# Fonction inverse - Fonctions homographiques

## I) Fonction inverse :

rappel : Tout nombre réel $x$ **différent de 0** a un inverse $\frac{1}{x}$

Ex : L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$. L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ soit $\frac{4}{3}$

**définition** : **La fonction inverse** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Ex : $f(-3) = -\frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$ $f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{6}{7}$

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels sans 0. On le lit "$\mathbb{R}$ privé de zéro".
On peut aussi le noter à l'aide d'une réunion d'intervalles : $\mathbb{R}^* = ]-\infty\ ;\ 0[ \cup ]0\ ;\ +\infty[$

**théorème** : la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

- strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
- strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

► ***démonstration***

u et v sont deux nombres réels tels que **u<v**, c'est à dire **v–u>0**, comparons $f(u)$ et $f(v)$

u et v positifs : $u \in ]0; +\infty[$; $v \in ]0; +\infty[$

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc v – u > 0
donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels positifs u et v,
si u < v alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur ] 0 ; +∞ [

u et v négatifs : $u \in ]-\infty; 0[$; $v \in ]-\infty; 0[$

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc v – u > 0
donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels négatifs u et v,
si u < v alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur ] –∞ ; 0 [

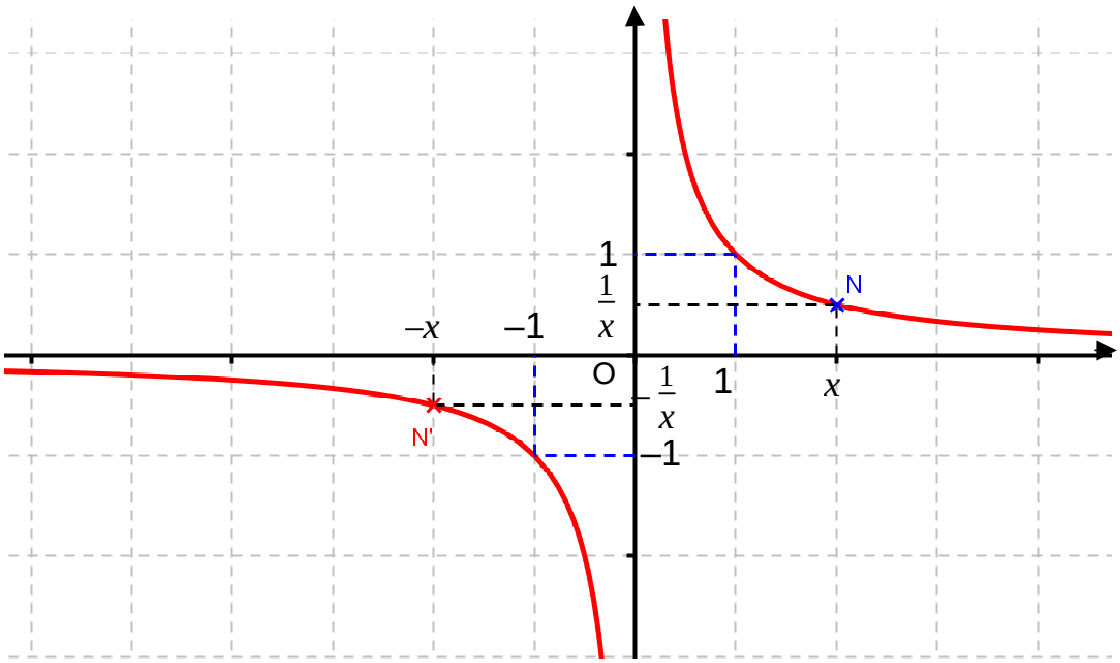
## Tableau de variations de la fonction inverse :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

La double barre indique que la fonction inverse n'est pas définie pour 0.

## Représentation graphique de la fonction inverse :

**définition** : Dans un repère, **la représentation graphique** de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **une hyperbole**.




**théorème** : Dans un repère d'origine O, la courbe de **la fonction inverse** admet **O comme centre de symétrie**.

► ***démonstration***

$x$ est un nombre réel non nul.

Le point N $(x; \frac{1}{x})$ appartient à l'hyperbole.Le point symétrique de N par rapport l'origine O du repère est N' $(-x; \frac{-1}{x})$

Or, N' appartient également à l'hyperbole puisque l'inverse de $-x$ est $\frac{-1}{x}$

## II) Fonctions homographiques :

**définition :** Soient a, b, c, d quatre nombres réels avec c≠0

Toute fonction $f$ qui peut s'écrire sous la forme $f : x \longmapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ est appelée **fonction homographique.** Sa courbe représentative est **une hyperbole**.

attention, la fonction est définie pour les valeurs de $x$ **n'annulant pas** le dénominateur !

Ex : la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x - 5}{3x + 2}$ est une fonction homographique.

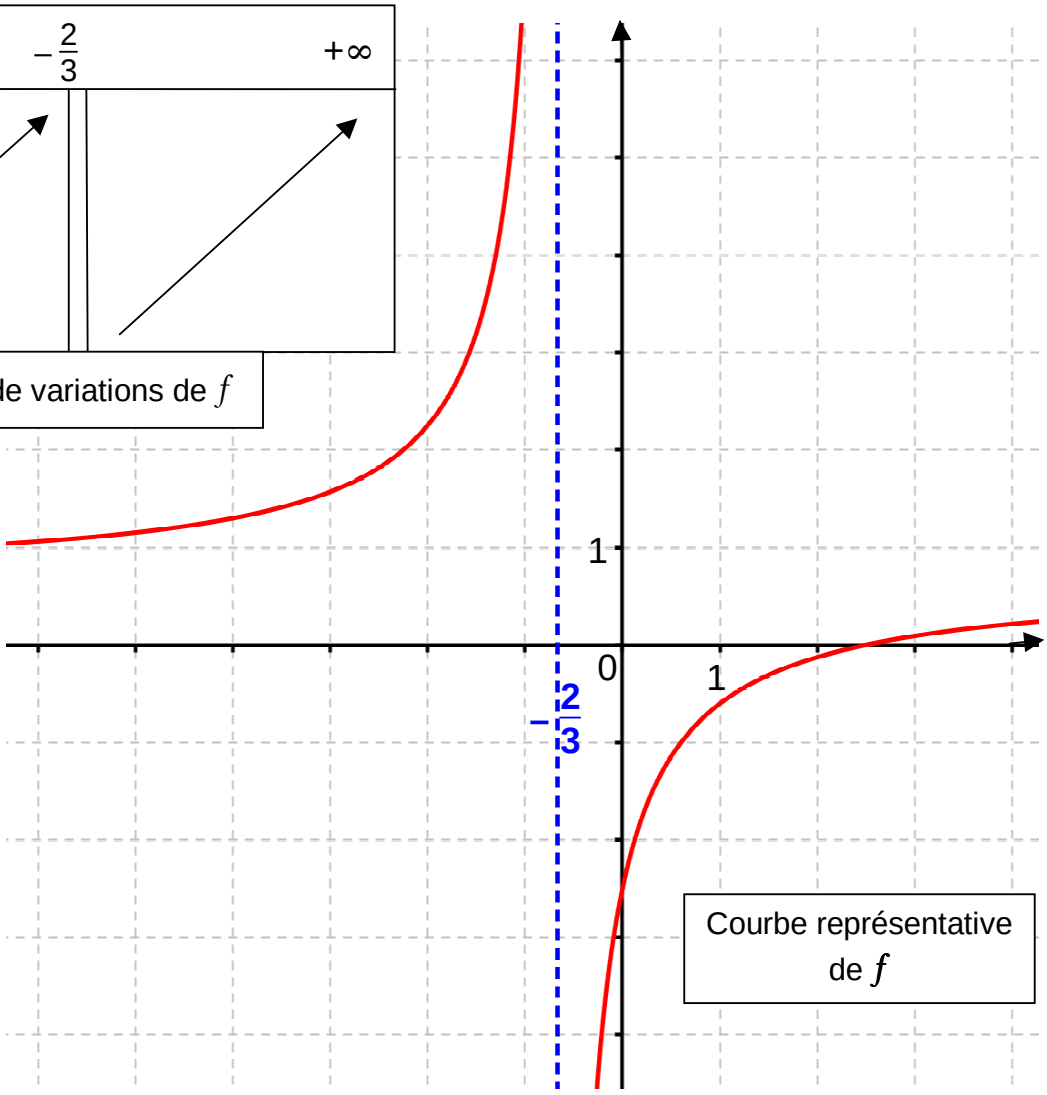
Elle est définie pour les nombres réels $x$ tels que $3x + 2 \neq 0$ soit $x \neq -\frac{2}{3}$

La fonction $f$ **est définie** sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{2}{3}[ \cup ]-\frac{2}{3} ; +\infty[$ ou $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$

$\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$ peut aussi s'écrire $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et se lit "$\mathbb{R}$ privé de $-\frac{2}{3}$"

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | ‖ | ↗ | |

Tableau de variations de $f$




Courbe représentative de $f$