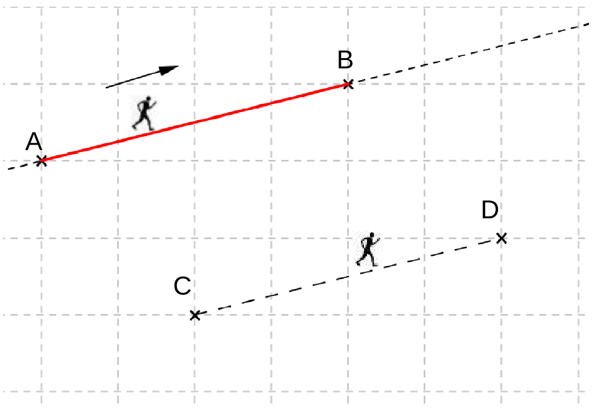
Vecteurs

I) Vecteurs et translation :

a) notion de translation :



Pour aller de A à B, le marcheur se déplace :

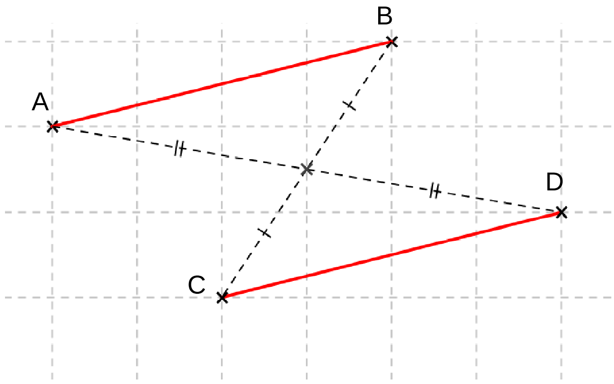
- dans le **sens** indiqué par la flèche
- sur une **longueur** correspondant à celle de [AB]
- dans la **direction** indiquée par celle de la droite (en pointillés)

Le point B est obtenu par une translation du point A.
En utilisant la même translation, on transforme C en D.

définition : Soient A et B deux points du plan.
La **translation** qui transforme **A en B** associe **à C l'unique point D** tels que les segments **[AD] et [BC] ont le même milieu**.

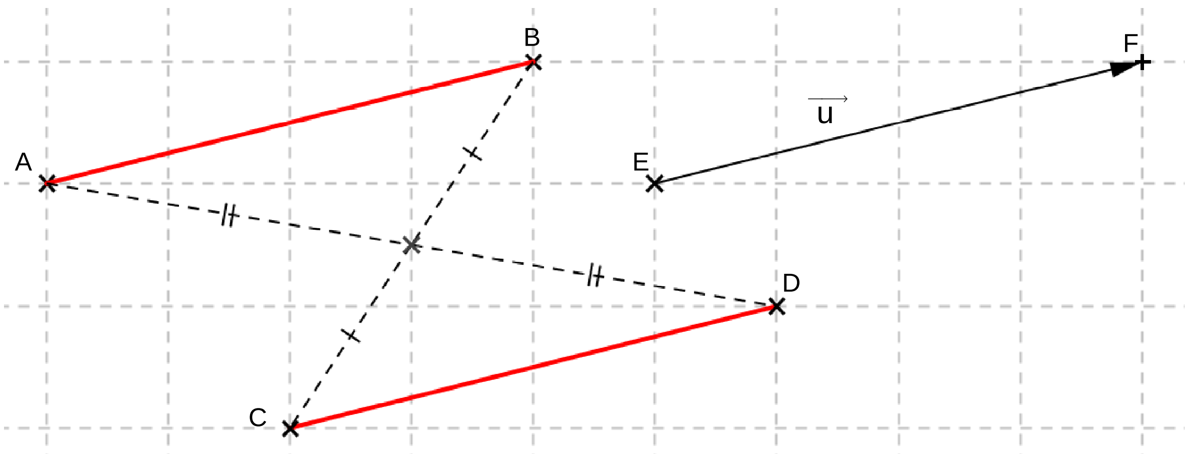
Ex :

ABDC est un parallélogramme ! (attention à l'ordre des points)



b) notion de vecteur :

Le vecteur permet de définir une translation. Il doit donc préciser un sens, une direction, une longueur. On le représente sous forme de segment fléché.



La **translation** qui transforme **A en B** est la **translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$**
E est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{EF}$
F est l'**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{EF}$

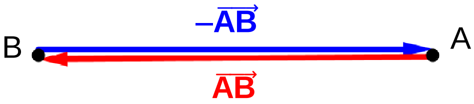
> $\overrightarrow{EF}$ a pour direction celle de (EF), pour sens celui de A vers B, pour longueur AB !. On peut le noter par une seule lettre, $\overrightarrow{u}$ par exemple.

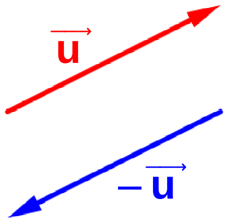
► Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ caractérisent la même translation que $\overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs égaux.

> On peut dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\overrightarrow{u}$

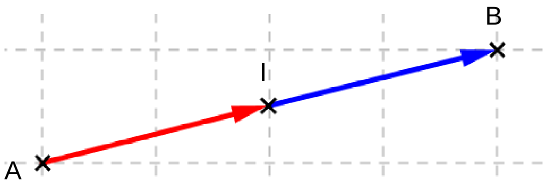
► Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AA}$. C'est le vecteur nul. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

► Le **vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$** est le vecteur associé à la translation transformant B en A.
On le note **$-\overrightarrow{AB}$**. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$





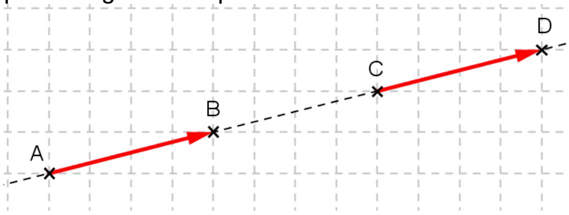
► Le point **I** est **le milieu du segment [AB]** si, et seulement si, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

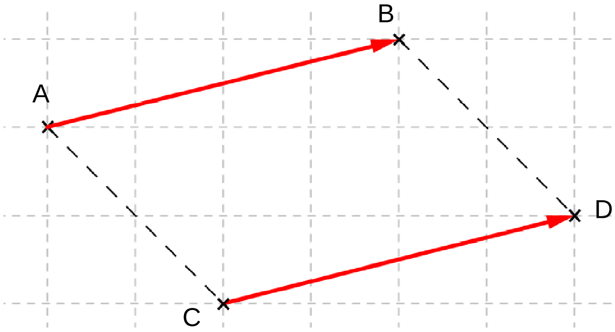


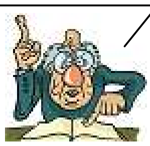
b) vecteurs égaux :

définition : Soient A, B, C, D quatre points du plan avec A ≠ B.
Les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux** si, et seulement si, **ABDC** est **un parallélogramme**.

> Si A, B, C, D sont alignés; ABDC sera un parallélogramme aplati !





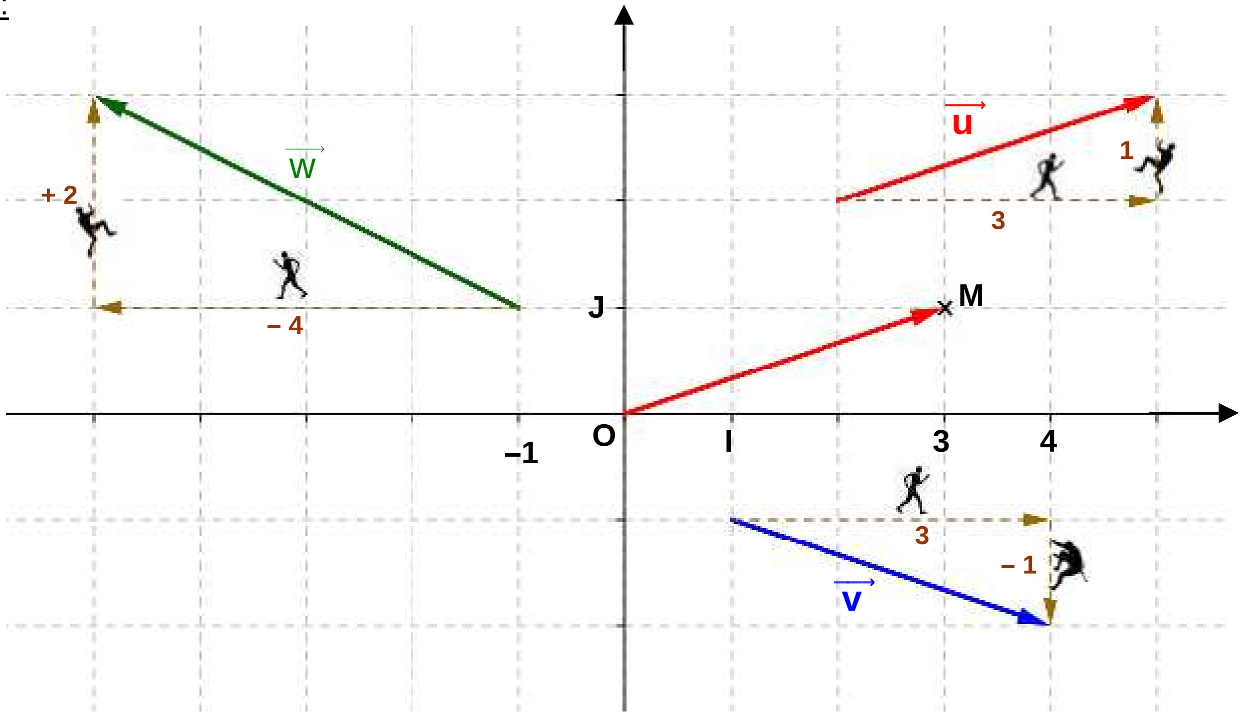


II) Coordonnées d'un vecteur :

définition : Dans un repère (O; I; J); **les coordonnées du vecteur $\vec{u}$** sont les **coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$**
Les **coordonnées** du vecteur nul $\vec{0}$ sont **(0;0)**

le **repère (O;I;J)** est également souvent noté (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

Ex :



Les coordonnées de $\vec{u}$ sont **(3;1)**, celles de $\vec{v}$ sont **(3;–1)** et celles de $\vec{w}$ sont **(– 4;2)**

propriété : Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs **coordonnées** dans un repère sont **égales**.

Soient $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x ',y') dans un repère (O,I,J)

$\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si $x = x'$ et $y = y'$

► ***démonstration***

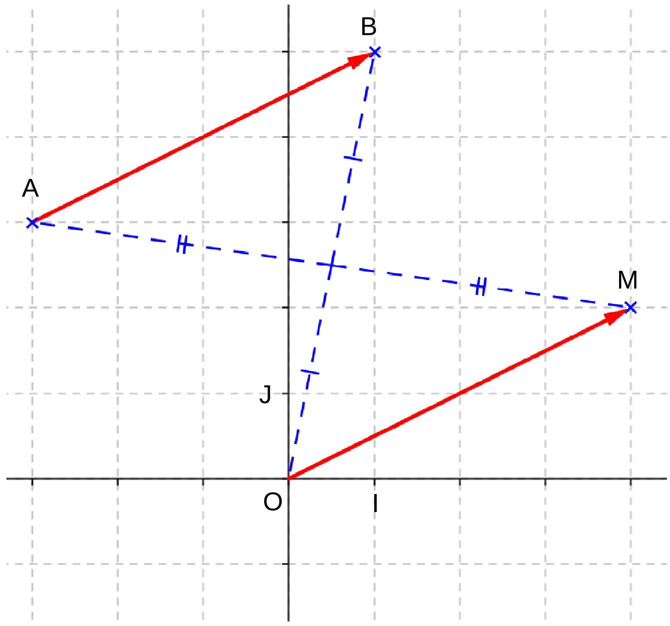
- Si $\vec{u} = \vec{v}$, il existe un unique point M (x_M;y_M) tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u} = \vec{v}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées que celles de M : $\begin{cases} x = x_M = x' \\ y = y_M = y' \end{cases}$

- Réciproquement, si deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont tels que $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ (avec M de coordonnées (x;y)) donc $\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{OM}$

<u>propriété :</u> Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère.
Les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A;y_B - y_A)$

► ***démonstration***
Par définition,
il existe un unique point $M(x_M;\, y_M)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles du point M.



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
donc OMBA est un parallélogramme
par suite [AM] et [OB] ont le même milieu .
cela se traduit par :

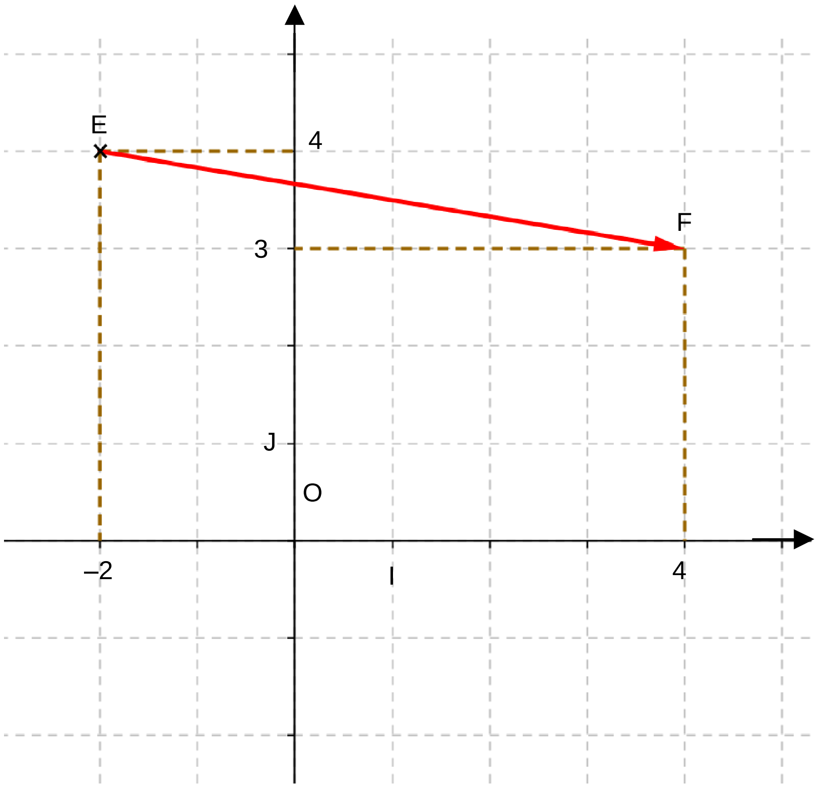
$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{0 + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{0 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A;y_B - y_A)$

<u>Ex :</u>

E a pour coordonnées (–2;4)

F a pour coordonnées (4;3)



Les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ sont :

$(x_F - x_E;y_F - y_E)$

$= (4 - (-2);3 - 4)$

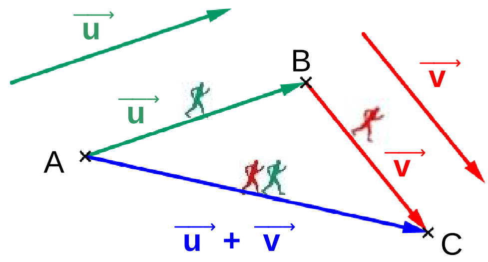
$= (4 + 2;\ 3 - 4)$

$= (6\ ;\ -1)$

Dans un repère (O;I;J), le **vecteur nul** $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ a pour coordonnées **(0;0)** !

II) Somme de deux vecteurs :

définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La **somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est **le vecteur associé** à la translation ayant les mêmes effets que **la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de celle de vecteur $\vec{v}$**
On le note $\vec{u} + \vec{v}$



Par translation de vecteur $\vec{u}$, A a pour image B
Par translation de vecteur $\vec{v}$, B a pour image C
C est l'image de du point A par translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

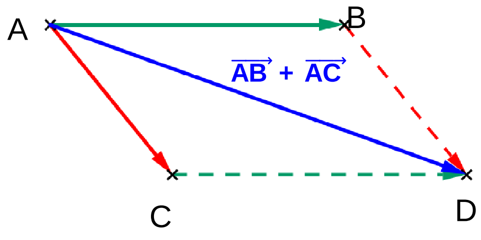
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

relation de Chasles :
D'après ce qui précède,
Quels que soient les points A, B, C du plan, on a l'égalité :

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

propriété : la règle du parallélogramme
Soient A, B, C trois points distincts du plan,

La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$
si, et seulement si, **ABDC** est un **parallélogramme**



► ***démonstration***

- Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et ABDC est un parallélogramme

- Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ alors,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (en utilisant la relation de Chasles)

propriétés *(admises)*:

Je peux changer l'ordre des termes, les grouper indifféremment, la somme des vecteurs ne changera pas !

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

propriété *(admise)*:

Dans un repère, si les coordonnées de $\vec{u}$ sont (x, x') et celles de $\vec{v}$ sont (y, y') alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' \,;\, y + y')$

Les coordonnées de la somme sont la somme des coordonnées !

Ex : Soient $\vec{u}(-4 \,;\, 3)$ et $\vec{v}\,(5 \,;\, -2)$

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(-4 + 5 \,;\, 3 + (-2))$ soit **(1 ; 1)**

III) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

définition : Soient $\vec{u}$ $(x \,;\, y)$ un vecteur et **k** un nombre réel.
Le vecteur $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx \,;\, ky)$

$k\,\vec{u}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

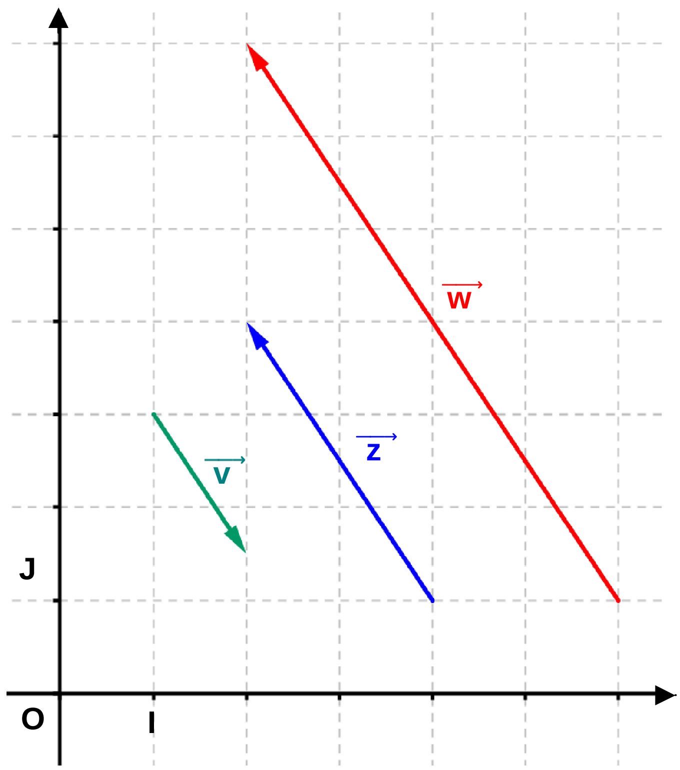
Ex :
Soient $\vec{z}(-2 \,;\, 3)$, $\vec{w}\,(-4 \,;\, 6)$, $\vec{v}\,(1 \,;\, -1{,}5)$

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\,\vec{z}$$

$$\vec{w} = 2\,\vec{z}$$

Si k est positif, $k\,\vec{u}$ a le même sens et la même direction que $\vec{u}$
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{w}$)

Si k est négatif, $k\,\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ mais est de sens contraire
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{v}$)



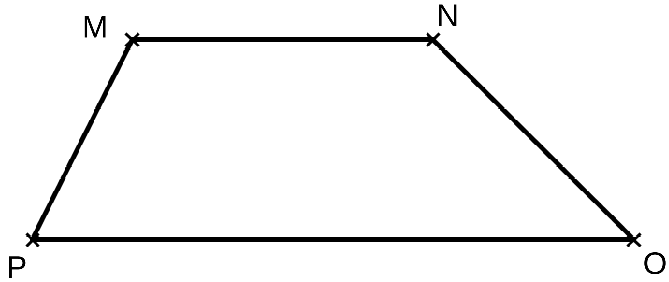
<u>définition</u> : Deux vecteurs non nuls $\vec{AB}$ **et** $\vec{CD}$ sont dit **colinéaires** si $\vec{AB}$ **et** $\vec{CD}$ ont **la même direction.**

> Cela revient à dire que (AB) et (CD) sont parallèles !

<u>Ex :</u> Soit le trapèze MNOP de bases [MN] et [OP]

$\vec{MN}$ et $\vec{PO}$ sont colinéaires

> $\vec{MN}$ et $\vec{OP}$ sont aussi colinéaires !!



<u>définition</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel **k** tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

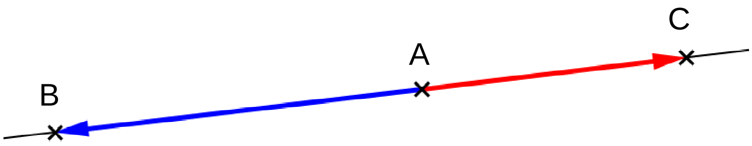
> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe donc également un nombre réel **k'** tel que $\vec{u} = k'\vec{v}$!
>
> Par exemple, si $\vec{v} = 3\vec{u}$ alors $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$!!

► Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. $0\vec{u} = \vec{0}$

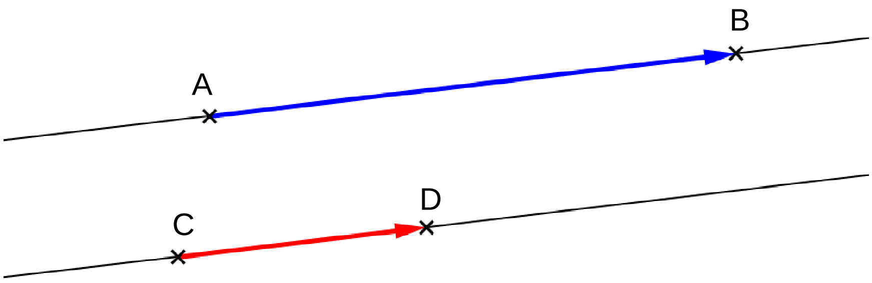
<u>propriétés admises :</u>

- Trois points **A, B, C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ **et** $\vec{AC}$ sont **colinéaires**.

> A, B, C sont alignés revient en effet à dire que les droites (AB) et (AC) sont confondues (donc parallèles) !!



- Deux droites **(AB) et (CD) sont parallèles** si, et seulement si, $\vec{AB}$ **et** $\vec{CD}$ **sont colinéaires.**



règles de calcul :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$; pour tous réels k et k' on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Ex :

- $4(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF}) = 4\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{EF}$
- $3\overrightarrow{AB} – 6\overrightarrow{AB} = (3 – 6)\overrightarrow{AB} = –3\overrightarrow{AB}$
- $–8(5\overrightarrow{AB}) = –40\overrightarrow{AB}$

propriété : Deux vecteurs **$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires** si, et seulement si,
$xy' - x'y = 0$

► ***justification***

Supposons que $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ soient **colinéaires**.
Il existe alors un nombre réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.
Les **coordonnées des vecteurs** sont donc **proportionnelles**.

On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

coordonnées de $\vec{u}$	x	y
coordonnées de $\vec{v}$	x'	y'

On a donc $xy' = x'y$ (règle des produits en croix)

Par suite, $xy' - x'y = 0$

Ex :

- $\vec{u}(3;–2)$ et $\vec{v}(–9;6)$ sont colinéaires car 3 x 6 – (–2) x (– 9) = 18 – 18 = 0
- $\vec{w}(3;2)$ et $\vec{z}(6;5)$ ne sont pas colinéaires car 3 x 5 – 2 x 6 = 3