

Droites

I) Caractérisation d'une droite :

a) équation d'une droite :

rappel : La représentation graphique de toute fonction affine est une droite.

la réciproque est-elle vraie ? Toute droite correspond-elle à la représentation graphique d'une fonction affine ?



propriété : Dans un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Tous les points $M(x; y)$ d'une droite d vérifient une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p désignent des réels.

► démonstration

Le plan est muni du repère $(O; I; J)$.

Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

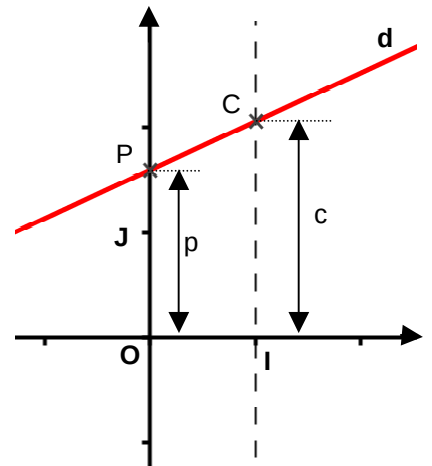
d coupe (OJ) en $P : (0; p)$. Elle coupe également la parallèle menée par I à l'axe des ordonnées en $C : (1; c)$.

Posons alors $m = c - p$. Considérons la fonction affine f définies par $f(x) = mx + p$

On a donc,

$$f(0) = p \text{ et } f(1) = m \times 1 + p = m + p = (c - p) + p = c.$$

donc C et P sont deux points de la représentation graphique f . Par suite, la droite d , passant par $P(0; p)$ et $C(1; c)$ est la représentation graphique de la fonction affine f et chaque point $M(x; y)$ vérifie donc l'équation $y = mx + p$



propriété : Dans un repère, une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = c$

► démonstration

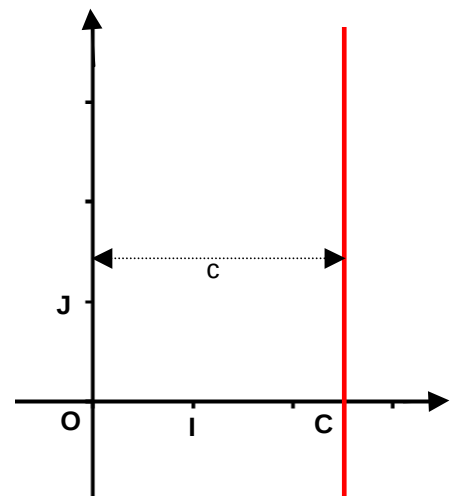
Le plan est muni du repère $(O; I; J)$.

Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

d coupe l'axe (OI) en $C : (c; 0)$.

Chaque point de d a donc pour abscisse c puisque d est parallèle à l'axe des ordonnées.

L'équation de d est donc $x = c$



b) coefficient directeur d'une droite :

rappel : Soit la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

La représentation graphique de la fonction affine f est la droite d'équation

$$y = mx + p.$$

m est le **coefficient directeur de la droite**.

p est l'ordonnée à l'origine de la droite.

propriété : Soit une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées et **m son coefficient directeur**.

Si $A:(x_A ; y_A)$ et $B:(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts de d alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

► **démonstration**

Soient deux points distincts : **A:(x_A ; y_A)** et **B:(x_B ; y_B)**

D'après les propriétés précédentes, la droite (AB), qui a une équation du type

$y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = mx + p$.

On a donc $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.

Donc, d'après la formule du coefficient directeur vu pour la fonction affine on a :

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

II) Position relatives de deux droites - Points alignés :

a) droites parallèles :

propriété : Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles** si et seulement si **$m = m'$**

► **démonstration**

rappel : On a vu en troisième que la droite représentant la fonction affine $f(x) = mx + p$ est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = mx$

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

Dans notre cas, d et d' sont donc parallèles si et seulement si les droites d'équations

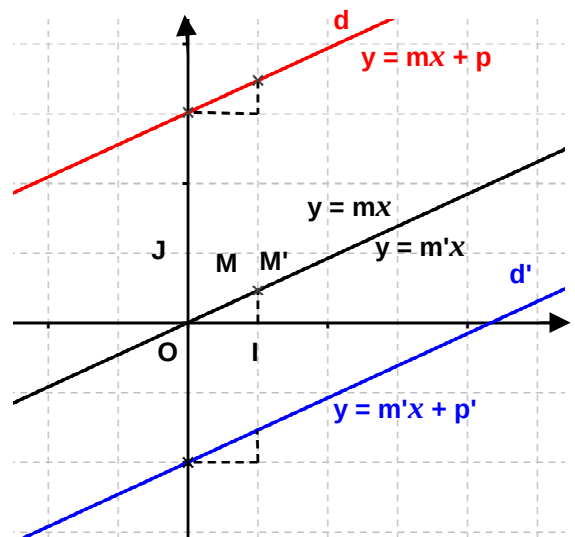
$y = mx$ et $y = m'x$ sont parallèles.

Ces deux droites passent par **O:(0 ; 0)**.

D'autre part,

la première passe par le point **M:(1 ; m)** et la seconde par le point **M':(1 ; m')**

donc d et d' sont parallèles si et seulement si M et M' sont confondus donc d et d' sont parallèles si et seulement si $m = m'$



b) droites sécantes:

propriété : Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont sécantes** si et seulement si **$m \neq m'$**

► **démonstration**

D'après la propriété précédente,

d et d' **sont parallèles** si et seulement si **$m = m'$**

donc d et d' **ne sont pas parallèles (donc sécantes)** si et seulement si **$m \neq m'$**

ce type de raisonnement repose sur la contraposition.

exemple :

la contraposée de l'expression (« s'il pleut, alors le sol est mouillé ») est (« si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »).

« s'il pleut, alors le sol est mouillé » donc « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »



c) points alignés :

propriété : Soient A, B, C trois points dont deux ont des abscisses différentes.

Les points **A, B, C sont alignés** si et seulement si les **droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**.

► **démonstration**

- Si **A, B, C** sont **alignés**, alors les droites **(AB) et (AC)** sont confondues donc parallèles et elles ont **le même coefficient directeur**.
- Réciproquement, si **(AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**, alors elles sont parallèles. Or, **elles ont un point commun A** donc (AB) et (AC) sont confondues. Par suite, **A, B, C** sont alignés.