD)

Indication : Remarquer que le plan (SAB) contient une droite parallèle à une droite du plan (SCD) et utiliser le théorème du toit.

Activité 9

Soit $ABCD A'B'C'D'$ un parallélépipède et soit I, J et K les milieux respectifs de $[A'B']$, $[B'C']$ et $[C'D']$.

Montrer que les droites (BC) et (AC) sont parallèles au plan (IJK) .

Activité 10

- 1) Soient D et D' deux droites non coplanaires et A un point. On désigne par Δ la parallèle à la droite D passant par A et par Δ' la parallèle à la droite D' passant par A .

Montrer qu'il existe un plan et un seul passant par A et parallèle à la droite D et à la droite D' . (On pourra considérer le plan défini par les droites Δ et Δ')

- 2) Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point du segment $[AC]$ distinct de A et de C .

On désigne par P le plan passant par M et parallèle aux droites (AB) et (CD) .

- a) Construire les points N, P et Q intersections du plan P avec les droites (BC) , (BD) et (AD) .
- b) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Définition

On dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus.

Ainsi, si P et Q sont deux plans

$$(P // Q) \text{ équivaut à } (P \cap Q = \emptyset \text{ ou } P = Q)$$



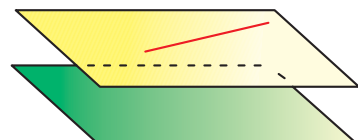
Vocabulaire

Si P et Q sont deux plans tels que $P \cap Q = \emptyset$, on dit qu'ils sont strictement parallèles.

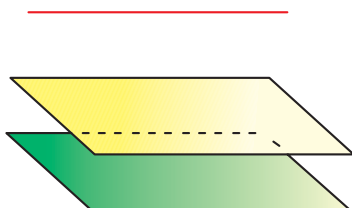
Activité 11

Montrer les propriétés suivantes

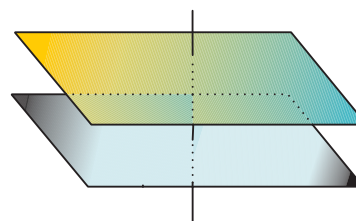
Propriété 7. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre.



Propriété 8 .Si deux plans sont parallèles alors toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre



Propriété 9 : Si deux plans sont parallèles alors toute droite qui perce l'un perce l'autre



Activité 12

Dans cette activité on se propose de démontrer la propriété suivante

Propriété 10 : Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q alors les plans P et Q sont parallèles

Soient D et Δ deux droites sécantes d'un plan P et D' et Δ' deux droites sécantes d'un plan P' et telles que D est parallèle à Δ' et D' est parallèle à Δ

- 1) a) Justifier que les droites D et Δ sont parallèles au plan P'
- b) Justifier que les droites D' et Δ' sont parallèles au plan P.
- 2) Supposons que les plans P et P' sont sécants et désignons par δ la droite d'intersection de ces deux plans.
 - a) Déterminer la position relative des droites D et δ
 - b) Déterminer la position relative des droites Δ et δ
 - c) Conclure.

Activité 13

Montrer la propriété suivante

Propriété 11 : Par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

Activité 14

On se propose de démontrer la propriété suivante

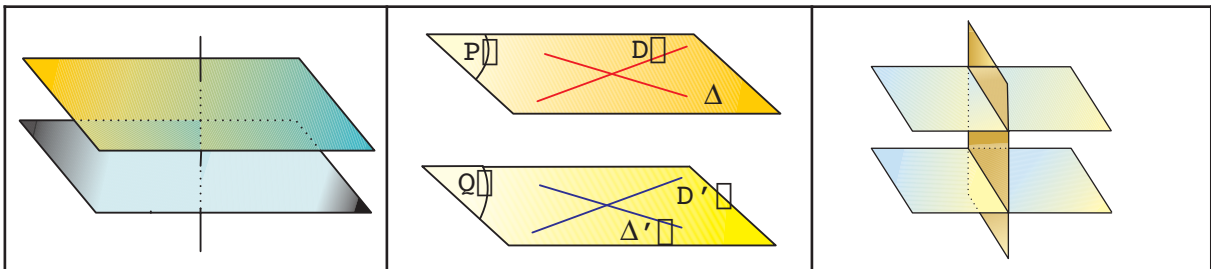
Propriété 12 : Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Soient P et P' deux plans strictement parallèles et Q un plan qui coupe P suivant une droite D.

- 1) a) Supposons que les plans Q et P' sont parallèles et désignons par A un point de la droite D. Justifier alors que Q et P sont deux plans passant par A et parallèle au plan P.
- b) Utiliser la propriété 11 et conclure que le plan Q coupe le plan P'.
- 2) Soit D' la droite d'intersection de Q et P'.
- a) Justifier que D et D' sont coplanaires.
- b) Montrer que D et D' sont parallèles.

Activité 15

Chacune des trois figures suivantes illustre une propriété parmi celles qui sont énoncées dans les activités précédentes. Laquelle ?



Remarque

On utilise souvent la propriété 10 pour montrer que deux plans sont parallèles.

Activité 16

On considère un tétraèdre ABCD et on désigne par I le point du segment [AD] tel que

$$DI = \frac{1}{4} DA$$

- 1) Faire une figure .
- 2) Le plan passant par I et parallèle au plan (ABC) coupe les droites (DB) et (DC) respectivement en J et K.
- a) Montrer que les droites (AB) et (JK) sont parallèles
- b) Placer les points J et K .
- c) Montrer que les droites (BC) et (JK) sont parallèles .
- 3) Calculer $\frac{JK}{BC}$

Activité 17

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et I , J et K les milieux respectifs de [AB] , [EF] et [GH].

- 1) Montrer que les points B , C , K et J sont coplanaires . Soit P le plan qui les contient.
- 2) Montrer que (IH) est parallèle au plan P

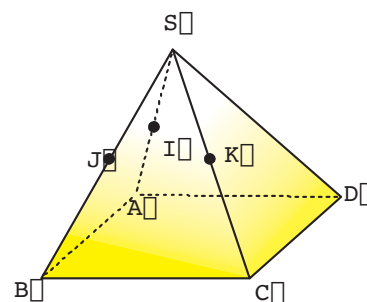
Indication : Montrer que (IH) est contenue dans un plan parallèle à P .

Activité 18

Dans la pyramide $SABCD$, la base $ABCD$ est un carré .

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

- 1) Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles
- 2) Justifier que la droite (SD) perce le plan (IJK) en un point L
- 3) a) Montrer que les droites (IL) et (AD) sont parallèles.
b) en déduire que L est le milieu du segment $[SD]$
- 4) Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?



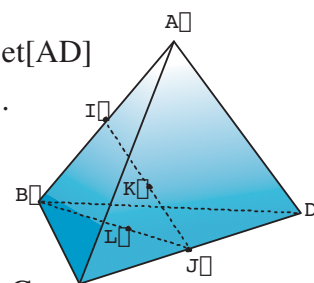
Activité 19 Un problème de lieu

Soient $ABCD$ un tétraèdre , E un point variable de la droite (AB) et F un point variable de la droite (CD) . On note G le milieu de $[EF]$.

On se propose dans cette activité de chercher le lieu géométrique P des points G lorsque le point E décrit la droite (AB) et le point F décrit la droite (CD) .

On note I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AD]$

- 1) Montrer que l'ensemble cherché P contient les points I, J, K et L .
- 2) On suppose que E est fixé en A . Quel est l'ensemble des points G lorsque le point F décrit (CD) ?
- 3) Comment semble être cet ensemble lorsque E décrit (AB) ?
- 4) Emettre une conjecture concernant le lieu géométrique des points G .
- 5) a) Construire les points E' et F' tels que $EBJE'$ et $FCJF'$ soient des parallélogrammes.
b) Démontrer que les points E' et F' appartiennent au plan (IJK) .
c) Préciser le milieu de $[E'F']$
- 6) Sur quel ensemble varie le point G lorsque le point E décrit la droite (AB) et le point F décrit la droite (CD) ? (Voir : Utiliser les TIC (2))



Sections planes

Activité 20

Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un cube, les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes $[EH]$, $[EF]$ et $[CG]$.

On se propose de représenter la section du cube par le plan (IJK) c-a-d l'intersection de ce plan avec les faces du cube.

- 1) Reproduire la figure et construire le point M intersection des droites (IJ) et (HG) .

2) a) Justifier que le point M appartient au plan (IJK) et au plan de la face CDHG du cube.

b) Construire l'intersection du plan (IJK) avec la face CDHG du cube.

c) Construire l'intersection du plan (IJK) avec la face ADEH.

d) Construire les intersections du plan (IJK) avec la face BCGF et avec la face ABFE. (on utilisera la propriété 12)

3) Conclure.

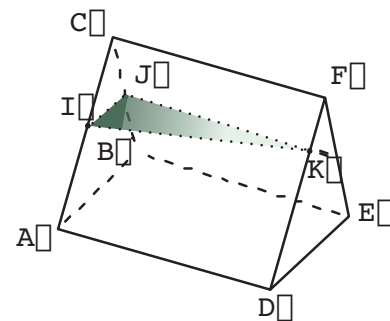
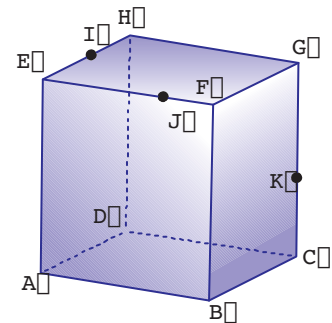
Activité 21

Dans le prisme droit ABCDEF, les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes [AC], [BC] et [DF].

1) Reproduire la figure et représenter la section du prisme par le plan (IJK).

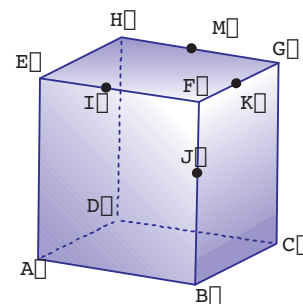
(c-à-d les droites d'intersection du plan (IJK) avec les faces du prisme)

2) Représenter la section du prisme par le plan passant par A et parallèle au plan (IJK).



Activité 22

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, M est un point de l'arête [HG], les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes [EF], [BF] et [FG]. Représenter la section du cube par le plan P passant par M et parallèle au plan (IJK).



Activité 23

SABCD est une pyramide de base un trapèze ABCD.

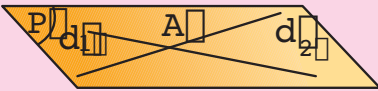
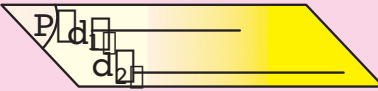
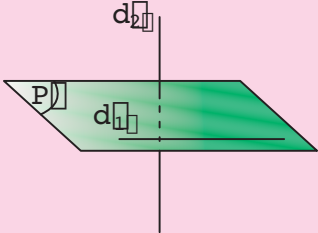
M est un point de l'arête [SA].

Construire la section de cette pyramide par le plan P passant par M et parallèle au plan (ABC).

Position relatives de droites et de plans

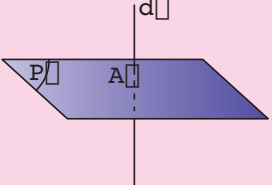
• Deux droites distinctes

Deux droites distinctes de l'espace sont

• Soit coplanaires		• Soit non coplanaires
		
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A	d_1 et d_2 sont strictement parallèles	Aucun plan ne contient d_1 et d_2 .

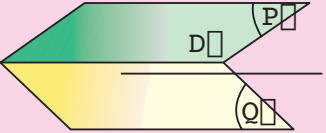
• Une droite et un plan

Une droite et un plan de l'espace sont :

• soit sécants	• soit parallèles	
		
d et P ont un point d'intersection	d et P sont strictement parallèles	d est contenu dans P

• Deux plans

Deux plans sont :

• soit sécants	• soit parallèles	
		
P et Q ont une droite d'intersection D	P et Q sont strictement parallèles	P et Q sont confondus

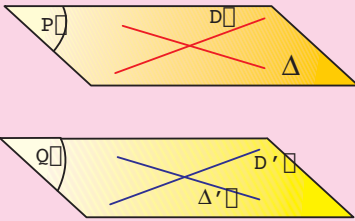
Parallélisme de droites et de plans

Par un point de l'espace, passe une unique droite parallèle à une droite donnée.	Par un point donné de l'espace passe un unique plan parallèle à un plan donné.	Deux droites strictement parallèles déterminent un unique plan.

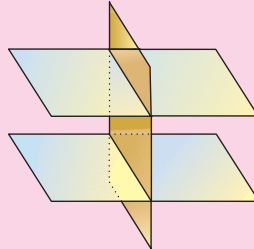
Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles	Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection	Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre	Si deux droites sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Si deux plans sont parallèles alors : • toute droite de l'un est parallèle à l'autre. • toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre. • toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.	
--	--



Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un des plans sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles

Si deux droites parallèles sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.

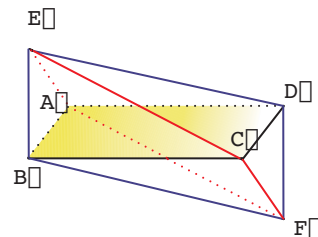


1 Dans la figure ci-contre ABCD et BEDF sont deux parallélogrammes.

Montrer que les droites (EC) et (AF) d'une part, et les droites (AE) et (CF) d'autre part sont parallèles.

Indication

Considérer le milieu du segment [BD].



2 Soit ABCDEFGH un cube.

I et J sont les milieux respectifs des segments [EG] et [AF].

- a) Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ADE).
- b) Montrer que les plans (IJE) et (ADE) sont sécants suivant une droite L parallèle à la droite (IJ).
- c) Tracer L.

Indications

- a) Justifier que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AH).
Conclure.
- b) Considérer la parallèle à (AH) passant par E.

3 Soit ABCDEFGH un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD] et [DH].

On se propose de représenter la section du cube par le plan (IJK) c'est à dire les droites d'intersection du plan (IJK) avec le cube.

- 1) a) Faire une figure.
b) Déterminer la droite d'intersection des plans (IJK) et (BDH). On désigne par Δ cette droite.
c) Montrer que la droite Δ coupe le segment [BF] en son milieu qu'on notera M.
- 2) Montrer de même que le plan (IJK) coupe le segment [GH] en son milieu qu'on notera L.
- 3) Montrer de même que le plan (IJK) coupe le segment [FG] en son milieu qu'on notera N.
- 4) Tracer la section du cube par le plan (IJK).

Indications

- 1) b) Considérer la droite parallèle à la droite (IJ) passant par K.
c) Justifier que la droite coupe la droite (BF) en un point que l'on notera M.

Déterminer la nature du quadrilatère KMBD.

Conclure.

- 2) Considérer les plans (IJK) et (DHG).
- 3) Considérer les plans (IJK) et (FGH).

4 Sur les arêtes d'un cube ABCDEFGH on place les points I et J tels que :

$$DI = \frac{1}{4} DC \text{ et } CJ = \frac{1}{4} CB.$$

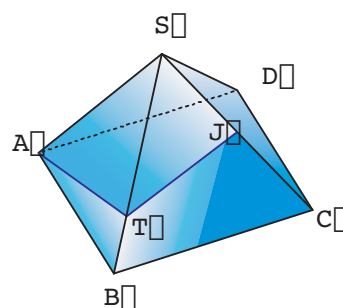
Montrer que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ).

Indications

- Déterminer la droite d'intersection des plans (EJG) et (ABC). On désigne par Δ cette droite.
- Montrer que Δ coupe (AB) en un point K vérifiant $AK = \frac{1}{4} AB$.
- Appliquer Thalès au triangle ABC.
- Justifier que AKID puis HIKE sont des parallélogrammes.

5 On a représenté ci-contre une pyramide dont la base est un carré de côté 6 m. De plus, les faces latérales de cette pyramide sont quatre triangles équilatéraux.

En se déplaçant à la surface de cette pyramide, une souris doit se rendre par le plus court chemin du point A au point J, milieu de l'arête [SC].



1) Quel est le point T de l'arête [SB] qui rendrait le chemin de cette souris minimal ?

2) Calculer alors la longueur de ce trajet.

Indications

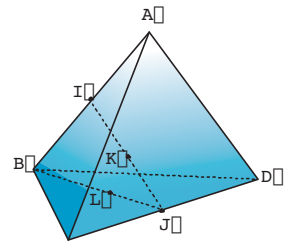
1) Tracer un patron $A'S'C'B'$ des deux faces ASB et SBC de la pyramide.

2) Que représente T' pour le triangle $S'A'C'$? T' étant le point de $[B'S']$ pour lequel le chemin $A'T'J'$ est minimum, avec J' le milieu du segment $[S'C']$.

1) Section d'un cube par un plan

A l'aide d'un logiciel de géométrie de l'espace

- Créer un cube ABCDEFGH.
- Créer P, Q et R points libres respectivement sur les cotés [EH], [EF] et [CG].
- Créer le polyèdre convexe section du cube par le plan (PQR).
- Déplacer les points P, Q ou R et observer la section obtenue.
- Observer la section obtenue en vraie grandeur en utilisant l'option plan isolé.
- Justifier. (Introduire M intersection de (PQ) et (HG)).

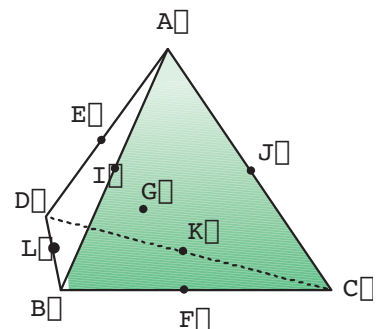


2) Recherche d'un lieu

ABCD est un tétraèdre. E est un point libre de la droite (AD) et F un point libre de la droite (BC). On note G, I, J, K et L les milieux respectifs de [EF], [AB], [AC], [DC] et [DB]

On se propose de déterminer l'ensemble des points G lorsque E et F varient.

A l'aide d'un logiciel de géométrie de l'espace

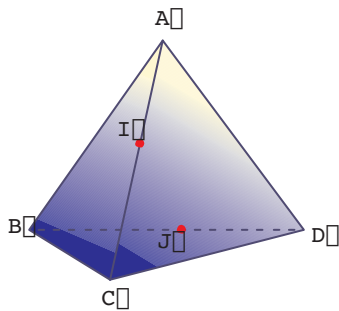


- Créer un tétraèdre ABCD.
- Créer les points I, J, K, L milieux respectifs de [AB], [AC], [DC] et [DB].
- Créer E, F points libres respectivement sur (AD) et (BC).
- Enfin créer le point G milieu de [EF].
- Fixer E sur A et déplacer F sur [BC], que semble être la trajectoire du point G ?
- Fixer E sur D et déplacer F sur [BC], que semble être la trajectoire du point G ?
- Fixer F sur C et déplacer E sur [AD], que semble être la trajectoire du point G ?
- Fixer maintenant E n'importe où sur (AD) et déplacer F puis fixer F et déplacer E, observer dans chaque cas la trajectoire du point G.
- Déduire l'ensemble des points G.

Appliquer

1 Dans la figure ci-dessous ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].

N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI) extérieur au segment [AI].

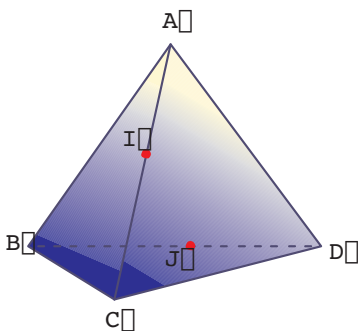


1) Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?

2) a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD). Prouver que P appartient à (IJ).

2 Dans la figure ci-dessous ABCD un tétraèdre.

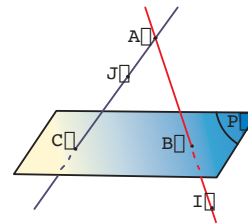


a) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes?

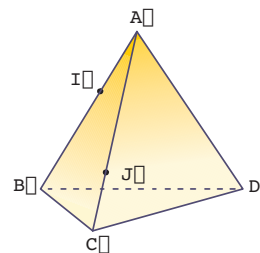
b) Soit I un point de [AC] distinct de A et C, et J un point de [BD] distinct de B et D.

Les droites (IJ) et (AB) sont-elles coplanaires ?

3 Recopier la figure ci-dessous et placer le point K intersection de la droite (IJ) avec le plan P.



4

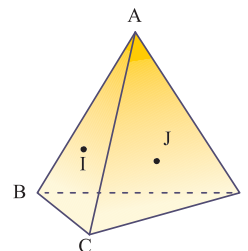


Recopier la figure ci-dessus puis construire

a) le point d'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).

b) l'intersection des plans (DIJ) et (BCD).

5 Sur la figure ci-dessous, les points I et J sont situés respectivement dans la face (ABC) et la face (ACD).

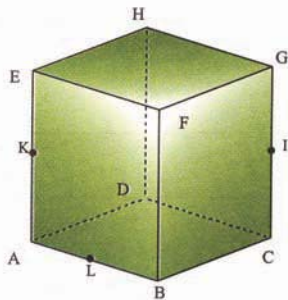


Recopier la figure puis tracer la droite d'intersection de plans (AIJ) et (BCD).

- 6** ABCD est un tétraèdre. On note I le milieu de [CD], J le milieu de [DB] et K le milieu de [BC]. Démontrez que les plans (ABI), (ACJ) et (ADK) ont une droite commune.

Maîtriser

7



I, K et L sont les milieux respectifs de [CG], [AE] et [AB] du cube ci-dessus.

- Les droites (EL) et (BF) sont-elles sécantes ?
- Les droites (KL) et (EB) sont-elles parallèles ?
- Les droites (HK) et (IA) sont-elles sécantes ?
- Les droites (FL) et (HK) sont-elles parallèles ?

- 8** Soient, OABC est un tétraèdre, I le milieu de [OA], J le milieu de [OB] et E un point de la demi-droite [CA) non situé sur le segment [AC].

- Construire le point M où (OC) perce le plan (IJE).
- Construire le point F où (BC) perce le plan (IJE).
- Montrer que $(EF) \parallel (AB)$.

- 9** Soit un tétraèdre ABCD. On désigne par I le point de [AC] tel que $AI = \frac{1}{4} AC$.

Soit J le point de [BC] tel que $BJ = \frac{1}{4} BC$. La droite passant par J et parallèle à (BD) coupe le segment [CD] en K.

- Les plans (IJK) et (ABD) sont-ils parallèles.
- Montrer que (IK) est parallèle à (AD).

- 10** P et Q sont deux plans parallèles. Une droite Δ coupe P en A et Q en B.

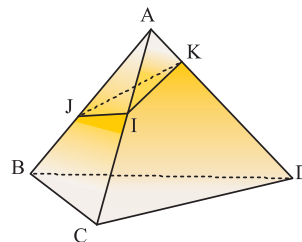
Une droite Δ' parallèle à Δ coupe P en C et Q en D.

Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

- 11** Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.

- Montrer que (BC) est parallèle à P.
- Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.

12



Dans la figure ci-dessus, ABCD est un tétraèdre et les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes [AC], [AB] et [AD] de sorte que les droites (KI), (KJ) et (IJ) coupent le plan (BCD).

- Montrer que les droites (KI) et (DC) sont sécantes.
- Représenter les points d'intersection des droites (KI), (KJ) et (IJ) avec le plan

(BCD), qu'on notera respectivement J' , I' et K' .

3) Montrer que les points J' , I' et K' sont alignés.

13 Soient ABCD un tétraèdre, I le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).

1) Construire l'intersection de (AJ) avec le plan (BCD).

En déduire l'intersection Δ des plans (AIJ) et (BCD)

2) Le plan (AIJ) est-il toujours sécant au plan (ABD) ? Construire l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).

14 Soient ABCD un tétraèdre, I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point du segment [AD] tel que

1) Faire une figure.

2) Les droites (CI) et (BJ) se coupent en un point S. Que représente le point S pour le triangle ABC ?

3) Construire l'intersection des plans (ASD) et (BDC).

4) Déterminer l'intersection de la droite (IK) avec le plan (BCD).

15 SABCD est une pyramide de sommet S ; la base ABCD est un parallélogramme.

M est un point de l'arête [SC] et N un point de l'arête [SB] tels que (MN) est parallèle à (BC).

1) Démontrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.

2) Les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.

a) Démontrer que le point P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).

b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?

c) En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).

16 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

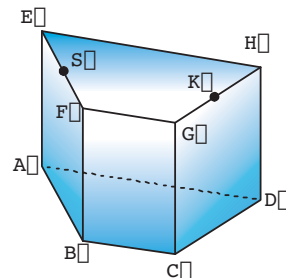
1) Démontrer que les plans (AFC) et (DEG) sont parallèles.

2) Soient I le milieu du segment [AB], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [BF].

Démontrer que les plans (IJK) et (AFC) sont parallèles.

3) Déduire que les plans (IJK) et (DEG) sont parallèles.

17 Dans la figure ci-dessous ABCDEFGH est un prisme droit de base un trapèze non parallélogramme.



Les points S et K sont les milieux respectifs des segments [EF] et [GH].

1) Indiquer la position relative des droites suivantes :

- a) (EF) et (HG) b) (CE) et (BD)
- c) (AF) et (DG) d) (EC) et (BH)
- e) (AS) et (DK) f) (BE) et (DK)

2) Indiquer la position relative de la droite et du plan suivants, dans le cas où ils sont sécants construire leur point d'intersection.

- a) (AF) et (GCD)
- b) (EA) et (GCD)
- c) (EG) et (ABC)
- d) (AS) et (GCD)
- e) (BE) et (GCD).

18 Soit P un plan contenant un parallélogramme ABCD base d'une pyramide de sommet O, un plan P' parallèle à P coupe les arêtes [OA], [OB], [OC] et [OD] respectivement en I, J, K et L

- 1) Faire une figure
- 2) Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB)? Justifier.
- 3) La droite (IK) est-elle parallèle au plan (BCD) ?
- 4) a) Montrer que les deux plans (OAB) et (OCD) se coupent selon une droite D parallèle à P
- b) Construire le point M intersection de (LC) avec le plan (OAB)

19 Soient ABCD un parallélogramme et P un plan contenant (AB) et ne contenant pas C et D. Un plan P' strictement parallèle à P coupe [AD] en I et [BC] en J

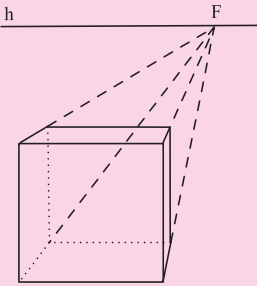
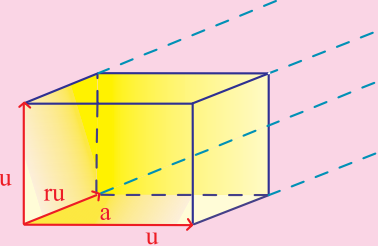
1) Montrer que AIJB est un parallélogramme

2) Soit M un point de P. Montrer que les plans P et (MIJ) sont sécants

3) Soit Δ l'intersection de P et de (MIJ) Montrer que $\Delta \parallel (IJ)$

Dessiner en perspective cavalière

Représenter un objet de l'espace sur un plan en donnant l'illusion de la troisième dimension est un vrai défi !

	
Les parallèles contenues dans le plan frontal sont parallèles sur un dessin en perspective, mais les autres parallèles sont concourantes en un point de fuite F sur la ligne d'horizon h.	Dans une perspective cavalière, toutes les parallèles réelles sont aussi parallèles sur le dessin (point de fuite à l'infini).

Pour réaliser un dessin exploitable géométriquement, il faut respecter quelques règles élémentaires : conservation de l'alignement, du parallélisme et des milieux. Un tel dessin permet alors d'étudier des propriétés affines, mais pas métriques (les angles et les longueurs ne sont pas conservés). Pour étudier des propriétés métriques (angles, orthogonalité, longueurs) il faut utiliser une perspective cavalière, et donc choisir ses différents paramètres :

- un plan frontal (F) : un segment contenu dans ce plan ou dans un plan parallèle est représenté en vraie grandeur,
- un angle de fuite ($a=30^\circ$ sur la figure) : les perpendiculaires à (F), les fuyantes, seront représentées dans la direction ainsi définie,
- un coefficient de réduction ($r = 0,5$ sur la figure) : les longueurs représentées dans la direction de fuite sont multipliées par r .

En général on choisit pour (F) un plan lié à l'objet que l'on désire représenter, $a < 45^\circ$ et $r = 0,5$ (valeur simple qui donne un bel aspect).

Maurice STARK

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

chapitre 9

“..Il devait y avoir derrière les choses quelque chose de profondément caché.”

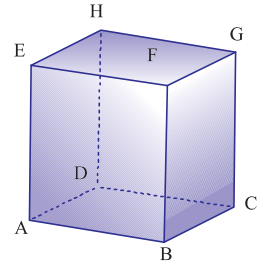
A.Einstein

Pour démarrer

1 Indiquer pour chacun des énoncés suivant s'il est vrai ou faux.

Dans chaque cas où l'énoncé est faux, donner un exemple (on pourra exploiter le cube ci-contre).

- 1) Si deux droites sont respectivement parallèles à deux droites sécantes alors elles sont sécantes
- 2) Si une droite est parallèle à un plan alors elle est parallèle à toute droite de ce plan.
- 3) Si deux droites ne sont pas coplanaires alors elles ne sont ni parallèles ni sécantes.
- 4) Si deux plans contiennent respectivement deux droites parallèles alors ces deux plans sont parallèles.

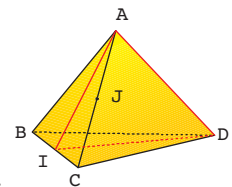


2 ABCD est un tétraèdre régulier. (Toutes les faces sont des triangles équilatéraux) de côté a.

I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

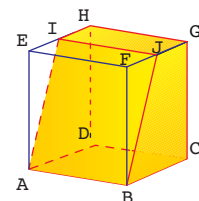
Indiquer pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. Justifier.

- a) $AI = ID = JD = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- b) $JI = JA = JC$.
- c) AID est un triangle rectangle en I.
- d) Les points B, C et D appartiennent à la sphère de centre A et de rayon a.



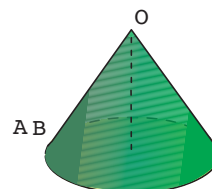
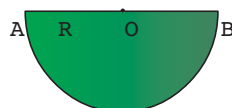
3 Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube de côté 4. I et J sont les milieux respectifs de [EH] et [FG].

Déterminer le volume et l'aire du prisme AIHDBJGC.



4 Avec un demi-disque en carton mince, on forme un cône droit à base circulaire (voir figure ci-dessous).

Quel est le rayon du demi-disque, à 1 mm près par excès, pour que le volume du cône obtenu soit 1 dm³ ?

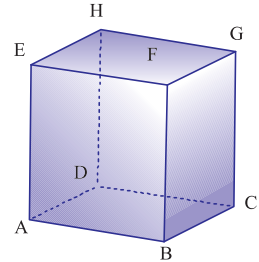


Droites orthogonales

Activité 1

Dans la figure suivante ABCDEFGH est un cube .

- 1 a) Nommer deux droites du plan (ABC) qui sont perpendiculaires.
- b) Nommer deux droites du plan (ADE) qui sont perpendiculaires.
- 2) a) Quelle est la droite passant par C et parallèle à la droite (AE) ?
- b) Quelle est la droite passant par C et parallèle à la droite (GH) ?
- c) Quelle est la droite passant par H et parallèle à la droite (AE) ?
- 3) a) Justifier que les droites (CG) et (CD) sont perpendiculaires.
- b) Justifier que les droites (HG) et (HD) sont perpendiculaires.



Définition

On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires.

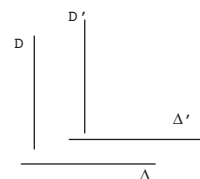
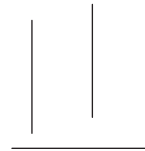
Activité 2

Déduire de la définition précédente les propriétés suivantes

Propriété 13 : Si deux droites de l'espace sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 14 : Si deux droites de l'espace sont parallèles toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

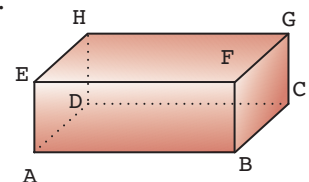
Propriété 15 : Si D et Δ sont deux droites orthogonales et si D' et Δ' sont deux droites parallèles respectivement à D et Δ , alors D' et Δ' sont orthogonales .



Activité 3

Dans la figure ci-contre ABCDEFG est un parallélépipède rectangle.

- 1) Montrer que les droites (EA) et (BC) sont orthogonales.
- 2) Montrer que les droites (HA) et (FC) sont orthogonales
- 3) Nommer deux droites orthogonales à (AC).
- 4) Nommer deux droites sécantes orthogonales à la droite (EF).

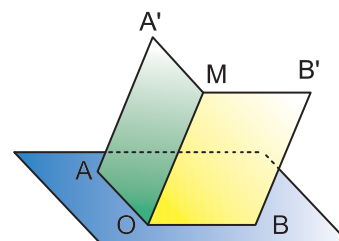


Activité 4

Soit OAB un triangle rectangle en O et M un point n'appartenant pas au plan (OAB).

Soit A' le point tel que $OAA'M$ soit un parallélogramme
et B' le point tel que $OBB'M$ soit un parallélogramme.

- 1) Montrer que les plans (OAB) et $(MA'B')$ sont parallèles.
- 2) Montrer que $ABB'A'$ est un parallélogramme.
- 3) Montrer que le triangle $A'MB'$ est un triangle rectangle.
- 4) Dédire de ce qui précède que
 - a) les droites (OA) et (MB') sont orthogonales.
 - b) les droites (OB) et (MA') sont orthogonales.



Activité 5

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales et soit M un point de l'arête $[BC]$.

Le plan contenant le point M et parallèle aux droites (AB) et (CD) coupe $[BD]$ en N , $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q .

- 1) Faire une figure
- 2) a) Montrer que les droites (MQ) et (AB) sont parallèles
b) Que peut-on dire des droites (MN) et (CD) ?
- 3) Montrer que le triangle QMN est rectangle en M .
- 4) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle.

Activité 6

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a et on désigne par I et J les milieux respectifs de $[FB]$ et $[CD]$.

On se propose de démontrer que les droites (BE) et (IJ) sont orthogonales.

- 1) Faire une figure
- 2) Soit K le milieu de $[BE]$.
 - a) Prouver que les droites (KI) et (DJ) sont parallèles et que $KI = DJ$.
 - b) En déduire que les droites (KD) et (IJ) sont parallèles.
- 3) a) Montrer que le triangle EDB est équilatéral.
b) En déduire que (DK) et (EB) sont perpendiculaires..
- 4) Montrer que les droites (IJ) et (BE) sont orthogonales.

Droites et plans orthogonaux

Activité 7

Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 8.

1) Justifier que la droite (HD) est orthogonale à la droite (AD) et à la droite (CD)

Dans ce qui suit on se propose de démontrer que la droite (HD) est orthogonale à toute droite du plan (ABC)

2) Soit L le milieu de [AC].

a) Calculer DL.

b) Montrer que le triangle AHC est équilatéral .Calculer HL.

c) Montrer que la droite (HD) est orthogonale à la droite (DL)

[On pourra montrer que le triangle HDL est rectangle en D].

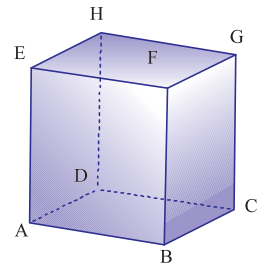
3)En procédant comme à la 2^{ème} question on montre de même que la droite (CG) est orthogonale à la droite (AC).

Déduire alors que

a) les droites (HD) et (AC) sont orthogonales.

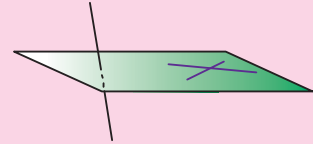
b) les droites (CG) et (DB) sont orthogonales.

(on pourra utiliser la définition de deux droites orthogonales)



Définition

On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Remarque

On admet la propriété suivante.

Propriété 16 : Si une droite est perpendiculaire à un plan , alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan

Activité 8

Dans cette activité On se propose de montrer que deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales .

Soit ABCD un tétraèdre régulier (toutes les arêtes ont la même longueur). On désigne par I le milieu de [CD].

1) a) Montrer que la droite (CD)est orthogonale à un plan contenant la droite (AB) que l'on déterminera.

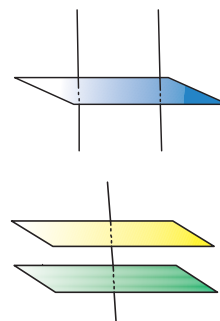
b) En déduire que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

2) Montrer que (AD) est orthogonale à (BC) et que (AC) est orthogonale à (BD).

Activité9

Démontrer la propriété suivante

- Propriété 17** : a) Si deux droites sont parallèles tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
 b) Si deux plans sont parallèles toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.



Activité10 Tétraèdre trirectangle

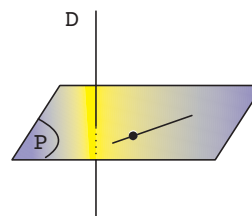
On considère un tétraèdre ABCD tels que les trois faces ABC, ABD et ACD soit des triangles rectangles en A .On donne $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$.

- 1) Calculer le volume de ce tétraèdre.
- 2) Calculer BC et en déduire $\sin \widehat{ABC}$.
- 3) Dans le triangle ABC on désigne par H le pied de la hauteur issue de A .
 - a) Calculer AH et CH.
 - b) Quelle est la nature du triangle DAH ?
 - c) Calculer DH
- 4) Montrer que HDC est un triangle rectangle en H
- 5) Calculer l'aire du triangle BDC.
- 6) Déduire de ce qui précède la longueur de la hauteur du tétraèdre issue de A.

Remarque

On admet la propriété suivante

- Propriété 18** : a) Par un point donné il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné.
 b) Par un point donné il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.
 c) Si une droite D est orthogonale à un plan P alors toute droite orthogonale à la droite D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan.



Activité11

Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre.

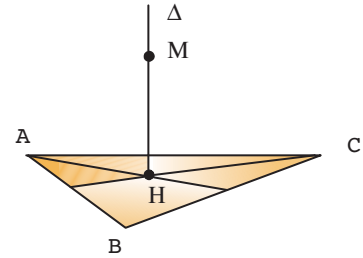
On désigne par Δ la droite passant par H et perpendiculaire

au plan (ABC) et par M un point de Δ distinct de H.

Montrer que

- a) la droite (AB) est perpendiculaire au plan (MCH).
- b) la droite (CB) est perpendiculaire au plan (MAH).
- c) la droite (AC) est perpendiculaire au plan (MBH).

En déduire que les arêtes opposées du tétraèdre MABC sont deux à deux orthogonales



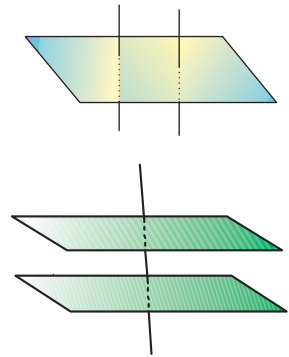
Activité12

Montrer la propriété suivante .

Propriété 19 : a) Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

b) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles

Indication : Ces résultats découlent immédiatement de la propriété 18



Activité13 Théorème des trois perpendiculaires

Soit Δ une droite perpendiculaire à un plan P.

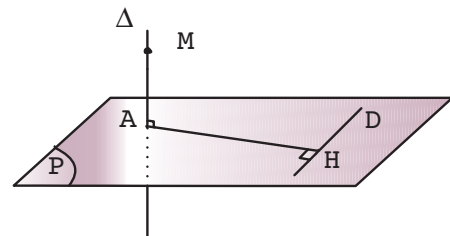
On note A le point commun à Δ et à P.

Soit D une droite du plan P ne passant pas par A.

On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite D.

Soit M un point de Δ . Distinct de A

- a) Montrer que la droite D est perpendiculaire au plan (AHM).
- b) En déduire que les droites (MH) et D sont orthogonales.



Activité14

On considère une pyramide SABCD de sommet S et de base un carré ABCD de centre O. Toutes les arêtes ont pour longueur 6.

- 1) Démontrer que les triangles SBD et SAC sont isocèles et rectangles.
- 2) Montrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
- 3) Soit S' le symétrique de S par rapport à O.

- a) Calculer le volume de la pyramide SABCD.
- b) En déduire le volume de SABCD S'.

Plan médiateur d'un segment

Activité 15

Soit $[AB]$ un segment. On se propose dans cette activité de déterminer l'ensemble E des points M de l'espace équidistants de A et B .

Soit I le milieu de $[AB]$.

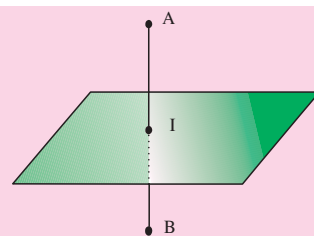
- 1) Justifier que I est un point de l'ensemble E .
- 2) Soit M un point de l'ensemble E distinct du point I .
 - a) Dans le plan (MAB) , que représente la droite (MI) pour le segment $[AB]$?
 - b) Soit P le plan perpendiculaire à la droite (AB) en I .

Montrer que tout point de l'ensemble E appartient au plan P

- 3) Soit N un point du plan P distinct de I
 - a) Que représente, dans le plan (NAB) , la droite (NI) pour le segment $[AB]$?
 - b) En déduire que tout point du plan P appartient à l'ensemble E .

Définition

On appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu..



Théorème:

L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment.

Activité 16

Soit un tétraèdre ABCD tel que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCD) .

On désigne par I , J et K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

- a) Faire une figure
- b) Démontrer que le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan (IJK) .

Activité17

Soit ABCD un tétraèdre régulier.

- Déterminer le plan médiateur de l'arête [BC] .
- Déterminer le plan médiateur de chacune des autres arêtes .

Activité18

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a.

- Quelle est la nature du triangle BDG ? Placer le centre de gravité I de ce triangle.
- Justifier que les points E, C et I appartiennent au plan médiateur du segment [BG]
- Justifier que les points E, C et I appartiennent au plan médiateur du segment [DG]
- Déduire des questions précédentes que les points E, C et I sont alignés et que la droite (EC) est orthogonale au plan (BDG) .

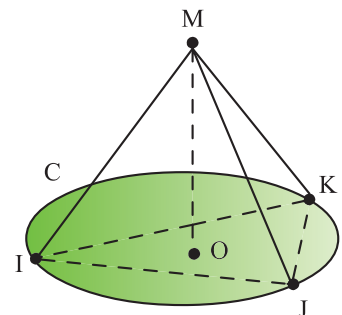
Axe d'un cercle

Activité19

Soit C un cercle de centre O et de rayon r.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points de l'espace qui sont équidistants de tous les points du cercle C.

- Justifier que le centre O du cercle appartient à l'ensemble E.
- Soit M un point de l'ensemble E distinct de O et soit I, J et K trois points distincts du cercle C



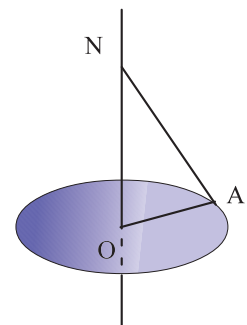
- Justifier que M appartient au plan médiateur P du segment [IJ].
- Justifier que M appartient au plan médiateur Q du segment [JK].
- On désigne par D la droite passant par O et perpendiculaire au plan (IJK).

Montrer que $P \cap Q = D$ et que le point M appartient à la droite D

- Soit N un point de la droite D distinct de O. et soit A un point quelconque du cercle C.

On pose $ON = d$

- Exprimer AN en fonction de r et d .
- En déduire que pour tout point A du cercle C la distance AN est constante
- Conclure.



Définition

On appelle axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

Théorème

L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle .

Activité 20 Sphère circonscrite à un tétraèdre

Soit ABCD un tétraèdre.

- 1) a) Démontrer que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ sont sécants suivant une droite Δ orthogonale au plan (BCD) .
- b) Soit I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BCD) .

Montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD .

- 2) a) Démontrer que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[AD]$ sont sécants suivant une droite Δ' orthogonale au plan (ABC) .
- b) Montrer que les droites Δ et Δ' sont sécantes. Soit O leur point d'intersection.
- c) Prouver que O est équidistant de A, B, C et D . En déduire que O appartient au plan médiateur de chaque arête du tétraèdre.

Ainsi O est le centre d'une sphère contenant les 4 sommets A, B, C et D .

Cette sphère est appelée sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Activité 21

Soit ABCD un tétraèdre tels que les droites (AB) et (CD) d'une part et les droites (BC) et (AD) d'autre part soient orthogonales.

La droite passant par A et perpendiculaire au plan (BCD) perce ce dernier en un point qu'on note K . (Le point K est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD))

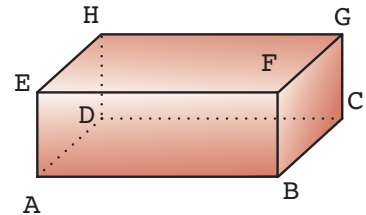
- 1) Démontrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABK) . En déduire que (BK) est une hauteur du triangle BCD .
- 2) Démontrer que (DK) est une hauteur de BCD . Que représente K pour le triangle BCD ?
- 3) Démontrer que (BD) est orthogonale au plan (ACK) . En déduire que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

Plans perpendiculaires

Activité 22

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Nommer une droite du plan (ABC) qui est orthogonale au plan (BCG). Justifier
- Nommer une droite du plan (BCG) qui est orthogonale au plan (ABC). Justifier
- Existe-t-il une droite du plan (ACGE) qui est orthogonale au plan (ADHE). Justifier
- Existe-t-il une droite du plan (BDHF) qui est orthogonale au plan (ACGE). Justifier



Définition

On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Activité 23

Démontrer les trois propriétés suivantes

Propriété 20 : Si D est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires, alors toute droite D' contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à la droite d'intersection D est orthogonale à l'autre (Fig1)

Propriété 21 : Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre (Fig2)

Propriété 22 : Si deux plans sécants P et Q sont perpendiculaires à un même plan R , alors leur droite d'intersection D est orthogonale au plan R (fig3)

Fig1

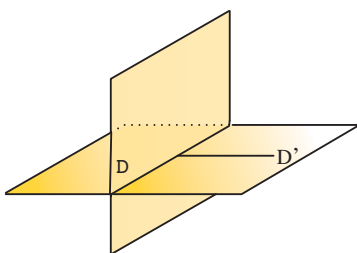


Fig2

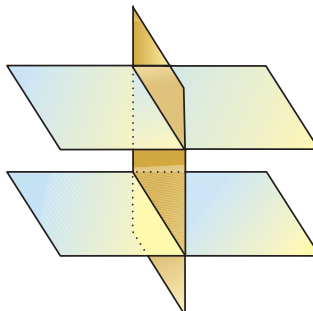
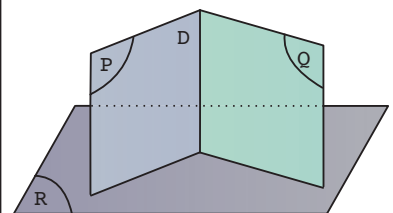


Fig3



Activité 24

Soit ABCDEFGH un cube .

- 1) Nommer des plans perpendiculaires au plan (ABC). Justifier.
- 2) Montrer que le plan (BDHF) est perpendiculaire au plan (ACGE).
- 3) Soit P un point de la face BCGF.

On suppose que les plans (ADHE) et (AHP) sont perpendiculaires.

Montrer que les points P, B et G sont alignés.

Activité 25

On donne dans un plan P un cercle C de centre O et une droite D tangente à ce cercle en un point A.

On désigne par D' l'axe du cercle C et par B un point de D' distinct de O.

- 1) Faire une figure .
- 2) Montrer que le plan passant par A et contenant la droite D' est perpendiculaire au plan passant par B et contenant la droite D.

Activité 26

On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré de centre O et telle que (SO) soit l'axe du cercle circonscrit au carré ABCD.

- 1) Faire une figure.
- 2) Montrer que les plans (SAC) et (SBD) sont perpendiculaires.
- 3) Soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
 - a) Montrer que les plans (SIK) et (SJL) sont perpendiculaires et préciser leur intersection
 - b) Montrer que le plan (SIK) est perpendiculaire aux plans (SAB) et (SDC).

Activité 27

Soit ABCD un tétraèdre régulier (toutes les arêtes ont même longueur) d'arête 4. On désigne par I et J les milieux respectifs de [BC] et [AD] et par G le centre de gravité du triangle DBC.

- 1) Montrer que le triangle DIA est isocèle .Calculer son périmètre.
- 2) Calculer $\cos(\widehat{IDA})$. En déduire, à l'aide de la calculatrice , une mesure de l'angle $\widehat{IDA}$ arrondi au degré.
- 3) a) Calculer $\sin \widehat{IDA}$ et en déduire IJ .
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Activité 28

Soit SABC un tétraèdre tel que $SA=12$ et $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$.

On pose $SB = x$ et $SC = y$

- 1) Déterminer x et y pour que le tétraèdre SABC soit régulier.
- 2) On suppose que x et y sont quelconques.
 - a) Montrer, en utilisant la formule d'El Kashi, que $AB^2 = x^2 - 12x + 144$ et $AC^2 = y^2 - 12y + 144$.
 - b) En déduire que le triangle ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si $x = y$ ou $x + y = 12$
- 3) a) Montrer que $BC^2 = x^2 + y^2 - xy$.
b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $xy - 12(x + y) + 288 = 0$
- 4) On suppose que le triangle ABC est rectangle en A et que $SB = 30$. Calculer SC.
- 5) On suppose que le triangle ABC est rectangle en B et que $SC = 2$.
 - a) Montrer que $x^2 - 7x + 12 = 0$.
 - b) En déduire les valeurs de SB pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en B.

Activité 29 tétraèdre trirectangle

1) Soit OAB un triangle rectangle en O et soit H le pied de la hauteur issue de du point O.

Montrer que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

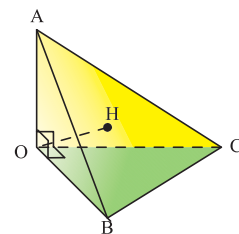
2) Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre trirectangle

(Les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles en O)

Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC)

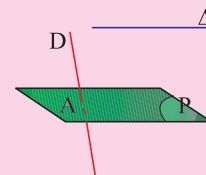
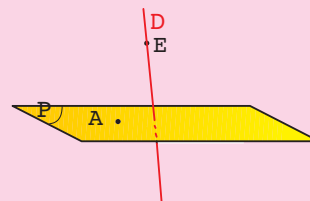
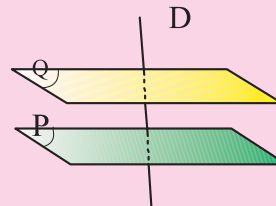
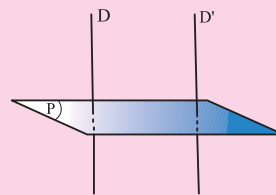
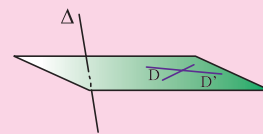
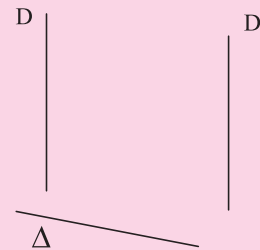
a) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC

b) En déduire que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$



Orthogonalité

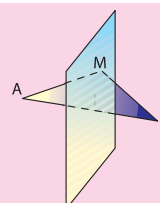
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ils sont parallèles.
- Par un point A de l'espace passe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.
- Par un point E de l'espace passe une seule droite perpendiculaire à un plan donné.



- Si deux droites sont orthogonales, alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

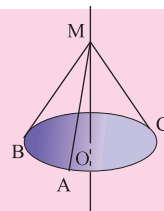
Plan médiateur d'un segment

L'ensemble des points équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment $[AB]$.



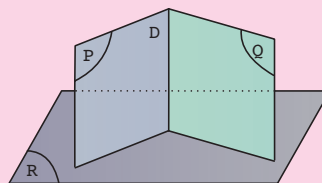
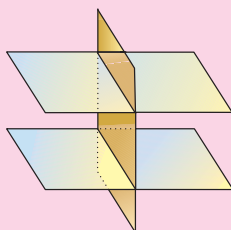
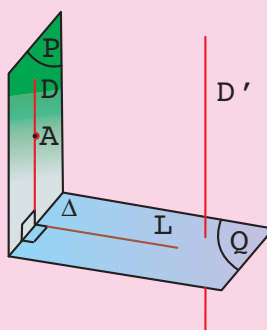
Axe d'un cercle

L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle.



Plans perpendiculaires

- Si deux plans P et Q sont perpendiculaires, alors toute droite D perpendiculaire à Q menée par un point A de P est contenue dans P .
- Si deux plans P et Q sont perpendiculaires suivant une droite D , alors toute droite L de P perpendiculaire à D , est perpendiculaire à Q .
- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite D' , perpendiculaire à l'un, est parallèle à l'autre.



- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si un plan est perpendiculaire à deux plans sécants alors il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

1 ABCDEFGH est un cube. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1) Montrer que (BH) est perpendiculaire au plan (AIC).

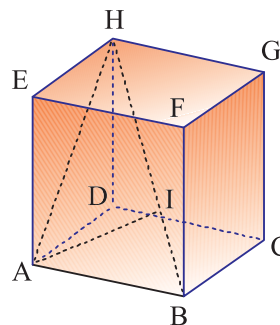
2) a) Montrer que $AI = \frac{AB \times AH}{BH}$

b) Dédurre la nature du triangle AIC.

3) On suppose que $AB = a$.

a) Calculer en fonction de a, AH, BH et AI.

b) Donner la mesure en radian de l'angle $\widehat{AIC}$.



Indications

1) Il s'agit de montrer que (BH) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (AIC).

2) Remarquer que CI est une hauteur du triangle CBH.

3) a) Faire intervenir des triangles rectangles.

b) Faire intervenir K le milieu de [AC] et déterminer $\sin(\widehat{AIK})$.

2 Section d'une sphère par un plan

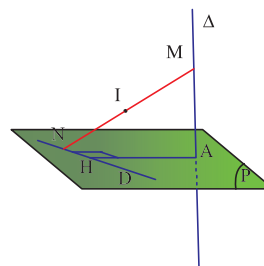
Dans la figure ci contre, D est une droite du plan P, Δ est perpendiculaire à P en A, H est le projeté orthogonal de A sur D.

M et N sont deux points respectivement de D et Δ , et I est le milieu de [MN].

1) Montrer que I appartient au plan médiateur de [AH].

2) On suppose que M et N varient et que $MN = 8$.

Montrer que I se déplace sur un cercle fixe.



Indications

1) Exploiter les triangles rectangles de la figure.

2) Penser à la section d'une sphère de centre A par un plan.

3 SABC est un tétraèdre régulier d'arête a. On note H le projeté orthogonale de S sur (ABC).

1) Calculer en fonction de a :

a) la hauteur SH.

b) l'aire du triangle ABC et l'aire totale du tétraèdre.

c) le volume du tétraèdre.

2) Un cube d'arête x a une aire égale à celle du tétraèdre, quel est le rapport des volumes du cube et du tétraèdre.

Indications

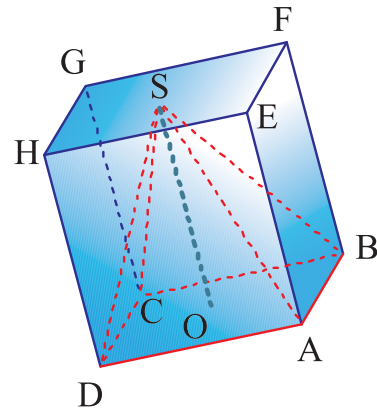
1) Que représente H pour le triangle ABC ?

2) Commencer d'abord par traduire mathématiquement le fait que le cube d'arête x, a une aire égale à celle du tétraèdre d'arête a puis déduire le rapport $\frac{a}{x}$.

1 Volume d'une pyramide

A l'aide d'un logiciel de géométrie de l'espace :

- Créer un cube ABCDEFGH de côté a .
- Créer un point libre S dans le plan (HEF).
- Créer la pyramide SABCD.
- Créer le volume V_p de SABCD et V_c le volume du cube.
- Créer le réel $r = \frac{V_c}{V_p}$.
- Afficher r
- Faire varier S dans le plan et observer r .
- Faire varier l'arête du cube et observer r .
- Conclure.



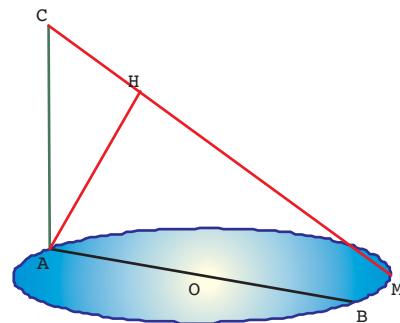
2 Problème de lieu

Soit ABC un triangle rectangle en A. P est le plan passant par A, et perpendiculaire à la droite (AC), $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB] contenue dans P. M est un point variable sur le cercle $\mathcal{C}$.

H est le projeté orthogonal de A sur (CM).

On se propose de trouver sur quel ligne varie H lorsque M varie sur $\mathcal{C}$.

- 1) En utilisant un logiciel de géométrie de l'espace,
 - a) Réaliser la figure ci contre.
 - b) Déplacer M et observer la trajectoire du point H.
 - c) Emettre une conjecture sur la nature du lieu de H.



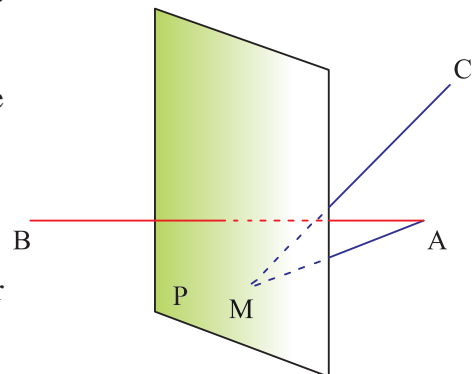
- 2) Démontrer la conjecture

3 Soient deux points distincts A et B. On désigne par P le plan médiateur du segment [AB].

Soit C un point de l'espace tel que le segment [AC] ne coupe pas P.

Déterminer le point M du plan tel que la distance $MA + MC$ soit minimal.

* A l'aide d'un logiciel de géométrie de l'espace réaliser la figure ci contre :



A et B sont deux points distincts fixés

- P est le plan médiateur du segment $[AB]$.
- C est un point fixé, situé de même côté que A par rapport au plan P.
- M est un point variable du plan P.
- Afficher la somme $MA + MB$.

* Déplacer le point M de façon à obtenir une valeur minimale de $MA + MB$, observer alors la disposition des points A, B, C et M.

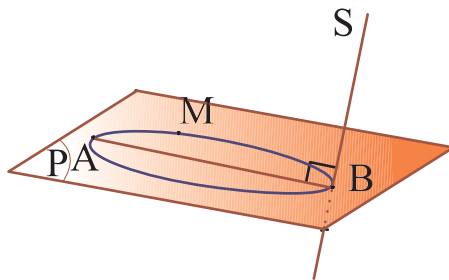
* Démontrer.

Appliquer

1 Soit $ABCD A'B'C'D'$ un cube, répondre par vrais ou faux

- La droite (DD') est orthogonale à la droite $(A'B')$.
- La droite (AB') est orthogonale à la droite (CD) .
- La droite (AB') est orthogonale à la droite (CD') .

2 Dans la figure ci-dessous M , A et B sont trois points du plan P tels que M soit un point du cercle de diamètre $[AB]$, distinct de A et de B . La droite (SB) est perpendiculaire au plan P .



- Montrer que les droites (SB) et (AM) sont orthogonales.
- Montrer que la droite (AM) est perpendiculaire au plan (SBM) .
- Déduire la nature du triangle AMS .

3 Soient ABC un triangle et S un point de la perpendiculaire Δ à (ABC) en A , distinct de A . On note I le milieu de $[SA]$.

P est le plan perpendiculaire à Δ en I .

- Justifier que les droites (SB) et (SC) percent le plan P en deux points qu'on note respectivement J et K .

2) Montrer que J et K sont les milieux respectifs de $[SB]$ et $[SC]$

4 Soient ABC un triangle isocèle en A , I le milieu du segment $[BC]$, Δ la perpendiculaire au plan (ABC) en A et D un point de Δ distinct de A .

Montrer que (ADI) est le plan médiateur de $[BC]$

5 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). On note M le milieu de $[CD]$.

- Déterminer le plan médiateur de $[CD]$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABM .

Montrer que (AH) est perpendiculaire au plan (BCD) .

6 Soit $SABCD$ une pyramide régulière (toutes les arêtes ont la même longueur) de sommet S et de base carré.

- Déterminer le plan médiateur de $[AC]$.
- Montrer que les droites (AC) et (SB) sont orthogonales.

7 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et H le projeté orthogonal de A sur (BCD) .

Montrer que H est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD .

8 Soient ABC un triangle contenu dans un plan P , I le milieu de $[BC]$, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et O le centre de $\mathcal{C}$. Soit Δ l'axe de $\mathcal{C}$ et D un point de Δ distinct de O .

- Montrer que (ODI) est le plan médiateur de $[BC]$.

2) Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ en B , M un point de T et N son symétrie par rapport à B .

Montrer que (OBD) est le plan médiateur de $[MN]$.

9 On considère un cercle C , d'un plan P , de centre O et de rayon R d'un plan P , une corde $[AB]$ de C tel que $AB = R\sqrt{2}$ et un point S de l'axe de C .

Soit I le milieu de $[AB]$.

1) Montrer que le plan (SOI) et (SAB) sont perpendiculaires.

2) Montrer que (SOA) et (SOB) sont perpendiculaires.

Maitriser

10 Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ sont orthogonales. Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) et K le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD) .

1) Démontrer que la droite (CD) est orthogonale aux plans (ABH) et (ABK) .

2) a) Justifier que les droites (AH) et (BK) sont coplanaires.

b) Le plan (ABH) coupe la droite (CD) en un point noté I . Que représentent les droites (BK) et (AH) pour le triangle ABI ?

11 Soit $ABCDEFGH$ un cube, $AB = 4$.

O est le centre du carré $EFGH$.

1) Prouver que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et $(HDBF)$.

2) a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle $HFBD$, placer O .

b) En calculant $\widehat{HDO}$ et $\widehat{DHB}$, prouver que (HB) et (OD) sont perpendiculaires.

3) a) Démontrer que (HD) est orthogonale à (EG) .

b) En déduire que (EG) est perpendiculaire au plan $(HFBD)$, et qu'elle est orthogonale à (HB) .

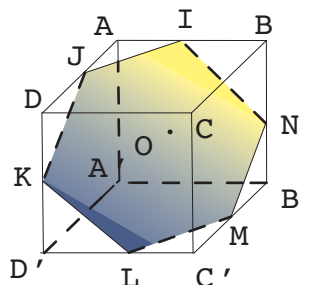
4) Démontrer que (HB) est perpendiculaire au plan (DEG) .

12 Dans la figure ci-dessous

$ABDA'B'C'D'$ est un cube de centre O et

d'arête a . Les points I, J, K, L, M

et N sont les respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[DD']$, $[C'D']$, $[B'C']$ et $[BB']$



1) Montrer que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires.

2) Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (BDD') .

3) En déduire que O appartient au plan (IJK) .

4) Montrer que le triangle OIJ est équilatéral.

5) Montrer que $IJKLMN$ est un hexagone régulier.

6) Montrer que les points I, J, K, L, M et N sont équidistants de A' .

7) Montrer que la droite $(A'O)$ est perpendiculaire au plan (IJK) .

8) Calculer en fonction de a le volume de la pyramide $A'IJKLMN$ de base l'hexagone $IJKLMN$.

13 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier tel que les triangles ABD et ABC sont rectangles en B et le triangle BCD est rectangle en D .

1) Montrer que (CD) est orthogonale à (AB) .

2) a) Montrer que les plans (ABD) et (ACD) sont perpendiculaires.

b) Déterminer la nature du triangle ADC .

3) Soit I et M les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a) Montrer que (IM) est l'axe du cercle inscrit au triangle BCD .

b) Soit K le symétrique de D par rapport à I et J le projeté orthogonal de I sur (BK) .

Quel est le plan médiateur de $[BK]$? Justifier.

Anamorphose

Une anamorphose est une déformation réversible d'une image à l'aide d'un système optique - tel un miroir courbe - ou un procédé mathématique.



Image virtuelle d'un quadrillage à l'aide d'un miroir cylindrique

Certains artistes ont produit des œuvres par ce procédé. Historiquement, l'anamorphose est l'une des applications des travaux de Piero della Francesca sur la perspective. En effet, c'est la rationalisation de la vision qui a conduit à systématiser les techniques de projection, dont les anamorphoses sont l'un des résultats. Les anamorphoses ont, dans les siècles qui suivirent, souvent été associées aux trompe-l'œil.

De nos jours, les utilisations artistiques des anamorphoses sont devenues beaucoup plus rares. En revanche, les anamorphoses ont des applications utilitaires, par exemple pour la signalisation routière peinte directement sur le sol, afin que les usagers de la route aient une vue non déformée d'une image ou d'un texte lorsqu'il se situe à une certaine distance.



A partir de cette vue la hauteur de la flèche et la hauteur du mot CAR semble les mêmes

Philippe Kent



En réalité la hauteur de la flèche est deux fois celle du mot CAR.

Robert Feneol

« Les statistiques c'est l'art de préciser les choses que l'on ignore »

A. THIERS

Pour démarrer

1 Une enquête statistique portant sur deux lycées d'une même ville a révélé les données suivantes :

Le lycée A compte 450 élèves dont 52% de filles.

Le lycée B compte 600 élèves dont 48% de filles.

1) A la lecture de ces données un élève prétend que si l'on réunit les élèves des deux lycées, on trouvera autant de filles que de garçons.

L'affirmation de cet élève est fausse. Expliquer pourquoi.

2) Que doit être le nombre de filles dans le lycée A pour que, en réunissant les élèves des deux établissements, on trouve autant de filles que de garçons ?

2 1) Quelle instruction devez-vous taper sur votre calculatrice pour obtenir au hasard :

Un entier dans l'intervalle $[0, 2[$? Un entier dans l'intervalle $[1, 10]$? Un entier dans l'intervalle $[0, 6]$? Un entier dans l'intervalle $[15, 28[$?

2) Simuler à l'aide de la fonction Random

a) 100 jets d'une pièce de monnaie et résumer les résultats dans un tableau.

Que peut-on conjecturer sur la fréquence d'apparition de chaque face ?

b) 1000 jets d'un dé cubique équilibré et dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Résumer les résultats dans un tableau.

Que peut-on conjecturer sur la fréquence d'apparition de chaque face ?

3 Le tableau suivant donne quelques indicateurs sur le 2ème cycle de l'enseignement de base et l'enseignement secondaire

Indicateur	1990 1991	1991 1992	1992 1993	1993 1994	1994 1995	1995 1996	1996 1997	1997 1998	1998 1999	1999 2000	2000 2001
Nombre d'élèves	496840	518522	567381	605935	662222	725926	789620	833372	874812	908248	962985
Nombre d'enseignants	24474	25445	26097	26817	27785	30170	33591	36528	39148	42377	45803
Nombre d'établissements	585	599	625	665	712	760	829	888	938	985	1019
Nombre de classes élèves	15214	15676	16586	17618	18830	20441	22409	23992	25381	27596	29212

1) Pour chaque année scolaire déterminer

a) le nombre moyen d'élèves par classe.

b) le nombre moyen d'enseignants par établissement.

2) Tracer la courbe d'évolution du nombre d'établissements de 1990/1991 à 2000/2001.

Séries statistiques - Représentation graphique

Activité 1 Séries chronologiques - Courbe d'évolution

Le tableau suivant donne la production annuelle des céréales en Tunisie (en milliers de tonnes) de 1990 à 2003.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Blé dur	897	1423	1323	1134	436	472	1706	723	1090	1144	706	935	371	1646
Blé tendre	225	363	261	279	66	59	312	162	263	253	136	183	52	337
Orge	477	721	570	478	145	80	834	160	303	408	241	233	90	914
Triticale	34	44	41	23	7	9	15	9	9	7	3	3	1	7
Ensemble	1633	2551	2195	1914	654	620	2867	1054	1665	1812	1086	1354	514	2904

- 1) Représenter à l'aide d'un diagramme circulaire la production, en 1990, des quatre types de céréales.
- 2) Représenter à l'aide d'un diagramme la production de triticale de 1997 à 2003.
- 3) a) Recopier et compléter le tableau suivant relatif à la production du blé dur.

Années	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002
Production	897	1323	436	1706	1090	706	371
Coefficient multiplicateur	1	1,47					0,41
Indice	100	147	49				41

(On arrondira le coefficient multiplicateur au centième).

b) Tracer la courbe d'évolution de la production du blé dur de 1994 à 2003 (on portera les années sur l'axe des abscisses et les coefficients multiplicateurs sur l'axe des ordonnées).

Définition

Une série chronologique est une série de valeurs provenant d'une même variable observée à des instants régulièrement espacés dans le temps.

Activité 2 Série discrète-Diagramme ; Série continue-Histogramme

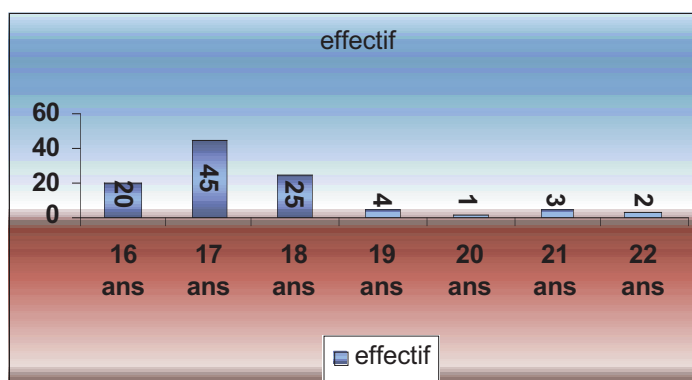
Le service de la médecine scolaire a mené une enquête auprès des 100 élèves internes d'un établissement scolaire portant sur l'âge, le poids, la taille et le groupe sanguin.

- Déterminer la population, l'échantillon et la taille de cet échantillon.
- Déterminer les caractères quantitatifs et le caractère qualitatif étudiés.

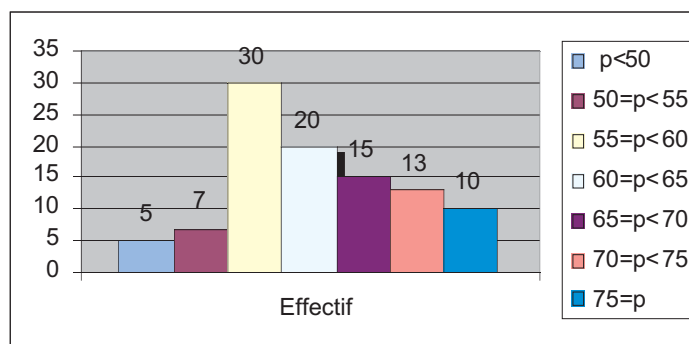
Activité 3

Les résultats de l'enquête précédente sont résumés dans les diagrammes et les histogrammes suivants :

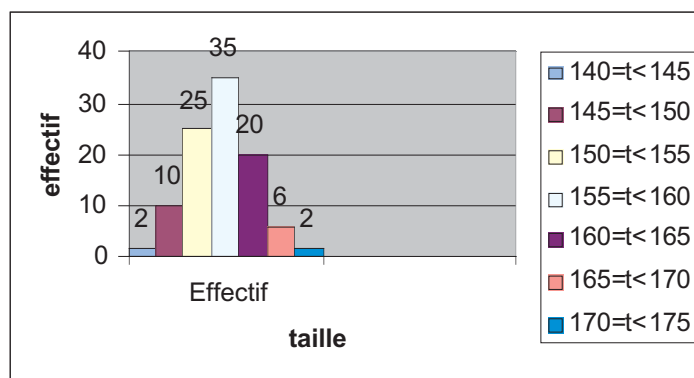
Diagramme de la répartition des élèves selon l'âge



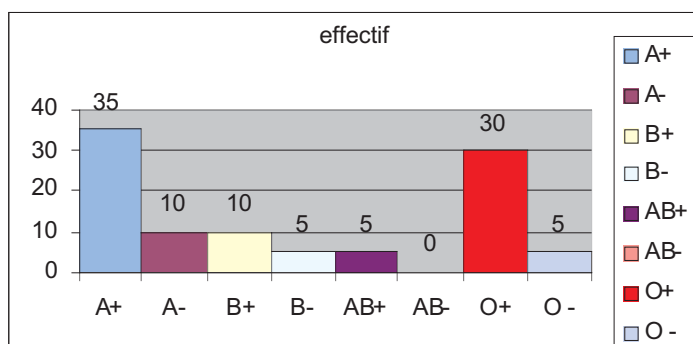
Histogramme de la répartition des élèves selon leurs poids



Histogramme de la répartition des élèves par tranche de taille



Répartition des élèves selon le Groupe sanguin



- 1) a) Quel est le pourcentage des élèves âgés de plus de 20 ans ?
b) Quel est le pourcentage des élèves ayant un phénotype rhésus plus ?
- 2) Pour la série continue des tailles,
a) Recopier et compléter le tableau suivant

Taille (t) en cm	140≤t<145	145≤t<150	150≤t<155	155≤t<160	160≤t<165	165≤t<170	170≤t<175
Effectif	2					6	
Effectifs cumules croissants							

- b) Tracer le polygone des effectifs.
- c) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.
- 3) Recopier et compléter le tableau suivant

Poids (p) en kg	$p < 50$	$50 \leq p < 55$	$55 \leq p < 60$	$60 \leq p < 65$	$65 \leq p < 70$	$70 \leq p < 75$	$75 \leq p$
Effectif	5					13	
Fréquences							

▶ Assimiler : 1-2

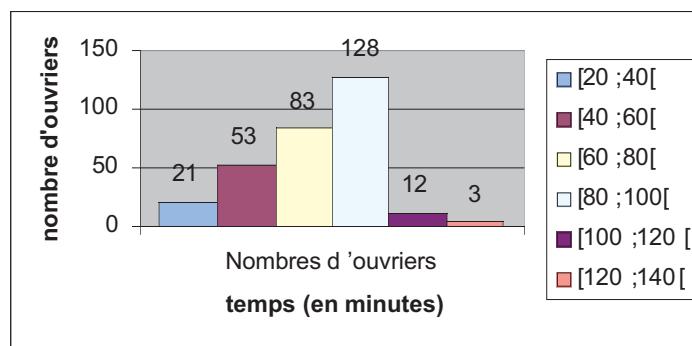
Paramètres de position d'une série statistique

Activité 4 Mode - Médiane

- 1) Pour chacune des séries définies dans l'activité 2, déterminer l'étendue, le mode ou la classe modale ou la modalité.
- 2) Pour cet échantillon d'élèves
 - a) Déterminer l'âge médian.
 - b) En utilisant la courbe des fréquences cumulées croissantes, Donner une valeur approchée de la taille médiane.

Activité 5

Une enquête est effectuée pour étudier le temps consacré au transport chaque jour par les 300 ouvriers d'une entreprise. Les résultats sont résumés dans l'histogramme ci-dessous.



On suppose que dans chaque classe les effectifs sont répartis d'une manière régulière.

- 1) a) Reproduire cet histogramme et construire le polygone des effectifs.
- b) Déterminer la classe modale.

2) Dans cette question, on se propose de donner une estimation de la médiane de la série, c'est-à-dire la valeur m telle que 150 ouvriers mettent un temps inférieur à m et 150 ouvriers mettent un temps supérieur à m .

a) Calculer la somme des effectifs des deux premières classes.

b) Justifier l'appartenance de m à l'intervalle $[60, 80[$.

3) a) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes. Donner graphiquement une estimation de la médiane m .

b) Justifier la relation $\frac{m - 60}{80 - 60} = \frac{150 - 74}{157 - 74}$.

En déduire m . (Cette méthode de calcul de m , est appelée méthode d'interpolation linéaire).

Activité 6 Quartiles - Diagrammes en boîte

Ci-dessous sont indiquées les notes obtenues, dans un même devoir, par deux groupes de 20 élèves.

Notes du 1^{er} Groupe

7 ; 7 ; 8 ; 11 ; 10 ; 7 ; 12 ; 14 ; 6 ; 8 ; 9 ; 9 ; 11 ; 7 ; 9 ; 13 ; 11 ; 10 ; 13 ; 8.

Notes du 2^{ème} groupe

6 ; 7 ; 11 ; 11 ; 17 ; 4 ; 10 ; 5 ; 2 ; 7 ; 4 ; 17 ; 8 ; 19 ; 5 ; 15 ; 5 ; 17 ; 6 ; 14.

1) Pour chaque groupe

a) Déterminer l'étendue de la série.

b) Résumer les données dans un tableau.

2) Construire sur un même dessin les diagrammes en bâtons représentant les notes de chaque groupe.

3) Pour le premier groupe

a) Calculer la médiane m_1 .

b) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note inférieure ou égale à 7 ?

c) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note inférieure ou égale à 11 ?

d) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note comprise entre 7 et 11 ?

e) Commenter la répartition des notes comprises entre 7 et 11 autour de la médiane m_1 .

4) Pour le deuxième groupe

a) Calculer la médiane m_2 .

b) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note inférieure ou égale à 5 ?

c) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note inférieure ou égale à 14 ?

d) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une note comprise entre 7 et 11 ?

e) Commenter la répartition des notes comprises entre 5 et 14 autour de la médiane m_2 .

Définition et détermination des quartiles

Les quartiles Q_1 , Q_2 et Q_3 d'une série la partagent en quatre parties.

Remarque

On convient que le deuxième quartile Q_2 est la médiane.

Cas d'une série discrète

Soit $(x_i ; n_i)$ une série statistique dont les valeurs x_i sont ordonnées par ordre croissant.

- Le premier quartile est le nombre noté Q_1 et qui égal à la plus petite valeur x_i telle qu'au moins 25% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égales à Q_1 .
- Le troisième quartile est le nombre noté Q_3 et qui égal à la plus petite valeur x_i telle qu'au moins 75% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égales à Q_3 .

Cas d'une série continue

Pour une telle série, comme la médiane, les quartiles peuvent être obtenues de deux façons :

1^{ère} façon : Au moyen d'une interpolation linéaire en utilisant le tableau des effectifs cumulés.

2^{ème} façon : En exploitant la courbe des fréquences cumulées

Les quartiles Q_1 et Q_3 sont les abscisses des points de la courbe des fréquences cumulées croissantes dont les ordonnées sont 0,25 et 0,75.

Vocabulaire

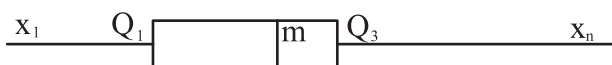
- L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est appelé l'intervalle interquartile.
- Le réel $Q_3 - Q_1$ est appelé l'écart interquartile.

Construction d'un diagramme en boîte

Un diagramme en boîte est un diagramme permettant de positionner les quartiles Q_1 et Q_3 et la médiane m au moyen d'un rectangle de largeur arbitraire et de longueur $Q_3 - Q_1$.

On représente une série par un diagramme en boîte de la manière suivante

- Sur un segment gradué on place
 - les valeurs extrêmes x_1 et x_n de la série ;
 - les quartiles Q_1 et Q_3 et la médiane m .
- On construit un rectangle dont la longueur est l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ et de largeur arbitraire.
- Un trait vertical à l'intérieur de ce rectangle correspondant à la médiane.



Activité 7

En revenant à l'activité précédente,

1) Recopier et compléter les tableaux suivants

Notes du 1^{er} groupe

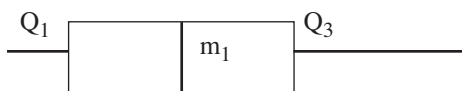
Note	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Effectif	1								1

Notes du 2^{ème} groupe

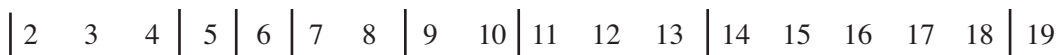
Note	2				7			11				19
Effectif	1				2			2				

2) Les notes de ces deux groupes d'élèves ont été représentées par les deux diagrammes en boîtes suivantes.

1^{er}
groupe



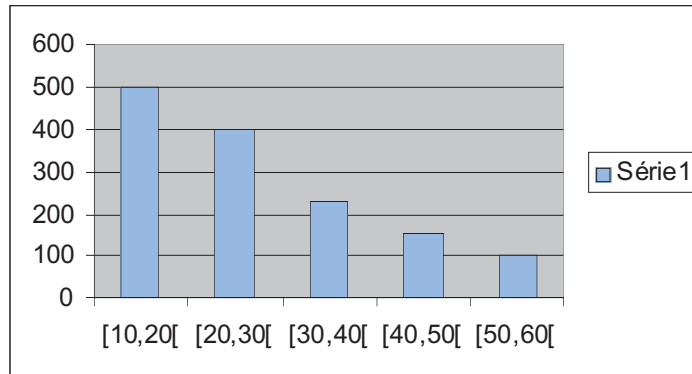
2^{ème}
groupe



- En calculant pour chaque série les quartiles et la médiane, expliquer cette représentation.
- Commenter, pour chaque série, la répartition des notes autour de la médiane.

Activité 8

On considère la série représentée par l'histogramme suivant.



1) a) Recopier et compléter le tableau suivant.

Classe	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif			225	150	
Fréquence					

b) Déterminer le tableau des effectifs cumulés croissants.

c) Déterminer la classe qui contient la médiane m .

d) Déterminer les classes qui contiennent les quartiles Q_1 et Q_3 .

2) On suppose que la répartition est uniforme à l'intérieur de chaque classe.

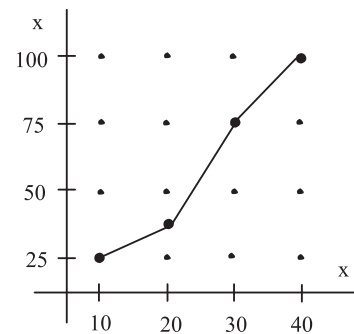
Donner, au moyen d'une interpolation linéaire, des valeurs approchées de m , Q_1 et Q_3 .

3) Construire le diagramme en boîte de la série.

Activité 9

La courbe suivante est le polygone des effectifs cumulés croissants d'une variable statistique continue.

Lire sur le graphique la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 .



Activité 10

Les séries suivantes donnent les précipitations moyennes mensuelles en millimètres dans deux villes A et B pendant 9 mois

Mois	Sep	Oct	Nov	Dec	Jan	Fev	Mars	Avril	Mai
Ville A	47	63	51	50	63	89	72	9	7
Ville B	33	28	41	34	33	37	34	20	10

- a) Construire le diagramme en boîte de chaque série.
b) Comparer les deux séries à l'aide de leurs diagrammes en boîtes.

▶▶▶▶▶ **Assimiler : 3-4**

Moyenne d'une série statistique

Activité 11

En testant 150 voitures pour étudier leur consommation d'essence (en litres) au 100 Km, on a obtenu les résultats suivants :

Consommation	[8 ; 9[	[9 ; 10[	[10 ; 11[	[11 ; 12[	[12 ; 13[
Effectifs	32	27	20	43	28

- a) Préciser la classe modale et donner une estimation de la médiane de cette série.
b) Donner l'arrondi à 10^{-1} près de la consommation moyenne d'une voiture.
c) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants.
d) En supposant que les valeurs sont uniformément réparties dans chaque classe, retrouver, par interpolation linéaire, une valeur approchée de la médiane.

Activité 12

Les tableaux suivants représentent les âges (en années) de deux groupes de 14 personnes chacun.

Groupe I

Age	2	4	5	7	10	11	34	35	50	58
Effectif	3	1	1	1	1	2	1	2	1	1

Groupe I

Age	18	19	20	45	46	47	48	50
Effectif	1	5	2	2	1	1	1	1

Calculer l'âge moyen de chaque groupe.

Est-il significatif ?

▶▶▶▶▶ **Assimiler : 5**

Activité 13 Propriété de la moyenne - Moyennes partielles

Voici les notes obtenues dans un devoir par les 35 élèves d'une classe de 2^{ème} sciences (20 filles et 15 garçons)

Notes des filles 12-10-10-6-8-13-11-8-6-8-10-10-10-4-7-15-14-9-12-8

Notes des garçons 8-11-11-9-15-14-13-10-10-9-7-6-15-14-14

- 1) Déterminer la moyenne $\bar{x}$ des notes de la classe.
- 2) a) Déterminer la moyenne $\bar{y}$ des notes obtenues par les filles.
b) Déterminer la moyenne $\bar{z}$ des notes obtenues par les garçons.
- 3) Comment peut-on retrouver $\bar{x}$ à partir de $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

Activité 14 Effet d'une application affine

- 1) De combien augmente la moyenne d'une classe dans un devoir si on ajoute 2 points pour chaque élève ?
- 2) Dans un devoir la moyenne d'une classe est de 14.

Quelle serait la moyenne de cette classe si on avait noté

- [illegible]

- 3) Les notes d'un élève dans six devoirs sont 8 ; 13 ; 12 ; 9 ; 14 et 10.

Pour calculer sa moyenne il a procédé de la manière suivante

$\frac{-2+3+2-1+4}{6} = 1$ et il en a déduit que sa moyenne est 11. Justifier sa procédure.

Activité 15

Le tableau suivant représente le nombre de kilomètres parcourus par une voiture par mois pendant douze mois.

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Km parcourus	1400	2600	1800	2300	2400	1600	2800	2900	2100	1500	2000	1200

Quel est le nombre moyen de kilomètres parcourus par cette voiture pendant un mois ?

Activité 16 Moyenne élaguée

Le tableau suivant donne les précipitations en millimètres enregistrées dans une même région pendant 10 jours consécutifs.

Précipitation	0	10	11	15	20	150
Nombre de jours	2	2	3	1	1	1

- a) Calculer la précipitation moyenne

b) En supprimant les deux valeurs extrêmes, calculer la précipitation moyenne des sept jours restants (cette moyenne est appelée moyenne élaguée).

Paramètres de dispersion d'une série statistique

Activité 17 Variance- Ecart type

Les séries suivantes donnent les températures, en degré Celsius, prises à la même heure pendant quatre jours dans deux villes A et B.

Jour		J ₁	J ₂	J ₃	J ₄
Température	Ville A	6	5	17	16
	Ville B	10	11	11	12

- 1) a) Calculer la température moyenne pour chaque ville
b) Pour la ville A, quelles erreurs commet-on si on remplace la température de chaque jour par la température moyenne ?

- 2) Pour tout réel x on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x-6)^2 + (x-5)^2 + (x-17)^2 + (x-16)^2}{4}.$$

- a) Développer et réduire $f(x)$.

- b) Pour quelle valeur de x , $f(x)$ est-il minimal? Déterminer dans ce cas $\sqrt{f(x)}$.

- 3) Pour tout réel x on considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{(x-10)^2 + 2(x-11)^2 + (x-12)^2}{4}.$$

- a) Développer et réduire $g(x)$.

- b) Pour quelle valeur de x , $g(x)$ est-il minimal? Déterminer dans ce cas $\sqrt{g(x)}$.

Activité 18

On considère la série statistique suivante.

Valeurs	x_1	x_2	x_3
Effectifs	n_1	n_2	n_3

On désigne par $n = n_1 + n_2 + n_3$ l'effectif total et par $\bar{x}$ la moyenne de cette série .

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{n_1(x-x_1)^2 + n_2(x-x_2)^2 + n_3(x-x_3)^2}{n}.$$

a) Montrer que $f(x) = \frac{nx^2 - 2n\bar{x}x + n_1(x_1)^2 + n_2(x_2)^2 + n_3(x_3)^2}{n}$.

b) Soit $V = \frac{n_1(x_1)^2 + n_2(x_2)^2 + n_3(x_3)^2}{n} - (\bar{x})^2$

c) Exprimer f en fonction de V.

d) Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un minimum ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

Définition

Soit (x_i, n_i) une série discrète définie par ses valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ et par les effectifs correspondants $n_1, n_2, \dots, n_p$.

- La variance de la série est le nombre noté V et défini par

$$V = \frac{n_1(x_1)^2 + n_2(x_2)^2 + \dots + n_p(x_p)^2}{n} - (\bar{x})^2; \text{ où } n \text{ est l'effectif total } (n = n_1 + n_2 + \dots + n_p).$$

- L'écart type de la série est le nombre noté σ et défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque

La variance et l'écart -type d'une série continue sont définies par les mêmes formules où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les centres des classes et $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont les effectifs respectifs de ces classes.

Activité 19 Effet d'une application affine

On a relevé les températures, en degré Celsius, enregistrées dans trois villes A, B et C pendant dix jours à la même heure.

Les résultats obtenus sont donnés par les tableaux suivants.

Ville A

Temperature	-1	0	1	2	5
Nombre de jours	1	3	4	1	1

Ville B

Temperature	0	1	2	3	6
Nombre de jours	1	3	4	1	1

Ville C

Temperature	-2	0	2	4	10
Nombre de jours	1	3	4	1	1

- 1) a) Calculer la température moyenne dans la ville A
b) En déduire les températures moyennes dans les villes B et C
- 2) Calculer, pour la série des températures de la ville A, la variance V et l'écart type σ
- 3) En déduire
 - a) La variance et l'écart type de la série des températures de la ville B.
 - b) La variance et l'écart type de la série des températures de la ville C.

Activité 20

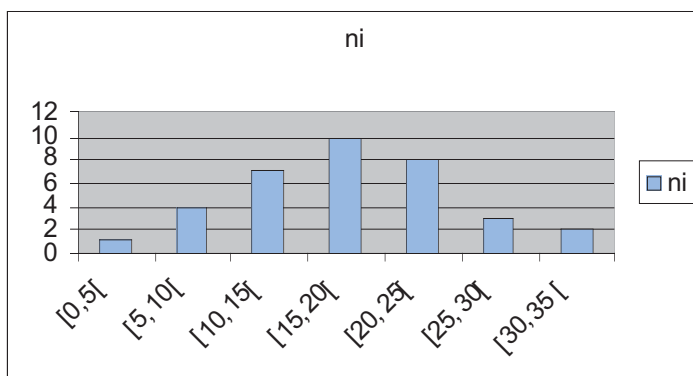
Le tableau suivant fournit les nombres d'apparition de PILE après 20 simulations de 100 lancers d'une pièce de monnaie.

46 48 51 62 45 47 57 59 49 53 56 44 49 50 41 58 47 56 53 46

- 1) Déterminer la moyenne $\bar{x}$ de la série.
- 2) a) Déterminer la variance V et l'écart-type σ .
b) Combien y-a-t-il de simulations dont le nombre d'apparitions de PILE appartient à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$?
c) Combien y-a-t-il de simulations dont le nombre d'apparitions de PILE appartient à l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$?

Activité 21

On considère la série suivante

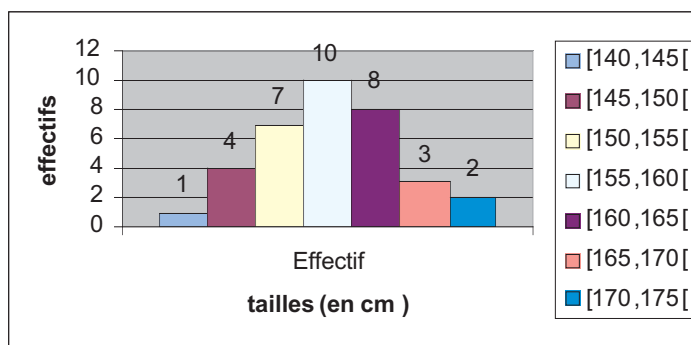


1) a) Recopier et compléter le tableau suivant

Centre des classes x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
2,5	1	2,5	
7,5	4		
12,5	7		$7 \times (12,5)^2 = 1093,75$
17,5	10		
22,5	8	$8 \times 22,5 = 180$	
27,5	3		
32,5	2		
Total	35	622,5	12818,75

b) Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ .

2) L'histogramme ci-dessous représente les tailles des élèves d'une classe de deuxième année.



a) Calculer, en utilisant les résultats de la 1^{ère} question, la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ .

b) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une taille comprise entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$?

Activité 22 La méthode du serpent–Harmonisation de jury

30 candidats admis à l'écrit et classés du 1^{ère} au 30^{ème} se présentent à l'oral. Leur répartition entre les trois jurys de l'oral est effectuée suivant la méthode suivante (parfois appelée « Méthode du serpent »)

Rang du candidat										
Jury 1	1	6	7	12	13	18	19	24	25	30
Jury 2	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
Jury 3	3	4	9	10	15	16	21	22	27	28

- 1) Calculer le rang moyen des candidates passant l'oral dans chaque jury
- 2) Calculer les écarts types correspondants.
- 3) Le tableau suivant indique les notes attribuées par chaque jury à ses candidats.

Notes des candidats										
Jury 1	13	17	4	5	15	16	5	8	5	12
Jury 2	10	15	7	6	10	11	8	5	6	7
Jury 3	14	17	17	3	19	5	2	8	19	6

- a) Pour chaque jury, calculer la moyenne des notes et l'écart-type arrondi à 0,1.
 - b) Regrouper les notes des trois jurys et déterminer les valeurs extrêmes, l'étendu, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 .
 - c) Calculer la moyenne des 30 candidats.
- 4) On désire harmoniser les notations entre les trois jury.
- Pour cela, on effectue une transformation des notes, de sorte que les trois jurys aient la même moyenne et le même écart – type.

a) Soit (x_i) les notes attribuées par le Jury1. On pose $y_i = a x_i + b$ où a et b sont des réels avec $a > 0$. Déterminer a et b pour que la série (y_i) ait une moyenne égale à 10 et un écart type égal à 3.

Quelles sont les nouvelles notes du jury1, arrondies à 0.5 ?

b) Transformer de façon analogue les notes du jury 2 puis celle du jury 3 pour obtenir une moyenne égale à 10 et un écart type égal à 3

- 5) On étudie maintenant la série obtenue en regroupant les 30 notes transformées des 3 jurys
- Quelle est la moyenne de cette série
 - Déterminer les valeurs extrêmes, l'étendu, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3
 - Construire le diagramme en boîte de cette série et celui de la série d'origine
 - Comparer les deux séries

 **Assimiler : 6**

Effet de structure

Activité 23

Voici les résultats au baccalauréat d'un lycée en 2004 puis en 2005.

	2004		2005	
	Présentés	Admis	Présentés	Admis
Non redoublants	220	120	150	80
Redoublants	30	30	100	90
Total	250	150	250	170

Le directeur du lycée : « l'année 2005 marque une progression de 13% dans la réussite au bac: je félicite les profs du lycée »

Un professeur de terminale « je vous remercie monsieur le directeur, mais le taux de réussite n'a progressé que de 8% »

Un élève du lycée : « Qu'on soit redoublant ou pas, les résultats de 2004 sont meilleurs que ceux de 2005 »

Un redoublant « En tout cas, dans ce lycée en redoublant les chances de réussir ont diminué de 10% ».

Qui a raison, le directeur ? Le professeur ? L'élève? Le redoublant ?

(On pourra calculer : le taux de réussite en 2004 puis en 2005 ; le taux de réussite des non redoublants en 2004 puis en 2005 ; le taux de réussite des redoublants en 2004 puis en 2005).

Activité 24

Pour tester l'efficacité d'un médicament et comparer notamment les taux de guérison chez l'homme et chez la femme, on a procédé à deux expérimentations en zone rurale et en zone urbaine ; celles-ci ont conduit aux résultats suivants :

Zone rurale

	Hommes	Femmes	Total
Effectif	3500	1500	5000
Guérisons	1500	500	2000
% de guérisons	42,86 %	33,33 %	40 %

Zone urbaine

	Hommes	Femmes	Total
Effectif	3000	5500	8500
Guérisons	2000	3500	5500
% de guérisons	66,67 %	63,64 %	64,71 %

- 1) L'affirmation « le médicament est légèrement plus efficace chez les hommes que chez les femmes » ne paraît-elle pas légitime ?
- 2) Reproduire et compléter le tableau suivant où sont regroupées toutes les données.

	Hommes	Femmes	Total
Effectif	6000		
Guérisons			
% de guérisons			

Quelle est votre conclusion ?

Simulation - Fluctuation d'échantillonnage

Activité 25 La loi de Benford

1) Chaque élève de la classe simule avec sa calculatrice 30 tirages d'un chiffre compris entre 1 et 9 et résume les résultats dans ce tableau.

Chiffres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'apparition									

2) Pour chaque rangée on résume les résultats obtenus par tous les élèves de cette rangée dans un tableau identique au tableau suivant (on aura ainsi autant de tableaux que de rangées).

Chiffres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'apparition									
Fréquence d'apparition									

- 3) a) On résume les résultats obtenus par tous les élèves de la classe dans un tableau identique au précédent
 b) Comparer votre tableau à celui de Frank Benford qui donne les fréquences théoriques d'apparition des chiffres significatifs.

Tableau de Frank Benford.

Chiffres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence	0,301	0,176	0,124	0,097	0,079	0,068	0,057	0,053	0,045

Activité 26

- 1) Simuler avec la touche RANDOM de votre calculatrice 20 lancers d'une pièce de monnaie ordinaire et indiquer la fréquence d'apparition de la face « PILE »
 2) Recommencer 3 fois la simulation précédente et noter à chaque fois la fréquence d'apparition de « PILE »
 Quelle est l'étendue de la série des 4 fréquences de « PILE » obtenues ?

Activité 27

1) Simuler 20 lancers de deux dés ordinaires dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et compter le nombre de réalisation de chacun des événements suivants.

A : « la somme des chiffres est 10 »

B : « les deux chiffres sont de même parité »

C : « la somme des chiffres est un multiple de 5 »

2) Calculer la fréquence de chacun de ces événements.

3) Recommencer la même simulation et répondre aux mêmes questions.

Obtenez-vous les mêmes résultats ?

1 Le tableau suivant donne le pourcentage (arrondi à l'unité) de réussite au baccalauréat, pour un établissement donné, de 1996 à 2005.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Pourcentage	35	38	32	45	52	40	55	58	53	52

Représenter cette série chronologique dans un repère.

2 Le tableau ci-dessous, donne quelques indicateurs sur l'enseignement supérieur de l'année universitaire 1993/1994 à l'année 2002/2003.

Indicateur	1993 1994	1994 1995	1995 1996	1996 1997	1997 1998	1998 1999	1999 2000	2000 2001	2001 2002	2002 2003	2003 2004
Nombre d'université	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
Nombre d'établissements	85	83	89	89	90	91	95	107	121	141	
Effectif global d'étudiants	96101	102682	112634	121787	137024	155120	180044	207388	226102	262502	
Part des filles (%)	42.2	43.1	43.7	44.6	45.9	48.3	50.4	51.9	53.9	55.1	

- 1) Déterminer, pour chaque année universitaire,
 - a) le nombre d'étudiants (Garçons) de 1993/94 à 2002/2003.
 - b) le nombre d'étudiantes de 1993/94 à 2002/2003.
 - 2) Représenter par une courbe l'évolution de 1993/94 à 2002/2003.
 - a) du nombre d'étudiants (Garçons).
 - b) du nombre d'étudiantes
- (On prendra comme unités 1 cm pour 1000 étudiants).

3 Les notes d'une classe de 32 élèves (15 filles et 17 garçons) dans un devoir sont résumées dans le tableau suivant

Notes	2	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	20
Filles	0	0	0	1	2	3	3	3	2	1	0	0	0
Garçons	1	2	1	2	0	1	3	1	0	2	1	1	1

- Représenter, dans le même repère, les deux séries de notes par des diagrammes en bâtons
- Pour chaque série déterminer le mode, la médiane et l'étendue.
- Commenter ces résultats.

4 Le tableau suivant donne la répartition des montants en dinars des salaires mensuels des employés d'une entreprise.

Salaires	$200 \leq s < 250$	$250 \leq s < 300$	$300 \leq s < 350$	$350 \leq s < 400$	$400 \leq s < 450$	$450 \leq s < 500$	$500 \leq s < 550$	$550 \leq s < 600$
Effectif	23	36	45	69	128	112	117	24

- Déterminer le tableau des effectifs cumulés croissants.
 - Déterminer la classe qui contient la médiane m .
 - Déterminer les classes qui contiennent les quartiles Q_1 et Q_3 .
- On suppose que la répartition est uniforme à l'intérieur de chaque classe.
Donner des valeurs approchées de m , Q_1 et Q_3 .
- Construire le diagramme en boîte de la série.

5 Une étude sociale auprès de 100 élèves d'un établissement scolaire et portant sur le nombre de frères et sœurs, la profession du père et la distance du domicile au lycée a donné les résultats suivants.

Tableau 1

Nombre de frères et sœurs	1	2	3	4	5
Effectifs	5	8	21	54	12

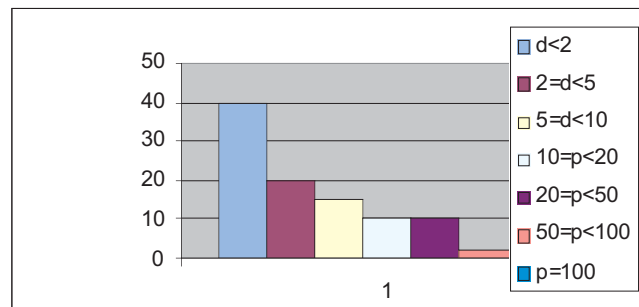
Tableau 2

Distance (d) du domicile au lycée en Km	$d < 2$	$2 \leq d < 5$	$5 \leq d < 10$	$10 \leq p < 20$	$20 \leq p < 50$	$50 \leq p < 100$	$p \geq 100$
Effectifs	40	20	15	10	10	2	3

Tableau 3

Profession du pere	Ouvrier	Ouvrier à l'étranger	Cadre moyen	cadre supérieur	autres
Effectifs	25	15	35	15	10

- 1) Un élève a représenté les distances du domicile au lycée par l'histogramme suivant.
Trouver les erreurs et tracer l'histogramme de cette série.



- 2) Déterminer la distance moyenne d'un domicile au lycée
3) Déterminer le nombre moyen de frères et sœurs par élève .
4) Représenter la répartition des élèves selon la profession du père par un diagramme circulaire

6 Calculer la moyenne et l'écart type de chacune des séries suivantes

Valeur	-2	0	1	2	3
Effectif	1	4	2	3	1

Classe effectif	$[-1 ; 1[$	$[1 ; 3[$	$[3 ; 5[$	$[5 ; 7[$
Effectif	1	0	3	2

Propriétés de la moyenne

1) Moyennes partielles

Si une série est partagée en deux séries d'effectifs p et q et de moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ alors la moyenne de la série totale est $\bar{z} = \frac{p\bar{x} + q\bar{y}}{p + q}$.

2) Effet d'une application affine

Soit (x_i, n_i) une série et soit $\bar{x}$ sa moyenne

- Si on ajoute un nombre réel b à toutes les valeurs de cette série alors la moyenne de la nouvelle série $(x_i + b, n_i)$ est $\bar{x} + b$

- Si on multiplie toutes les valeurs de cette série par un même nombre réel non nul a alors la moyenne de la nouvelle série (ax_i, n_i) est $a\bar{x}$

- Plus généralement, soit a et b deux nombres réels.

Si $\bar{x}$ est la moyenne de la série (x_i, n_i) alors $a\bar{x} + b$ est la moyenne de la série $(ax_i + b, n_i)$

Variance et écart type

Cas d'une série discrète

Soit (x_i, n_i) une série discrète définie par toutes ses valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ et par les effectifs correspondants $n_1, n_2, \dots, n_p$

- La variance de la série est le nombre noté V et défini par

$$V = \frac{n_1(x_1)^2 + n_2(x_2)^2 + \dots + n_p(x_p)^2}{n} - (\bar{x})^2; \text{ où } n \text{ est l'effectif total } (n = n_1 + n_2 + \dots + n_p)$$

- L'écart type de la série est le nombre noté σ et défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

Cas d'une série continue

La variance et l'écart - type d'une série continue sont définies par les mêmes formules où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les centres des classes et $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont les effectifs respectifs de ces classes.

Effet d'une application affine

Soit (x_i, n_i) une série et σ son écart type. Soit a et b deux nombres réels.

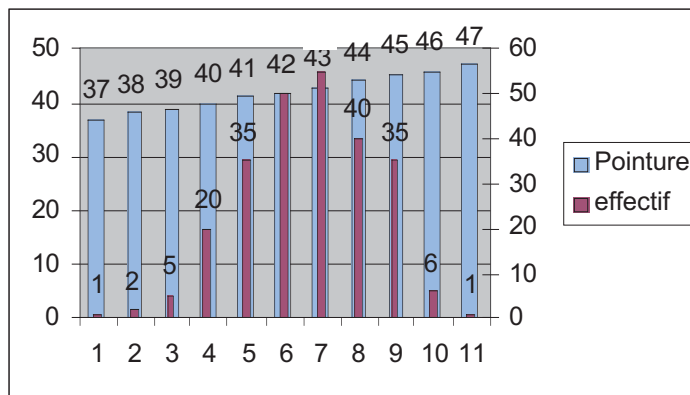
L'écart type de la série (ax_i, n_i) est $|a|\sigma$

L'écart type de la série $(x_i + b, n_i)$ est σ

1 Le fabricant de chaussures

Pour avoir une idée sur les pointures fréquentes et celles qui sont rares et pour organiser sa production, un fabricant de chaussures pour hommes fait un sondage, sur 250 hommes adultes choisis au hasard.

Les résultats de ce sondage sont indiqués dans le tableau suivant



- 1) a) Déterminer le mode la médiane et la moyenne de cette série .
 b) Parmi ces paramètres, quels sont ceux qui sont significatifs pour ce fabricant ?
 c) Quel pourcentage de l'échantillon représentent les personnes interrogées qui ont une pointure comprise entre 41 et 43 ?
- 2) Pour ne pas investir dans la fabrication de pointures très rares il décide de ne fabriquer que les chaussures dont la demande dépasse 95% .
 S'il se base sur les résultats de ce sondage, quelles pointures seront fabriquées? Quel est le pourcentage des clients potentiels qui ne trouveront pas chaussures à leurs pieds?

Indication

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant

Pointure	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Effectif						50					

- 2) Déterminer la fréquence de chaque pointure

2 La population du monde arabe

Le tableau suivant indique la population (en millions d'habitants) et la densité (nombre d'habitant par km²) de quelques pays arabes

PAYS	Bahrein	Emirates	Egypte	Jordanie	Koweït	Liban	Algerie	Oman	Qatar	Tunisie	Yemen
Population	0,7	2,8	70	4,7	2,1	4,1	29,1	2,5	0,5	9,94	16,4
Densité	700	33	67	48	117	410	12	11,7	45	64	31

Etude de la série des populations

- 1) Calculer la moyenne, l'étendue et la médiane de la série
- 2) a) Quels sont les pays dont la population est la plus voisine de la médiane ?
b) Quels sont les pays dont la population est la plus voisine de la moyenne?
- 3) on considère la série des populations des pays précédents sauf le Bahrein , le Qatar l'Egypte et l'Algérie .

Calculer la moyenne, l'étendue et la médiane de cette série.

Etude de la série des densités

- 1) Calculer la moyenne, l'étendue et la médiane de la série.
- 2) a) Calculer la population totale de ces pays.
b) Calculer la superficie totale de ces pays.
c) En déduire la densité de l'ensemble de ces pays.
d) Cette densité est-elle égale à la moyenne des densités ? Expliquer pourquoi.

- 3) On considère la série des densités des pays précédents sauf le Bahrein

Calculer la moyenne, l'étendue et la médiane de cette série.

3 Durée de vie d'une ampoule

On a testé la durée de vie de 100 ampoules de type A et de 75 ampoules de type B.

On a obtenu les résultats suivants donnant, en fonction de la durée d'utilisation (en heures), le nombre d'ampoules encore en état de marche.

Durée (en h)		400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
Effectif	Type A	99	95	92	88	85	80	70	65	52	48	33	17	11
	Type B	72	71	68	60	58	52	47	43	40	35	30	20	15

1) Construire les diagrammes en boîtes représentant la durée de vie de ces échantillons d'ampoules.

Commenter ces deux diagrammes

2) a) Quelle est la durée de vie moyenne m d'une ampoule du type A ?

Quelle est la durée de vie moyenne m' d'une ampoule du type B ?

3) Pour la série relative à la durée de vie des ampoules du type A déterminer

a) l'écart type σ

b) le nombre d'ampoules dont la durée de vie appartient à l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma[$

4) Pour la série relative à la durée de vie des ampoules du type B déterminer

a) l'écart type σ'

b) le nombre d'ampoules dont la durée de vie appartient à l'intervalle $[m' - \sigma', m' + \sigma'[$

4 Attention radar

Les agents de la garde de la circulation décident de chronométrer discrètement les vitesses des voitures passant sur une portion de la route où la vitesse est limitée à 70 km/h.

Voici les vitesses recueillies pour les 50 premières voitures.

70	45	58	82	66	60	77	68	65	75
40	55	74	51	72	44	85	53	77	61
95	59	85	75	66	78	94	80	60	54
55	45	95	82	51	75	66	72	53	98
45	50	65	75	85	92	60	75	65	95

- 1) a) Etablir un tableau d'effectifs par classe d'amplitude 10 ($[40, 50[$; $[50, 60[$...)
b) Construire un histogramme représentant ce tableau
- 1) Quel est le pourcentage des voitures en excès de vitesse ?
- 2) Calculer la vitesse moyenne
 - a) A partir des données initiales
 - b) A partir du tableau de la question 1) a
 - c) Comparer et commenter les résultats obtenus .

Stratégie de résolution.

- 2) On peut penser au tableau des fréquences cumulées
- 3) c) Est il normal que les résultats soient différents ? Quel est le plus exact ? Quel est le plus rapide à calculer ?

Utiliser un tableur pour calculer la moyenne, la variance, les quartiles et la médiane d'une série statistique

Les données sont celles de l'activité 13 de la rubrique « explorer ».

- Ouvrir une feuille de calcul (sur Excel, par exemple).
- Taper les notes des 35 élèves (une note par cellule).
- Sélectionner la zone où sont écrites les données. Utiliser le menu (Insertion/Nom/Définir) pour nommer cette série (exemple devoir).

12	10	10	6	8	13	11
8	6	8	10	10	10	4
7	15	14	9	12	8	8
11	11	9	15	14	13	10
10	9	7	6	15	14	14

Moyenne	10,0714286
Mode	10
Premier quartile	8
Médiane	10
Troisième quartile	12

Variance	7,77248677
Ecart type	2,787918

- Pour calculer la moyenne, taper la formule
= MOYENNE (devoir)
- Pour calculer le mode, taper la formule
= MODE (devoir)
- Pour calculer les quartiles, taper la formule
= QUARTILE (devoir ; 1) donne le premier quartile.
= QUARTILE (devoir ; 2) donne la médiane.
= QUARTILE (devoir ; 3) donne le troisième quartile.
- Pour calculer la variance, taper la formule
= VAR (devoir)
- Pour calculer l'écart type, taper la formule
= ECARTYPE (devoir)

Appliquer

1 Pour chacune des deux séries suivantes, Calculer le (ou les) mode (s) ; la médiane et la moyenne.

Valeur	5	6	8	10	11	14	15
Effectifs	2	1	7	12	15	11	1

Valeur	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	10	5	15	8	7	5	9	15	11

2 Dans une classe de 36 élèves on trouve la répartition suivante du nombre d'enfants par famille

Nombre d'enfants	2	3	4	5	6
Nombre de familles	12	15	5	2	2

- Représenter cette série par un diagramme en bâtons
- Déterminer le mode et la médiane de cette série.

3 Ci-dessous la répartition des moyennes trimestrielles en mathématiques, d'une classe de 20 élèves.

Note	[6,8[	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[
Pourcentage	20%	15%	30%	20%	15%

- Représenter cette série par un diagramme circulaire.
- Calculer les effectifs correspondants à chaque classe et préciser la classe modale
- Donner le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes
 - Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes .
 - Donner une valeur approchée de la

médiane

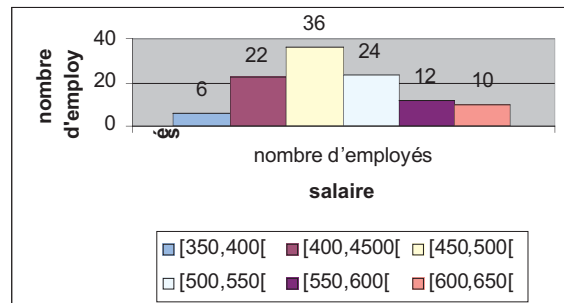
4) Voici les données détaillées de ces moyennes(arrondies au dixième)

8,3 ; 6,6 ; 8,8 ; 11,4 ; 12,1 ; 13,2 ; 11,8 ; 14 ; 15,9 ; 9,1 ; 10,4 ; 10,5 ; 6,8 ; 7,2 ; 11 ; 10,8 ; 12,5 ; 15,4 ; 7,3 ; 13

- Calculer la moyenne de la classe et la note médiane.
- Comparer avec les résultats obtenus précédemment.

Maîtriser

4 Une étude statistique portant sur les salaires mensuels, en dinars, des employés d'une entreprise a donné l'histogramme suivant



- Dresser le tableau des effectifs
- Calculer le salaire moyen
- Déterminer le salaire médian.

5 Dans un groupe de 60 personnes la moyenne d'âge est de 22 ans pour les femmes et de 28 ans pour les hommes. Sachant qu'il y a 60% d'hommes dans ce groupe, quelle est la moyenne d'âge du groupe ?

6 Le tableau ci dessous indique les ventes mensuelles de postes de télévision par un magasin durant 6 mois.

Mois	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Jun
Nombre de TV vendus	15	20	18	17	22	15

Calculer la moyenne et l'écart type des ventes mensuelles .

7 Le tableau suivant indique les revenus pétroliers (en millions de dollars) de l'Algérie et de la Libye de 1990 à 1999

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Algérie	10497	9600	7885	6902	6335	6938	9164	8800	5691	7556
Libye	11500	10000	9326	7689	7170	7763	9543	8905	5612	7734

1) Pour chaque pays

- Calculer le coefficient multiplicateur, arrondi au centième près, qui permet de passer de l'année 1990 à l'année 1991. En déduire l'indice de l'année 1991 par rapport à l'année de base 1990

b) Recopier et compléter le tableau suivant

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Coefficient multiplicateur	1									
Indice	100									

2) Tracer dans un même repère la courbe d'évolution des revenus pétroliers de 1990 à 1991

(les points de cette courbe sont les points d'abscisse l'année et d'ordonnée l'indice par rapport à l'année 1990)

8 Le tableau ci-dessous donne la production de pétrole, en millions de tonnes, des pays de l'OPEP de 1987 à 1997

Année	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Production	944	1065	1137	1232	1231	1297	1322	1333	1368	1408	1423
Coefficient multiplicateur	1										
Indice	100										

- Calculer le coefficient multiplicateur, arrondi au centième près, qui permet de passer de l'année 1987 à l'année 1988. En déduire l'indice de l'année 1988 par rapport à l'année de base 1987
- Recopier et compléter le tableau précédent

2) Représenter cette production par un diagramme

3) Tracer la courbe d'évolution de la production de 1987 à 1997 (les points de cette courbe sont les points d'abscisse l'année et d'ordonnée l'indice par rapport à l'année 1987)

9 Les loyers mensuels des appartements d'un ensemble d'immeubles sont répartis comme suit

Catégorie	Studio	1 + S	2 + S	3 + S
Nombre	5	10	30	10
Loyer (en dinars)	100	120	150	200

- Quel est le loyer moyen ?
- Quel serait le loyer moyen si
 - les loyers augmentent de 10 dinars ?
 - les loyers augmentent de 5%

10 a) Dans la classe 2^{ème} sciences I il y a 24 garçons et 12 filles. La moyenne d'âge des garçons est 17 ans 8 mois, celle des filles est 17 ans 2 mois.

Quelle est l'âge moyen des élèves de cette classe ?

b) Dans la classe 2^{ème} sciences II il y a 35 élèves. L'âge moyen des filles est 17 ans 2 mois, celui des garçons est 17 ans 7 mois, et la moyenne d'âge de la classe est 17 ans 4 mois

Combien y a-t-il de filles et de garçons dans cette classe ?

11 Les séries suivantes représentent les notes obtenues, dans un même devoir, par trois classes de 2^{ème} année sciences

Note		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif	2 ^{SC} ₁	3	4	1	2	0	0	5	1	0	0	4	4	3	1	2
	2 ^{SC} ₂	2	1	2	2	1	2	5	3	2	1	1	3	1	2	2
	2 ^{SC} ₃	1	0	0	1	3	4	6	2	5	3	2	0	2	0	1

- Déterminer pour chaque série
 - le mode, la médiane
 - le premier quartile, le troisième quartile et l'écart interquartile.
- Faire les diagrammes en boîte de chaque série et commenter les résultats en utilisant ces diagrammes
- Calculer pour chaque série
 - la moyenne m et l'écart type σ
 - le pourcentage d'élèves ayant une note dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

12 Pour comparer l'efficacité de deux régimes amaigrissants A et B on a enquêté auprès de 100 personnes qui suivent le régime A et 100 personnes qui suivent le régime B

Perte de poids en kg	[0,2[	[2,4[	[4,6[	[6,8[	[8,10[	[10,12[
Régime A	11	18	30	29	10	2
Régime B	34	20	15	14	12	5

- Calculer la valeur moyenne et l'écart type pour chaque série
- Comparer ces deux régimes

13 Les notes obtenues par une même classe dans un devoir de mathématiques et dans un devoir de physique sont les suivantes

Notes de mathématiques

9, 12, 10, 10, 10, 12, 13, 9, 8, 12, 10, 10, 11, 11, 10, 10, 12, 9, 11, 8, 10,

11, 8, 14, 9, 7, 10, 12, 9, 10, 8, 9, 10

Notes de physique

11, 12, 4, 8, 15, 5, 16, 5, 8, 5, 10, 12, 16, 15, 9, 9 ; 9, 12, 12, 11, 10, 8, 5,

13, 18, 7, 13, 8, 13, 9, 10, 8, 9

Calculer , pour chaque matière ,

- La moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ
- Le pourcentage d'élèves ayant une note appartenant à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$?
- Tracer les diagrammes en boîtes de chaque série de notes et comparer les notes de cette classe dans ces deux matières.

Les pièges de la moyennes

- *La justice est sauve*. Un avocat célèbre avoue en privé que sa gloire lui fait gagner des procès qu'il devrait perdre. Mais , ajoute-t-il , en début de carrière , il avait perdu bien des procès qu'il aurait dû gagner. Et de conclure : « En moyenne , la justice est sauve »

- *La balance truquée*. Un marchand dispose d'une balance dont les deux bras n'ont pas tout à fait la même longueur, de sorte que les masses marquées placées dans l'un des plateaux équilibrent une masse différente placée dans l'autre plateau.

- Pour effectuer une pesée, il décide de faire deux mesures successives , une en plaçant les masses marquées à gauche : il trouve 900 grammes .L'autre en plaçant les masses marquées à droite , il trouve 961grammes .Il annonce alors la masse exacte 930,5 grammes , la moyenne des deux résultats .

Vrai ou faux?

Source : la statistique du quotidien J.L.boursin

- La langue de bois. Cent bucherons partirent un jour vers la forêt accompagnés par deux femmes chargées de l'intendance. Avant la fin de l'hiver, deux des hommes épousèrent les deux femmes. Un statisticien à qui l'histoire était racontée résuma ainsi l'anecdote : 2% des hommes ont épousé 100% des femmes

F.Casiro tangente No 77

Cible .Trois statisticiens partent à la chasse au gros gibier munis d'arcs et de flèches. A la vue d'un cerf, deux d'entre eux se mettent en position de tir. La flèche du premier passe trois mètres à droite de l'animal ,celle du second passe trois mètres à gauche. Fou de joie le troisième statisticien se met à sauter sur place en hurlant : « On l'a eu , on l'a eu ... »

B.Rittaud et F.Casiro tangente No 77

