Fonction carré - Fonctions polynômes du second degré

I) Fonction carré :

définition : **La fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

Tout nombre a un carré, f **est donc bien définie sur** $\mathbb{R}$

Ex : $f(-4) = (-4) \times (-4) = 16$ $\qquad f(5) = 25$

théorème : la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est :

▶ strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$

▶ strictement croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$

▶ ***démonstration***

u et v sont deux nombres réels tels que **u<v**, c'est à dire **u–v<0**, comparons f(u) et f(v)

u et v positifs : u ∈ [0; +∞ [; v ∈ [0; +∞ [	u et v négatifs : u ∈]–∞; 0]; v ∈ ∈]–∞; 0]
$f(u) - f(v)$ $= u^2 - v^2$ $= (u - v)(u + v)$ or, u<v donc $u - v < 0$ donc $(u - v)(u + v) < 0$ par suite, $f(u) - f(v) < 0$ donc $f(u) < f(v)$ ainsi, pour tous réels positifs u et v, si $u < v$ alors $u^2 < v^2$ La fonction carré est donc **croissante** sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$	$f(u) - f(v)$ $= u^2 - v^2$ $= (u - v)(u + v)$ or, u<v donc $u - v < 0$ donc $(u - v)(u + v) > 0$ par suite, $f(u) - f(v) > 0$ donc $f(u) > f(v)$ ainsi, pour tous réels négatifs u et v, si $u < v$ alors $u^2 > v^2$ La fonction carré est donc **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0\ ]$

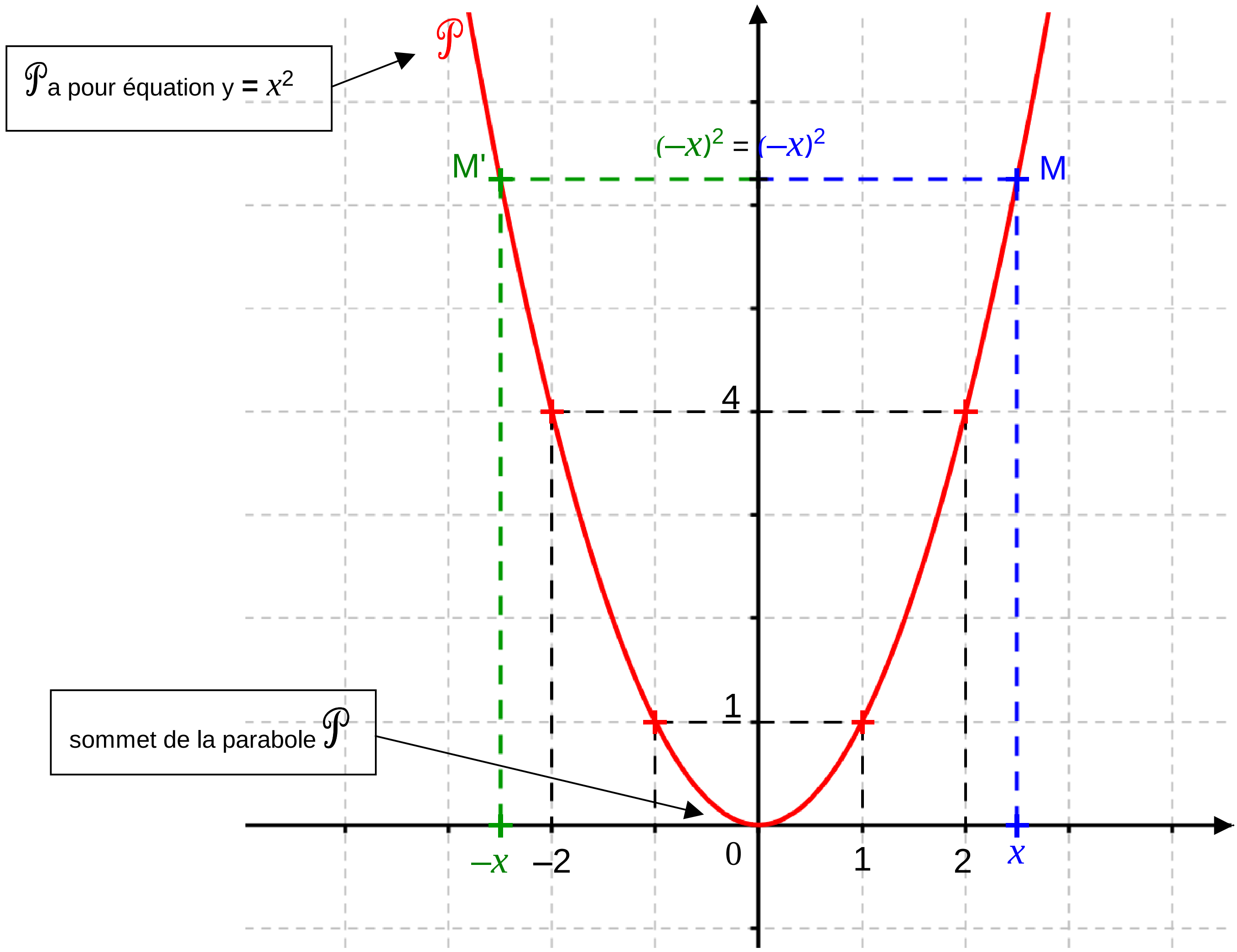
Tableau de variations de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

$f(0) = 0$. 0 est **le minimum** de la fonction carré.

Représentation graphique de la fonction carré :

définition : Dans un repère orthogonal d'origine O, **la représentation graphique** de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est **une parabole de sommet O**.



théorème : la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction carré admet un axe de symétrie : **l'axe des ordonnées**.

► ***démonstration***

x est un nombre réel.

Le point M (x; x^2) appartient à la parabole $\mathscr{P}$.

Le point symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est M' ($-x$; x^2)

Or, M' appartient également à $\mathscr{P}$ puisque $(-x)^2 = x^2$

donc $\mathscr{P}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

II) Fonctions polynômes de degré 2 :

définition : Une fonction **polynôme du second degré** (appelée aussi **trinôme**) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels avec a ≠ 0.

Ex :
▶ $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$ (a =–5; b=3; c=–1)
▶ $g(x) = 8x^2 + 7$ (a =8; b=0; c=7)
▶ $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$
en effet, $h(x) = (2x - 2)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8$ (a =2; b=6; c=–8)
▶ $m(x) = (2x - 3)^2 + 7$
en effet, $4x^2 - 12x + 9 + 7 = 4x^2 - 12x + 16$ (a =4; b=–12; c=16)

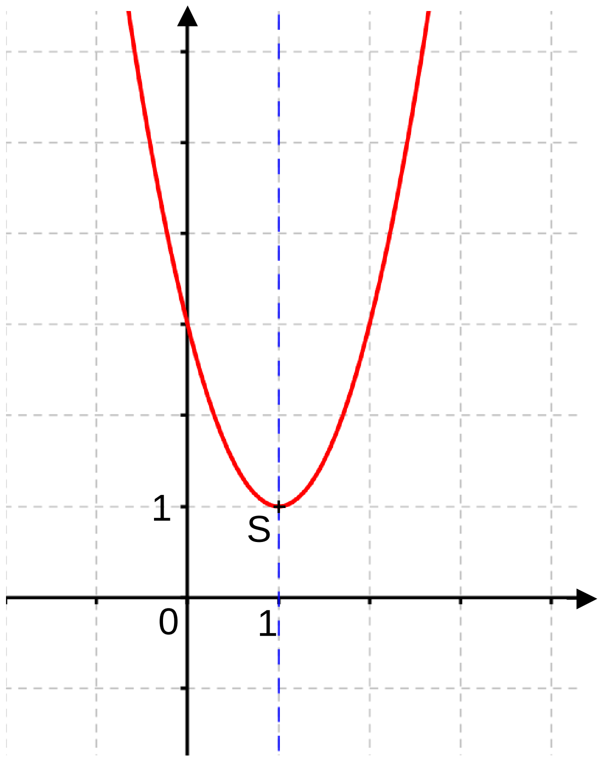
Représentation graphique - Sens de variation :

propriétés (admises) :
▶ La **représentation graphique** d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**. Appelons x_S l'abscisse du sommet S
▶ La parabole admet **un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées**. Le sommet de la parabole se situe sur l'axe de symétrie.
▶ La fonction est donc :

ou décroissante sur $]-\infty\ ; x_S]$ puis croissante sur $[x_S\ ; +\infty[$

ou croissante sur $]-\infty\ ; x_S]$ puis décroissante sur $[x_S\ ; +\infty[$

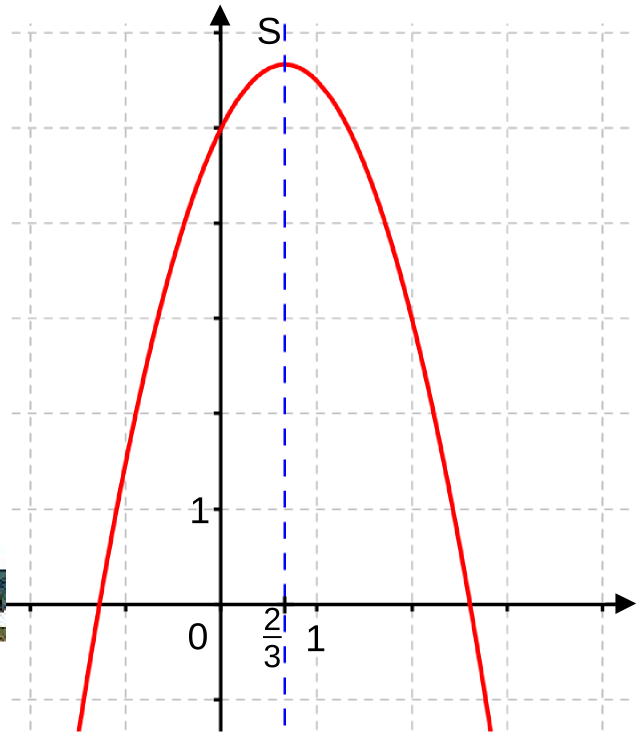
Ex : $f : x \longmapsto 2x^2 - 4x + 3$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

La parabole a l'allure d'une "vallée". Son **sommet** correspond au **minimum** de la fonction.
C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre positif.**

Ex : $f : x \longmapsto -1{,}5x^2 + 2x + 5$



x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘

La parabole a l'allure d'une "colline". Son **sommet** correspond au **maximum** de la fonction.
C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre négatif**.

propriété (admise) :

Soit une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$

Il existe deux nombres α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture est la **forme canonique de $f(x)$**

Ex :

► Si $g(x) = 3x^2 - 30x + 60$, la **forme canonique** s'écrit $3(x-5)^2 - 15$

vérifions le :

$3(x-5)^2 - 15 = 3(x^2 - 10x + 25) - 15 = 3x^2 - 30x + 75 - 15 = 3x^2 - 30x + 60$

► Si $h(x) = x^2 - 6x$, la **forme canonique** s'écrit $(x-3)^2 - 9$

vérifions le :

$(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$