

Repères dans le plan - configurations planes

I) Repères dans le plan :

a) notion de repère dans un plan :

Définition : Un repère est constitué d'un point origine, de deux droites orientées et graduées (axes).

Dans le repère (O; I; J) ci-contre,

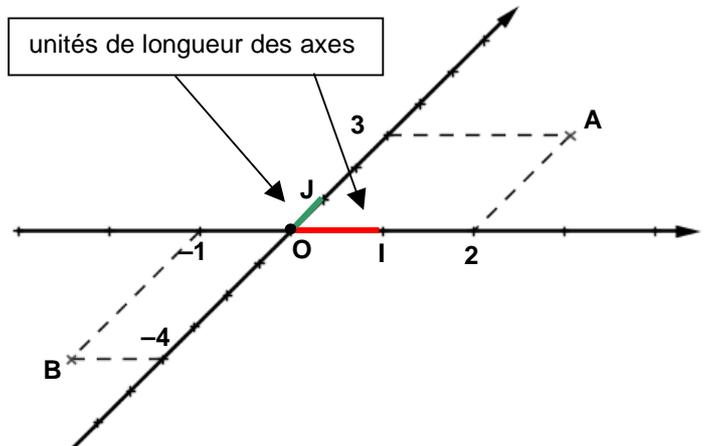
- O est l'origine du repère
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées

un point est repéré par un couple de nombres appelées **coordonnées** :

- l'abscisse (lue sur la droite graduée (OI))
- l'ordonnée (lue sur la droite (OJ))

Ex : Dans le repère ci-dessus le couple de coordonnées de A est (2;3)

On peut écrire **A : (2;3) B : (-1; -4)**

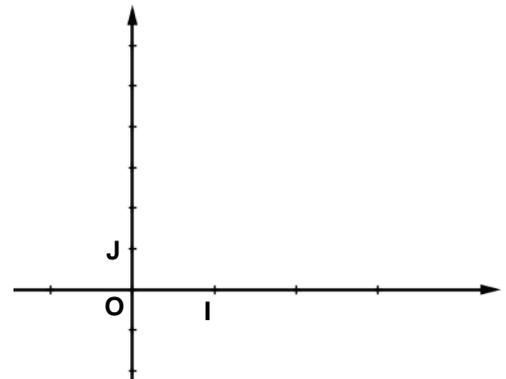


Pour obtenir l'abscisse A, je trace la parallèle à (OJ) passant par A. Pour obtenir l'ordonnée, je trace la parallèle à (OI) passant par A. Dans un couple de nombres, l'ordre a de l'importance. J'écris en premier l'abscisse !



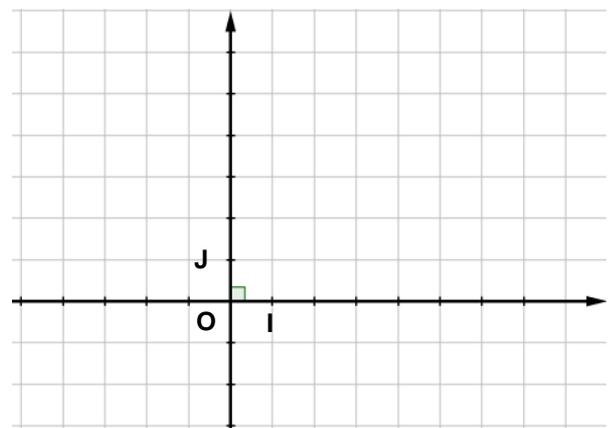
b) repère orthogonal - repère orthonormé :

définition : Un **repère orthogonal** est un repère du plan (O;I,J) tel que **(OI) ⊥ (OJ)**



définition : Un **repère orthonormé** est un repère du plan (O;I,J) tel que **(OI) ⊥ (OJ)** et **OI=OJ**

Le repère est orthogonal et les axes ont la même unité de longueur !



c) coordonnées du milieu d'un segment :

propriété (admise) : Soient dans un repère quelconque du plan deux points; A:(x_A ; y_A) et B:(x_B ; y_B)

Les **coordonnées du milieu** I:(x_I ; y_I) du segment [AB] sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

II) Distance entre deux points :

propriété : Dans un repère orthonormé, la distance AB entre deux points A:(x_A ; y_A) et B:(x_B ; y_B) est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

► **démonstration**

Soient deux points A:(x_A ; y_A) et B:(x_B ; y_B) dans un repère orthonormé (O;I;J)

On place le point C (x_B ; y_A) tel que **ABC soit un triangle rectangle**.

- Si $x_B > x_A$ alors $AC = x_B - x_A$
- Si $x_B < x_A$ alors $AC = x_A - x_B$

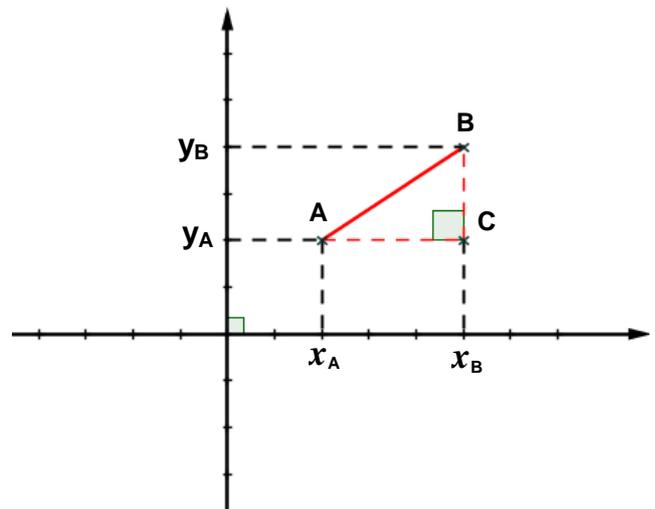
dans les deux cas, **$AC^2 = (x_B - x_A)^2$**

De la même façon, on a **$BC^2 = (y_B - y_A)^2$**

D'après **le théorème de Pythagore** dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

donc **$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$**



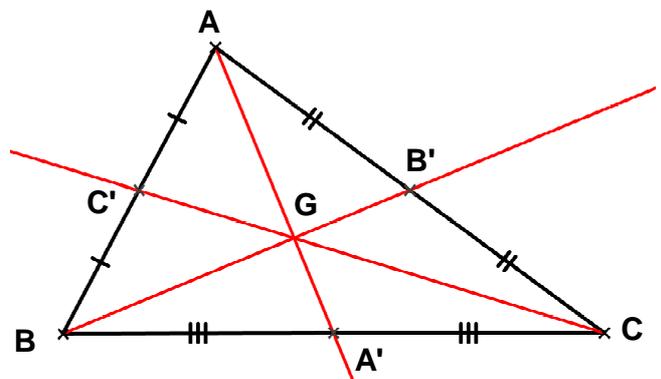
III) Configurations du plan :

a) les triangles :

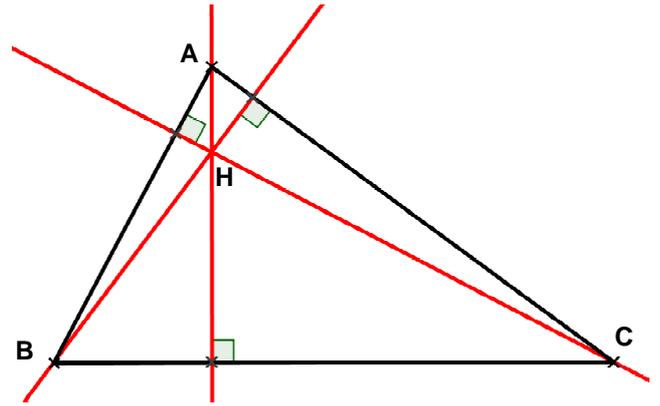
propriétés s'appliquant à tous les triangles :

► les **médianes** sont **concurrentes en un point G** appelé **centre de gravité du triangle**. G est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet dont elle est issue

$$AG = \frac{2}{3}AA' \qquad BG = \frac{2}{3}BB' \qquad CG = \frac{2}{3}CC'$$

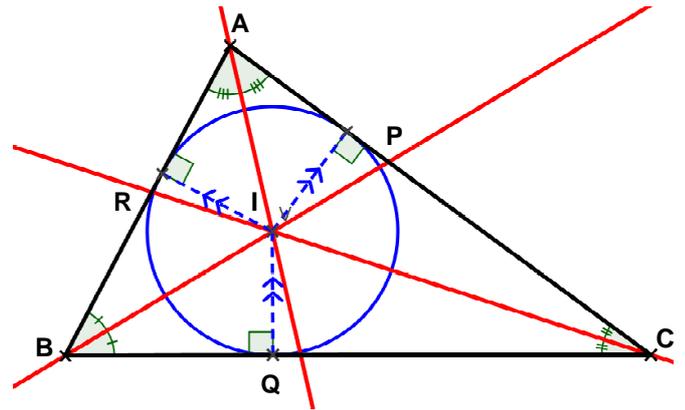


► les hauteurs sont concourantes en un point **H** appelé **orthocentre** du triangle.

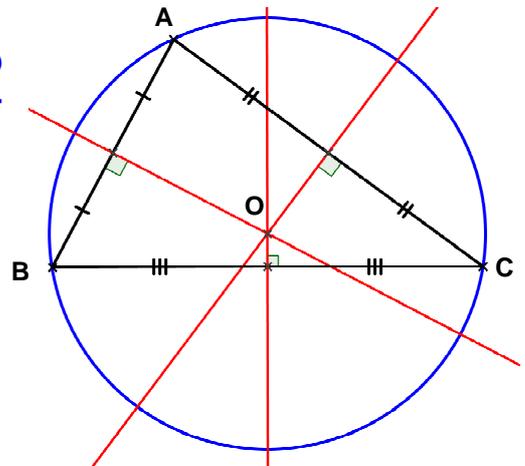


► les bissectrices sont concourantes en un point **I** équidistant des côtés du triangle. **I** est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

$$IP = IQ = IR$$



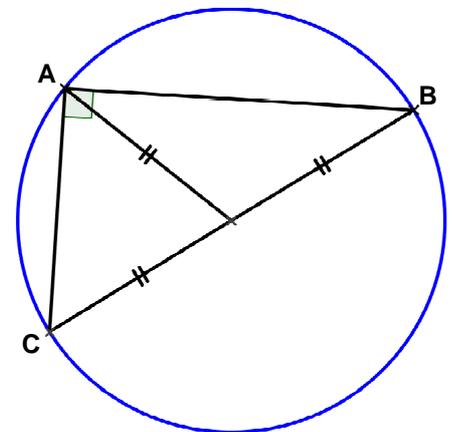
► les médiatrices sont concourantes en un point **O** équidistant des sommets du triangle. **O** est le **centre du cercle circonscrit** au triangle.



Propriétés s'appliquant au triangle rectangle :

► Si un triangle ABC est rectangle en A alors l'**hypoténuse** [BC] est un **diamètre** du cercle circonscrit
la réciproque est vraie

Si un **diamètre du cercle circonscrit** à un triangle ABC est un côté [BC] du triangle, alors **ce triangle est rectangle** en A.



► Si un triangle ABC est rectangle en A alors **le centre O** du cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse** [BC]

la réciproque est vraie

Si le **centre du cercle circonscrit** à un triangle ABC est le **milieu d'un de ses côtés** [BC] alors **ce triangle est rectangle en A**

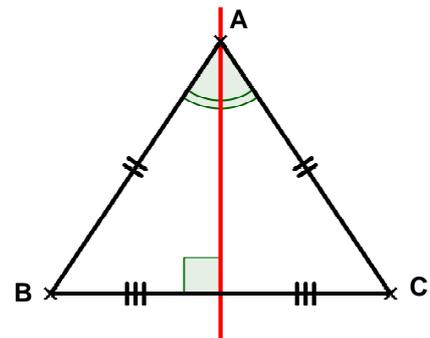
► Si un triangle ABC est rectangle en A alors la **médiane issue de A** a pour **longueur la moitié de celle de l'hypoténuse**

la réciproque est vraie

Si la médiane relative à un côté d' un triangle a **pour longueur la moitié de ce côté** alors **ce triangle est rectangle**. Ce côté est l'hypoténuse du triangle rectangle.

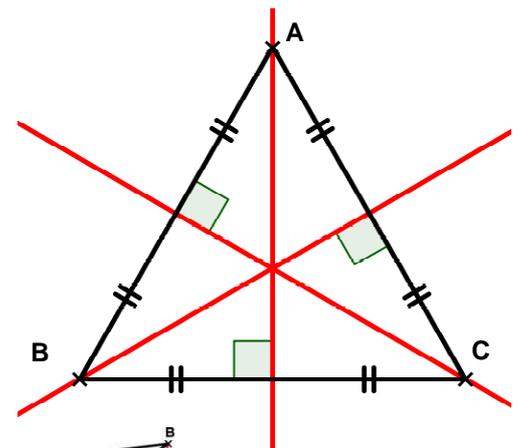
Propriété s'appliquant au triangle isocèle :

► Un **triangle isocèle** de sommet principal A possède un **axe de symétrie** : la **médiane issue de A** qui est aussi la **médiatrice relative à [BC]**, la **hauteur issue de A**, la **bissectrice de l'angle BAC**.



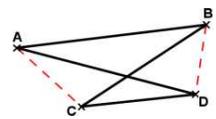
Propriété s'appliquant au triangle équilatéral :

► Un **triangle équilatéral** possède **3 axes de symétrie** : les **médiatrices de ses côtés**. L'**orthocentre**, le **centre de gravité**, le **centre du cercle circonscrit**, le **centre du cercle inscrit** sont **confondus**.



b) les quadrilatères :

rappel : voici un quadrilatère croisé ABCD !
(diagonales en pointillés rouge)



► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme**, il suffit de :

- **montrer que les côtés opposés sont parallèles**
(AB) // (CD) et (AD) // (BC)

OU

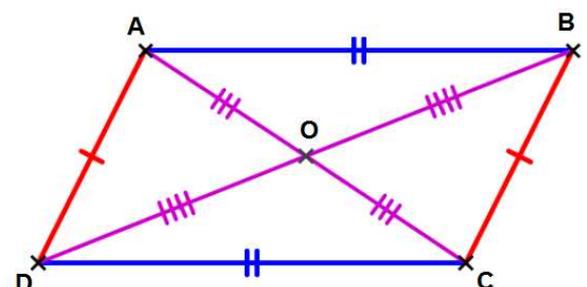
- **qu'il est non croisé et possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur**

(AB) // (CD) et AB = CD

OU

- **que les diagonales ont le même milieu O**

OA = OC et OB = OD



► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle**, il suffit de :

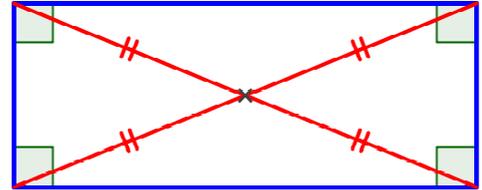
- montrer qu'il possède 3 angles droits

OU

- qu'il est un parallélogramme ayant un angle droit

OU

- que les diagonales ont la même longueur et se coupent en leur milieu



► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un losange**, il suffit de :

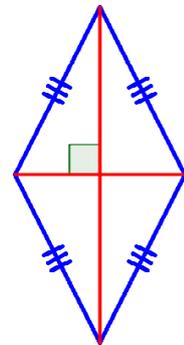
- montrer qu'il possède 4 côtés de même longueur

OU

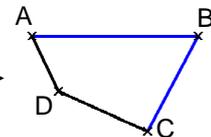
- qu'il est un parallélogramme possédant 2 côtés consécutifs égaux

OU

- qu'il est un parallélogramme possédant 2 diagonales perpendiculaires



rappel : deux côtés **consécutifs** se "suivent". Ici, [AB] et [BC] sont deux côtés consécutifs du quadrilatère !

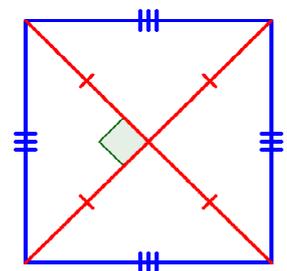


► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un carré**, il suffit de :

- qu'il est un parallélogramme possédant 2 côtés consécutifs perpendiculaires et égaux

OU

- qu'il est un parallélogramme possédant 2 diagonales perpendiculaires et de même longueur



Il suffit donc de montrer que le quadrilatère est **à la fois** un rectangle **et** un losange !